

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ УФИЦ РАН

АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ БАШКОРТОСТАН

**УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2021**

**МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ
НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**

Том 2

г. Уфа, 6 – 9 октября 2021 г.

Уфа
Аэтерна
2021

УДК 517
ББК 22.1
У 88

Мероприятие проводится при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа и Академии наук Республики Башкортостан.

Печатается по решению Учёного совета факультета математики и информационных технологий Башкирского государственного университета.

Редакционная коллегия:

д.ф.-м.н. **З.Ю. Фазуллин** (отв. редактор);
д.ф.-м.н. **М.Г. Юмагулов**;
д.ф.-м.н. **Р.С. Юлмухаметов**;
д.ф.-м.н. **О.А. Кривошеева**;
А.С. Белова (отв. секретарь)

У 88 Уфимская осенняя математическая школа: Материалы международной научной конференции (г. Уфа, 6-9 октября 2021 г.). В 2 томах. Том 2 / отв. редактор З.Ю. Фазуллин. - Уфа: Аэтерна, 2021. - 274 с.

ISBN 978-5-00177-268-2 т.2

ISBN 978-5-00177-269-9

В предоставленных материалах конференции детально обсуждаются новейшие результаты и открытые проблемы в спектральной теории, нелинейном и комплексном анализе, дифференциальных уравнениях, математическом моделировании. Материалы сборника предназначены для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся указанными проблемами.

Организаторы конференции: Башкирский государственный университет, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (г. Уфа), НОМЦ Приволжского федерального округа, Академия наук Республики Башкортостан.

Благодарим компании, оказавших
конференции

поддержку



© Коллектив авторов, 2021

© БашГУ, 2021

© Оформление обложки ООО Аэтерна, 2021

Башкирский государственный университет совместно с Институтом математики с ВЦ УФИЦ РАН ежегодно, начиная с 2012 г., проводит международные научные конференции, основные тематики которых связаны со спектральной теорией, с нелинейным и комплексным анализом, дифференциальными уравнениями и математическим моделированием. Выбор таких направлений определялся как активной работой в указанных областях многих математиков из Башкортостана, взаимопроникновением идей и методов спектральной теории, нелинейного и комплексного анализа при решении многих актуальных задач в указанных областях, так и соответствующим сотрудничеством с коллегами из многих научных центров России и зарубежья.

В последние годы особенно активным стало сотрудничество в указанных областях математики с учеными из ряда научных и образовательных организаций Узбекистана, Казахстана и Таджикистана. Со многими организациями заключены соответствующие Договоры о научном сотрудничестве.

Важными событиями для конференции стали то, что начиная с 2020 г. в число организаторов конференции вошел Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа, а в 2021 г. - Академия наук Республики Башкортостан.

Начиная с 2019 г. конференция приобрела новый статус, преобразовавшись в "Уфимскую осеннюю математическую школу". Теперь, наряду с обсуждением новейших научных результатов и открытых проблем, важное место в работе конференции занимают обзорные лекции ведущих ученых для аспирантов и молодых ученых.

Научная программа конференции УОМШ-21 охватывает следующие направления:

- спектральная теория операторов;
- комплексный и функциональный анализ;
- нелинейные уравнения;
- дифференциальные уравнения и их приложения;
- математическое моделирование.

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

**«УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2021»**

**СЕКЦИЯ
«НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ»**

г. Уфа, 6 - 9 октября 2021 г.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

@ Г.Э. Абдурагимов

gusen_e@mail.ru

УДК 517.927

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.1.

Рассматривается двухточечная краевая задача для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка. С помощью специальных топологических средств получены достаточные условия, обеспечивающие существование по крайней мере одного положительного решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: положительное решение, краевая задача, конус.

On the existence of a positive solution to a boundary value problem for one nonlinear functional - differential equation of the second order

A two-point boundary value problem for one nonlinear functional differential equation of the second order is considered. With the help of special topological means sufficient conditions are obtained to ensure the existence at least one positive solution to the problem under study.

Keywords: positive solution, boundary value, cone.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + f(t, (Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = \int_0^1 a(s)x(s) ds, \quad (2)$$

где $a(t)$ — неотрицательная не возрастающая и суммируемая на $[0, 1]$ функция, причем $a(0) = 0$, $T: C \rightarrow \mathbb{L}_p$ ($1 < p < \infty$) — линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t, u)$ неотрицательна, возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Обозначим через \tilde{K} конус неотрицательных функций $x(t)$ пространства C , удовлетворяющих условию

$$x(t) \geq \|x\|_C \cdot \varphi(t),$$

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, к.ф.-м.н., доцент, ДГУ (Махачкала, Россия);
Gusen Abduragimov (Dagestan State University of Makhachkala, Russia)

где $\varphi(t) = \min(t, 1 - t)$.

Теорема. Предположим, что $T: C \rightarrow \mathbb{L}_p$ — положительный на конусе $[1, c.59]$ \tilde{K} оператор и выполнены условия

(2) $\psi(u) \leq f(t, u) \leq bu$, $t \in [0, 1]$, $u \geq 0$, где $b > 0$, $\psi(u)$ — такая неотрицательная неубывающая функция, что $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{u} = \infty$;

(1) $b\gamma < 1$, где γ — норма оператора $T: C \rightarrow \mathbb{L}_p$.

Тогда краевая задача (1)–(2) имеет по меньшей мере одно положительное решение.

Литература

1. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. — Физматгиз, М., 1962

**О ПОСТРОЕНИИ ЛЯПУНОВСКИХ ВЕЛИЧИН В ЗАДАЧЕ
О БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА-ХОПФА В СИСТЕМЕ
"РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ"**

@ Г.Р. Абушахмина
abushahmina@gmail.com

УДК 517.9

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.2.

Рассматривает построение Ляпуновских величин в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа в системе "реакция-диффузия".

Ключевые слова: бифуркация, Ляпуновские величины.

**On the construction of Lyapunov quantities in the
Andronov-Hopf bifurcation problem in the
reaction-diffusion system**

Considers the construction of Lyapunov quantities in the Andronov-Hopf bifurcation problem in the reaction-diffusion system.

Keywords: bifurcation, Lyapunov quantities.

Рассматривается система "реакция-диффузия" (см., [1,2]), описываемая дифференциальным уравнением

$$\frac{dw}{dt} = A(\mu)w + K(\mu)\Delta w + h(w, \mu), \quad (1)$$

с граничными условиями Неймана

$$\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

где $w = w(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$, $A(\mu) = [a_{ij}(\mu)]$, $K(\mu) = [k_{ij}(\mu)]$ – квадратные вещественные матрицы порядка 2, гладко зависящие от скалярного параметра μ , при этом $k_{ij}(\mu) > 0$; $K(\mu)$ – матрица диффузии; нелинейность $h(w, \mu)$ начинается с квадратичных по w слагаемых. Δ – это оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Уравнение (1) имеет нулевое решение $w \equiv 0$. В данном докладе изучаются вопросы о бифуркации Андронова-Хопфа в окрестности этого решения. Основное внимание уделяется нахождению достаточных условий указанной бифуркации, а также вопросу построения соответствующих ляпуновских величин.

Абушахмина Гульфия Ринатовна, ст.преподаватель, БГМУ (Уфа, Россия);
Gulfiya Abushakhmina (Bashkir State Medical University, Ufa, Russia)

Для целых m, n определим матрицы

$$B_{mn}(\mu) = A(\mu) - (m^2 + n^2)K(\mu) \quad (3)$$

и функции

$$\varphi_{mn}(\mu) = B_{mn}(\mu), \quad \psi_{mn}(\mu) = \det B_{mn}(\mu). \quad (4)$$

Теорема 1. Пусть при некоторых целых m_0, n_0 выполнены соотношения: $\varphi_{m_0 n_0}(\mu_0) = 0$, $\varphi'_{m_0 n_0}(\mu_0) \neq 0$ и $\psi_{m_0 n_0}(\mu_0) > 0$. Тогда μ_0 является точкой бифуркации Андронова-Хопфа задачи (1), (2).

При доказательстве этой теоремы обсуждаются вопросы построения ляпуновских величин и показателей транскритичности (см., [3]).

Литература

1. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. Пер. с англ. 1985. 280 с.
2. Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. 2010. 436 с.
3. Гусарова Н.И., Муртазина С.А., Фазлытдинов М.Ф., Юмагулов М.Г. Операторные методы вычисления ляпуновских величин в задачах о локальных бифуркациях динамических систем: // Уфимский математический журнал, 10:1 (2018), 25-49.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И БИФУРКАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

@ С.В. Акманова
svet.aktm_74@mail.ru

УДК 517.938

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.3.

В работе рассматривается общего вида непрерывно-дискретная динамическая система, задающаяся нелинейными уравнениями, и имеющая постоянный шаг дискретизации. Выявлены и доказаны условия асимптотической устойчивости нулевого решения такой системы, а также некоторые особенности её бифуркационного поведения.

Ключевые слова: непрерывно-дискретная система, собственные значения матрицы, точка равновесия, асимптотическая устойчивость, бифуркация.

Asymptotic stability and bifurcations of nonlinear continuous-discrete dynamical systems

The paper considers a general form of a continuous-discrete dynamic system, given by nonlinear equations, and having a constant discretization step. The conditions of asymptotic stability of the zero solution of such a system, as well as some features of its bifurcation behavior, are identified and proved.

Keywords: continuous-discrete system, matrix eigenvalues, the equilibrium point, asymptotic stability, bifurcation.

Рассматривается нелинейная непрерывно-дискретная система

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t_k)), \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k)), \end{cases} \quad (1)$$

где $x, y \in R^1$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $h = t_{k+1} - t_k > 0$, f, g - непрерывно дифференцируемые функции такие, что $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) = 0$. Величина $h > 0$ предполагается постоянной, т.е. не зависит от k .

Тогда система (1) имеет точку равновесия $x^* = y^* = 0$. Раскладывая по формуле Тейлора нелинейности $f(x, y)$, $g(x, y)$ в окрестности данной

Акманова Светлана Владимировна, к.п.н., доцент, Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И.Носова (Магнитогорск, Россия); Svetlana Akmanova (Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia)

точки равновесия, перейдём от (1) к равносильной системе

$$\begin{cases} x'(t) = a_1 x(t) + b_1 y_k + a(x(t), y_k), \\ y_{k+1} = a_2 x_{k+1} + b_2 y_k + b(x_{k+1}, y_k), \end{cases} \quad (2)$$

где $y_k = y(t_k)$, $x_k = x(t_k)$, $a_1 = f'_x(0, 0)$, $b_1 = f'_y(0, 0)$, $a_2 = g'_x(0, 0)$, $b_2 = g'_y(0, 0)$, $a(x, y) = O(|x|^2 + |y|^2)$, $b(x, y) = O(|x|^2 + |y|^2)$ при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.

Положим

$$A = \begin{bmatrix} e^{a_1 h} & b_1(e^{a_1 h} - 1)/a_1 \\ a_2 e^{a_1 h} & a_2 b_1(e^{a_1 h} - 1)/a_1 + b_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Справедлива

Теорема 1. Пусть собственные значения матрицы (3) по модулю меньше 1, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.

Если хотя бы одно собственное значение матрицы (3) по модулю больше 1, то нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Особое внимание в докладе уделим случаям, когда $a_1 < 0$ и $|b_2| < 1$. Тогда нулевые точки равновесия систем

$$x'(t) = a_1 x(t), \quad (4)$$

$$y_{k+1} = b_2 y_k, \quad (5)$$

асимптотически устойчивы (см., например, [1]). Однако при переходе от систем (4) и (5) к непрерывно-дискретной системе (2) может измениться характер устойчивости нулевых точек равновесия этих систем, что может привести к различным бифуркациям системы (2).

Для детального изучения особенностей бифуркаций системы (1) на основе системы (2) в окрестности точки $x^* = y^* = 0$ положим, что $a_1 = -1$ и $b_2 = \frac{1}{2}$, при этом в качестве бифуркационного параметра будем рассматривать величину h . Тогда с учётом [2, 3] справедливы

Теорема 2. Если $a_2 b_1 = \frac{1}{2}$, то любое значение $h > 0$ является точкой бифуркации положения равновесия системы (1), которая может быть реализована как транскритическая или как бифуркация типа вилки.

Теорема 3. Если $a_2 b_1 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1+e^{-h_0}}{1-e^{-h_0}}$ при некотором $h_0 > 0$, то точка h_0 является точкой бифуркации $2h_0$ -периодических решений системы (1).

Полученные результаты при соответствующей их модификации можно распространить на случай системы (1), когда

$$x \in R^n, \quad y \in R^m, \quad f: R^{n+m} \rightarrow R^n, \quad g: R^{n+m} \rightarrow R^m.$$

Литература

1. Юмагулов М. Г. Введение в теорию динамических систем. – СПб.: Лань, 2015. – 272.
2. Шильников Л. П., Шильников А. А., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009. – 548.
3. Юмагулов М. Г., Гусарова Н. И., Муртазина С. А., Фалытдинов М. Ф. Операторные методы вычисления ляпуновских величин в задачах о локальных бифуркациях динамических систем // Уфимский математический журнал. Том 10. №1. 2018. – 25-49.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С НАГРУЖЕННЫМИ ЧЛЕНАМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© Т.Ж. Алланазарова, Т.Г. Хасанов, А.У. Искандаров
j.tazagul1986@mail.ru, temur.xasanov.2018@mail.ru

УДК 517.957

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.4.

Метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженными членами и интегральным источником в классе бесконечнозонных периодических функций. Выводится эволюция спектральных данных периодического оператора Дирака, коэффициент которого является решением уравнения мКдФ с нагруженными членами и интегральным источником. Показано, что сумма равномерно сходящегося функционального ряда построенного с помощью решения аналога системы уравнений Дубровина и формула первого следа действительно удовлетворяет уравнения мКдФ с нагруженными членами и интегральным источником. Кроме того доказано, что

- 1) если начальная функция является действительной π - периодической аналитической функцией, то и решение задачи Коши для уравнения мКдФ с нагруженными членами и источником интегрального типа тоже является действительной аналитической функцией по переменной x ;
- 2) если число $\pi/2$ является периодом (антипериодом) начальной функции, то число $\pi/2$ является периодом (антипериодом) для решения задачи Коши по переменной x .

Ключевые слова: Дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера (ДНУШ), оператор Дирака, спектральные данные, система уравнений Дубровина, формулы следов.

Integration of the modified Korteweg-de Vries equation with loaded terms and an integral source in the class of periodic functions

Алланазарова Тазagul Жуманиязовна, ассистент кафедры "Прикладная математика КГУ (Нукус, Узбекистан); Allanazarova Tazagul (Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan)

Хасанов Темур Гафуржанович, аспирант УрГУ, (Ургенч, Узбекистан); Khasanov Temur (Urgench State University, Urgench, Uzbekistan)

Искандаров Аббосбек Улугбек угли, магистрант УрГУ, (Ургенч, Узбекистан); Iskandarov U.A. (Urgench State University, Urgench, Uzbekistan)

The inverse spectral problem method is used to integrate the modified Korteweg-de Vries equation with loaded terms and an integral source in the class of infinite-gap periodic functions. The evolution of the spectral data of the periodic Dirac operator is derived, the coefficient of which is a solution to the mKdV equation with loaded terms and an integral source. It is shown that the sum of a uniformly converging functional series constructed using the solution of an analogue of the Dubrovin system of equations and the formula for the first trace does indeed satisfy the mKdV equation with loaded terms and an integral source. Moreover, it was proved that

1) if the initial function is a real π - periodic analytic function, then the solution of the Cauchy problem for the mKdV equation with loaded terms and a source of integral type is also a real analytic function in the variable x ;

2) if the number $\pi/2$ is the period (antiperiod) of the initial function, then the number $\pi/2$ is the period (antiperiod) for solving the Cauchy problem with respect to the variable x .

Keywords: Defocusing nonlinear Schrodinger equation (DNUSH), Dirac operator, spectral data, system of Dubrovin equations, trace formulas.

В данной работе рассматривается задача Коши для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженными членами и источником вида

$$q_t = a(t)q(x_0, t)[6q^2q_x - q_{xxx}] + b(t)q(x_1, t)q_x + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda, t)s_1(\pi, \lambda, t)(\psi_1^+\psi_1^- - \psi_2^+\psi_2^-)d\lambda, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad x \in R \quad (2)$$

в классе действительных π - периодических по x (не обязательно конечноразмерных) функций

$$q(x + \pi, t) = q(x, t) \in C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0). \quad (3)$$

В уравнение (1), коэффициенты $a(t), b(t) \in C[0, \infty)$ - заданные ограниченные функции, а $x_0, x_1 \in R$ и $\beta(\lambda, t)$ - действительная непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику

$$\beta(\lambda, t) = \underline{O}(\lambda^{-2}), \quad \lambda \rightarrow \pm\infty.$$

$\psi^\pm = (\psi_1^\pm(x, \lambda, t), \psi_2^\pm(x, \lambda, t))^T$ являются решениями Флоке (нормированными условием $\psi_1^\pm(0, \lambda, t) = 1$) уравнение Дирака

$$L(t) \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x, t)y = \lambda y, \quad x \in R \quad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & q(x, t) \\ q(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Через $s(x, \lambda, t) = (s_1(x, \lambda, t), s_2(x, \lambda, t))^T$ обозначено решение уравнение (4), удовлетворяющее начальным условиям $s(0, \lambda, t) = (0, 1)^T$.

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $q(x, t)$, $\psi^\pm(x, \lambda, t)$, $x \in R$, $t > 0$ задачи (1)-(3), с помощью обратной спектральной задачи для оператора Дирака.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Если $q(x, t)$, $\psi^\pm(x, t, \lambda)$, $x \in R$, $t > 0$ является решением задачи (1)-(3), то спектральные данные $\lambda_n(\tau, t)$, $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z$ - оператора Дирака*

$$L(\tau, t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x + \tau, t) \\ q(x + \tau, t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина

$$\dot{\lambda}_n(\tau, t) = 0, \quad n \in Z, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} &= 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \{ -2\xi_n a(t) q(x_0, t) [q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) + 2\xi_n^2(\tau, t)] - \\ &- b(t) \xi_n q(x_1, t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n(\tau, t) \beta(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, \tau, t)}{\xi_n^2(\tau, t) - \lambda^2} d\lambda \}, \quad n \in Z \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}.$$

Знаки $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z$ меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau, t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in Z \quad (8)$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z$ спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau) \equiv L(\tau, 0)$.

Следствие 1. Учитывая формулы следов

$$q^2(\tau, t) + q'_\tau(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right),$$

$$q(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)) \quad (9)$$

систему (7) можно переписать в замкнутой форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = & 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) \left\{ a(t) \xi_n(\tau, t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \sigma_k(x_0, t) h_k(\xi(x_0, t)) \cdot \right. \\ & \cdot \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k(\tau, t)) + 4\xi_n^2(\tau, t) \right] + \\ & + b(t) \xi_n(\tau, t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \sigma_k(x_1, t) h_k(\xi(x_1, t)) + \\ & \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n(\tau, t) \beta(\lambda, t) s_1(\pi, \lambda, \tau, t)}{\xi_n^2(\tau, t) - \lambda^2} d\lambda \right\}, \quad n \in Z. \quad (10) \end{aligned}$$

Следствие 2. Эта теорема дает метод решение задач (1)-(3). Для этого, сначала найдем спектральные данные $\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in Z$, оператора Дирака $L(\tau, 0)$ соответствующие коэффициенту $q_0(x+\tau)$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau, t)$, через $\lambda_n, \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in Z$. Теперь в систему уравнение (10) и начальным условиям (8) последовательно положим $\tau = x_0$ и $\tau = x_1$. Решая полученную задачу Коши, находим

$$\xi_n(x_0, t), \sigma_n(x_0, t), n \in Z \text{ и } \xi_n(x_1, t), \sigma_n(x_1, t), n \in Z.$$

Затем из формулы следов (9) определим функции $q(x_0, t)$ и $q(x_1, t)$. После этого подставляем эти данные в систему уравнение (7), и решая задачу Коши (7), (8) при произвольном значении τ , находим

$$\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in Z.$$

Из формулы следов (9) определим $q(\tau, t)$. После этого легко найти решения Флоке $\psi^\pm(x, \lambda, t)$ уравнения $L(0, t)y = \lambda y$.

Литература

1. Gardner C., Green I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteveg-de Vries equation. // Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p.1095-1098.

2. *Wadati M.* The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation. // J.Phys.Soc.Japn., 32:6,44-47(1972).
3. *Смирнов А. О.* Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. // Матем. сб., 185:8(1994), с.103-114.
4. *Mel'nikov V.K.* Integration of the Korteweg-de Vries equation with a source. // Inverse problems, 6:2(1990), 233-246.
5. *Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б.* Об уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций. ТМФ, 164 (2), 214-221 (2010).
6. *Хасанов А.Б., Матякубов М.М.* Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза с дополнительным членам. // ТМФ, т.203, №2, (2020), 192-204.
7. *Khasanov A.B., Allanazarova T.J.* Integration of the nonlinear modified Korteweg-de Vries equation with a loaded term. Uzbek Mathematical Journal, 2020, выпуск 3, 85-98.

NLS EQUATION WITH COMPLEX POTENTIAL: MODES AND PSEUDO-MODES

@ G.L. Alfimov, A.O. Slobodyanyuk, D.A. Zezyulin
galfimov@yahoo.com

УДК 517.957.6

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.5.

Недавно Ю. Коминис и соавторы [Хаос, солитоны и фракталы, bf 118, 222-233 (2019)] предположили, что нелинейное уравнение Шрёдингера (NLS) с комплексным потенциалом вида $W(x) = W_1(x) + iCW_{1,x}(x)$, поддерживает непрерывные семейства локализованных нелинейных мод. Здесь $C \in \mathbf{R}$ и $W_1(x)$ - действительный и ограниченный дифференцируемая функция. Мы называем эти потенциалы *W-dW-потенциалами* и подробно изучаем нелинейные режимы для NLS с W-dW-потенциалом. Мы показываем, что (i) эти режимы существуют только для малые амплитуды потенциала W-dW и являются только приближенными (*псевдомоды*); (ii) несмотря на этот факт, они устойчивы и демонстрируют динамику, которая описывается коллективным координатным подходом.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шрёдингера, нелинейные режимы, диссипация, четно-временная симметрия.

Recently Y. Kominis and coauthors [Chaos, Solitons and Fractals, **118**, 222-233 (2019)] have suggested that Nonlinear Schrödinger Equation (NLS) with complex potential of the form $W(x) = W_1(x) + iCW_{1,x}(x)$, supports the continuous families of localized nonlinear modes. Here $C \in \mathbf{R}$ and $W_1(x)$ is a real-valued and bounded periodic, quasiperiodic, etc.) differentiable function. We call these potentials *W-dW potentials* and study in detail the nonlinear modes for NLS with W-dW potential. We show that (i) these modes exist only for small amplitudes of W-dW potential and are approximative only (*pseudo-modes*); (ii) in spite of this fact, they are robust and exhibit the dynamics that is described by the collective coordinate approach.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation, nonlinear modes, dissipation, parity-time symmetry.

There are two cases when the nonlinear Schrödinger equation (NLSE) with an external complex potential $W(x)$,

$$i\Phi_t = -\Phi_{xx} + W(x)\Phi \pm 2|\Phi|^2\Phi, \quad (1)$$

The work is supported by Russian Science Foundation (Grant No. 20-11-19995.)
Georgy Alfimov, PhD, MIET University (Moscow, Russia), professor;
Alexander Slobodyanyuk, MIET University (Moscow, Russia), master student;
Dmitry Zezyulin, PhD, ITMO University, (St-Petersburg, Russia), postdoc;

supports continuous families of localized stationary modes of the form

$$\Phi(x, t) = \phi(x)e^{i\mu t}, \quad \mu \in \mathbf{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = 0.$$

They are (i) the \mathcal{PT} -symmetric potentials and (ii) the Wadati potentials. Recently Y. Komins and coauthors, [1], have suggested that the continuous families can be also found for complex potentials of the form

$$W(x) = W_1(x) + iCW_{1,x}(x),$$

where C is an arbitrary real and $W_1(x)$ is a real-valued and bounded differentiable function.

For brevity, we call these potentials *W-dW potentials*. The results of our study for NLS with W-dW potentials are as follows.

(A) If W-dW potential is small (of order $\varepsilon \ll 1$) our asymptotic procedure stops at the terms of the ε^2 order. So we conjecture that no continuous families of authentic nonlinear modes exist in this case, but *pseudo-modes* that satisfy the equation up to ε^2 -error can indeed be found.

(B) For a W-dW potential well of finite depth we support the hypothesis of the point (A) with numerical arguments.

(C) The simulation of dynamics of the pseudo-modes show that if the amplitude of W-dW potential is small, the pseudo-modes are robust and display persistent oscillations around the certain position predicted by the asymptotic expansion.

(D) We found the authentic stationary modes of (1) which do not form a continuous family, but exist as isolated points. Numerical simulations reveal dynamical instability of these stationary modes.

The details of our study can be found in [2].

Литература

1. Y. Komins, J. Cuevas-Maraver, P. G. Kevrekidis et al, Continuous families of solitary waves in non-symmetric complex potentials: A Melnikov theory approach, *Chaos, Solitons & Fractals* **118**, 222, (2019).

2. D.A. Zezyulin, A.O. Slobodyanyuk, G.L. Alfimov, On existence of continuous families of stationary nonlinear modes for a class of complex potentials, arXiv:2104.11920.

АНАЛИЗ И СРАВНЕНИЕ ПОВЕДЕНИЙ РЕШЕНИЙ КУСОЧНО-НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

@ М.К. Арабов

cool.araby@mail.ru

УДК 517.91

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.6.

В работе приводится сравнение поведений решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Получены новые условия для коэффициентов нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка которые обеспечивают устойчивость в целом его решений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, периодическое решение, устойчивость в целом, предельный цикл.

ANALYSIS AND COMPARISON OF SOLUTION BEHAVIOR PIECE-NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

The paper compares the behavior of solutions to nonlinear differentials general equations of the second order. New conditions for the coefficients of nonlinear differential equations of the second order that provide stability in the whole of its solutions.

Keywords: differential equation, periodic solution, stable overall, limit cycle

Отметим, что особое место в теории “негладких” систем занимают задачи о дифференциальных уравнениях, содержащих кусочно-линейные функции и, в частности, функции типа модуля [1-3]. Так, многие теоретические и практические задачи приводят к необходимости рассмотрения квазилинейных автономных систем:

$$y'' + ay' + by = \varphi(x, x', \lambda), \quad (1)$$

где a, b, c, λ - некоторые числа, а функция $\varphi(y, y')$ -непрерывно дифференцируемая и ограниченная, то есть существует $M > 0$, такая что

$$\sup_{(y, y')} |\varphi(y, y')| < M.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Республики Таджикистан (проект № 0117ТJ00807).

Арабов Муллошараф Курбонвич, доцент кафедры информатики и ИТ, РТ-СУ (Душанбе, Таджикистан); Arabov Mullosharaf Kurbonovich (Russian tajik slavonik University, Dushanbe, Tajikistan)

В частности, к системе вида (1) приводят дифференциальные уравнения второго порядка вида[1-2]:

$$y'' + ay' + by = c|y - \lambda|, \quad (2)$$

$$y'' + ay' + by = c|y' - \lambda|, \quad (3)$$

Как видно, уравнения (2) и (3) похожи друг на друга, но их решения имеют разное поведение. Например, для уравнения (2) существует предельный цикл, а для уравнения (3) такого поведения решений нет[2].

В работе [1] исследуется уравнение вида (2). И с помощью аналитических и компьютерных методов установлено что для него существует предельный цикл.

В рамках данной работы исследуем устойчивость решений уравнений вида [2].

Вводя обозначения $x_1 = x$, $x_2 = x'$ от уравнения (3) перейдем к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -ax_2 - bx_1 - c|x_1 - \lambda|. \end{cases} \quad (4)$$

Стационарные решения (особые точки) системы (4) лежат на прямой $(x_1, 0)$, $x_1 \in R$ и определяются как решения уравнения

$$bx_1 + c|x_1 - \lambda| = 0$$

Теорема 1. Пусть $\lambda \neq 0$, $a > 0$ и $b - |c| > \frac{a^2}{4}$, тогда стационарные решения уравнения (2) устойчивы в целом.

Прежде чем привести доказательство этой теоремы в виде отдельных лемм сформулируем и докажем некоторые общие свойства уравнения (2) или системы (4).

Лемма 1. Если уравнение (2) имеет периодическое решение, отличное от стационарного решения, при некотором значении $\lambda = \lambda_0 > 0$ ($\lambda = \lambda_0 < 0$), то оно имеет периодическое решение, отличное от стационарного, при любом $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$).

Лемма 2. Пусть $a > 0$ и $b > |c| + \frac{a^2}{4}$. Тогда если нестационарное периодическое решение $y(t)$ уравнения (2) существует, то оно удовлетворяет условиям

$$\max_t y(t) > \lambda, \quad \min_t y(t) < -\frac{c\lambda}{b-c}.$$

при $\lambda > 0$ и условиям

$$\min_t y(t) < \lambda, \quad \max_t y(t) > \frac{c\lambda}{b+c},$$

если $\lambda < 0$.

Аналогичным образом для доказательства теоремы 1 приведем несколько теорем посредством которых доказывается теорема 1.

Литература

1. *Мухамадиев Э.М., Нуров И.Д., Халилова М.Ш.* Предельные циклы кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка.- Уфимский математический журнал 2013. №4. С. 74-84.

2. *Арабов М.К., Шарифзода З.И.* Об устойчивости в целом особой точки кусочно-линейных уравнений второго порядка // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. - Душанбе: Дониш, 2017. - № 1/1. - С. 37-43

3. *Ахмедов Дж.Т.* О периодическом и ограниченном решении нелинейного уравнения второго порядка с фазовыми портретами // Докл. НАН Таджикистана, **63**:9-10 (2020), 579-585.

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СУММАРНЫМИ ЯДРАМИ

@ С.Н. Асхабов

askhabov@yandex.ru

УДК 517.968

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.7.

Рассмотрена система неоднородных интегральных уравнений вольтерровского типа с суммарными ядрами и степенной нелинейностью, возникающих при решении некоторых задач гидроаэродинамики и других. В связи с указанными приложениями разыскиваются неотрицательные непрерывные на положительной полуоси решения этой системы. Методом весовых метрик доказана глобальная теорема о существовании и единственности решения во всем классе непрерывных неотрицательных на положительной полуоси функций.

Ключевые слова: интегральные уравнения, степенная нелинейность, суммарные ядра.

On a system of nonlinear inhomogeneous integral equations with sum kernels

A system of inhomogeneous integral equations of the Volterra type with sum kernels and power nonlinearity arising in the solution of some problems of hydroaerodynamics and others is considered. In connection with the indicated applications, nonnegative solutions of this system that are continuous on the positive semiaxis are sought. A global theorem on the existence and uniqueness of a solution in the entire class of continuous non-negative functions on the positive semiaxis is proved by the method of weighted metrics.

Keywords: integral equations, power nonlinearity, sum kernels.

В связи с приложениями в гидроаэродинамике, популяционной генетике и других (см., например, [1], [2]), в конусе

$$Q_{0,n} = \{u : u = \{u_i\}_{i=1}^n, u_i \in C[0, \infty) \text{ и } u_i(x) > 0 \text{ при } x > 0\}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках реализации государственного задания в соответствии с Соглашением № 075–03–2021–071 от 29.12.2020.

Асхабов Султан Нажмуудинович, д.ф.-м.н., профессор, ЧГУ имени А.А. Кадырова (Грозный, Россия); Sultan Askhabov (Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia)

разыскиваются решения системы нелинейных интегральных уравнений

$$u_i^\alpha(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^x k_{ij}(x+t) \cdot u_j(t) dt + f_i(x), \quad \alpha > 1, \quad x > 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где ядро $k(x) = \{k_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ и неоднородность $f(x) = \{f_i(x)\}_{i=1}^n$ удовлетворяют на $[0, \infty)$ условиям:

$$k_{ij} \in C[0, \infty), \quad k_{ij}(x) \text{ не убывают и } k_{ij}(x) > 0 \text{ при } x > 0, \quad (2)$$

$$f_i \in C[0, \infty), \quad f_i(x) \text{ не убывают и } f_i(0) \geq 0. \quad (3)$$

При условиях (2) и (3) получены точные двусторонние априорные оценки для любого решения системы (1) в конусе $Q_{0,n}$. Используя эти априорные оценки построен конусный отрезок инвариантный относительно нелинейного интегрального оператора с суммарным ядром, порожденным системой уравнений (1). При дополнительном условии, связывающем α , k_{ij} и f_i , методом весовых метрик (см., например, [1], [2, глава IV]) доказана глобальная теорема о существовании и единственности решения системы уравнений (1) в конусе $Q_{0,n}$. Показано, что на любом отрезке $[0, b]$, где $b > 0$ есть произвольное число, решение системы уравнений (1) может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа и получена оценка скорости их сходимости к точному решению в терминах метрики построенного в данной работе полного весового метрического пространства. Тем самым обобщаются результаты работы [3] на случай систем нелинейных неоднородных интегральных уравнений с суммарными ядрами.

Литература

1. *Okrasinski W.* Nonlinear Volterra equations and physical applications // Extracta Math., 4:2 (1989), 51–74.
2. *Асхабов С.Н.* Нелинейные уравнения типа свертки. — М.: Физматлит, 2009.
3. *Асхабов С.Н.* Об одном интегральном уравнении с суммарным ядром и неоднородностью в линейной части // Дифференц. уравнения, 57:9 (2021), 1210–1219.

К ВОПРОСУ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

@ Дж.Т. Ахмедов, И.Дж. Нуров
jovidon-a.90@mail.ru, nid1@mail.ru

УДК 517.91

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.8.

В работе исследуются вопросы о существовании периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Получены новые условия возникновения периодических решений. Использованы методы функционального анализа, как гомотопия и вращения вполне непрерывных векторных полей.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, периодическое решение, гомотопия, вращение векторных полей.

On the question of periodic solutions of a second-order nonlinear differential equation

The paper investigates questions about the existence of periodic solutions of nonlinear second-order differential equations. New conditions for the emergence of periodic solutions are obtained. Methods of functional analysis are used, such as homotopy and rotation of completely continuous vector fields.

Keywords: differential equation, periodic solution, homotopy, rotation of vector fields.

Настоящий доклад посвящен анализу периодических решений системы нелинейного дифференциального уравнения вида

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -g(x_1, x_2) + f(t, x_1, x_2). \quad (1)$$

где функция $g(y, z)$ - непрерывна и положительно однородна первого порядка: $g(\lambda y, \lambda z) = \lambda g(y, z)$, $\lambda > 0$, а $f(t, y, z)$ -непрерывная функция, определенная при всех значениях t, y, z и удовлетворяющая условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sup_{t, |y|+|z| \leq r} |f(t, y, z)| = 0. \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Республики Таджикистан (проект № 0117TJ00807).

Ахмедов Джовидон Толибович, старший преподаватель, ТНУ (Душанбе, Таджикистан); Jovidon Ahmedov (Tajik national University, Dushanbe, Tajikistan)

Нуров Исхокбой Джумаевич, д.ф.-м.н., профессор, ТНУ (Душанбе, Таджикистан); Iskhokboi Nurov (Tajik national University, Dushanbe, Tajikistan)

Следует отметить, что отыскание T -периодических решений системы (1) эквивалентно нахождению решений системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(T) + \int_0^t x_2(s)ds, \\ x_2(t) &= x_2(T) - \int_0^t [g(x_1(s), x_2(s)) - f(s, x_1(s), x_2(s))]ds. \end{aligned} \quad (3)$$

в пространстве $C[0, T]$ – непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций. Наряду системой (3) рассмотрим системы[1]

$$x_1(t) = x_1(T) + \int_0^t x_2(s)ds, \quad x_2(t) = x_2(T) - \int_0^t g(x_1(s), x_2(s))ds. \quad (4)$$

В этом пространстве рассмотрим семейство вполне непрерывных векторных полей $\Phi(x, \lambda) = x(t) - A(x(t), \lambda)$, где

$$\begin{aligned} A(x(t), \lambda) &= (x_1(T) + \int_0^t x_2(s)ds, \\ & x_2(T) - \int_0^t [g(x_1(s), x_2(s)) - \lambda f(s, x_1(s), x_2(s))]ds), \end{aligned}$$

зависящее от параметра $\lambda \in [0, 1]$. Нули поля $\Phi(x, 1)$ совпадают с решением системы (3), а $\Phi(x, 0) = x(t) - Ax(t)$, $Ax(t) = A(x(t), 0)$.

Лемма 1. Пусть система (4) не имеет ненулевых решений. Тогда векторное поле $\Phi(x, 1)$, соответствующее системе интегральных уравнений (3), не имеет нулей на сфере $S(R)$ достаточно большого радиуса R и для его вращения $\gamma(\Phi(\cdot, 1), S(R))$ справедливо равенство $\gamma(\Phi(\cdot, 1), S(R)) = \gamma(\Phi(\cdot, 0), S(R)) = \text{ind}(\Psi, \theta)$, где

$$\Psi x = (-T \cdot x_2, \quad T \cdot g(x_1, x_2)) \quad x \in E^2.$$

Лемма 2. Пусть $g(1, 0) \cdot g(-1, 0) < 0$. Тогда $\text{ind}(\Psi, 0) = (\text{sign}g(1, 0) - \text{sign}g(-1, 0))/2$.

Теорема 1. Пусть $g(1, 0) \cdot g(-1, 0) < 0$ и кроме того системы (4) не имеет ненулевых решений. Тогда уравнение (1) имеет T -периодическое решение для любой функции $f(t, y, z)$ удовлетворяющей условию (2).

Заметим, что, если $g(1, 0) \cdot g(-1, 0) \neq 0$, то для существования T -периодических решений уравнения (1) при любой функции f удовлетворяющей условию (2) условие $g(1, 0) \cdot g(-1, 0) < 0$ необходимо. Действительно, если $g(1, 0) \cdot g(-1, 0) > 0$, то для функции $f(t, y, z) \equiv -g(1, 0)/(1+|y|)$, которая, очевидно, удовлетворяет условию (2), уравнение (1) не имеет периодических решений.

Если функция $g(x, y)$ удовлетворяет условию $g(1, 0) \cdot g(-1, 0) > 0$, то в множестве функций $f(t, y, z)$, удовлетворяющих условию (2), можно выделить подмножество, для которого существует ненулевое T -периодическое решение уравнения (1). Для простоты изложения ограничимся рассмотрением функции, удовлетворяющей условию (2) и при некоторых $a > 0$, $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \max_{|y|, |z| \leq 1, t} \left| \frac{f(t, ry, r^{1-\sigma} z)}{r^\alpha} - ay|y|^{\alpha-1} \right| = 0, \quad \sigma = (1 + \alpha)/2. \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть система (4) не имеет ненулевых решений и $g(1, 0) \cdot g(-1, 0) > 0$, а функция $f(t, y, z)$ удовлетворяет условию (2) и при некоторых $a > 0$, $0 < \alpha < 1$ условию (5). Тогда уравнение (1) имеет по крайней мере одно ненулевое T -периодическое решение.

Литература

1. Ахмедов Дж.Т. О периодическом и ограниченном решении нелинейного уравнения второго порядка с фазовыми портретами // Докл. НАН Таджикистана, **63**:9-10 (2020), 579-585.

INTEGRATION OF THE DISCRETE SINE-GORDON EQUATION WITH A SELF-CONSISTENT SOURCE

@ B.A. Babajanov, A.K. Babadjanova, A.Sh. Azamatov
a.murod@mail.ru, oygul@bk.ru, azizbek.shavkatovich@gmail.com

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.9.

This work is devoted to the application of the inverse scattering theory for integration of the discrete Sine-Gordon equation with a self-consistent source.

Keywords: discrete sine-Gordon equation, self-consistent source, discrete Dirac-type operator, scattering data, inverse scattering method

Hirota showed the integrability of discrete version of the sine-Gordon equation and found its Lax pair, Backlund transformations and N-soliton solutions [1]. In [2] generalization of Hirota's discretization scheme for the sine-Gordon equation was considered. The soliton solutions are obtained by extending the generalized inverse method [3] and the related linear spectral problem for the discrete sine-Gordon equation was studied in [4].

It needs to point out the sG equations and its close allies are valued in the investigation of a great variety of diverse fields[5], such as the study of surfaces with constant negative curvature, or integrable surfaces [6], elementary particle physics, quantum optics, Josephson junctions [7], nonlinear excitations in condensed matter physics[8], vortex structures in fluids and plasmas [9].

This study investigated the integration of the discrete sine-Gordon(sG) equation with a self-consistent source via the inverse scattering method.

The first investigation of the soliton equations with self-consistent sources has been considered in [10] and still attracts considerable attention in recent years [11-13, see also their reference].

We consider the following system of equations

$$\dot{\theta}_{n+1} - \dot{\theta}_n = 2(\sin \theta_{n+1} + \sin \theta_n) + \sum_{k=1}^N (f_{1,n+1}^k f_{1,n}^k + f_{2,n+1}^k f_{2,n}^k), n \in Z, \quad (1)$$

$$\theta_n(t)|_{t=0} = \theta_n^0, n \in Z, \quad (2)$$

Babajanov Bazar Atajanovich, DSc, Dotsent, Urgench State University, (Urgench, Uzbekistan);

Babadjanova Oygul Komiljanovna, PhD, Urgench State University, (Urgench, Uzbekistan);

Azamatov Azizbek SHavkatovich, PhD student, Urgench State University, (Urgench, Uzbekistan);

$$L_n(z_k, t) f_n^k = f_{n+1}^k, n \in Z \quad (3)$$

where $L_n(z, t) = zP_n(t) + \frac{1}{z}Q_n(t)$, $P_n(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta_n(t) & \sin \theta_n(t) \\ \sin \theta_n(t) & 1 - \cos \theta_n(t) \end{pmatrix}$,

$$Q_n(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta_n(t) & -\sin \theta_n(t) \\ -\sin \theta_n(t) & 1 + \cos \theta_n(t) \end{pmatrix},$$

$\theta_n = \theta_n(t)$ and $f_n^k = f_n(z_k, t)$, $\hat{f}_n^k = \sigma_2 f_n(z_k, t)$ column-vector functions satisfy the following normalizing conditions

$$\beta_k(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (f_i^k)^T (Q_i - P_i) \sigma_2 f_i^k, \quad \hat{\beta}_k(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\hat{f}_i^k)^T (z_k^2 Q_i - P_i) \sigma_2 \hat{f}_i^k.$$

Here $\beta_k(t)$, $\hat{\beta}_k(t)$ are given scalar continuous functions and $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ are the usual Pauli matrices of rank 2.

The purpose of the work is to find the set of functions $\{\theta_n(t), f_n^k(t)\}$, $n \in Z$ supposing the existence in the class of functions

$$\lim_{|n| \rightarrow \pm\infty} \omega_n = \lim_{|n| \rightarrow \pm\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \sin \theta_j(t) = 0, \quad \theta_n(t) = 0 \pmod{2\pi} \quad (4)$$

which is the solution of the considering (1)-(3) problem.

Theorem 1. If the set of functions $\{\theta_n(t), f_n^k(t)\}$ represent the solution of the (1)-(3) in the class of functions (4), then the scattering data of the $L_n(t)$ operator with the potential $\theta_n(t)$ satisfy the following time evolution equations

$$\begin{aligned} \dot{R}(z) &= -2 \left(\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} \right) R(z), \quad |z| = 1, z \neq \pm 1, \\ \dot{z}_k &= 0, \quad \dot{C}_k = \left(-2 \frac{z_k^2 + 1}{z_k^2 - 1} + \beta_k + \hat{\beta}_k \right) C_k, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

The obtained results completely define the time evolution of the scattering data, which allows us to solve the problem (1)-(3) by using the method of the inverse spectral problem of (3) [see 4].

Литература

1. Hirota R. 1977, J. Phys. Soc. Japan, 43, 2079.
2. Orfanidis S. 1978 J. Phys. Rev. D 18 3822.
3. Levi D., Ragnisco O., Bruschi M. 1980, Nuovo Cimento A 58 56.
4. Piloni L. and Levi D. The Inverse Scattering Transform for Solving the Discrete Sine-Gordon Equation // Physics Letters A, 92 (1982), 1, pp. 5-81982.

5. *Fritz Gesztesy, Helge Holden.* A Local Sine-Gordon Hierarchy and its Algebro-Geometric Solutions // arXiv:solv-int/9707010
6. *Bobenko A. I.* Constant mean curvature surfaces and integrable systems // Russ. Math. Surv.46:4 , 1991, 1–45.
7. *Borisov A.B., Kiseliev V.V.* Topological defects in incommensurate magnetic and crystal structures and quasi-periodic solutions of the elliptic sine-Gordon equation // Physica D 31 ,1988, 49–64.
8. *Ting A.C., Chen H.H., Lee Y.C.* Exact solutions of a nonlinear boundary value problem: The vortices of the two-dimensional sinh-Poisson equation // Physica 26D , 1987, pp.37–66.
9. *Mel'nikov V.K.* Integration method of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source // Phys.Lett. A, 133, 1988, pp.493-496.
10. *Da-Jun Zhang , Deng-guan Chen.* The N-Soliton Solutions of the sine-Gordon Equation with Self-Consistent Sources // Physica A 321, 2003, pp. 467–481.
11. *Khasanov A.B., Urazboev G.U.* On the sine-Gordon equation with a self-consistent source // Mat. Tr., 2008, Volume 11, Number 1, 153–166,
12. *Babajanov B.A., Fehkan M., Urazbaev G.U.* On the periodic Toda Lattice with self-consistent source // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015; 22: 379-388.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ В СИСТЕМАХ ЛУРЬЕ СО СЛАБОУСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

@ А.С. Белова
89177662488@mail.ru

УДК 517.938

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.10.

Предлагаются основанные на методах теории возмущений признаки устойчивости по Ляпунову линейных и нелинейных систем Лурье со слабоусциллирующими параметрами. Основное внимание уделяется получению формул первого приближения для возмущений кратных дефинитных и индефинитных мультипликаторов линейных гамильтоновых систем и их приложениям в задаче исследования устойчивости. Эффективность предлагаемых формул иллюстрируется на примере задачи о параметрического резонансе в системе связанных осцилляторов.

Ключевые слова: гамильтонова система, система Лурье, устойчивость, малый параметр, параметрический резонанс.

Investigation of the problem of parametric resonance in Lurie systems with weakly oscillating coefficients

Suggested method-based perturbation theory stability criteria according to Lyapunov linear and nonlinear Lurie systems with weakly oscillating parameters. The focus is on obtaining formulas for the first approximations for perturbations of multiple definite and indefinite multipliers of linear Hamiltonian systems and their applications in the problem stability studies. The effectiveness of the proposed formulas is illustrated on the example of the problem of parametric resonance in a system of coupled oscillators.

Keywords: Hamiltonian system, Lurie system, stability, small parameter, parametric resonance.

Рассматривается зависящая от малого параметра ε динамическая система, описываемая неавтономным уравнением

$$L\left(\frac{d^2}{dt^2}, t, \varepsilon\right)x = M\left(\frac{d^2}{dt^2}, t, \varepsilon\right)f(x); \quad (1)$$

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027).

Белова Анна Сергеевна, аспирант, БашГУ (Уфа, Россия); Anna Belova (Bashkir State University, Russia)

здесь L и M – операторные многочлены:

$$L(p, t, \varepsilon) = p^l + (a_1 + \varepsilon\varphi_1(t))p^{l-1} + (a_2 + \varepsilon\varphi_2(t))p^{l-2} + \dots + (a_l + \varepsilon\varphi_l(t)),$$

$$M(p, t, \varepsilon) = (b_0 + \varepsilon\psi_0(t))p^m + (b_1 + \varepsilon\psi_1(t))p^{m-1} + \dots + (b_m + \varepsilon\psi_m(t)), \quad (l > m);$$

функции $\varphi_1(t), \dots, \varphi_l(t), \psi_0(t), \dots, \psi_m(t)$ предполагаются непрерывными и T -периодическими по t , а коэффициенты a_j и b_j являются константами. Нелинейность $f(x)$ представима в виде:

$$f(x) = k_0x + \delta(x), \quad \text{где } |\delta(x)| = O(x^2) \text{ при } x \rightarrow 0,$$

а k_0 – некоторая константа. Все входящие в уравнение (1) функции и коэффициенты предполагаются вещественными.

Уравнение (1) можно рассматривать как одноконтурную систему управления со слабосциллирующими параметрами. Отметим также, что системы вида (1) часто называют системами Лурье (см. [1, 2]).

Изучается вопрос об устойчивости линейного уравнения (1) в ситуациях, когда реализуются условия простого и комбинационного резонанса. Полученные результаты являются развитием результатов [3].

Литература

1. *Леонов Г.А.* Теория управления. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006.
2. *Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* О гамильтоновости систем Лурье // *Авт.* 2000. № 8. С. 25 – 29.
3. *Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Белова А.С.* Методы исследования устойчивости линейных периодических систем, зависящих от малого параметра // *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.* Т. 163. 2019. С. 113 – 126.

**ОБ ИССЛЕДОВАНИИ НА АСИМПТОТИЧЕСКУЮ
УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПОКАЗАТЕЛЬНОМУ ЗАКОНУ
ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ
СИСТЕМЫ «ХИШНИК-ЖЕРТВА» С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ,
МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПО СХЕМАМ ЛЕСЛИ-ГОУВЕРА
И ПРИНАДЛЕЖАЩЕЙ К II ТИПУ ХОЛЛИНГА**

@ В.И. Борздыко

borzdiko37@mail.ru

УДК 517.9

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.11.

На основе полученных ранее результатов сформулированы достаточные условия для асимптотической устойчивости по показательному закону положительного стационарного решения рассматриваемой системы «хищник-жертва» с запаздыванием при $0 \leq \tau < \tau_0$. Произведена оценка величины $\tau_0 > 0$.

Ключевые слова: система «хищник-жертва» с запаздыванием, асимптотическая устойчивость по показательному закону решения системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, положительно определённая матрица, матричное уравнение Ляпунова, спектральная норма матрицы.

**On the study of asymptotic stability according to the
exponential law of a positive stationary solution of the
delayed predator-prey system, modified according to
Leslie-Gower schemes and belonging to the Holling-type II**

There are formulated on the basis of some earlier obtained results the sufficient conditions for the asymptotic stability according to the exponential law of the positive stationary solution of the considered delayed predator-prey system when time-lag in this system $0 \leq \tau < \tau_0$. The value of $\tau_0 > 0$ is estimated.

Keywords: a predator-prey system with time delay, asymptotic stability according to the exponential law of a solution of a system of differential equations with time delay, positive definite matrix, matrix Lyapunov equation, spectral norm of matrix.

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) \left[a - bx_1(t) - \frac{cx_2(t-\tau)}{m_1+x_1(t-\tau)} \right], \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) \left[r - \frac{dx_2(t-\tau)}{m_2+x_1(t-\tau)} \right]. \end{cases} \quad (1)$$

Борздыко Вероника Ивановна, д.ф.-м.н., Институт математики им. А.Джурбаева НАНТ (Душанбе, Таджикистан); Borzdiko Veronika Ivanovna (Institute of Mathematics. A. Dzhurbaeva, Dushanbe, Tajikistan)

В системе (1) параметры $\{a, b, c, d, r, m_1, m_2\}$ положительны, запаздывание $\tau \geq 0$. Эта система при $\tau = 0$, рассматривалась в качестве математической модели «хищник-жертва» в ряде статей. В (1) $x_1(t)$ – численность популяции «жертвы», $x_2(t)$ – численность популяции «хищника» в момент времени t . В [1] для математической модели «хищник-жертва» с запаздыванием вида (1) при $\tau \geq 0$ исследовался вопрос о глобальной устойчивости положительного положения равновесия системы.

Система (1) при определённом выборе положительных значений её параметров имеет положительное стационарное решение

$$x_1(t) \equiv \bar{x} > 0, \quad x_2(t) \equiv \frac{r}{d}(m_2 + \bar{x}) > 0. \quad (2)$$

Линеаризуя систему (1) на решении (2), получим систему вида

$$\frac{dz}{dt} = B_0 z(t) + B_1 z(t - \tau), \quad (3)$$

где $z = (x_1, x_2) \in R^2$; R^2 – евклидово пространство двумерных векторов с вещественными компонентами.

Для рассматриваемой нами задачи элементы квадратной матрицы $A = B_0 + B_1$, соответствующей линеаризованному уравнению (3), определяются равенствами

$$a_{11} = a - 2b\bar{x} - \frac{crm_1(m_2 + \bar{x})}{d(m_1 + \bar{x})^2}; \quad a_{12} = -\frac{c\bar{x}}{m_1 + \bar{x}}; \quad a_{21} = \frac{r^2}{d}, \quad a_{22} = -r. \quad (4)$$

Используя результаты статей [2], [3] доказана

Теорема. Пусть для элементов (4) матрицы $A = B_0 + B_1$ выполняются два неравенства $a_{11} + a_{22} < 0$; $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$. Тогда положительное стационарное решение (2) системы (1) асимптотически устойчиво по показательному закону при $0 \leq \tau < \tau_0$,

$$\tau_0 = \min(2l_i) [2(\|B_0\| + \|B_1\|)\|HB_1\|]^{-1} [\lambda_{\min}(H)/\lambda_{\max}(H)]^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

где H симметрическая вещественная положительно определённая матрица, являющаяся решением матричного уравнения Ляпунова

$$(B_0^T + B_1^T)H + H(B_0 + B_1) = -C. \quad (6)$$

В уравнении (6) обозначено: B_j^T – матрица, транспонированная к матрице B_j , $j = 0, 1$; матрица

$$C = \begin{pmatrix} 2l_1 & 0 \\ 0 & 2l_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } l_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

В (5) нормы матриц – это спектральные матричные нормы, индуцированные евклидовой нормой в R^2 , [4, с. 184-186].

Сделана проверка, что при некоторых конкретных подборах положительных значений параметров системы «хищник-жертва» (1) все условия сформулированной выше теоремы могут одновременно выполняться и при этом равенство (5) определяет конечное положительное число $\tau_0 > 0$.

Литература

1. *A.F. Nindjin, M.A. Aziz-Alaoui, M. Cadivel.* Analysis of a predator-prey model with modified Leslie–Gower and Holling-type II schemes with time delay // *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 7 (2006). 1104-1118.
2. *Борздыко В.И.* Об асимптотической устойчивости периодического решения системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // *ДАН Тадж. ССР.* 33:10 (1990). 637-641.
3. *Хусаинов Д.Я., Юнькова Е.А.* Оценка величины запаздывания в линейных дифференциальных системах с отклоняющимся аргументом // *Укр. матем. журнал.* 35:2 (1983). 261-264.
4. *Ланкастер П.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1982.

ТЕМНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ БРИЗЕРНЫЕ МОДЫ В МОНООКСИАЛЬНОМ ХИРАЛЬНОМ ГЕЛИМАГНЕТИКЕ С АНИЗОТРОПИЕЙ ТИПА ЛЕГКАЯ ПЛОСКОСТЬ

@ И.Г. Бострем, Е.Г. Екомасов, А.С. Овчинников, В.Е. Синицын
Irene.Bostrem@usu.ru, ekomasovveg@gmail.com, alexander.ovchinnikov@urfu.ru,
sinitsynve@mail.ru

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.12.

Проанализированы магнитные дискретные бризерные моды в одноосном киральном гелимагнетике CrNb_3S_6 .

Ключевые слова: хиральный гелимагнетик, дискретные бризеры.

Dark discrete breather modes in monoaxial chiral helimagnet with easy-plane anisotropy

We analyze magnetic discrete breather modes in the monoaxial chiral helimagnet CrNb_3S_6 .

Keywords: chiral helimagnet, discrete breather.

Фаза вынужденного ферромагнетизма моноосиального хирального гелимагнетика CrNb_3S_6 допускает возбуждения в виде дискретных бризерных решеток. Эти моды имеют стационарный характер благодаря специфической доменной структуре образцов CrNb_3S_6 , состоящей из зерен микронного размера с различной, левой или правой, хиральностью. Мы демонстрируем аналитически и численно, что эти пространственно-периодические стоячие решения с амплитудой, меняющейся во времени, можно разделить на четыре типа, в зависимости от положения их частот по отношению к спектру линейных спиновых волн. Это положение задается величиной и знаком одноионной анизотропии, и, как следствие, единственным видом бризерной решетки, допускаемым анизотропией типа легкой плоскости в CrNb_3S_6 , являются так называемые темные бризерные моды [1], возникающие внутри спин-волновой зоны, вблизи ее нижнего края. Они представляют собой кноидальные состояния намагниченности, аналогичные хорошо известному основному состоянию

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-02-00213).

Бострем Ирина Геннадьевна, к.ф.-м.н., доцент, УрФУ (Екатеринбург, Россия);
Irina Bostrem (Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia)

Екомасов Евгений Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия);
Evegenii Ekomasov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Овчинников Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., доцент, УрФУ (Екатеринбург, Россия);
Alexander Ovchinnikov (Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia)

Синицын Владимир Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент, УрФУ (Екатеринбург, Россия);
Vladimir Sinitsyn (Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia)

хирального гелимагнетика в виде солитонной решетки с различным числом кинков. Существенными особенностями "темной"бризерной решетки являются период, несоизмеримый с размером системы, и линейное уменьшение энергии этих возбуждений с ростом числа кинков. Установлена линейная устойчивость этих мод с помощью анализа Флоке [2].

Литература

1. *Rakhmanova S.V., Shchegrov A.V.* Intrinsic localized modes of bright and dark types in ferromagnetic Heisenberg chains // Phys. Rev. B, **57**:22 (1998), R14012-R14015.
2. *Marín J.L., Aubry S., Floría L.M.* Intrinsic localized modes: Discrete breathers. Existence and linear stability // Physica D, **113**:2-4 (1998), 283-292.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АГРЕГАЦИИ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ НЕЛИНЕЙНОСТИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

@ В.Ф. Вильданова

gilvenera@mail.ru

УДК 517.954

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.13.

В гиперболическом пространстве рассматривается задача Коши для уравнения агрегации с переменным показателем нелинейности. Неотрицательная начальная функция ограничена и суммируема. Доказаны существование и единственность слабого решения задачи.

Ключевые слова: уравнение агрегации с переменным показателем нелинейности, существование решения, единственность решения, гиперболическое пространство

On Cauchy problem for the aggregation equation with variable nonlinearity exponents in hyperbolic space

In hyperbolic space, we consider the Cauchy problem for the aggregation equation with variable nonlinearity exponents. Non-negative initial function limited and summable. The existence and uniqueness of a weak solution to the problem is proved.

Keywords: the aggregation equation with variable nonlinearity exponents, solution existence, uniqueness of solution, hyperbolic space

В слое $Q^T = \mathbb{H}^n \times [0, T)$, где \mathbb{H}^n – гиперболическое пространство рассматривается задача Коши для уравнения агрегации

$$u_t = \operatorname{div}_g(|\nabla_g A(u)|_g^{p(x)-2} \nabla_g A(u) - u \mathcal{G}(u)), \quad (1)$$

с ограниченной начальной функцией $u_0 \in L_1(\mathbb{H}^n)$:

$$u(x, 0) = u_0, \quad u_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{H}^n. \quad (2)$$

Где $0 < p_- \leq p(x) \leq p^+$, $x \in \mathbb{H}^n$, $p_- = \inf_{x \in \mathbb{H}^n} p(x)$, $p^+ = \sup_{x \in \mathbb{H}^n} p(x)$. Здесь нижний индекс g у операторов div_g , ∇_g на многообразии \mathbb{H}^n будет отличать их от соответствующих операторов в \mathbb{R}^n . Интегральный оператор

Вильданова Венера Фидарисовна, к.ф.-м.н., доцент, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Venera Vil'danova (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)

$\mathcal{G}(v)$, определяется формулой

$$\mathcal{G}(v) = \int_{\mathbb{H}^n} X(y)v(y)d\nu,$$

где $d\nu$ – элемент объема в \mathbb{H}^n .

Будем предполагать, что $A(u) \in C^1[0, \infty)$, $A(0) = 0$, и

$$A'(u) > 0, \quad u > 0. \quad (3)$$

Условия на ядро оператора $\mathcal{G}(v)$ следующие: $X(y) \in \chi^1(P)$, $P = \mathbb{H}^n \setminus \{y\}$, $y \in B_1$,

$$|d_x X_x(y)| + |X_x(y)| \leq C(|x|)(1 + |x - y|^{-\lambda}), \quad \lambda \in (0, n), \quad x, y \in B_1, \quad (4)$$

где $C(r)$ – неубывающая функция.

Целью работы является доказательство существования и единственности решения задачи Коши для уравнения агрегации (1), (2).

Теорема 1. Пусть $0 \leq u_0(x) \leq M_0$, $u_0 \in L_1(\mathbb{H}^n)$ и выполнены условия (3), (4). Тогда существует слабое решение задачи (1), (2) в цилиндре Q_r^T малой высоты T .

При некоторых более жестких ограничениях доказана единственность решения задачи (1), (2) в Q^T .

Литература

1. Punzo F. Well-posedness of the Cauchy problem for nonlinear parabolic equations with variable density in the hyperbolic space// Nonlinear Differential Equations and Applications. **19** (2011), 485–501.

AN OPTIMAL ERROR ESTIMATES OF ROTHE-FINITE ELEMENT METHOD FOR NONLOCAL EVOLUTION EQUATION

@ M. Djaghout

Djaghoutmanal@gmail.com

УДК 517.956.6

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.14.

В этой работе мы строим приближение конечных элементов для пространственной переменной и метод Ротэ для дискретизации по времени для нелокального гиперболического уравнения. Оптимальные априорные оценки погрешности как для полудискретных, так и для полностью дискретных схем для функций u доказаны в V и H^1 . Наконец, разрабатывается полностью дискретная схема, и сходимость полученной схемы проверяется численным экспериментом.

Ключевые слова: Оптимальные оценки погрешности, метод Ротэ, метод конечных элементов, метод Ньютона-Рафсона.

In this paper, we build a finite element approximation for spacial variable and Rothe's method to time discretization for nonlocal hyperbolic equation. Optimal a priori error estimates for both semi discrete and fully discrete schemes for functions u are proved in V and H^1 . Finally A fully discrete scheme is designed and the Convergence of the obtained scheme is verified by a numerical experiment.

Keywords: An Optimal Error Estimates, Rothe's method, finite element method, Newton Raphson method.

Theorem 1. We assume that $\frac{\mathbf{m} \min(b(x))}{2} \geq \frac{16e^3 c^2 L_M}{m}$. Then, there exists a positive constant C such that

$$\|u^i - u_h^i\|_{L^2(0,T,\tau,H^1(\Omega))} \leq C(h + h^2). \quad (1)$$

Литература

1. *El-Azab M.S. and El-Gamel M.* A numerical algorithm for solution of telegraph equations// Applied Mathematics and Computation, V. 190, No 1, (2007), 757-764.
2. *Rannacher R. and Scott R.* Some optimal error estimates for piecewise linear finite element approximation // Math Comp, V. 38, (1982), 437-445.

The work was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research (project № 19-01-00000).

Djaghout Manal, Laboratory of Applied Mathematics and Modeling (LMAM), University 8 May 1945 Guelma.

3. *Sudhakar Chaudhary* Finite element approximation of nonlocal parabolic problem"// Wiley Online Library, V. 33, No 3, (2017), 786-813.
4. *Rektorys K.* On application of direct variational methods to the solution of parabolic boundary value problems of arbitrary order in space variables// Czech. Math., V. 21, (1971), 318-339.
5. *Dos Santos, G.C.G., Figueiredo, G.M.* Positive Solutions for a Class of Nonlocal Problems Involving Lebesgue Generalized Spaces: Scalar and System Cases// J Elliptic Parabol Equ 2, (2016), 235–266.
6. *Rektorys, Karel* The method of discretization in time and partial differential equations.// Equadiff 5. Leipzig: BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, (1982), 293-296.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ ФЕРРОМАГНЕТИКА ГЕЙЗЕНБЕРГА С САМОСОГЛАСОВАННЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ И СВЯЗАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЯДЖИМЫ-ОЙКАВЫ

© К. Есмаханова, Ж. Мырзакулова, Р. Мырзакулов
kyesmakhanova@gmail.com, zhrmyrzakulova@gmail.com,
rmyrzakulov@gmail.com

УДК 517.951, 517.957

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.15.

В этой работе изучены некоторые интегрируемые уравнения ферромагнетика Гейзенберга с самосогласованными потенциалами (УФГ-ССП). Найдены их Лаксовы представления, солитонные решения, интегралы движения. Доказано, что эти УФГССП являются калибровочно эквивалентны к уравнениям типа Яджимы-Ойкавы. *Ключевые слова:* Уравнения ферромагнетика Гейзенберга, самосогласованные потенциалы, уравнения типа Яджимы-Ойкавы.

Integrable Heisenberg ferromagnet equations with self-consistent potentials and related Yajima-Oikawa type equations

In this paper, some integrable Heisenberg ferromagnet equations with self-consistent potentials are studied. The corresponding Lax representations, soliton solutions, integrals of motion are presented. The gauge between these HFESCP and the YAjima-Oikawa type equations are established.

Keywords: Nonlinear Schrodinger equation, Heisenberg model, Lie algebra.

We study some Heisenberg ferromagnet equations with self-consistent potentials (HFESCP). Some of these HFESCP are integrable. It means admit as integrable system possesses the Lax pair, infinitely many conservation laws and solvable by using the inverse scattering transformation (IST). One of examples of such integrable HFESCP reads as

$$\mathbf{S}_t + \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx} - v\mathbf{S}_x = 0, \quad (1a)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (проект AP08856912, AP09261147).

Есмаханова Куралай, к.ф.-м.н., асс. профессор, ЕНУ (Нур-Султан, Казахстан); Kuralay Yesmakhanova (Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Мырзакулова Жайдары, Международный центр теоретической физики им. Ратбая Мырзакулова (Нур-Султан, Казахстан); Zhaidary Myrzakulova (Ratbay Myrzakulov International centre of Theoretical Physics, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Мырзакулов Ратбай, д.ф.-м.н., профессор, ЕНУ (Нур-Султан, Казахстан); Ratbay Myrzakulov (Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

$$v_t + k(\mathbf{S}_x^2)_x = 0, \quad (1b)$$

where $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ is the unit spin vector, $\mathbf{S}^2 = 1$, v is a scalar real function (potential). Eq.(1) is equivalent to the Yajima-Oikawa equation (YOE) [1]

$$iq_t + q_{xx} - uq = 0, \quad (2a)$$

$$u_t - 2(|q|^2)_x = 0. \quad (2b)$$

This YOE is integrable, admits Lax representation, infinity number conservation of laws, n -soliton solutions and so on. In this paper, we have established a gauge equivalence between the equations (1) and (2). Also the exact soliton solutions of these equation are presented. Some integrals of motion of these equations and the relations between them are found.

Литература

1. *Yajima N., Oikawa M.* Formation and interaction of sonic-Langmuir solitons: Inverse scattering method // *Prog. Theor. Phys.*, **56**, (1976), 1719-1739.

УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПОЛУДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

@ А.В. Жибер, М.Н. Кузнецова

zhiber@mail.ru, mariya.n.kuznetsova@gmail.com

УДК 517.9

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.16.

Работа посвящена исследованию систем полудискретных уравнений $\bar{r}_{n+1,x} = \bar{h}(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n,x})$ в рамках подхода, основанного на понятии характеристического кольца Ли. Здесь $\bar{r}_n = (r_n^1, r_n^2, \dots, r_n^N)$, $\bar{h} = (h^1, h^2, \dots, h^N)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ключевые слова: полудискретная система уравнений, характеристическое кольцо, x -интеграл, система, интегрируемая по Дарбу

Integrability conditions for semi-discrete systems of equations

The paper is devoted to the study of systems of semi-discrete equations $\bar{r}_{n+1,x} = \bar{h}(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n,x})$ within the framework of an approach based on the concept of a characteristic Lie ring. .

Keywords: semi-discrete system of equations, characteristic ring, x -integral, Darboux integrable system

Работа посвящена исследованию систем полудискретных уравнений

$$\bar{r}_{n+1,x} = \bar{h}(x, n, \bar{r}_n, \bar{r}_{n+1}, \bar{r}_{n,x}) \quad (1)$$

в рамках подхода, основанного на понятии характеристического кольца Ли. Здесь $\bar{r}_n = (r_n^1, r_n^2, \dots, r_n^N)$, $\bar{h} = (h^1, h^2, \dots, h^N)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Среди интегрируемых нелинейных уравнений и систем в частных производных в отдельный широкий класс выделены нелинейные гиперболические уравнения и системы, интегрируемые “по Дарбу”. Отличительным свойством таких уравнений является наличие интегралов по каждому характеристическому направлению (так называемых x - и y -интегралов). Уравнения и системы, интегрируемые “по Дарбу” эффективно поддаются исследованию и классификации при помощи характеристических колец Ли. В настоящее время алгебраический подход распространен на полудискретные и дискретные уравнения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-11-00006, <https://rscf.ru/project/21-11-00006/>.

Жибер Анатолий Васильевич, д.ф.-м.н., в.н.с., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); профессор БашГУ, УГАТУ (Уфа, Россия); Anatoliy Zhiber (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre RAS) (Bashkir State University, USATU, Ufa, Russia)

Кузнецова Мария Николаевна, к.ф.-м.н., снс, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Maria Kuznetsova (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre RAS)

В работе [1] сформулирована гипотеза: система уравнений (1) обладает полным набором x - и n -интегралов, тогда и только тогда, когда характеристическое кольцо по каждому характеристическому направлению конечномерно.

В данной работе доказано, что система обладает N x -интегралами, независимыми в главном, тогда и только тогда, когда характеристическое кольцо Ли, соответствующее непрерывному характеристическому направлению, конечномерно.

Литература

1. *I.T. Habibullin, A.R. Khakimova* Characteristic Lie Algebras of Integrable Differential-Difference Equations in 3D // J. Phys. A: Math. Theor, **54**:29 (2021).

ОПЕРАТОР ИНВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЛЯ АЛГЕБРЫ ЛИ КОНТАКТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

@ Р.В. Исхакова, А.А. Гайнетдинова
iskhakova@mail.ru, gajnetdinova.aa@ugatu.su

УДК 517.91

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.17.

Исследуется вопрос о построении оператора инвариантного дифференцирования для алгебр Ли контактных преобразований и применимость метода понижения порядка к обыкновенным дифференциальным уравнениям, допускающим такие алгебры Ли.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, алгебра Ли, контактные преобразования, дифференциальные инварианты, оператор инвариантного дифференцирования

The invariant differentiation operator for the Lie algebra of contact transformations

We study the question of constructing an operator of invariant differentiation for Lie algebras of contact transformations and the applicability of the order reduction method to ordinary differential equations that admit such Lie algebras.

Keywords: ordinary differential equations, Lie algebra, contact transformations, differential invariants, invariant differentiation operator

Множество математических моделей различных процессов описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Несмотря на развитие численных методов, аналитические методы решения ОДУ играют важную роль в исследовании свойств моделей. Одним из таких методов является метод последовательного понижения порядка с использованием симметрий уравнения.

Модификация метода понижения порядка, описанная в [1, 2], использует теорию дифференциальных инвариантов допускаемой алгебры Ли, в частности – оператор инвариантного дифференцирования (ОИД) (см. [3, 4]). Эта модификация предполагает, что количество точечных симметрий системы ОДУ совпадает с её порядком. Однако часто бывает так, что уравнение допускает недостаточное число точечных симметрий. В этом случае можно рассмотреть ее нелокальные симметрии [5].

Исхакова Розалина Валеевна, студент, УГАТУ (Уфа, Россия); Rozalina Iskhakova (Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia)

Гайнетдинова Алия Айдаровна, к.ф.м.н., УГАТУ (Уфа, Россия); Aliya Gainetdinova (Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia)

В данной работе исследуется вопрос понижения порядка уравнения P -го порядка вида

$$y^{(P)} = f(x, y, y', \dots, y^{(P-1)}), \quad (1)$$

допускающее P - мерную алгебру Ли контактных симметрий, натянутую на операторы

$$X_i = \xi_i(x, y, y') \frac{\partial}{\partial x} + \eta_i(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y}, i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где x - независимая переменная, $\xi_i(x, y, y'), \eta_i(x, y, y')$ - изветные функции.

Пусть ранг матрицы $M^{(P)}$, составленной из координат операторов $X_i^{(P)}$, полученных продолжением операторов (2) на все производные до P -го порядка, равен P . Тогда ОДУ (1) можно представить через инвариант P -го порядка $I^{(P)} = I^{(P)}(x, y, y', \dots, y^{(P)})$ и дифференциальный инвариант $I^{(k)} = I^{(k)}(x, y, y', \dots, y^{(k)})$ k -го порядка ($0 \leq k < P$) допускаемой алгебры Ли в виде

$$I^{(P)} = F(I^{(k)}).$$

где F - некоторая функция.

Согласно [1,2] функцию $\lambda = \lambda(x, y', \dots, y^{(P)})$ для ОИД λD_x следует строить в специальном виде

$$\lambda = \frac{1}{D_x(\Phi)}, \quad (3)$$

где $\Phi = \Phi(x, y, \dots, y^{(P-1)})$ - некоторая функция, являющаяся дифференциальным инвариантом разрешимой подалгебры исходной алгебры Ли. В работах [1, 2] приведена схема построения этой функции Φ для алгебр Ли точечных преобразований, а в работе [6] показано, что в случае алгебр Ли контактных преобразований схема не терпит изменений.

Применение построенного ОИД к инварианту младшего порядка даёт соотношение

$$\lambda D_x(I^{(k)}) = H(I^{(k)}, I^{(P)}),$$

где $H = H(I, \dots, I^{(P)})$ - некоторая гладкая функция. Получившееся выражение рассматривается на многообразии, определяемом исследуемым уравнением (1):

$$\lambda D_x(I^{(k)})|_{(1)} = G(I^{(k)}),$$

здесь $G(I^{(k)}) = H(I^{(k)}, F(I^{(k)}))$ - гладкая функция.

Таким образом, построено ОДУ первого порядка

$$\frac{dI^{(k)}}{d\Phi} = G(I^{(k)}).$$

Интегрируя это уравнение, получим решение вида $U(\Phi, I^{(k)}) = C, C = const$, которое является первым интегралом исходного уравнения (1).

К полученному уравнению $(P-I)$ -го порядка применяется та же процедура при условии возможности построения ОИД со множителем специального вида (3).

Из вышесказанного следует, что описанный метод понижения порядка не зависит от пространства, в котором реализована допускаемая алгебра Ли, но зависит от структуры этой алгебры Ли.

Литература

1. *Гайнетдинова А. А.* Интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений, размерность алгебры точечных симметрий которых совпадает с порядком системы // дис. канд. ф.-м. н. — Уфа. — 2019. — 113.
2. *Газизов Р. К., Гайнетдинова А. А.* Оператор инвариантного дифференцирования и его применение для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Уфимский математический журнал. — 2017. — Т. 9, № 4. — 12–21.
3. *Полянин А. Д.* Элементарная теория использования инвариантов для решения математических уравнений // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. — 2008. — № 6 (65). — 152–176.
4. *Гончаровский М. М.* Дифференциальные инварианты и операторы инвариантного дифференцирования проецируемого действия групп Ли // ТМФ. — 2015. — Т. 183, № 2. — 202–221.
5. *Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж., 34. — Москва. — 1989. — 3–83.
6. *Исхакова Р. В.* Алгоритм понижения порядка обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих алгебру Ли контактных симметрий // Выпускная квалификационная работа. — Уфа. — 2021. — 42.

**ON THE DIFFERENT SIZE OF THE WHITE NOISE
PERTURBATION IN THE PROBLEM ON THE INVISCID
LIMIT OF THE STATIONARY MEASURE FOR ONE MODEL
OF THE ATMOSPHERE**

@ Yu.Yu. Klevtsova
yy_klevtsova@ngs.ru

УДК 517.956.8

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.18.

It was obtained the sufficient conditions on the right-hand side and the parameters of the Lorenz model for a baroclinic atmosphere with white noise perturbation for the existence a limiting point for any sequence of the stationary measures for this system when any sequence of the kinematic viscosity coefficients goes to zero. We consider white noise perturbation proportional to the kinematic viscosity in different degrees. A similar result was obtained for the equation of a barotropic atmosphere and the two-dimensional Navier-Stokes equation.

Keywords: Lorenz model for a baroclinic atmosphere, white noise perturbation, inviscid limit of stationary measures, the two-dimensional Navier-Stokes equation

We consider the system of equations for the quasi-solenoidal Lorenz model for a baroclinic atmosphere

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 u + \nu A_2 u + A_3 u + B(u) = g, \quad t > 0, \quad (1)$$

on the two-dimensional unit sphere S centered at the origin of the spherical polar coordinates (λ, φ) , $\lambda \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\mu = \sin \varphi$. Here $\nu > 0$ is the kinematic viscosity, $u(t, x, \omega) = (u_1(t, x, \omega), u_2(t, x, \omega))^T$ is an unknown vector function and $g(t, x, \omega) = (g_1(t, x, \omega), g_2(t, x, \omega))^T$ is a given vector function, $x = (\lambda, \mu)$, $\omega \in \Omega$, (Ω, P, F) is a complete probability space,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta + \gamma I \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0 & \Delta^2 \end{pmatrix},$$

This research was carried out within the framework of the Research Plan of Federal Service for Hydrometeorology and Environmental Monitoring for 2020–2024, the research project 1.1.3 “Development and improvement of the new generation of COSMO-Ru ultra-high-resolution short-range weather prediction system (with grid steps up to 1 km) based on the ICON seamless non-hydrostatic atmospheric model”.

Yulia Klevtsova (Federal State Budgetary Institution “Siberian Regional Hydrometeorological Research Institute”, Siberian State University of Telecommunications and Information Sciences, Novosibirsk, Russia)

$$A_3 = \begin{pmatrix} -k_0\Delta & 2k_0\Delta \\ k_0\Delta & -(2k_0 + k_1 + \nu\gamma)\Delta + \rho I \end{pmatrix},$$

$$B(u) = (J(\Delta u_1 + 2\mu, u_1) + J(\Delta u_2, u_2), J(\Delta u_2 - \gamma u_2, u_1) + J(\Delta u_1 + 2\mu, u_2))^T.$$

Also, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$ are numerical parameters, I is the identity operator, $J(\psi, \theta) = \psi_\lambda \theta_\mu - \psi_\mu \theta_\lambda$ is the Jacobi operator and $\Delta\psi = ((1 - \mu^2)\psi_\mu)_\mu + (1 - \mu^2)^{-1}\psi_{\lambda\lambda}$ is the Laplace-Beltrami operator on the sphere S . A random vector function $g = f + \eta$ is taken as the right-hand side of (1); here $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$ and $\eta(t, x, \omega) = (\eta_1(t, x, \omega), \eta_2(t, x, \omega))^T$ is a white noise in t . In [1] it was obtained for existence of a unique stationary measure of Markov semigroup defined by solutions of the Cauchy problem for (1) and for the exponential convergence of the distributions of solutions to the stationary measure as $t \rightarrow +\infty$ the sufficient conditions on the right-hand side of (1) and the parameters $\nu, \gamma, \rho, k_0, k_1$:

$$k_0 < F(\nu, \gamma, \rho, k_1), \tag{2}$$

where $F > 0$ is some real function of the arguments ν, γ, ρ, k_1 .

Let $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ be an orthonormal basis for the space H^0 (for definitions of H^0 see the third paragraph of [1]). As a random vector function η , we consider

$$\eta^\omega(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \zeta^\omega(t, x), \quad \zeta^\omega(t, x) = \sum_{i=1}^\infty b_i \beta_i^\omega(t) E_i,$$

where $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$, and $\{\beta_i^\omega(t)\}_{i=1}^\infty, t \geq 0$, is a sequence of independent real Brownian motions with respect to some right continuous filtration $\{F_t\}_{t \geq 0}$ such that all the P -nullsets of the σ -algebra F lie in F_0 (for definitions of H^0, l_2^+ see the third paragraph of [1]).

Let

$$k_0 = \nu k'_0, \quad k_1 = \nu k'_1, \quad \rho = \nu \rho', \quad f = \nu f', \\ b_i = \nu^\alpha b'_i, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \{b'_i\}_{i=1}^\infty \neq 0, \quad \zeta = \nu^\alpha \zeta',$$

where k'_0, k'_1, ρ', f' and $\{b'_i\}_{i=1}^\infty$ are independent of ν .

In the present work we consider the different values of α and give the answer when there exists a limiting point for any sequence of the stationary measures for the system (1) when any sequence of the kinematic viscosity coefficients goes to zero and when it is absent.

A similar result is obtained for the equation of a barotropic atmosphere and the two-dimensional Navier-Stokes equation. A comparative analysis with some of the available related results is given for the latter.

Литература

1. *Klevtsova Yu. Yu.* On the rate of convergence as $t \rightarrow +\infty$ of the distributions of solutions to the stationary measure for the stochastic system of the Lorenz model describing a baroclinic atmosphere // *Sb. Math.*, **208:7** (2017), 929-976.

ЭНТРОПИЙНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ МУЗИЛАКА-ОРЛИЧА-СОБОЛЕВА

© Л.М. Кожевникова, А.П. Кашникова

kosul@mail.ru, a.kashnikova98@yandex.ru

УДК 517.956

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.19.

В работе рассматриваются нелинейные эллиптические уравнения второго порядка с суммируемой правой частью. В ограниченных областях доказано существование энтропийных решений задачи Неймана в сепарабельных пространствах Музилака-Соболева-Орлича.

Ключевые слова: квазилинейное эллиптическое уравнение, задача Неймана, пространство Музилака-Орлича-Соболева, энтропийное решение, сепарабельное пространство.

Entropy solutions of the Neumann problem for quasilinear elliptic equations in Muzilak-Orlicz-Sobolev spaces

In this work, nonlinear elliptic equations of the second order with the summable right-hand side. In bounded domains, the existence of entropy solutions to the Neumann problem in separable Muzilak-Sobolev-Orlicz spaces is proved.

Keywords: quasilinear elliptic equation, Neumann problem, Muzilak-Orlicz-Sobolev space, entropy solution, separable space.

Пусть Ω — ограниченная область пространства

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}, \quad n \geq 2,$$

с липщцевой границей $\partial\Omega$. Рассматривается задача Неймана для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка вида

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) + M'(x, u) + a(x, u) = f, \quad x \in \Omega, \quad f \in L_1(\Omega); \quad (1)$$

с однородным краевым условием

$$a(x, \nabla u) \cdot \eta \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

Кожевникова Лариса Михайловна, доктор физико-математических наук, профессор, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета (Стерлитамак, Россия); Larisa Kozhevnikova (Sterlitamak Branch of Bashkir State University of Sterlitamak, Russia)

Кашникова Анастасия Павловна, студент, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета (Стерлитамак, Россия); Anastasia Kashnikova (Sterlitamak Branch of Bashkir State University of Sterlitamak, Russia)

где η — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Для квазилинейных эллиптических уравнений с нелинейностями, определяемыми функциями Музилака-Орлича, ранее было доказано существование энтропийных (см. [1]) и ренормализованных (см. [2]) решений задачи Дирихле. Задача Неймана менее изучена, известны лишь результаты существования слабых решений в банаховых пространствах Музилака-Орлича-Соболева (см. [3], [4]). В настоящей работе выделен некоторый класс нелинейных эллиптических уравнений вида (1), для которых построены энтропийные решения задачи Неймана в сепарабельных пространствах Музилака-Орлича-Соболева. Ограничения на каратеодоревы функции

$$a(x, s) = (a_1(x, s), \dots, a_n(x, s)) : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad a_0(x, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

входящие в уравнение (1), формулируются в терминах специального класса выпуклых функций Музилака-Орлича.

Условия MN. Предполагается, что непрерывно дифференцируемая в \mathbb{R} и интегрируемая в Ω функция Музилака-Орлича $M(x, z)$ подчиняется Δ_2 -условию, дополнительная к M функция $\overline{M}(x, z)$ также интегрируемая в Ω и выполнены следующие условия:

$$\int_1^\infty M^{-1}(x, z)z^{-(n+1)/n}dz = \infty, \quad \int_0^1 M^{-1}(x, z)z^{-(n+1)/n}dz < \infty;$$

для любого $z_0 > 0$ существует $c(z_0) > 0$ такое, что для любого $z \geq z_0$ справедливы соотношения

$$\inf_{x \in \Omega} \frac{M(x, z)}{z} \geq c, \quad \inf_{x \in \Omega} \frac{\overline{M}(x, z)}{z} \geq c.$$

Пусть существуют неотрицательные функции $\Phi \in E_{\overline{M}}(\Omega)$, $\phi \in L_1(\Omega)$ и положительные константы \widehat{A}, \bar{a} такие, что для п.в. $x \in \Omega$ и для любых $s, t \in \mathbb{R}^n$, $s \neq t$ справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} a(x, s) \cdot s &\geq \bar{a}M(x, |s|) - \phi(x); \\ |a(x, s)| &\leq \Phi(x) + \widehat{A}\overline{M}^{-1}(x, M(x, |s|)); \\ (a(x, s) - a(x, t)) \cdot (s - t) &> 0. \end{aligned}$$

где $s \cdot t = \sum_{i=1}^n s_i t_i$, $|s| = (\sum_{i=1}^n s_i^2)^{1/2}$.

Кроме того, пусть существует неотрицательная функция $\Phi_0 \in L_1(\Omega)$ такая, что при п.в. $x \in \Omega$ для всех $k > 0$ и $s_0 \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства:

$$\sup_{|t_0| \leq k} |b(x, t_0)| = B_k(x) \in L_1(\Omega);$$

$$b(x, s_0)s_0 \geq 0.$$

Определим функцию $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$. Через $\mathcal{T}_M^1(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $T_k(u) \in W^1L_M(\Omega)$ при любом $k > 0$.

Определим $\mathcal{T}_{M, tr}^1(\Omega)$ как множество функций $u \in \mathcal{T}_M^1(\Omega)$ таких, что существует последовательность $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_M^1(\Omega)$, удовлетворяющая условиям:

- (C1) $u_n \rightarrow u$ п.в. в Ω ;
- (C2) $\forall k > 0 \quad \nabla T_k(u_n) \rightarrow \nabla T_k(u)$ в $L_1(\Omega)$;
- (C3) существует измеримая функция v на $\partial\Omega : u_n \rightarrow v$ п.в. в $\partial\Omega$.

Введем обозначение $\langle u \rangle = \int_{\Omega} u dx$.

Определение. Энтروпийным решением задачи (1), (2) называется функция $u \in \mathcal{T}_{M, tr}^1(\Omega)$ такая, что

- 1) $b(x, u), M'(x, u) \in L_1(\Omega)$;
- 2) при всех $k > 0, \xi \in W^1L_M(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$ справедливо неравенство:

$$\langle (b(x, u) + M'(x, u) - f)T_k(u - \xi) \rangle + \langle a(x, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \xi) \rangle \leq 0.$$

Основным результатом работы является

Теорема. Пусть выполнены условия MN, тогда существует энтропийное решение задачи (1)–(2).

Литература

1. *Elemine Vall M.S.B., Ahmed A., Touzani A. and Benkirane A.* Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L1 data // *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 36:1 (2018), 125–150.
2. *Ait Khellou M., A. Benkirane A.* Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and L^1 data in Musielak-Orlicz spaces // *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 43:2 (2016), 164–187.
3. *Dong Ge, Fang X.* Differential equations of divergence form in separable Musielak-Orlicz-Sobolev spaces // *Boundary Value Problems*, 2016:106 (2016), 1–19.
4. *Youssfi A., Ould Khatri M.M.* Continuous imbedding in Musielak spaces with an application to anisotropic with an application to nonlinear neumann problems // *Electronic Journal of Differential Equations*, 2021:26 (2021), 1–28.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ТРИКОМИ–НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

@ А.Н. Кучкарова, Л.А. Кучкарова

УДК 517.95

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.20.

Построено решение краевой задачи

Ключевые слова: Ключевые слова: уравнение смешанного типа, краевая задача

The Tricomi - Neumann Spatial Problem for a Mixed Type Equation

The solution to the boundary value problem.

Keywords: mixed-type equation, boundary value problem

Рассмотрим уравнение

$$LW \equiv W_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot W_{yy} + W_{zz} = 0, \quad (1)$$

в области $G = D \times (0, \pi)$, где D – область плоскости \mathbf{R}_{xy}^2 , ограниченной: 1) простой кривой Жордана Γ , лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A_1(-1, 0)$ и $A_2(1, 0)$; 2) характеристиками A_1C_1 ($x + y = -1$) и C_1O ($x - y = 0$), OC_2 ($x + y = 0$) и C_2A_2 ($x - y = 1$) уравнения (1) при $y < 0$, где $C_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $C_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $O = (0, 0)$.

Обозначим $D_0 = D \cap \{y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{x < 0, y < 0\}$, $D_2 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$, $S = \{x^2 + y^2 = 1, y > 0, z \in [0, \pi]\}$; $G_0 = G \cap \{y > 0\}$; $G_1 = G \cap \{x > 0, y < 0\}$; $G_2 = G \cap \{x < 0, y < 0\}$.

Поставим следующую задачу Трикоми–Неймана.

Задача Т. Найдти функцию $W(x, y, z)$, удовлетворяющую условиям:

$$W(x, y, z) \in C(\bar{G}) \cap C^1(G) \cap C^2(G_0 \cup G_1 \cup G_2),$$

$$LW(x, y, z) \equiv 0, \quad (x, y, z) \in G_0 \cup G_1 \cup G_2,$$

$$\left. \frac{\partial W(x, y, z)}{\partial n} \right|_S = \left. \frac{\partial V(r, \varphi, z)}{\partial r} \right|_{r=1} = F(\varphi, z), \quad \varphi \in [0, \pi/2], \quad z \in [0, \pi],$$

$$W(x, y, z) \Big|_{y=x} = 0, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right], \quad z \in [0, \pi],$$

Кучкарова Айгуль Наилевна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Aigul Kuchkarova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Кучкарова Лейсан Азаматовна, студент, БашГУ (Уфа, Россия); Leisan Kuchkarova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

$$W(x, y, z) \Big|_{y=-x} = 0, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad z \in [0, \pi],$$

$$W(x, y, z) \Big|_{z=0} = W(x, y, z) \Big|_{z=\pi} = 0,$$

где F – заданная достаточно гладкая функция.

Построено решение задачи Трикоми–Неймана в виде ряда.

Отметим, что в работе [1] построено решение задачи Геллерстедта для уравнения (1)

Литература

1. *Сабитов К.Б., Кучкарова А.Н.* Спектральные свойства решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа и их применения // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42. № 5. С.1147-1161.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОКУСИРУЮЩЕГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

@ У.Б. Муминов, Р.К.Ибрагимов

umuminov153@gmail.com

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.21.

В работе методом обратной спектральной задачи интегрируется нелинейное уравнение Шредингера с дополнительными членами в классе бесконечнозонных периодических функций.

Ключевые слова: Дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера (ДНУШ), оператор Дирака, спектральные данные, система уравнений Дубровина, формулы следов.

Integration of the nonlinear defocusing Schrodinger equation with additional terms

Short abstract. In this paper, the method of the inverse spectral problem is applied to the integration of the nonlinear Schrodinger equation with additional terms in the class of infinite-zone periodical functions.

Keywords: Defocusing nonlinear Schrodinger equation (DNUSH), Dirac operator, spectral data, system of Dubrovin equations, trace formulas.

В данной работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения Шредингера с дополнительными членами вида

$$\begin{cases} p_t = -q_{xx} + 2q(p^2 + q^2) + a(t)[p^2(x_0, t) + q^2(x_0, t)]p_x + \\ \quad + \{b(t) + c(t)[p^2(x_1, t) + q^2(x_1, t)]\} \cdot q, \\ q_t = p_{xx} - 2p(p^2 + q^2) + a(t)[p^2(x_0, t) + q^2(x_0, t)]q_x - \\ \quad - \{b(t) + c(t)[p^2(x_1, t) + q^2(x_1, t)]\} \cdot p, \end{cases} \quad (1)$$

при начальных условиях

$$p(x, t)|_{t=0} = p_0(x), \quad q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad x \in R, \quad (1)$$

в классе действительных бесконечнозонных π -периодических по x функций:

$$p(x + \pi, t) = p(x, t), \quad q(x + \pi, t) = q(x, t), \quad x \in R, t > 0,$$

Муминов Улугбек Бобомуродович, докторант СамГУ, (Самарканд, Узбекистан);
Muminov Ulugbek (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Ибрагимов Рашид Камилджанович, магистрант УрГУ, (Ургенч, Узбекистан);
Ibragimov R.K. (Urgench State University, Urgench, Uzbekistan)

$$p(x, t), q(x, t) \in C_x^2(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0). \quad (3)$$

Здесь $a(t)$, $b(t)$, $c(t) \in C[0, \infty)$ - заданные непрерывные ограниченные функции, а $x_0, x_1 \in R$.

Хорошо известно, что одним из представителей интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных, который имеет наибольшее число приложений, является нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), которое впервые было проинтегрировано В.Е. Захаровым и А.Б. Шаба- том [1] в классе "быстроубывающих" функций.

В работах А.Р. Итса [2], А.Р.Итса и В.П. Катлярова [3], а также А.О. Смирнова [4] исследовано нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) $iu_t = u_{xx} - 2|u|^2 \cdot u$, в классе конечнозонных функций.

В работе А.Б. Хасанова, М.М. Хасанова [5], было исследовано нелинейное уравнение Шредингера с дополнительным членом вида $u_t = 2i|u|^2 \cdot u - iu_{xx} + \gamma(t)|u(0, t)|^2 \cdot u_x$, в классе бесконечнозонных периодических функций. Следует отметить, что в работе [6] изучено вещественно-аналитическое решение нелинейного уравнения Шредингера вида $iu_t = Au_{xx} + B|u|^2 \cdot u + Cu$, где $A, B, C \in R$ - заданные константы, которые удовлетворяет условию $A \cdot B \neq 0$. В соответствии с физическим смыслом решений различают фокусирующий случай $AB > 0$ и дефокусирующий случай $AB < 0$.

Следуя [6] уравнение (1) относится к дефокусирующему случаю, т.к. $A = -1$, $B = 2$, ($AB = -2 < 0$). Заметим, что при $a(t) = 0, c(t) = 0$ и $b(t) = c = const$, система (1) примет вид

$$\begin{cases} q_t = p_{xx} - 2(p^2 + q^2)p - cp, \\ p_t = -q_{xx} + 2(p^2 + q^2)q + cq. \end{cases} \quad (4)$$

В данной статье предлагается алгоритм построения решения $p(x, t)$, $q(x, t)$, $x \in R$, $t > 0$, задачи (1) - (3), с помощью обратной спектральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau, t)y \equiv By' + \Omega(x + \tau, t)y = \lambda y, x \in R, t > 0, \quad (5)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} p(x, t) & q(x, t) \\ q(x, t) & -p(x, t) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $c(x, \lambda, \tau, t) = (c_1(x, \lambda, \tau, t), c_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ и $s(x, \lambda, \tau, t) = (s_1(x, \lambda, \tau, t), s_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ решения уравнения (5) с начальными условиями $c(0, \lambda, \tau, t) = (1, 0)^T$ и $s(0, \lambda, \tau, t) = (0, 1)^T$. Функция $\Delta(\lambda, \tau, t) = c_1(\pi, \lambda, \tau, t) + s_2(\pi, \lambda, \tau, t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (5).

Корни уравнений $\Delta(\lambda, \tau, t) = \pm 2$ обозначим через $\lambda_n(\tau, t)$, она совпадает с собственными значениями периодической и антипериодической задач $y(0, \tau, t) = \pm y(\pi, \tau, t)$ для уравнения (5).

Теперь рассмотрим задачу Дирихле

$$y_1(0, \tau, t) = 0, \quad y_1(\pi, \tau, t) = 0, \quad (6)$$

для уравнения(5). Первая компонента вектор-функции $s(x, \lambda, \tau, t)$ удовлетворяет первому граничному условию (6), подставляя его на второе граничное условие, получим $s_1(\pi, \lambda, \tau, t) = 0$. Решая его относительно λ , находим собственное значение $\xi_n = \xi_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z}$, задачи Дирихле (5),(6). Обозначим через $\sigma_n(\tau, t)$ знак:

$$\sigma_n(\tau, t) = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - c_1(\pi, \xi_n, \tau, t)\}.$$

Множество $\{\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\}$, называется спектральными параметрами, а набор $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\}$ - спектральными данными оператора $L(\tau, t)$. Восстановление коэффициента $\Omega(x, t)$ оператора $L(\tau, t)$ по спектральным данным называется обратной задачей. Коэффициент $\Omega(x, t)$ - оператора $L(\tau, t)$ определяется однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\}$. Теперь с помощью начальной функций $p_0(x + \tau)$, $q_0(x + \tau)$, $\tau \in R$, построим оператор Дирака вида $L(\tau, 0)y = \lambda y, x, \tau \in R$. Решая прямую задачу, находим спектральные данные $\{\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}\}$ оператора $L(\tau, 0)$. Отсюда следует, что $\xi_n^0(\tau + \pi) = \xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau + \pi) = \sigma_n^0(\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$. Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть пара $p(x, t)$, $q(x, t)$, $x \in R$, $t > 0$, является решением задачи Коши (1) - (3). Тогда спектральные данные

$$\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\}$$

оператора $L(\tau, t)$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \lambda_n(\tau, t) = \lambda_n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2) \quad & \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) \cdot \{q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) + \\ & + [p(\tau, t) + \xi_n(\tau, t)]^2 + \xi_n^2(\tau, t) - a(t)(p(\tau, t) + \xi_n(\tau, t))[p^2(x_0, t) + \\ & + q^2(x_0, t)] + \frac{1}{2}[b(t) + c(t)(p^2(x_1, t) + q^2(x_1, t))]\}, n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}. \quad (8)$$

Знаки $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z}$, с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

Следствие 1. Учитывая формулы следов

$$\begin{aligned} p(\tau, t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau, t) \right), q(\tau, t) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)), \end{aligned} \quad (10)$$

$$q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right), \quad (11)$$

систему дифференциальных уравнений (7) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 2. Эта теорема дает метод решения задачи (1) – (3). Для этого сначала найдем спектральные данные λ_n , $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, оператора $L(\tau, 0)$ соответствующие коэффициентам $p_0(x + \tau)$, $q_0(x + \tau)$, $\tau \in R$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau, t)$ через λ_n , $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Теперь в системе уравнения (7) с начальным условием (9) последовательно положим $\tau = x_0$ и $\tau = x_1$. Решая полученную задачу Коши, находим $\xi_n(x_0, t)$, $\sigma_n(x_0, t)$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\xi_n(x_1, t)$, $\sigma_n(x_1, t)$, $n \in \mathbb{Z}$. Затем из формулы следов (10), определим функции $p(x_0, t)$, $q(x_0, t)$, и $p(x_1, t)$, $q(x_1, t)$. После этого подставляем эти данные в систему уравнений (7) и решая задачу Коши (7) – (8) при произвольном значении τ , находим $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z}$. Из формул следов (10), определим $p(\tau, t)$ и $q(\tau, t)$, т.е. решение задачи (1)– (3).

Литература

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ, 61:1 (1971), 118-134.

2. *Итс А.Р.* Обращения гиперэллиптический интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений. Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. Матем. Механ. Астрон., 7:2 (1976), 39-46.

3. *Итс А.Р., Котляров В.П.* Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера // Докл. АН УССР. Сер.А., 1976, №11, 965-968.

4. *Смирнов А.О.* Эллиптические по t решение нелинейного уравнения Шредингера // ТМФ, 107:2 (1996), 188-200.

5. *Хасанов А.Б., Хасанов М.М.* Интегрирование нелинейного уравнения Шредингера с дополнительным членом в классе периодических функций. // ТМФ., 2019., т.199, №1, с.60-68.

6. *Домрин А.В.* О вещественно – аналогических решениях нелинейного уравнения Шрёдингера. Тр. ММО, 2014, т.75, вып.2, 205-218.

7. *Дубровин Б.А.* Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. // Функциональный анализ и его прил. – Москва, 1975. т.9. вып.3. с.41-51.

**ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В
ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ: СТАРЫЕ И НОВЫЕ
РЕЗУЛЬТАТЫ**
@ А.Б. Муравник
amuravnik@yandex.ru

УДК 517.9

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.22.

Представлен обзор старых и свежих результатов о задаче Дирихле в полупространстве для эллиптических дифференциально-разностных уравнений. Обзором охвачены два принципиально различных типа краевых данных.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, эллиптические уравнения, задачи в полупространстве, времениподобная переменная.

**Elliptic differential-difference equations in half-spaces:
old and new results**

A review of old and recent results on the Dirichlet problem in half-spaces for elliptic differential-difference equations is presented. Two qualitatively different types of boundary-value data are covered.

Keywords: differential-difference equations, elliptic equations, half-space problems, timelike variables.

Краевые задачи в полупространстве традиционно считаются характерными для *нестационарных* уравнений: единственная независимая переменная, изменяющаяся на полуоси, естественным образом трактуется, как время, все остальные переменные — пространственные, а данные, задаваемые на границе области (т. е. на гиперплоскости, ортогональной этой полуоси), трактуются, соответственно, как начальные данные. Однако, напр., задача Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве тоже корректна, причем выделенная указанным выше образом *пространственная* переменная приобретает так называемые *времяподобные* свойства — в частности, разрешающий оператор обладает полугрупповым свойством, а для решений справедлив критерий стабилизации Репникова—Эйдельмана при стремлении указанной времениподобной переменной к бесконечности. Таким образом, указанная задача обладает значительным качественным сходством с задачей Коши (с тем же самым краевым условием) для уравнения теплопроводности, что весьма

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288 А).
Муравник Андрей Борисович, д.ф.-м.н., АО «Концерн «Созвездие» (Воронеж, Россия); Andrey Muravnik (JSC “Concern “Sozvezdie”, Russia)

нетривиально: учитывая, что эти два уравнения — разных типов, даже то, что одна и та же задача является корректной для каждого из них, не очевидно.

Исследуемые задачи естественным образом разделяются на два класса — задачи с *ограниченными* краевыми данными и задачи с *интегрируемыми* краевыми данными. В классическом случае *дифференциальных* уравнений (как эллиптических, так и параболических), эта разница в постановке задачи принципиальна — она приводит к тому, что мы получаем решения с качественно различными свойствами. В частности, только в задачах первого из этих классов допустимы постоянные решения, и только решения с конечной энергией допустимы в задачах второго класса. Иными словами, критерий стабилизации Репникова—Эйдельмана — решение может иметь предел (причем не обязательно равный нулю), а может вообще не иметь его — имеет место только для задач первого класса. А в задачах второго класса решение всегда имеет нулевой предел, и основным предметом исследования является скорость убывания решения.

В рамках настоящего доклада в излагаются результаты исследований задачи Дирихле в полупространстве для эллиптических *дифференциально-разностных* уравнений, т. е. уравнений, в которых на неизвестную функцию, помимо дифференциальных операторов, действуют операторы сдвига. Такие функционально-дифференциальные уравнения в настоящее время активно исследуются во всем мире, что обусловлено как их многочисленными приложениями, не покрываемыми классическими моделями математической физики, так и чисто теоретическим интересом: *нелокальная* природа таких уравнений порождает качественно новые эффекты, отсутствующие в классическом случае дифференциальных уравнений, а многие методы исследований, привычные для теории дифференциальных уравнений, оказываются неприменимыми (таковы, напр., все методы, основанные на принципе максимума), и, соответственно, требуется разработать новые методы.

Будет показано, что принципиальная разница между типами краевых данных, имеющая место для *дифференциальных* уравнений, сохраняется и в *дифференциально-разностном* случае. Будут представлены результаты, полученные в течение последних пяти лет для задач с обоими типами краевых данных, указанными выше: разрешимость указанных задач, интегральное представление их решений формулами Пуассоновского типа, асимптотические свойства решений при неограниченном возрастании времениподобной переменной.

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НА ГРАНИЦЕ КУБА

@ Э. Мухамадиев, А.Б. Назимов, М.А. Очилова

emuhamadiev@rambler.ru, n.akbar54@mail.ru, ochilovamuhaje@gmail.com

УДК 517.95

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.23.

Рассматривается гармоническая функция в открытом кубе. Изучается вопрос существования предела гармонической функции на границе куба. Утверждается действие граничного оператора в пространстве непрерывных функций.

Ключевые слова: гармоническая функция, потенциал двойного слоя, плотность потенциала, граничные значения

ON THE LIMIT VALUES OF THE HARMONIC FUNCTION ON THE BOUNDARY OF THE CUBE

A harmonic function in an open cube is considered. The question of the existence of a limit of a harmonic function on the boundary of a cube is studied. The action of the boundary operator in the space of continuous functions is stated.

Keywords: harmonic function, double layer potential, boundary values

Рассматривается гармоническая в кубе

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x, y, z < 1\}$$

функция $u(x, y, z)$, преставленная потенциалом двойного слоя [1]

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \int \int_{\Sigma} \varphi(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial n_{(\xi, \eta, \zeta)}} \frac{1}{r} dS_{(\xi, \eta, \zeta)},$$

где

$$r = ((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2)^{1/2},$$

с заданной плотностью $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, определенной и непрерывной на границе Σ куба T . Поверхностный интеграл рассматривается как сумма шести поверхностных интегралов по граням Σ_i , $i = 1, \dots, 6$ куба T :

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^6 u_i(x, y, z).$$

Мухамадиев Эргашбой, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия); Ergashboy Mukhamadiev (Vologda State University, Vologda, Russia)

Назимов Акбар Багадурович, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия); Akbar Nazimov (Vologda State University, Vologda, Russia)

Очилова Мухайёхон Акбаровна, старший преподаватель, ХГУ имени Б. Гафурова (Худжанд, Таджикистан); Muhaiejkhon Ochilova (Gafurov State University of Khujand, Tajikistan)

Изучается существование предела функции $u(x, y, z)$ при приближении (x, y, z) к граничной точке $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ куба T . Оказывается, предел существует, но, в отличие от потенциала двойного слоя вдоль гладкой поверхности [2], различаются три случая:

- 1) (x_0, y_0, z_0) является внутренней точкой грани Σ_i ;
- 2) (x_0, y_0, z_0) является внутренней точкой ребра $\Gamma_{i,j} = \Sigma_i \cap \Sigma_j$;
- 3) (x_0, y_0, z_0) совпадает с вершиной $V_{i,j,k} = \Sigma_i \cap \Sigma_j \cap \Sigma_k$.

Заметим, что если $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma \setminus \Sigma_j$, то существует предел

$$\bar{u}_j(x_0, y_0, z_0) = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} u_j(x, y, z).$$

Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Если (x_0, y_0, z_0) является внутренней точкой грани Σ_i , то существует предел

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} u(x, y, z) = \varphi_i(x_0, y_0, z_0) + \sum_{j \neq i} \bar{u}_j(x_0, y_0, z_0).$$

Лемма 2. Если (x_0, y_0, z_0) является внутренней точкой ребра $\Gamma_{i,j} = \Sigma_i \cap \Sigma_j$, то существует предел

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} u(x, y, z) = \frac{3}{2} \varphi_i(x_0, y_0, z_0) + \sum_{k \neq i, k \neq j} \bar{u}_k(x_0, y_0, z_0).$$

Лемма 3. Если (x_0, y_0, z_0) совпадает с одной из вершин $V_{i,j,k} = \Sigma_i \cap \Sigma_j \cap \Sigma_k$, то существует предел

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} u(x, y, z) = \frac{7}{4} \varphi_i(x_0, y_0, z_0) + \sum_{l \neq i, l \neq j, l \neq k} \bar{u}_l(x_0, y_0, z_0).$$

Отсюда вытекает

Теорема 1. Функция $u(x, y, z)$ непрерывно продолжима на замыкании $\bar{T} = T \cup \Sigma$ куба T .

В банаховом пространстве $C(\Sigma)$ непрерывных на Σ функций с равномерной нормой определим оператор

$$(A\varphi)(x, y, z) = \bar{u}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma,$$

где $\bar{u}(x, y, z)$ – граничное значение потенциала двойного слоя с плотностью $\varphi \in C(\Sigma)$.

Теорема 2. *Оператор A непрерывно действует из $C(\Sigma)$ в $C(\Sigma)$.*

Полученные результаты можно считать трехмерным аналогом результатов, полученных в работе [2].

Литература

1. *Тихонов, А.Н.* Уравнения математической физики / *А.Н. Тихонов, А.А. Самарский.* – М.: Наука, 1966. – 724 с.

2. *Назимов, А.Б.* Классический и регуляризованный операторы Пуассона в пространствах непрерывных и ограниченных функций / *А.Б. Назимов, Э.М. Мухамадиев, В.А. Морозов.* – Вологда, ВоГТУ, 2010. – 148 с.

О ГОМОТОПИЧЕСКИХ КЛАССАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИЙ ОТ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

© Э. Мухамадиев, А.Н. Наимов

emhamadiev@rambler.ru, naimovan@vogu35.ru

УДК 517.938.5

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.24.

В работе исследована задача описания гомотопических классов множества \mathcal{F} положительно однородных гладких функций от трех переменных, градиенты которых не обращаются в ноль в ненулевых точках. Каждой функции $f \in \mathcal{F}$ сопоставлено дерево (конечный связный граф без циклов) $Tr(f)$, вершины которого отмечены чередующимися знаками $+$ и $-$. Доказано, что две функции $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ принадлежат одному гомотопическому классу тогда и только тогда, когда соответствующие им дерева $Tr(f_1)$ и $Tr(f_2)$ изоморфны с сохранением знаков вершин.

Ключевые слова: положительно однородная функция, гомотопический класс, дерево функции

Homotopy classes of positively homogeneous functions in three variables

The paper investigates the problem of describing homotopy classes the set \mathcal{F} of positively homogeneous smooth functions of three variables whose gradients do not vanish at non-zero points. Each function $f \in \mathcal{F}$ is associated with a tree (finite connected graph without cycles) $Tr(f)$, the vertices of which are marked with alternating signs $+$ and $-$. It is proved that two functions $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ belong to the same homotopy class if and only if the corresponding trees $Tr(f_1)$ and $Tr(f_2)$ are isomorphic with preservation of the vertex signs.

Keywords: positively homogeneous function, homotopy class, function tree

Рассмотрим множество \mathcal{F} функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям

a) $f \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \mathbb{R}^1)$;

b) $f(\lambda x) \equiv \lambda^m f(x) \quad \forall \lambda > 0$, где $m = m(f) \neq 0$;

c) $\nabla f(x) \neq 0 \quad \forall x \neq 0$, где $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$.

Две функции $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ называются гомотопными, если существует семейство функций $f(\cdot, t) \in \mathcal{F}$, $t \in [0, 1]$, непрерывно зависящее от t и

Мухамадиев Эргашбой, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия); Ergashboy Mukhamadiev (Vologda State University, Vologda, Russia)

Наимов Алижон Набиджанович, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия); Alizhon Naimov (Vologda State University, Vologda, Russia)

такое, что $\tilde{f}(\cdot, 0) = f_1$, $\tilde{f}(\cdot, 1) = f_2$. Бинарное отношение гомотопности является отношением эквивалентности, и поэтому множество \mathcal{F} разбивается на гомотопические классы.

В настоящей работе исследована задача описания гомотопических классов множества \mathcal{F} : при каких условиях две функции из \mathcal{F} принадлежат одному гомотопическому классу?. Данная задача представляет интерес при исследовании периодических и ограниченных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с главной положительно однородной нелинейностью [1].

В работе [2] доказано, что любая функция из \mathcal{F} гомотопна некоторой функции вида $g(x) = |x|^{\nu}(\langle c_1, x \rangle - d_1|x|) \cdot \dots \cdot (\langle c_p, x \rangle - d_p|x|)$, где $|x|^2 = \langle x, x \rangle$, $\langle x, y \rangle$ – евклидово скалярное произведение в \mathbb{R}^3 . При этом вопрос о гомотопности двух произвольных функций из \mathcal{F} остается открытым.

Каждой функции $f \in \mathcal{F}$ сопоставим конечный граф $Tr(f)$, вершинами которого являются связные компоненты множества

$$\Omega_0^c(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1, f(x) \neq 0\},$$

и две связные компоненты считаем смежными, если их границы пересекаются. Каждую вершину графа $Tr(f)$ отметим знаком + или -, если f положительна или отрицательна на этой вершине. Очевидно, граф $Tr(f)$ связный и число его ребер на одну единицу меньше, чем число вершин. Следовательно, $Tr(f)$ является деревом. В силу условия с) любые две смежные вершины дерева $Tr(f)$ имеют противоположные знаки. Более того, знаком одной вершины однозначно определяются знаки остальных вершин.

Два конечных дерева, вершины которых отмечены знаками + или -, назовем изоморфными с сохранением знаком вершин, если существует взаимно однозначное соответствие (отображение) между их множествами вершин при котором смежность вершин и знаки вершин сохраняются.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Две функции $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ принадлежат одному гомотопическому классу тогда и только тогда, когда соответствующие им деревья $Tr(f_1)$ и $Tr(f_2)$ изоморфны с сохранением знаков вершин*

Теорема 2. *Любое конечное дерево, вершины которого отмечены чередующимися знаками + и -, соответствует какой-либо функции $f \in \mathcal{F}$, т.е. совпадает с $Tr(f)$.*

Теорема 3. *Пусть $f \in \mathcal{F}$ и $p_+(f)$, $p_-(f)$ – число положительных и отрицательных вершин дерева $Tr(f)$. Тогда вращение $\gamma(\nabla f)$ градиента ∇f на единичной сфере $|x| = 1$ можно находить формулой*

$$\gamma(\nabla f) = p_+(f) - p_-(f). \tag{1}$$

Таким образом, множество функций \mathcal{F} разбивается на счетное число гомотопических классов и каждый гомотопический класс однозначно определяется одним конечным деревом с вершинами отмеченными чередующимися знаками $+$ и $-$.

Формула (1) выведена из формулы

$$\gamma(\nabla f) = 1 - \chi(\overline{\Omega_-(f)}), \quad (2)$$

анонсированной в работе [3], где $\chi(\overline{\Omega_-(f)})$ – характеристика Эйлера замыкания множества

$$\Omega_-(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1, f(x) < 0\}.$$

Литература

1. *Мухаммадиев Э., Наимов А.Н.* Критерии существования периодических и ограниченных решений для трехмерных систем дифференциальных уравнений // Тр. ИММ УрО РАН, **27**:1 (2021), 157-172.
2. *Mukhamadiev E., Naimov A.N.* On the homotopy classification of positively homogeneous functions of three variables // Issues Anal., **10(28)**:2 (2021), 67-78.
3. *Мухаммадиев Э.* Ограниченные решения и гомотопические инварианты систем нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. РАН, **351**:5 (1996), 596-598.

ОБРАТНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С СИММЕТРИЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

@ Ф.С. Насыров

farsagit@yandex.ru

УДК 519.2

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.25.

Предложен метод решения обратного стохастического дифференциального уравнения с симметричным интегралом по произвольному случайному процессу с непрерывными реализациями.

Ключевые слова: симметричный интеграл, стохастический интеграл Стратоновича, обратное стохастическое дифференциальное уравнение.

Inverse stochastic differential equations with symmetric integral

A method is proposed for solving a backward stochastic differential equation with a symmetric integral over an arbitrary random process with continuous realizations.

Keywords: symmetric integrals, stochastic integral of Stratonovich, backward stochastic differential equations.

Пусть дано полное вероятностное пространство с фильтрацией

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P),$$

предполагается, что фильтрация (F_t) порождена случайным процессом $Q(s)$ с непрерывными реализациями. Рассматривается обратное стохастическое дифференциальное уравнение (*BSD*-equation) вида

$$\psi(T) - \psi(t) = \int_t^T D(s, \psi(s), (q)'_v(s, Q(s))) ds + \int_t^T q(s, Q(s)) * dQ(s), \quad (1)$$

$\psi(T) = h(T, Q(T))$, $t \in [0, T]$, здесь второй интеграл в правой части уравнения (1) есть симметричный интеграл по процессу $Q(s)$. Под решением уравнения (1) понимается пара согласованных с фильтрацией (F_t) процессов $(\psi(t), q(s, Q(s)))$, которые подчинены следующим условиям

- процесс $\psi(t)$ непрерывен с вероятностью 1;

Насыров Фарит Сагитович, д.ф.-м.н., профессор, УГАТУ (Уфа, Россия); Farit Nasyrov (Ufa State Aviation Technical University, Russia)

- процесс $q(s, Q(s))$ предсказуем и симметричный интеграл $\int_t^T q(s, Q(s)) * dQ(s)$ конечен;
- при подстановке процессов $(\psi(t), q(s, Q(s)))$ в уравнение (1) с вероятностью 1 оно обращается в тождество.

Фактически процесс $q(s, Q(s))$ играет роль управления, которое заставляет основной процесс $\psi(t)$ оставаться согласованным с фильтрацией (F_t) .

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

(a) детерминированная функция $D(t, \psi, r)$ и ее частные производные $D'_\psi(t, \psi, r)$ и $D'_r(t, \psi, r)$ непрерывны;

(b) $h(t, v)$ есть детерминированная функция с непрерывными частными производными $h'_t(t, v)$, $h'_v(t, v)$, $h''_{vv}(t, v)$ и $h''_{vt}(t, v)$;

(c) функции $D'_\psi(t, \psi, r)$ и $D'_r(t, \psi, r)$ удовлетворяют условию Липшица относительно переменных ψ с липшицевыми константами, не зависящими от t, ψ, r ;

(d) с вероятностью 1 $h'_t(t, Q(0)) \neq 0$ для всех $t \in [0, T]$.

Пусть $p(t)$ есть решение задачи

$$p' = G(t, p), \quad p(T) = 1,$$

где

$$G(t, p) = \frac{1}{h'_t(t, V(0))} [D'_\psi(t, h(t, V(0)), p, h'_v(t, V(0))) h'_v(t, V(0)) p + D'_r(t, h(t, V(0)), p, h'_v(t, V(0))) h''_{vv}(t, V(0)) - h''_{tv}(t, v) p].$$

Тогда BSD-уравнение (1) имеет решение

$$\psi(t) = h(t, Q(t)) \cdot p(t), \quad q(t, Q(t)) = h'_v(t, Q(t)) \cdot p(t).$$

Литература

1. Насыров Ф.С. Симметричные интегралы и стохастический анализ. // Теория вероятностей и ее примен. 2006. **51**. N. 3. с. 496-517.
2. Насыров Ф.С. Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.
3. Nasyrov F. S. The stochastic principle of maximum in the trajectory formulation. Abstracts of the 3rd international conference on stochastic methods. June 2-9, 2019, Divnomorskoye. Probability theory and its application. 2019. **64**. N. 1. p. 181.
4. Yong J., Zhou X. Y. Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations. Springer-Verlag, New York, 1999.
5. Ma J., Yong J. Forward-backward stochastic differential equations and their applications. Springer, 1999.

УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА С ПРОИЗВОДНЫМ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛОГ

@ Г.Н. Нугманова, Ж.М. Сагидуллаева, А.М. Канкенова

nugmanovagn@gmail.com, sagidullayeva.zh@gmail.com,

ayagoz.zhantakbayeva@yandex.ru

УДК 517.951, 517.957

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.26.

В данной работе изучается геометрическая эквивалентность между нелинейным уравнением Шредингера с производным и обобщенной моделью Гейзенберга на основе теории изоморфизма алгебры Ли.

Ключевые слова: Нелинейное уравнение Шредингера, модель Гейзенберга, алгебра Ли.

Derivative Schrodinger equation and its geometric counterpart

In this paper, we study the geometric equivalence between the derivative nonlinear Schrodinger equation and the generalized Heisenberg model based on the isomorphism of the Lie algebra.

Keywords: Nonlinear Schrodinger equation, Heisenberg model, Lie algebra

Рассматривается пространственная кривая, индуцированная нелинейным уравнением Шредингера с производным

$$iq_t - q_{xx} + i(q^2 q^*)x = 0 \quad (1)$$

с соответствующей парой Лакса

$$U = \lambda^2 \sigma_3 + \lambda Q \quad (2a)$$

$$V = \lambda^4 B_4 + \lambda^3 B_3 + \lambda^2 B_2 + \lambda B_1, \quad (2b)$$

где $B_4 = -2i\sigma_3$, $B_3 = -2iQ$, $B_2 = irq\sigma_3$, $B_1 = irqQ - i \begin{pmatrix} 0 & q_x \\ -r_x & 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 1. Изоморфизм $su(2) \cong so(3)$ алгебры Ли для пары Лакса U, V

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (проект AP08857372).

Нугманова Гулгасыл Нукарбаевна, к.ф.-м.н., асс. профессор, ЕНУ (Нур-Султан, Казахстан); Gulgassyl Nugmanova (Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Сагидуллаева Жанна Муратбековна, Международный центр теоретической физики им. Ратбая Мурзакулова (Нур-Султан, Казахстан); Zhanna Sagidullayeva (Ratbay Murzakulov International centre of Theoretical Physics, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Канкенова Аягоз Мелисовна, к.ф.-м.н., ЕНУ (Нур-Султан, Казахстан); Ayagoz Kankenova (Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

(2) порождает для \mathbf{e}_3 следующее уравнение

$$\mathbf{e}_{3t} + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_{3xx} - 4\lambda \mathbf{e}_{3x} = 0,$$

которое является обобщенной интегрируемой моделью Гейзенберга при $\lambda = 0$ и отождествлении $\mathbf{S} = \mathbf{e}_3$, в то же время, при $\kappa = 0, \sigma \neq 0, \tau \neq 0$ для двух остальных базисных векторов получаются новые интегрируемые уравнения вида

$$\mathbf{e}_{1t} = a_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_{1xx} + b_1 \mathbf{e}_{1x},$$

$$\mathbf{e}_{2t} = a_2 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_{2xx} + b_2 \mathbf{e}_{2x},$$

где

$$a_1 = -\frac{\tau^2 + \sigma^2}{2\sigma_x}, b_1 = \frac{\tau_x}{\sigma} - \frac{(\tau^2 + \sigma^2)\tau}{2\sigma_x}$$

и

$$a_2 = -\frac{\tau^2 + \sigma^2}{2\tau_x}, b_2 = -\frac{\sigma_x}{\tau} + \frac{(\tau^2 + \sigma^2)\sigma}{2\tau_x}.$$

Литература

1. *Inui T., Tanabe Y., Onodera Y.* Group Theory and Its Applications in Physics, Springer Series in Solid State Science, Tokyo, 1990.
2. *Tayshieva A.G., Nugmanova G.N., Myrzakul T.R.* On equivalence of one spin system and two-component Camassa-Holm equation // Ufa Mathematical Journal, **12**:2 (2020), 50-55.
3. *Weiqi Peng, Juncai Pu and Yong Chen.* PINN Deep Learning for the Chen-Lee-Liu Equation: Rogue Wave on the Periodic Background, arXiv: 2105.13027v1 [nlin.SI].

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА

@ В.Н. Павленко, Д.К. Потапов

pavlenko@csu.ru, d.potapov@spbu.ru

УДК 517.95

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.27.

Рассматривается эллиптическая краевая задача с разрывной нелинейностью экспоненциального роста на бесконечности. Вариационным методом получена теорема существования слабого полуправильного решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: эллиптическая краевая задача, разрывная нелинейность, экспоненциальный рост, слабое решение, полуправильное решение, вариационный метод.

Elliptic equations with discontinuous nonlinearities of exponential growth

We consider an elliptic boundary value problem with a discontinuous nonlinearity of exponential growth at infinity. Using a variational method, we establish a theorem on the existence of a weak semiregular solution.

Keywords: elliptic boundary value problem, discontinuous nonlinearity, exponential growth, weak solution, semiregular solution, variational method.

Изучается задача Дирихле для уравнения эллиптического типа с разрывной нелинейностью следующего вида:

$$Lu(x) \equiv - \sum_{i,j=1}^2 (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u(x) = g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2)$$

Здесь Ω — ограниченная область класса $C^{1,1}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; L — формально самосопряжённый равномерно эллиптический в области Ω дифференциальный оператор с константой эллиптичности $\chi > 0$; коэффициенты

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740003.

Павленко Вячеслав Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, ЧелГУ (Челябинск, Россия); Vyacheslav Pavlenko (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Потапов Дмитрий Константинович, к.ф.-м.н., доцент, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия); Dmitriy Potapov (Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia)

$a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $c \in C(\bar{\Omega})$, $c(x) \geq 0$ в Ω ; $g(x, u)$ — суперпозиционно измеримая на $\Omega \times \mathbb{R}$ функция.

Предполагается, что для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет конечные односторонние пределы $g(x, u \pm) = \lim_{\eta \rightarrow u \pm 0} g(x, \eta)$ в любой точке $u \in \mathbb{R}$. На бесконечности нелинейность $g(x, u)$ допускает по фазовой переменной u рост порядка $|u|^\alpha e^{A|u|^\tau}$, где постоянные α , A и τ положительные, $\tau < 2$.

Слабым решением задачи (1), (2) называется функция $u \in H^1_\circ(\Omega)$ такая, что для любого $v \in H^1_\circ(\Omega)$ выполняется равенство

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} g(x, u(x)) v(x) dx.$$

Полуправильным решением задачи (1), (2) называется такое её слабое решение $u(x)$, что для почти всех $x \in \Omega$ значение $u(x)$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$.

Вариационным методом получен следующий результат.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) для почти всех $x \in \Omega$ верно неравенство $g(x, u-) \leq g(x, u+)$ и имеет место включение $g(x, u) \in [g(x, u-), g(x, u+)]$ для любого $u \in \mathbb{R}$;
 - 2) существуют положительные константы b , α , A и τ , $\tau < 2$, такие, что для почти всех $x \in \Omega$ справедлива оценка $|g(x, u)| \leq a(x) + b|u|^{\alpha} e^{A|u|^{\tau}}$ для любого $u \in \mathbb{R}$, где $a \in L_N(\Omega)$, $L_N(\Omega)$ — класс Орлица измеримых на Ω функций, ассоциированный с N -функцией $N(u)$, $N(u)$ дополнительная к N -функции $M(u) = |u|^{\alpha+2} e^{u^s}$, $s \in (\tau, 2)$;
 - 3) для почти всех $x \in \Omega$ верно неравенство $\int_0^u g(x, s) ds \leq (ku^2 + d(x)|u|^{\theta} + d_1(x))/2$ для любого $u \in \mathbb{R}$, где $k < \chi/\|P_1\|^2$, χ — константа эллиптичности дифференциального оператора L , P_1 — оператор вложения $H^1_\circ(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, $d \in L_{2/(2-\theta)}(\Omega)$, $\theta \in (0, 2)$, d_1 — суммируемая на Ω функция.
- Тогда задача (1), (2) имеет слабое полуправильное решение $u \in H^1_\circ(\Omega)$.

Проблема существования слабых решений эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями экспоненциального роста изучалась, например, в [1]–[6]. В отличие от [1]–[5] в данной работе не предполагается, что нелинейность $g(x, u)$ неубывающая по u , а в отличие от [6] — что для некоторого $u_0 \geq 0$ функция $g(x, u) = 0$ при $u < u_0$ и $g(x, u) > 0$ при $u > u_0$. В работах [1]–[6] полуправильные решения не рассматривались. Кроме того, при доказательстве теоремы используется вариационный подход, базирующийся на понятии квазипотенциального оператора, в отличие от традиционного подхода, где используется

обобщённая производная Кларка. Последние работы, где он был применен, [7], [8]. Отметим также, что в [7], [8] уравнения с нелинейностями экспоненциального роста не рассматривались.

Литература

1. *de Souza M., de Medeiros E., Severo U.* On a class of quasilinear elliptic problems involving Trudinger-Moser nonlinearities // *J. Math. Anal. Appl.*, **403**:2 (2013), 357-364.
2. *de Souza M., de Medeiros E., Severo U.* On a class of nonhomogeneous elliptic problems involving exponential critical growth // *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **44**:2 (2014), 399-412.
3. *de Souza M.* Existence of solutions to equations of N -Laplacian type with Trudinger-Moser nonlinearities // *Appl. Anal.*, **93**:10 (2014), 2111-2125.
4. *de Souza M.* On a class of nonhomogeneous elliptic equation on compact Riemannian manifold without boundary // *Mediterr. J. Math.*, **15**:3 (2018), art. no. 101, 11 p.
5. *de Souza M.* On a class of nonhomogeneous elliptic equations on noncompact Riemannian manifolds // *Complex Var. Elliptic Equ.*, **64**:3 (2019), 386-397.
6. *Alves C.O., Santos J.A.* Multivalued elliptic equation with exponential critical growth in \mathbb{R}^2 // *J. Differ. Equ.*, **261**:9 (2016), 4758-4788.
7. *Павленко В.Н., Потанов Д.К.* О существовании трёх нетривиальных решений резонансной эллиптической краевой задачи с разрывной нелинейностью // *Дифференц. уравнения*, **56**:7 (2020), 861-871.
8. *Павленко В.Н., Потанов Д.К.* Вариационный метод для эллиптических систем с разрывными нелинейностями // *Матем. сб.*, **212**:5 (2021), 133-152.

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА $2 < Q < 3$

@ Г.Г. Петросян, М.С. Сорока

garikpetrosyan@yandex.ru, mariya.afanasowa@yandex.ru

УДК 517.95

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.28.

Мы рассматриваем разрешимость периодической задачи для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка $2 < q < 3$ в банаховом пространстве, на основе метода функции Грина и теории топологической степени для уплотняющих многозначных отображений.

Ключевые слова: дифференциальное включение дробного порядка, полулинейное дифференциальное включение, периодическая задача, мера некомпактности, уплотняющий оператор.

On the solvability of the periodic problem for semilinear differential inclusions of fractional order $2 < q < 3$

We consider the solvability of the periodic problem for semilinear differential inclusions of fractional order $2 < q < 3$ in a Banach space, based on the Green's function method and topological degree theory for condensing multivalued maps.

Keywords: fractional-order differential inclusion, semilinear differential inclusion, periodic problem, measure of noncompactness, condensing operator.

Мы рассматриваем в сепарабельном банаховом пространстве E для полулинейных дифференциальных включений дробного порядка $q \in (2, 3)$ следующего вида:

$${}^C D^q x(t) \in \lambda x(t) + F(t, x(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

существование решений, подчиняющихся периодическим условиям:

$$x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T), \quad x''(0) = x''(T), \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения России в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009) и гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук, проект МК-338.2021.1.1.

Петросян Гарик Гагикович, к.ф.-м.н., доцент, ВГПУ (Воронеж, Россия); Garik Petrosyan (Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia)

Сорока Мария Сергеевна, к.ф.-м.н., доцент, ВГПУ (Воронеж, Россия); Maria Soroka (Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia)

где ${}^C D^\alpha$ – дробная производная Капуто, $\lambda > 0$ и $F: [0, T] \times E \rightarrow E$ – мультиотображение с выпуклыми компактными значениями, удовлетворяющее условиям:

(F1) для любого $\xi \in E$ мультифункция $F(\cdot, \xi): [0, T] \rightarrow E$ допускает измеримое сечение;

(F2) для п.в. $t \in [0, T]$ мультиоператор $F(t, \cdot): E \rightarrow E$ – полунепрерывный сверху;

(F3) существует функция $\alpha \in L^{\infty}_+[0, T]$, такая, что

$$\|F(t, \xi)\|_E \leq \alpha(t)(1 + \|\xi\|_E);$$

(F4) существует функция $\mu \in L^{\infty}([0, T])$ такая, что для каждого ограниченного множества $\Delta \subset E$:

$$\chi(F(t, \Delta)) \leq \mu(t)\chi(\Delta),$$

для п.в. $t \in [0, T]$, χ – мера некомпактности Хаусдорфа в E .

Теорема 1. При выполнении условий (F1) – (F4), если

$$\frac{k}{\lambda} < 1,$$

где $k = \max\{\|\alpha\|_{\infty}, \|\mu\|_{\infty}\}$, задача (1)–(2) имеет решение.

Литература

1. Ахмеров Р.Р., Каменский М.И. Ко второй теореме Н.Н. Боголюбова в принципе усреднения для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Дифференциальные уравнения, **10:3** (1974), 537.
2. Каменский М.И., Макаренко О.Ю., Нистри П. Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром // Доклады Академии наук, **388:4** (2003), 439-442.
3. Каменский М.И., Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О полугруппе в задаче диффузии на пространственной сети // Доклады Академии наук. **368:2** (1999), 157-159.
4. Петросян Г.Г. Об антипериодической краевой задаче для полулинейного дифференциального включения дробного порядка с отклоняющимся аргументом в банаховом пространстве // Уфимский математический журнал, **12:3** (2020), 71-82.
5. Gurova I.N., Kamenskii M.I. On the method of semidiscretization in the problem on periodic solutions to quasilinear autonomous parabolic equations // Differential Equations, **32:1** (1996), 106-112.
6. Johnson R., Nistri P., Kamenskii M. On periodic solutions of a damped wave equation in a thin domain using degree theoretic methods // Journal of Differential Equations, **140:1** (1997), 186-208.
7. Kamenskii M., Makarenkov O., Nistri P. An alternative approach to study bifurcation from a limit cycle in periodically perturbed autonomous systems // Journal of Dynamics and Differential Equations, **23:3** (2011), 425-435.

8. *Kamenskii M.I., Obukhoskii V.V.* Condensing multioperators and periodic solutions of parabolic functional-differential inclusions in Banach spaces // *Nonlinear Analysis*, **23**:3 (1993), 781-792.

9. *Kamenskii M., Zecca P., Obukhovskii V.* Optimal feedback control for a semilinear evolution equation // *Journal of Optimization Theory and Applications*, **82**:3 (1994), 503-517.

10. *Kamenskii M.I., Obukhoskii V.V., Petrosyan G.G., Yao J.C.* On a Periodic Boundary Value Problem for a Fractional-Order Semilinear Functional Differential Inclusions in a Banach Space // *Mathematics*, **7**:12 (2019), 5-19.

11. *Kamenskii M.I., Obukhoskii V.V., Petrosyan G.G., Yao J.C.* On the Existence of a Unique Solution for a Class of Fractional Differential Inclusions in a Hilbert Space // *Mathematics*, **9**:2 (2021), 136-154.

12. *Kamenskii M.I., Petrosyan G.G., Wen C.-F.* An Existence Result for a Periodic Boundary Value Problem of Fractional Semilinear Differential Equations in a Banach Space // *Journal of Nonlinear and Variational Analysis*, **5**:1 (2021), 155-177.

13. *Petrosyan G.* Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order // *The Bulletin of Irkutsk State University. series: Mathematics*, **34** (2020), 51-66.

ИЗУЧЕННЫЕ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ЧЕТЫРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ПЛОСКОСТИ

@ Р. Пиров
pirov60@mail.ru

УДК 66.011

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.29.

В работе исследуется один класс нелинейных систем указанные в заглавии.

Ключевые слова: многообразия решения, переопределенные системы, условия совместности.

Studied one class of systems of four second-order differential equations with two unknown functions on the plane

The paper investigates one class of nonlinear systems in the title.

Keywords: varieties of solutions, overdetermined systems, compatibility conditions.

Рассмотрим систему

$$U_{xy}, U_{yy}, V_{yy}, V_{xy} = f^k(x, y, U, V, U_x, U_y, V_x, V_y, U_{xx}, V_{xx}), \quad (1)$$

где $k = \overline{1, 4}$, $(x, y) \in R^2$, неизвестные U и V принадлежать классу C^4 , а правые части C^3 .

Эта система отобрана из 15 всевозможных подобных типов, а именно, содержащие в правых частях две различные производные второго порядка из шести $U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}, V_{xx}, V_{xy}, V_{yy}$.

Наблюдается интересная картина: если в шести первых системах поменять U на V , то получим следующие шесть других систем, чего нельзя сказать о трех последних выше цитированных (они новых систем не дают). Оговоримся сразу, что непосредственной проверкой установлено следующее: все остальные 14 систем исследуются аналогичной схемой, как (1), и допускают качественно сходные результаты.

Возвращаясь к системе (1), применяем к ней замену принимающий следующий

$$\begin{cases} U_x = P(x, y), & U_y = q(x, y), & V_x = \theta(x, y), & V_y = \tau(x, y), \\ P_x = W(x, y), & P_y = f'(x, y, U, V, P, q, \theta, \tau, W, t), \\ q_x, q_y = f^i(x, y, U, V, P, q, \theta, \tau, W, t), & i = 1, 2, \\ \theta_x = t(x, y), \theta_y = f^4(x, y, U, V, P, q, \theta, \tau, W, t), \\ \tau_y, \tau_x = f^k(x, y, U, V, P, q, \theta, \tau, W, t), & k = 1, 3. \end{cases} \quad (2)$$

и

$$\begin{cases} -f_W^1 \cdot W_x + 1 \cdot W_y - f_t^1 \cdot t_x + 0 \cdot t_y = L^1, \\ -f_W^2 \cdot W_x + f_W^1 \cdot W_y - f_t^2 \cdot t_x + f_t^1 \cdot t_y = L^2, \\ -f_W^4 \cdot W_x + 0 \cdot W_y - f_t^4 \cdot t_x + 0 \cdot t_y = L^3, \\ -f_W^3 \cdot W_x + f_W^4 \cdot W_y - f_t^3 \cdot t_x + f_t^1 \cdot t_y = L^4, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} L^1 &= f_x^1 + f_U^1 \cdot P + f_V^1 \cdot \theta + f_p^1 \cdot W + f_q^1 \cdot f^1 + f_\theta^1 \cdot t + f_\tau^1 \cdot f^4, \\ L^2 &= f_x^2 - f_y^1 + f_U^2 \cdot P - f_U^1 \cdot q + f_V^2 \cdot \theta - f_v^1 \cdot \tau + f_p^2 \cdot W - f_p^1 \cdot f^1 + \\ &\quad + f_q^2 \cdot f^1 - f_q^1 \cdot f^2 + f_\theta^2 \cdot t - f_\theta^1 \cdot f^4 + f_\tau^2 \cdot f^3, \\ L^3 &= f_x^4 + f_U^4 \cdot P + f_V^4 \cdot \theta + f_p^4 \cdot W + f_q^4 \cdot f^1 + f_\theta^4 \cdot t + f_\tau^4 \cdot f^4, \quad (4) \\ L^4 &= f_x^3 - f_y^4 + f_U^3 \cdot P - f_U^4 \cdot q + f_V^3 \cdot \theta - f_v^4 \cdot \tau + f_p^3 \cdot W - f_p^4 \cdot f^1 + \\ &\quad + f_q^3 \cdot f^1 - f_q^4 \cdot f^2 + f_\theta^3 \cdot t - f_\theta^4 \cdot f^4 + f_\tau^3 \cdot f^4 - f_\tau^4 \cdot f^3. \end{aligned}$$

Если определитель четвертого порядка, составленный из коэффициентов при W_x, W_y, t_x и t_y системы (3), отличен от нуля (а это равносильно $\Delta = \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 \neq 2, f_t^1 \neq 0$; значение приводится $\alpha_k, \beta_k, k = 1, 2$ ниже), то

$$W_x, W_y, t_x, t_y = f^j(x, y, U, V, P, \varsigma, \theta, \tau, W, t), \quad j = \overline{5, 8}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \cdot f^5 &= \beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2, \quad \Delta \cdot f^6 = d_1\gamma_2 - d_2\gamma_1, \\ f_t^1 \cdot f^7 &= f^6 - f_W^1 \cdot f^5 - L^1, \\ (f_t^1) \cdot f^8 &= (f_t^1 \cdot f_W^2 - f_W^1 \cdot f_t^2) \cdot f^5 + (f_t^2 - f_t^1 \cdot f_W^1) \cdot f^6 + \\ &\quad + f_t^2 \cdot L^1 + f_t^1 \cdot L^2 \quad (6) \\ \alpha_1 &= f_w^1 f_t^1 f_t^4 - (f_t^1)^2 f_w^4 - f_t^1 f_w^2 + f_w^1 f_t^2, \quad \alpha_2 = f_w^1 f_t^3 - f_t^1 \cdot f_w^3 + f_t^1 f_w^2 - f_w^2 f_t^2, \\ \beta_1 &= f_t^1 (f_w^1 - f_t^4) - f_t^2, \quad \beta_2 = f_t^1 (f_w^4 - f_t^1) - f_t^3, \\ \gamma_1 &= (f_t^2 - f_t^1 f_t^4) L' + f_t^1 \cdot L^2 + (f_t^1)^2 L^3, \quad \gamma_2 = f_t^1 \cdot L^2 - (f_t^3 - f_t^2) L' - f_t^1 \cdot L^2. \end{aligned}$$

Условиями совместности п.д.- системы (2) (5) (эквивалентной (1)) будут $D_y f^5 \equiv d_x f^6$ и $D_y f^7 \equiv d_x f^8$. Заметим, что для нее имеет место следующее уравнений многообразия решения системы в одних случаях содержат не более восьми произвольных постоянных, а в других произвольную функцию.

Пример.

$$U_{xy} = V_{xx}, U_{yy} = V_{xx}, V_{xy} = U_{xx} + V_{xx}, V_{yy} = V_{xx}.$$

$$U(x, y) = \frac{c_2}{2}x^2 + c_1xy + c_5x + \frac{c_1y^2}{2} + c_6y + c_7$$

Ответ:

$$V(x, y) = \frac{c_1x^2}{2} + (c_1 + c_2)xy + c_3x + \frac{c_1y^2}{2} + c_4y + c_8.$$

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

© Р. Пиров, Ф.Ш. Рахимзода

pirov60@mail.ru

УДК 66.011

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.30.

В работе исследуются некоторые нелинейные переопределенные системы второго порядка. Найдены явные условия совместности, доказаны теоремы существования и единственности решений.

Ключевые слова: многообразия решения, переопределенные системы, условия совместности.

Investigation of some overdetermined second-order systems with three unknown functions in space

The paper investigates some nonlinear overdetermined systems of the second order. Explicit conditions of compatibility are found, theorems of existence and uniqueness of solutions are proved.

Keywords: solution varieties, overdetermined systems, compatibility conditions.

Для линейные системы

$$L^k U = \sum_{j=1}^n a_{k_j}(x_1, x_2, \dots, x_k, U_1, U_2, \dots, U_k) \partial_{k_j} U = 0, k = \overline{1, m} \quad (1)$$

теория которой связана именем Якоби. В современном изложение теории этой системы синтезированы теоремой Фробениуса.

Настоящая статья, посвящена изучению вопросов совместности и однозначной разрешимости переопределенных систем от пяти дифференциальных уравнений (д.у.):

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{xz}, U_{zy}, U_{zz} = f^i(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}), \\ i = \overline{1, 5}, \quad (x, y, z) \in R^3, \quad (3)$$

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{yy}, V_{xx}, V_{yy} = f^i(x, y, z, U, V, U_x, U_y, V_x, V_y, V_{xy}), \\ i = \overline{1, 5}, \quad (x, y, z) \in R^3, \quad (4)$$

Пиров Рахмон, ТГПУ им.С.Айни
Рахимзода Ф.Ш., ТГПУ им.С.Айни

Использование в системах (3) и (4) одинакового обозначения $\alpha^i U + \beta^i V + \gamma^i W + \delta^i$, f^i , и f^k функций правой части от различного числа аргументов оправдано тем, что они изучаются независимо друг от друга. В этих системах неизвестные функции U, V и W зависят от x, y, z в основном ищутся в $\Pi_0(a, b)$ класса C^3 или C^4 ; здесь $\Pi_0 = \{(x, y, z) : |x - x_0| < a, |y - y_0| < a, |z - z_0| < a\}$ при некотором $a > 0$.

Основной метод исследования состоит в замене производных первого и второго порядка на новые неизвестные функции, переходе к системам с большим числом неизвестных и в установлении связей с достаточно изученными системами в полных дифференциалах (п.д. - система).

2. Переопределённые системы пять дифференциальных уравнений второго порядка с одной (3) и двумя (4) неизвестными функциями.

Оговоримся сразу, что системы с четырьмя уравнениями в основном подробно изучены профессором Р. Пировым. К примеру рассматривая систем

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz} = f^i(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}), \quad i = \overline{1, 4}, \quad (5)$$

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz} = f^i(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}, U_{zz}), \quad i = \overline{1, 4}, \quad (6)$$

установлена что нелинейные системы четырёх уравнений указанные выше приводятся к п.д.-система с шестого неизвестными функциями.

В данной работе, нами рассматриваются системы пять уравнений вида (3) и (4) отличающие от (5) и (6) во - первых тем, что каждая из них содержать на одно уравнение больше и во - вторых вторая система (т.е. (4)) зависят от двух неизвестных функций.

Система (3), где $f^i \in C^3(\Pi)$, $U \in C^4(\Pi)$, заменой $U_x = p(x, y, z)$, $U_y = q(x, y, z)$, $U_z = R(x, y, z)$, $U_{yy} = q_y = R_y = \tau(x, y, z)$ с учётом обязательного тождественного выполнения равенств $q_x = p_y (\equiv f^2)$, $q_x = R_y (\equiv f^4)$, $p_z = R_z (\equiv f^3)$ и р.с.п. $p_{yz} = p_{zy}$, $q_{yz} = q_{zy}$, $R_{yz} = R_{zy}$, при $f_\tau^2 \neq 0$, $f_\tau^5 - f_\tau^3 \cdot f_\tau^4 \neq 0$ приводится к системе

$$\begin{cases} U_x = p, U_y = q, U_z = R \\ p_x, p_y, p_z, R_y, R_z = f^j(x, y, x, p, q, R, \tau), j = \overline{1, 5}, \\ R_x = f^3, q_x = f^2, q_y = \tau, q_z = f^4, \\ \tau_x, \tau_y, \tau_z = f^k(x, y, x, p, q, R, \tau), k = 6, 7, 8. \end{cases} \quad (7)$$

Тождественное относительно U, p, q, R, τ выполнение семь развернутых равенство смешанных производных.

$$R_{xy} = R_{yz}, R_{xz} = R_{zx}, q_{xy} = q_{yx}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (8)$$

в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0, z_0, U_0, p_0, q_0, R_0, \tau_0)$ будут условиями полной интегрируемости. Задавая задачу с начальными данными

$$[U]_0 = c_1, [U_x]_0 = c_2, [U_y]_0 = c_3, [U_z]_0 = c_4, [U_{yy}]_0 = c_5, \quad (9)$$

доказана теорема утверждающая однозначную разрешимость задачу (3) (9).

Для системы (4) на плоскости осуществляется замена $U_x = p(x, y), U_y = q(x, y), V_x = \tau(x, y), V_y = \theta(x, y) V_{yy} = \theta_y(x, y) = t(x, y)$. Тогда в силу этих замен очевидных тождеств $p_y \equiv q_x, \tau_y \equiv \theta_x$, и р.с.п. $p_{xy} = p_{yx}, q_{xy} = q_{yx}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \theta_{xy} = \theta_{yx} (f_t^1 \cdot f_t^3 - (f_t^2)^2 \neq 0, f_t^4 - (f_t^5)^2 \neq 0$ приходим к п.д. - системе относительно семи неизвестных функций $U, V, p, q, \tau, \theta, t$, совместность которой зависят от соотношения

$$\begin{aligned} H(x, y, U, V, p, q, \tau, \theta, t) = & f_y^6 - f_x^7 + f_U^6 \cdot q - f_U^7 \cdot p + f_V^6 \cdot \tau + f_p^6 \cdot f^2 - \\ & - f_p^7 \cdot f^1 + f_q^6 \cdot f^3 - f_q^7 \cdot f^2 + f_\tau^6 \cdot f^5 - f_\tau^7 \cdot f^4 + \\ & + f_t^6 \cdot t - f_\theta^7 \cdot f^5 + f_t^6 \cdot f^7 - f_t^7 \cdot f^6 = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Задача с начальными данными задается формулами

$$\begin{aligned} [U]_0 = C_1, [V]_0 = C_2, [U_x]_0 = C_3, [U_y]_0 = C_4, [V_x]_0 = C_5, \\ [V_y]_0 = C_6, [U_{yy}]_0 = C_7, \end{aligned} \quad (11)$$

Теорема Пусть дана система (4) для которой выполняются вышеуказанные условия. Тогда при тождественном выполнении условия (10), $\alpha < \min(\alpha, \frac{b}{M}), M = \max |f^i|, i = \overline{1, 5}$, задача (4) (11) в классе $C^4(\Pi_0)$ разрешима единственным образом.

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ДВУСТОРОННИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС

@ А.Э. Рассадин

brat_ras@list.ru

УДК 517.938

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.31.

В докладе даны примеры динамических систем как с непрерывным, так и с дискретным временем, с фазовым пространством в виде множества действительных двусторонних последовательностей. Показана связь этих примеров с динамическими системами в конечномерных пространствах, обладающими режимами детерминированного хаоса.

Ключевые слова: коммутативная алгебра с единицей, поток, каскад.

Dynamical systems in the space of double-sided sequences and deterministic chaos.

The report gives examples of dynamical systems with both continuous and discrete time with a phase space in the form of a set of real double-sided sequences. The connection of these examples with dynamical systems in finite-dimensional spaces with regimes of deterministic chaos is demonstrated.

Keywords: commutative algebra with unity element, flow, cascade

Пусть Λ — пространство всех двусторонних суммируемых действительных последовательностей, т.е.

$$x = (\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in \Lambda,$$

если конечна сумма ряда из её членов:

$$\langle x \rangle \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n. \quad (1)$$

Величину (1) будем называть псевдосредним значением последовательности $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$.

Рассадин Александр Эдуардович, магистрант, Высшая школа экономики (Нижний Новгород, Россия); Alexander Rassadin (Higher School of Economics, Russia)

Если $x \in \Lambda$ и $y \in \Lambda$, то можно определить их произведение $x \star y$ как двустороннюю последовательность с членами:

$$(x \star y)_n \equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k y_{n-k}. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) легко вывести, что:

$$\langle x \star y \rangle \equiv \langle x \rangle \langle y \rangle, \quad (3)$$

значит, $x \star y \in \Lambda$ и Λ — коммутативная алгебра с единицей.

Предположим далее, что элементы алгебры Λ являются функциями непрерывного времени t : $x(t), y(t), z(t), \dots \in \Lambda$, тогда на Λ можно задавать фазовые потоки с помощью счётномерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим пример такой системы:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma y - \sigma x \\ \frac{dy}{dt} &= r x - x \star z - y, \\ \frac{dz}{dt} &= -b z + x \star y \end{aligned} \quad (4)$$

или в почленной записи:

$$\begin{aligned} \frac{dx_n}{dt} &= \sigma y_n - \sigma x_n \\ \frac{dy_n}{dt} &= r x_n - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k z_{n-k} - y_n, \\ \frac{dz_n}{dt} &= -b z_n + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k y_{n-k} \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sigma, r, b \in \mathbb{R}$ — её параметры, а $n \in \mathbb{Z}$.

Применяя к обеим частям системы (4)-(5) операцию (1) и используя формулу (3), получим, что временная эволюция псевдосредних $\langle x(t) \rangle$, $\langle y(t) \rangle$ и $\langle z(t) \rangle$ определяется известной системой Лоренца [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle x \rangle}{dt} &= \sigma \langle y \rangle - \sigma \langle x \rangle \\ \frac{d\langle y \rangle}{dt} &= r \langle x \rangle - \langle x \rangle \langle z \rangle - \langle y \rangle, \\ \frac{d\langle z \rangle}{dt} &= -b \langle z \rangle + \langle x \rangle \langle y \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

демонстрирующей странный аттрактор в широком диапазоне своих параметров [1].

Динамическую систему на алгебре Λ можно задать и в дискретном времени, например, пусть:

$$x(m) = \lambda x(m-1) - \lambda x(m-1) \star x(m-1), \quad m \in \mathbb{N}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

или в почленной записи:

$$x_n(m) = \lambda x_n(m-1) - \lambda \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k(m-1) x_{n-k}(m-1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (8)$$

тогда, переходя в системе (7) (или (8)) к псевдосредним, получим, что:

$$\langle x(m+1) \rangle = \lambda \langle x(m) \rangle (1 - \langle x(m) \rangle). \quad (9)$$

Если $\langle x(0) \rangle \in [0, 1]$, то при $\lambda \in (0, 4]$ это отображение является отображением отрезка $[0, 1]$ в себя. Как хорошо известно, в этом случае при возрастании параметра λ от 0 до 4 отображение (9) демонстрирует переход к хаотической динамике через серию бифуркаций удвоения периода [2].

Динамические системы на Λ , дающие при взятии псевдосредних иные известные системы с детерминированным хаосом, такие как система Рёсслера или отображение Эно (см. [3] и ссылки там), выписываются с помощью соотношения (3) очевидным образом.

Литература

1. *Lorenz E.N.* Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of the Atmospheric Sciences, **20:2** (1963), 130-141.
2. *Feigenbaum M.J.* Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations // Journal of Statistical Physics, **19** (1978), 25-52.
3. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос: курс лекций. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В РЕГУЛЯРНОЙ ГРАНИЧНОЙ ТОЧКЕ

@ Р.Т. Садриева, Р.Д. Муртазина, Н.А. Сидельникова
zhiber.na@gmail.com

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.32.

В работе проводится исследование уравнения Шредингера нерелятивистского потенциального рассеяния двух частиц при условии зависимости потенциалов взаимодействия только от расстояния x между частицами. Показано, что решение $R(\lambda, r)$ является аналитической функцией λ .

Ключевые слова: радиальное уравнение, парциальные волны, потенциальное рассеяние

Investigation of the radial equation at a regular boundary point

The Schredinger equation for nonrelativistic potential scattering of two particles under the condition that the interaction potentials depend only on the distance x between the particles has been researched in this work. It is shown that the solution $R(\lambda, r)$ is an analytic function λ .

Keywords: radial equation, partial waves, potential scattering

При квантовомеханическом описании нерелятивистского потенциального рассеяния движение двух частиц в системе их центра тяжести описывается уравнением Шредингера (см. [?])

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\Delta\varphi(\vec{x}) + (u(x) - E)\varphi(\vec{x}) = 0. \quad (1)$$

Здесь \hbar - постоянная Планка, $M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - приведенная масса, m_1 и m_2 - массы частиц, $u(x)$ - потенциал, x - относительное расстояние между частицами, E - энергия системы, φ - волновая функция.

Данное уравнение из-за сферической симметрии потенциала удобно решать в сферической системе координат, записывая волновую функцию $\varphi(r, \phi, \theta)$ как произведение радиальной $R(r)$ и угловой $Y(\phi, \theta)$ функций

$$\frac{1}{r}R(r)Y(\phi, \theta) = R(r)\Phi(\phi)F(\theta).$$

Садриева Рита Тагировна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Sadrieva Rita (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Муртазина Регина Димовна, к.ф.-м.н., доцент, УГАТУ (Уфа, Россия); Murtazina Regina (USATU, Ufa, Russia)

Сидельникова Наталья Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Sidelnikova Natalia (Bashkir State University, Ufa, Russia)

В работе проводится исследование уравнения Шредингера нерелятивистского потенциального рассеяния двух частиц при условии зависимости потенциалов взаимодействия только от расстояния x между частицами. Показано, что решение $R(\lambda, r)$ является аналитической функцией λ .

Литература

1. *В. де Альфаро, Т. Редже*, Потенциальное рассеяние, М.: Мир. Том III. Часть 2. 1966. 268 с.
2. *А. Мессиа*, Квантовая механика, М.: Наука. Том I. 1978. 480 с.
3. *Я.Т. Султанаев, Р.Т. Исламова* Исследование уравнения для парциальных волн с быстро осциллирующим потенциалом Математ. заметки. Т.79, вып 2. 2006. С. 288-293.
4. *Э. Камке* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 4 изд. М.: Наука. 1971. 576 с.

**ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО -
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ
—ДУФФИНГА С ПОСТОЯННЫМИ ОТКЛОНЕНИЯМИ
АРГУМЕНТА**

@ Д.С. Сафаров, С.К. Миратов
safarov-5252@mail.ru, safarkhonop@mail.ru

УДК 517.95

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.33.

В работе найдено точное решение уравнения Ван дер Поля - Дуффинга с отклоняющимся аргументом с помощью эллиптической функции - дельта амплитуды - dnu .

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение, периодическое решение, отклонения аргумента, эллиптические функции.

**Exact solution of the functional - differential van der
Pol-Duffing equation with constant deviations of the
argument**

An exact solution of the Van der Pol - Duffing equation with a deviating argument using elliptic function - amplitude delta - dnu .

Keywords: Differential equation, periodic solution, argument deviations, elliptic functions.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка [1],[2]

$$\varphi''(t) - \alpha\varphi'(t) + \beta\varphi'(t + \tau_1)\varphi(t + \tau_2)\varphi(t + \tau_3) + a\varphi(t) + b \prod_{j=1}^3 \varphi(t + h_j) = 0, \quad (1)$$

где коэффициенты α, β, a, b и отклонения $\tau_j, h_j, j = \overline{1, 3}$ — постоянные. Уравнение (1) при $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ и $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ примет вид

$$\varphi''(t) - \varphi'(t)(\alpha - \beta\varphi^2(t)) + a\varphi(t) + b\varphi^3(t) = 0. \quad (2)$$

Это уравнение, при $\alpha = \beta > 0, b = 0$, известно под названием уравнения Ван дер Поля, а при $\alpha = \beta = 0, a \neq 0, b \neq 0$, как уравнение Дуффинга [3],[4].

Сафаров Джумабой, д.ф.-м.н., профессор, БохГУ (Бохтар, Таджикистан); Safarov Dzhumaboy (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

Миратов С.К., БохГУ (Бохтар, Таджикистан); Miratov Safarkhon (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

Очевидно, что уравнение (2) при $\alpha = \beta > 0$, и $a = -b$ допускает тривиальное решение $\varphi(t) = 1$.

Цель настоящей заметки является нахождение нетривиального ограниченного периодического решения уравнения (1), при некоторых значениях $\tau_j, h_j, j = \overline{1, 3}$.

Если $\varphi(t)$ дважды дифференцируемое периодическое решение, с периодом $T > 0$, уравнения (1) и все отклонения τ_j, h_j – кратны T , то $\varphi(t)$ является решением уравнения (2).

К тому же, если не все τ_j – кратны T , например h_j, τ_1, τ_2 – кратны T а τ_3 – не кратен T , то $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi''(t) - \varphi'(t) [\alpha - \beta\varphi(t)\varphi(t + \tau_3)] + a\varphi(t) + b\varphi^3(t) = 0. \quad (3)$$

В этом случае уравнения (1) и (3) называют функционально-эквивалентные системы, относительно периодической функции $\varphi(t), \varphi(t+T) = \varphi(t)$ [2]. Покажем, что при определенных значениях $\tau_j, h_j, j = \overline{1, 3}$, решение уравнения (1) можно найти через решение уравнения Дуффинга

$$\psi''(t) + a\psi(t) + b\psi^3(t) = 0. \quad (4)$$

В монографии [4] решение уравнения (4) при $a > 0, b < 0$ найдено с помощью эллиптической функции Якоби - эллиптический синус - $Asnu$. Найдено явный вид амплитуда A , частота ω , и модуль функции $k, 0 < k^2 < 1$, через a, b

Как показано в [5], решение уравнения Дуффинга с постоянными отклонениями аргумента можно найти с помощью функции дельта-амплитуды

$$\varphi(t) = Adn(\omega t, k) = Adnu, \quad (5)$$

где A – амплитуда, ω – частота-колебания, k – модуль функции.

Функция $Adnu$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi''(t) - (2 - k^2)\omega^2\varphi(t) + \frac{2\omega^2}{A^2}\varphi^3(t) = 0 \quad (6)$$

и имеет период $T = 2K(k)/\omega$, где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода [4], а на полупериоде K удовлетворяет функциональному соотношению

$$\varphi(u + K)\varphi(u) = k', \quad (7)$$

k' – дополнительный модуль для $k, k^2 + k'^2 = 1, 0 < k'^2 < 1$.

Теперь отыскиваем решение уравнения (1) в виде (5), при условии, что модуль функции k^2 – известно и все числа $\omega\tau_1, \omega\tau_3, \omega\tau_j, j = \overline{1, 3}$ кратны периоду $2K(k), \omega\tau_3 = K(k)$ и $a < 0, b > 0$.

Теорема. Пусть в уравнении (1) все коэффициенты α, β, a, b отличны от нуля $a < 0, b > 0, \alpha\beta < -a\beta$, и модуль функции k^2 и ее амплитуда ω^2 вычислены формулами

$$k^2 = (1 - (B - \sqrt{B^2 - 1}))^2, \quad B = -a\beta/\alpha b, \quad B > 1 \quad \text{и} \quad \omega^2 = -a(2 - k^2).$$

Тогда уравнение (1) при условии, что $\omega\tau_1, \omega\tau_2, \omega h_j, j = \overline{1, 3}$ кратны $2K(k)$ и $\omega\tau_3 = K(k)$, допускает однопараметрические ограниченные периодические решения вида

$$\varphi(t) = \pm \sqrt{-\frac{2a}{b(2 - k^2)}} dn \left[\sqrt{-\frac{2a}{2 - k^2}} t, k \right].$$

Литература

1. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. - М., Наука, 1971.- 296с.
2. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1984г.
3. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы в нелинейной механике. - М., Наука, 1981.
4. Сикорский Ю.С. Элементы теории эллиптических функций. - М., Наука, 2006.
5. Сафаров Д.С., Миратов С.К. О решение уравнения Дуффинга с многими постоянными отклонениями аргумента. - Вестник БГУ. - 2019. - 2/2 (63). - С. 12-16.

ОТ ВИХРЕЙ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ К УРАВНЕНИЯМ ЗАЙБЕРГА–ВИТТЕНА

@ А.Г. Сергеев

sergeev@mi-ras.ru

УДК 517

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.34.

Вихри Гинзбурга–Ландау — это статические решения уравнений Гинзбурга–Ландау, возникающих в теории сверхпроводимости. Они напоминают гидродинамические вихри, чем и объясняется их название. Если включить в рассматриваемой модели время, то вихри начинают двигаться и могут сталкиваться. Например, два вихря, движущихся по прямой навстречу друг другу, рассеиваются под прямым углом. Для описания динамики вихрей можно воспользоваться т.н. адиабатическим пределом, устремляя скорость движения вихрей к нулю. Предельное поведение вихревых траекторий описывается геодезическими на пространстве вихрей в метрике, задаваемой кинетической энергией.

Оказывается у этой модели есть нетривиальный 4-мерный аналог, описываемый уравнениями Зайберга–Виттена. Это уравнения на 4-мерных римановых многообразиях, являющиеся предельным случаем суперсимметричной теории Янга–Миллса. Особый интерес представляет для нас симплектические многообразия, обладающие наряду с римановой метрикой еще и совместимой с ней почти комплексной структурой. Если ввести в уравнения Зайберга–Виттена масштабный параметр, то можно перейти в них к адиабатическому пределу, устремляя этот параметр к бесконечности. Предельные траектории описываются псевдоголоморфными кривыми, которые можно рассматривать как комплексные аналоги геодезических Гинзбурга–Ландау. Решения уравнений Гинзбурга–Ландау в адиабатическом пределе редуцируются к семействам вихрей Гинзбурга–Ландау в плоскостях, нормальных к предельной псевдогомоморфной кривой. Таким образом, уравнения Зайберга–Виттена можно рассматривать как комплексный аналог динамических уравнений Гинзбурга–Ландау, в котором роль "времени" играет параметр, пробегающий предельную псевдоголоморфную кривую.

Ключевые слова: вихри Гинзбурга–Ландау, уравнения Зайберга–Виттена

Keywords: Ginzburg - Landau vortices, Seiberg - Witten equations

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИНВАРИАНТНЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

@ Д.И. Синельщиков
dsinelshchikov@hse.ru

УДК 517.925

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.35.

В докладе рассматривается семейство нелинейных осцилляторов с кубической, относительно первой производной, нелинейностью. Показано что нелокальные преобразования сохраняют автономные инвариантные кривые для уравнений из рассматриваемого семейства. Также демонстрируется возможность построения в параметрическом виде автономного первого интеграла для одно из двух уравнений, связанных нелокальными преобразованиями, при условии что известно общее решение другого уравнения. Результаты иллюстрируются на примере классов эквивалентности для двух уравнений типа Пенлеве.

Ключевые слова: нелокальные преобразования, первые интегралы, инвариантные кривые.

Nonlocal transformations and integrable nonlinear oscillators

We consider a family of nonlinear oscillators that is cubic, with respect to the first derivative. We show that certain nonlocal transformations preserve autonomous invariant curves for the equations from the studied family. We also demonstrate that an autonomous first integral for one of two non-locally related equations can be constructed in the parametric form from the general solution of the other equation. We illustrate our results by constructing nonlocal equivalence classes for two Painlevé type equations.

Keywords: nonlocal transformations, first integrals, invariant curves.

Рассматривается семейство уравнений

$$y_{zz} + k(y)y_z^3 + h(y)y_z^2 + f(y)y_z + g(y) = 0, \quad (1)$$

где $k, h, f \neq 0$ и $g \neq 0$ произвольные, достаточно гладкие функции. Данное семейство уравнений является замкнутым относительно преобразований [1-3]

$$w = F(y), \quad d\zeta = (G_1(y)y_z + G_2(y))dz. \quad (2).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФН (проект № 19-71-10003).

Синельщиков Дмитрий Игоревич, к.ф.-м.н., доцент, НИУ ВШЭ (Москва, Россия); Dmitry Sinelshchikov (HSE University, Moscow, Russia)

Здесь G_1 , $G_2 \neq 0$ и $F_y \neq 0$ произвольные достаточно гладкие функции.

В работе показано что преобразования (2) сохраняют инвариантные кривые допускаемые уравнениями из (1). Приводятся явные формулы связывающие инвариантные кривые и их кофакторы для двух уравнений из (1) связанных преобразованиями (2). Таким образом, нелокальные преобразования (2) могут быть использованы для расширения уже существующей классификации инвариантных кривых для какого-либо уравнения из (1) на его класс эквивалентности. В частности, это позволяет получать классификацию инвариантных кривых для неполиномиальных уравнений, нелокально связанных с уравнением с известной классификацией инвариантных кривых.

Также показано что если известно общее решение одного из двух уравнений, связанных преобразованиями (2), то для другого уравнения можно построить автономный первый интеграл в параметрическом виде. Для иллюстрации полученных результатов построены два интегрируемых подсемейства (1), эквивалентных двум уравнениям типа Пеллве с известной классификацией инвариантных кривых. Рассматриваются ряд конкретные примеры интегрируемых уравнений из (1), включая неполиномиальные уравнения, для которых строятся инвариантные кривые и первые интегралы. В частности, рассматриваются некоторые полиномиальные уравнения Льенара и редукция к переменным бегущей волны семейства уравнений реакции-диффузии.

Литература

1. *Nakpim W., Meleshko S.V.* Linearization of second-order ordinary differential equations by generalized Sundman transformations // SIGMA. **6** (2010), 051.
2. *C. Muriel, J. L. Romero* Second-order ordinary differential equations with first integrals of the form $C(t) + 1/(A(t, x)\dot{x} + B(t, x))$ // J. Nonlinear Math. Phys. **18** (2011), 237–250.
3. *Sinelshchikov D.I.* Linearizability conditions for the Rayleigh-like oscillators // Phys. Lett. A., **384**:26 (2020), 126655.

**ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ НА РИМАНОВОМ
МНОГООБРАЗИИ И ОПЕРАТОР СФЕРИЧЕСКОГО
СРЕДНЕГО**

@ П.А. Сипайло

sipaylo@gmail.com

УДК 517.95

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.36.

В работе приводится формула для решения однородного волнового уравнения на римановом многообразии, заданная с помощью оператора сферического среднего, применяемого к начальным данным.

Ключевые слова: волновое уравнение, дифференциальные уравнения, оператор сферического среднего.

Wave equation on a Riemannian manifold and the Spherical mean operator

We give a formula for the solution to the homogeneous wave equation on a Riemannian manifold in terms of Spherical mean operator which is being applied to initial data.

Keywords: wave equation, differential equations, Spherical mean operator.

Классический результат, известный как формула Кирхгофа, позволяет выразить решения (однородного) волнового уравнения на \mathbb{R}^3 с помощью оператора сферического среднего, применяемого к начальным данным. Мы приводим обобщение этого результата на случай произвольных римановых многообразий.

Работа выполнена в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018)

Сипайло Павел Андреевич, РУДН (Москва, Россия); Pavel Sipailo (RUDN University, Moscow, Russia)

**СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ
ВЛАСОВА–ПУАССОНА НА ТОРЕ И ПРИМЕНЕНИЯ К
ТЕОРИИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ**
@ А.Л. Скубачевский, Ю.О. Беляева, Б. Гебхард
skublector@gmail.com

УДК 517.9

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.37.

Рассматривается система уравнений Власова–Пуассона с внешним магнитным полем, описывающая кинетику высокотемпературной плазмы в токамаке. Доказано существование стационарных решений с функциями плотности распределения заряженных частиц, имеющих компактные носители внутри тороидальной области.

Ключевые слова: уравнения Власова–Пуассона, стационарные решения.

**Stationary solutions of the Vlasov–Poisson equations in
torus and applications to the theory of high temperature
plasma**

We consider the Vlasov–Poisson system of equations with external magnetic field, which describes kinetics of high temperature plasma in tokamak. It was proved an existence of stationary solutions with density distribution functions for charged particles having compact supports in toroidal domain.

Keywords: Vlasov–Poisson equations, stationary solution.

Мы рассматриваем систему Власова–Пуассона для двухкомпонентной высокотемпературной плазмы с внешним магнитным полем в трехмерном торе. Система уравнений Власова–Пуассона относительно функций распределения плотности заряженных частиц и электрического потенциала описывает кинетику высокотемпературной плазмы в термоядерном реакторе. Если значительная часть заряженных частиц достигает границы, это может привести либо к разрушению реактора, либо к охлаждению плазмы из-за ее контакта со стенкой вакуумной камеры. Поэтому необходимо обеспечить удержание плазмы на некотором

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

Скубачевский Александр Леонидович, д.ф.-м.н., профессор, РУДН (Москва, Россия); Skubachevskii Alexander L. (RUDN University, Moscow, Russia)

Беляева Юлия Олеговна, к.ф.-м.н., РУДН (Москва, Россия); Belyaeva Yulia O. (RUDN University, Moscow, Russia)

Гебхард Бьёрн (Лейпциг, Германия); Gebhard Bjorn, PhD (Universität Leipzig, Germany)

расстоянии от стенки вакуумного контейнера. В большинстве моделей термоядерных реакторов внешнее магнитное поле используется в качестве управления, обеспечивающего удержание плазмы. С точки зрения дифференциальных уравнений это означает, что нужно доказать существование решений системы Власова-Пуассона с внешним магнитным полем, для которых носители функций распределения плотности заряженных частиц не пересекаются с границей. Мы рассматриваем систему Власова-Пуассона для двухкомпонентной высокотемпературной плазмы с внешним магнитным полем в трехмерном торе, который соответствует «токамаку». Мы доказываем наличие стационарных решений системы Власова-Пуассона в вышеуказанных областях с компактными носителями функций распределения плотности заряженных частиц. Используя симметрию тора, мы сводим эту проблему к полулинейному эллиптическому дифференциальному уравнению второго порядка, которое изучается с помощью метода суб- и суперрешений. Конструкция стационарного решения с компактным носителем основана также на методе срезающих функций. Вопрос о существовании стационарных решений системы Власова-Пуассона с однородным внешним магнитным полем в бесконечном цилиндре, имеющих носители функций распределения плотности заряженных частиц внутри области, был впервые изучен в работе [1]. Аналогичные результаты, касающиеся стационарных решений с компактными носителями в торе, были получены в [2].

Литература

1. *Скубачевский А.Л.* Уравнения Власова-Пуассона для двухкомпонентной плазмы в однородном магнитном поле. // УМН, **69**:2 (2014), 291-330.
2. *Belyaeva Yu.O., Gebhard B., Skubachevskii A.L.* A general way to confined stationary Vlasov-Poisson plasma configurations.// Kinetics and Related Models, **14**:2 (2021), 257-282.

О ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО

@ О.В. Солонуха
solonukha@yandex.ru

УДК 517.9

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.38.

Доказана теорема существования и единственности периодического решения линейного параболического уравнения с краевым условием типа Бицадзе–Самарского. Рассмотрен пример с оператором Лапласа. Используются методы эллиптической теории дифференциально–разностных уравнений и теории монотонных операторов.

Ключевые слова: нелокальная параболическая задача, периодическое решение, максимально монотонный оператор, сильно эллиптический оператор.

On periodic solution of some linear parabolic problem with Bitsadze–Samarskii boundary conditions

The existence and uniqueness theorem of a periodic solution of a linear parabolic equation with a boundary condition of the Bitsadze–Samarsky type is proved. An example with the Laplace operator is considered. We use the elliptic theory of differential-difference equations and the theory of monotone operators.

Keywords: nonlocal parabolic problem, periodic solution, maximally monotone operator, strongly elliptic operator.

Рассматривается линейное параболическое уравнение с краевыми условиями типа Бицадзе–Самарского. Доказана теорема существования и единственности периодического обобщенного решения. В качестве модельного примера рассмотрена параболическая задача с Лапласианом в прямоугольном параллелепипеде $\Omega_T = (0, T) \times (0, 2) \times (0, 1)$

$$\partial_t w(t, x) - \Delta w(t, x) = f(t, x) \quad ((t, x) \in \Omega_T), \quad (1)$$

здесь $f \in L_2(\Omega_T)$, с нелокальными краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} w(t, x_1, 0) = w(t, x_1, 1) = 0 & \quad (t \in (0, T), 0 \leq x_1 \leq 2), \\ w(t, 0, x_2) = \gamma_1 w(t, 1, x_2) & \quad (t \in (0, T), 0 < x_2 < 1), \\ w(t, 2, x_2) = \gamma_2 w(t, 1, x_2) & \quad (t \in (0, T), 0 < x_2 < 1). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (номер темы 075–03–2020–223/3 (FSSF-2020-0018)).

Солонуха Олеся Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, ФИЦ ИУ РАН, РУДН (Москва, Россия); Olesya V. Solonukha (CC RAS, RUDN University; Moscow, Russia)

Периодическое решение уравнения (1) удовлетворяет условию

$$w(0, x) = w(T, x) \quad (x = (x_1, x_2) \in Q = (0, 2) \times (0, 1)). \quad (3)$$

Введем пространство

$$W_\gamma := \{w \in L_2(0, T; W_2^1(Q)) : \partial_t w \in L_2(\Omega_T), w \text{ удовлетворяет (2), (3)}\}.$$

Теорема. Пусть $|\gamma_1 + \gamma_2| < 2$. Тогда для любого $f \in L_2(\Omega_T)$ существует единственное решение задачи (1) $w \in W_\gamma \subset C(0, T; L_2(Q))$.

**ИНТЕГРИРУЕМОЕ УРАВНЕНИЕ АБЕЛЯ ВТОРОГО
РОДА, ВОЗНИКАЮЩЕЕ ПРИ АСИМПТОТИЧЕСКОМ
ИНТЕГРИРОВАНИИ СИММЕТРИЙНОГО РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ВРИЗА**

@ Б.И. Сулейманов

bisul@mail.ru

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.39.

В докладе излагается содержание совместной статьи Б.И. Сулейманова и А. М. Шавлукова [1].

Ключевые слова: интегрируемость, уравнение Абеля, уравнение Кортевега де Вриза, симметрия.

**An integrable Abel equation of the second kind arising
from the asymptotic integration of the symmetry solution
of the Korteweg - de Vries equation**

The report outlines the content of the joint article by B.I. Suleimanov and A. M. Shavlukov [1].

Keywords: integrability, Abel equation, Korteweg - de Vries equation, symmetry.

Литература

1. *Сулейманов Б.И., Шавлуков А.М.* Интегрируемое уравнение Абеля и асимптотики симметричных решений уравнения Кортевега-де Вриза. // Уфимский математический журнал, 14:2 (2021), 104-111.

Сулейманов Булат Ирекович, д.ф.-м.н., Институт математики с ВЦ (Уфа, Россия); Bulat Suleimanov (Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa, Russia)

О КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА НА ОГРАНИЧЕННЫХ ИНТЕРВАЛАХ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ОБЩЕГО ВИДА

@ А.В. Фаминский
afaminskii@sci.pfu.edu.ru

УДК 517.958

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.40.

Рассматривается начально-краевая задача на ограниченном интервале для класса квазилинейных эволюционных уравнений нечетного порядка (выше первого) с нелинейностью общего вида. Предположения на вид уравнения не предполагают глобальных априорных оценок для решений произвольного размера. В случае малых граничных функций и малой правой части уравнения установлены результаты о глобальном существовании и единственности слабых решений, а также об их экспоненциальном убывании при больших временах.

Ключевые слова: начально-краевые задачи, эволюционные уравнения нечетного порядка квазилинейные эволюционные уравнения, глобальная разрешимость, поведение решений при больших временах.

On odd-order quasilinear evolution equations on bounded intervals with general nonlinearity

An Initial-boundary value problem, posed on a bounded interval, is considered for a class of odd-order (more than one) quasilinear evolution equations with general nonlinearity. Assumptions on the equations do not provide global a priori estimates for solutions of an arbitrary size. For small initial and boundary data, small right-hand side function results on global existence and uniqueness of weak solutions, as well as on their large-time exponential decay are established.

Keywords: initial-boundary value problem, odd-order evolution equation, quasilinear evolution equation, global solubility, large-time behavior.

На интервале $(0, R)$ для произвольного $R > 0$ рассматривается на-

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

Фаминский Андрей Вадимович, д.ф.-м.н., профессор, РУДН (Москва, Россия); Andrei Faminskii (RUDN University, Moscow, Russia)

чально-краевая задача для уравнения

$$u_t - (-1)^l (\partial_x^{2l+1} u + a_{2l} \partial_x^{2l} u) - \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j \partial_x^j [a_{2j+1}(t, x) \partial_x^{j+1} u + a_{2j}(t, x) \partial_x^j u] + \sum_{k=0}^l (-1)^k \partial_x^k [g_k(t, x, u, \dots, \partial_x^{l-1} u)] = f(t, x), \quad l \in \mathbb{N},$$

с начальным условием $u(0, x) = u_0(x)$ и краевыми условиями

$$\partial_x^j u(t, 0) = \partial_x^j u(t, R) = 0, \quad j = 0, \dots, l-1, \quad \partial_x^l u(t, R) = \nu(t).$$

Уравнения подобного типа составляют класс квазилинейных эволюционных уравнений, описывающих волновые процессы в различных средах с дисперсией.

Предполагается, что $a_{2l} \leq 0$, коэффициенты a_j при $j \leq 2l-1$ малы в некотором смысле или имеют подходящий знак, функции $g_k(t, x, y_0, \dots, y_{l-1})$ удовлетворяют некоторым условиям ограничения роста по переменным y_j . Тогда при малых функциях $u_0 \in L_2(0, R)$, $\nu \in L_2(0, +\infty)$ и $f \in L_2((0, +\infty) \times (0, R))$ существует единственное слабое решение рассматриваемой задачи $u(t, x)$, такое что $u \in C([0, T]; L_2(0, R))$, $\partial_x^l u \in L_2((0, T) \times (0, R)) \forall T > 0$. Более того, если функции ν и f экспоненциально убывают при $t \rightarrow +\infty$, то решение также экспоненциально убывает в пространстве $L_2(0, R)$.

Полученный результат применим, например для уравнения Каупа–Купершмидта

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + c_1 u^2 u_{xxx} + c_2 u u_x u_{xx} + c_3 u_x^3 + c_4 u u_{xxx} + c_5 u_x u_{xx} + c_6 u^2 u_x + c_7 u u_x = 0,$$

для которого не существует глобальной априорной оценки решения в пространстве $L_2(0, R)$ при отсутствии условий на малость решения.

Данные результаты опубликованы в статье [1].

Литература

1. *Faminskii A. V.* Odd-order quasilinear evolution equations with general nonlinearity on bounded intervals // *Lobachevskii J. Math.*, **42**:5 (2021), 875-888.

ОБОБЩЕННЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

@ А.Р. Хакимова
aigul.khakimova@mail.ru

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.41.

Доклад основан на результатах полученных в совместной с И.Т. Хабибуллин и А.О. Смирновым работе [1], в которой обсуждаются приложения понятия обобщенного инвариантного многообразия (ОИМ) в теории интегрируемости. Показано, что подходящим образом подобранное ОИМ позволяет строить пару Лакса, оператор рекурсии и частные решения для заданного интегрируемого уравнения.

Ключевые слова: нелинейные интегрируемые уравнения, линеаризованное уравнение, инвариантное многообразие.

Some applications of generalized invariant manifolds

The report is based on the results obtained in collaboration with I.T. Habibullin and A.O. Smirnov [1], which discusses applications of the notion of a generalized invariant manifold (GIM) in integrability theory. It is shown that an appropriately selected GIM allows us to construct a Lax pair, a recursion operator, and particular solutions for a given integrable equation.

Keywords: nonlinear integrable equations, linearized equation, invariant manifold.

В докладе обсуждается понятие обобщенного инвариантного многообразия, введенное в наших предыдущих работах (см. [2]–[6]). В литературе метод дифференциальных связей используется для построения частных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Его суть состоит в том, чтобы добавить к заданному нелинейному уравнению в частных производных более простое, как правило, обыкновенное дифференциальное уравнение, совместное с заданным. Тогда любое решение ОДУ также является частным решением уравнения в частных производных. Однако главной проблемой является найти это совместное ОДУ. Наше обобщение состоит в том, что мы ищем обыкновенное дифференциальное уравнение, которое совместно не с самим

Работа выполнена при поддержке конкурса «Молодая математика России».

Хакимова Айгуль Ринатовна, научный сотрудник ОМФ, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Aigul Khakimova (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, Russia)

нелинейным уравнением в частных производных, а с его линейризацией. Такое обобщенное инвариантное многообразие эффективно ищется. Кроме того, оно позволяет построить такие важные атрибуты теории интегрируемости, как пары Лакса и операторы рекурсии интегрируемых нелинейных уравнений. В докладе будет показано, что они позволяют строить также и частные решения нелинейного уравнения (более подробно см. [1]).

Литература

1. *Habibullin I.T., Khakimova A.R., Smirnov A.O.* Generalized invariant manifolds for integrable equations and their applications // *Ufa Math. J.*, **13**:2, (2021), 141–157.
2. *Habibullin I.T., Khakimova A.R., Poptsova M.N.* On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations // *J. Phys. A: Math. Theor.*, **49**:3 (2016), 35 pp.
3. *Habibullin I.T., Khakimova A.R.* On a method for constructing the Lax pairs for integrable models via a quadratic ansatz // *J. Phys. A: Math. Theor.*, **50**:30 (2017), 19 pp.
4. *Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р.* Инвариантные многообразия и пары Лакса для интегрируемых нелинейных цепочек // *ТМФ*, **191**:3 (2017), 369–388.
5. *Habibullin I.T., Khakimova A.R.* On the recursion operators for integrable equations // *J. Phys. A: Math. Theor.*, **51**:42 (2018), 22 pp.
6. *Habibullin I.T., Khakimova A.R.* Invariant manifolds and separation of the variables for integrable chains // *J. Phys. A: Math. Theor.*, **53**:38 (2020), 17 pp.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДЕФОКУСИРУЮЩЕГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С НАГРУЖЕННЫМИ ЧЛЕНАМИ

@ А.Б. Хасанов, У.Б. Муминов, С.М. Данияров

ahasanov2002@mail.ru, umuminov153@gmail.com

УДК 517.957

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.42.

Метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера с нагруженными членами в классе бесконечнозонных периодических функций. Выводится эволюция спектральных данных периодического оператора Дирака, коэффициент которого является решением дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера (ДНУШ) с нагруженными членами. Доказано, что

1) если начальная функция является действительной π - периодической аналитической функцией, то решение задачи Коши для уравнения ДНУШ с нагруженными членами тоже является действительной аналитической функцией по переменной x .

2) если число $\pi/2$ является периодом (антипериодом) начальной функции, то $\pi/2$ является периодом (антипериодом) для решения задачи Коши по переменной x .

Ключевые слова: Дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера (ДНУШ), оператор Дирака, спектральные данные, система уравнений Дубровина, формулы следов.

Cauchy problem for defocusing nonlinear Schrodinger equation with loaded terms

The inverse spectral problem method is used to integrate the defocusing nonlinear Schrodinger equation with loaded terms in the class of infinite-gap periodic functions. The evolution of the spectral data of the periodic Dirac operator is derived, the coefficient of which is a solution to the defocusing nonlinear Schrodinger equation (DNLS) with loaded terms. It is proved that

1) if the initial function is a real π - periodic analytic function, then the solution of the Cauchy problem for the DNLS equation with loaded terms is also a real analytic function with respect to the variable x .

Хасанов Акназар Бекдурдиевич, д.ф.-м.н., профессор, СамГУ (Самарканд, Узбекистан); Khasanov Aknazar (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Муминов Улугбек Бобомуродович, докторант СамГУ, (Самарканд, Узбекистан); Muminov Ulugbek (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Данияров Сахобиддин, магистрант СамГУ, (Самарканд, Узбекистан); Daniyarov Sakhobiddin (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

2) if the number $\pi/2$ is the period (antiperiod) of the initial function, then $\pi/2$ is the period (antiperiod) for solving the Cauchy problem with respect to the variable x .

Keywords: Defocusing nonlinear Schrodinger equation (DNUSH), Dirac operator, spectral data, system of Dubrovin equations, trace formulas.

В данной работе рассматривается задача Коши для дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера (ДНУШ) с нагруженными членами вида

$$\begin{cases} p_t = -q_{xx} + 2q(p^2 + q^2) + a(t)p(x_0, t)p_x + b(t)q(x_0, t)q, \\ q_t = p_{xx} - 2p(p^2 + q^2) + a(t)p(x_0, t)q_x - b(t)q(x_0, t)p, \end{cases} \quad (1)$$

при начальных условиях

$$p(x, t)|_{t=0} = p_0(x), \quad q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad x \in R \quad (2)$$

в классе действительных бесконечнозонных π -периодических по x функций:

$$\begin{aligned} p(x + \pi, t) &= p(x, t), \quad q(x + \pi, t) = q(x, t), \quad x \in R, \quad t \geq 0, \\ p(x, t), \quad q(x, t) &\in C_x^2(t > 0) \cap C_t^1(t > 0)C(t \geq 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $a(t), b(t) \in C([0, \infty))$ заданные непрерывные ограниченные функции, а $x_0 \in R$.

Хорошо известно, что одним из представителей интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных, который имеет наибольшее число приложений, является нелинейные уравнения Шредингера (НУШ), которое впервые было проинтегрировано В.Е. Захаровым и А.Б. Шабадом [1] в классе "быстроубывающих" функций.

В работах А.Р. Итса [2], А.Р.Итса и В.П. Катлярова [3], а также А.О. Смирнова [4] исследовано нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) $iu_t = u_{xx} - 2|u|^2 \cdot u$, в классе конечнозонных функций.

В работе А.Б. Хасанова, М.М. Хасанова [5], было исследовано нелинейное уравнение Шредингера с дополнительным членом вида $u_t = 2i|u|^2 \cdot u - iu_{xx} + \gamma(t)|u(0, t)|^2 \cdot u_x$, в классе бесконечнозонных периодических функций. Следует отметить, что в работе [6] изучено вещественно-аналитическое решение нелинейного уравнения Шредингера вида $iu_t = Au_{xx} + B|u|^2 \cdot u + Cu$, где $A, B, C \in R$ - заданные константы, которые удовлетворяет условию $A \cdot B \neq 0$. В соответствии с физическим смыслом решений различают фокусирующий случай $AB > 0$ и дефокусирующий случай $AB < 0$.

Следуя [6] уравнение (1) относится к дефокусирующему случаю, т.к. $A = -1, B = 2, (AB = -2 < 0)$.

В данной статье предлагается алгоритм построения решения $p(x, t)$, $q(x, t)$, $x \in R$, $t > 0$, задачи (1)-(3), с помощью обратной спектральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau, t)y \equiv By' + \Omega(x + \tau, t)y = \lambda y, \quad x \in R, \quad t > 0, \quad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} p(x, t) & q(x, t) \\ q(x, t) & -p(x, t) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $c(x, \lambda, \tau, t) = (c_1(x, \lambda, \tau, t), c_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ и $s(x, \lambda, \tau, t) = (s_1(x, \lambda, \tau, t), s_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0, \lambda, \tau, t) = (1, 0)^T$ и $s(0, \lambda, \tau, t) = (0, 1)^T$. Функция $\Delta(\lambda, \tau, t) = c_1(\pi, \lambda, \tau, t) + s_2(\pi, \lambda, \tau, t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (4).

Корни уравнений $\Delta(\lambda, \tau, t) = \pm 2$ обозначим через $\lambda_n(\tau, t)$, она совпадает с собственными значениями периодической и антипериодической задач $y(0, \tau, t) = \pm y(\pi, \tau, t)$ для уравнения (4).

Теперь рассмотрим задачу Дирихле

$$y_1(0, \tau, t) = 0, \quad y_1(\pi, \tau, t) = 0, \quad (5)$$

для уравнения (4). Первая компонента вектор-функции $s(x, \lambda, \tau, t)$ удовлетворяет первому граничному условию (5), подставляя его на второе граничное условие, получим $s_1(\pi, \lambda, \tau, t) = 0$. Решая его относительно λ , находим собственное значение $\xi_n = \xi_n(\tau, t)$, $n \in \mathbb{Z}$, задачи Дирихле (4), (5). Обозначим через $\sigma_n(\tau, t)$ знак: $\sigma_n(\tau, t) = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - c_1(\pi, \xi_n, \tau, t)\}$.

Множество $\{\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\}$, называется спектральными параметрами, а набор $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\}$ - спектральными данными оператора $L(\tau, t)$. Восстановление коэффициента $\Omega(x, t)$ оператора $L(\tau, t)$ по спектральным данным называется обратной задачей. Коэффициент $\Omega(x, t)$ - оператора $L(\tau, t)$ определяется однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\}$. Теперь с помощью начальной функций $p_0(x+\tau), q_0(x+\tau)$, $\tau \in R$, построим оператор Дирака вида $L(\tau, 0)y = \lambda y, x, \tau \in R$. Решая прямую задачу, находим спектральные данные $\{\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}\}$ оператора $L(\tau, 0)$. Отсюда следует, что $\xi_n^0(\tau + \pi) = \xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau + \pi) = \sigma_n^0(\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть пара $p(x, t)$, $q(x, t)$, $x \in R$, $t > 0$, является решением задачи Коши (1)-(3). Тогда спектральные данные

$$\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}\}$$

оператора $L(\tau, t)$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$1) \lambda_n(\tau, t) = \lambda_n, n \in \mathbb{Z},$$

$$2) \frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi) \{q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) + [p(\tau, t) + \xi_n(\tau, t)]^2 + \xi_n^2(\tau, t) - a(t)p(x_0, t)[p(\tau, t) + \xi_n(\tau, t)] + \frac{1}{2}b(t)q(x_0, t)\} \quad (6)$$

где

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}. \quad (7)$$

Знаки $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$, меняются при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$, с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}, \quad (8)$$

Следствие 1. Учитывая формулы следов

$$p(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau, t) \right), q(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)), \quad (9)$$

$$q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right), \quad (10)$$

систему дифференциальных уравнений (6) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 2. Эта теорема дает метод решения задачи (1)-(3). Для этого сначала найдем спектральные данные $\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$, оператора $L(\tau, 0)$ соответствующие коэффициентам $p_0(x + \tau), q_0(x + \tau), \tau \in \mathbb{R}$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau, t)$ через $\lambda_n, \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}$. Теперь в системе уравнения (6) с начальным условием (8) последовательно положим $\tau = x_0$. Решая полученную задачу Коши, находим $\xi_n(x_0, t), \sigma_n(x_0, t), n \in \mathbb{Z}$. Затем из формулы следов (9), определим функции $p(x_0, t)$ и $q(x_0, t)$. После этого подставляем эти данные в систему уравнений (6) и решая задачу Коши (6)-(7) при произвольном значении τ , находим $\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t), n \in \mathbb{Z}$.

Из формул следов (9), определим $p(\tau, t)$ и $q(\tau, t)$, т.е. решение задачи (1)-(3).

Литература

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ, 61:1 (1971), 118-134.
2. Итс А.Р. Обращения гиперэллиптический интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений. Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. Матем. Механ. Астрон., 7:2 (1976), 39-46.
3. Итс А.Р., Котляров В.П. Явные формулы для решений нелинейного уравнения Шредингера // Докл. АН УССР. Сер.А., 1976, №11, 965-968.
4. Смирнов А.О. Эллиптические по t решение нелинейного уравнения Шредингера // ТМФ, 107:2 (1996), 188-200.
5. Хасанов А.Б., Хасанов М.М. Интегрирование нелинейного уравнения Шредингера с дополнительным членом в классе периодических функций. // ТМФ., 2019., т.199, №1, с.60-68.
6. Домрин А.В. О вещественно – аналогических решениях нелинейного уравнения Шрёдингера. Тр. ММО, 2014, т.75, вып.2, 205-218.
7. Дубровин Б.А. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов. // Функциональный анализ и его прил. – Москва, 1975. т.9. вып.3. с.41-51.

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО
УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ**

@ А.Б. Хасанов, У.А. Хойтметов
ahasanov2002@mail.ru, x_umid@mail.ru

УДК 517.957

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.43.

Работа посвящена интегрированию модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с дополнительным членом в классе быстроубывающих функций.

Ключевые слова: модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза, обратная задача теории рассеяния, эволюция данных рассеяния.

**Integration of the modified Korteweg-de Vries equation
with an additional term**

The work is devoted to the integration of the modified Korteweg-de Vries equation with an additional term in the class of rapidly decreasing functions.

Keywords: modified Korteweg-de Vries equation, inverse scattering problem, evolution of scattering data.

В данной работе изучается модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза с дополнительным членом, а именно, рассматривается следующее уравнение

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} + \gamma(t)u(0,t)u_x(x,t) = 0, \quad (1)$$

где $\gamma(t)$ - заданная непрерывно дифференцируемая функция. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2)$$

где начальная функция $u_0(x)$ ($-\infty < x < \infty$) обладает следующими свойствами:

Хасанов Акназар Бекдурдиевич, д.ф.-м.н., профессор, СамГУ (Самарканд, Узбекистан); Aknazar Khasanov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Хойтметов Умид Азадович, к.ф.-м.н., доцент, Хорезмское отделение института математики им. В.И. Романовского, (Ургенч, Узбекистан); Umid Hoitmetov (Khorezm Branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, Urgench, Uzbekistan)

1) для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)| e^{2\varepsilon|x|} dx < \infty; \quad (3)$$

2) несамосопряженный оператор $L(0) = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$ имеет ровно $2N$ собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_{2N}(0)$ с кратностями

$$m_1(0), m_2(0), \dots, m_{2N}(0).$$

Пусть функция $u(x, t)$ обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$ т.ч.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^j u(x, t)}{\partial x^j} \right| e^{2\varepsilon|x|} dx < \infty, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (4)$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Если функция $u(x, t)$ является решением задачи (1)-(4), то данные рассеяния несамосопряженного оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x, t)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям*

$$m_k(t) = m_k(0), \quad \xi_k(t) = \xi_k(0), \quad k = \overline{1, N}.$$

$$\frac{dr^+}{dt} = (8i\xi^3 - 2i\xi\gamma(t)u(0, t)) r^+, \quad (|\operatorname{Im} \xi| < \varepsilon).$$

$$\frac{d\chi_0^n}{dt} = (8i\xi_n^3 - 2i\xi_n\gamma(t)u(0, t)) \chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_1^n}{dt} = (8i\xi_n^3 - 2i\xi_n\gamma(t)u(0, t)) \chi_1^n + (24i\xi_n^2 - 2i\gamma(t)u(0, t)) \chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_2^n}{dt} = (8i\xi_n^3 - 2i\xi_n\gamma(t)u(0, t)) \chi_2^n + (24i\xi_n^2 - 2i\gamma(t)u(0, t)) \chi_1^n + 24i\xi_n\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_3^n}{dt} = (8i\xi_n^3 - 2i\xi_n\gamma(t)u(0, t)) \chi_3^n + (24i\xi_n^2 - 2i\gamma(t)u(0, t)) \chi_2^n + 24i\xi_n\chi_1^n + 8i\chi_0^n,$$

$$\frac{d\chi_l^n}{dt} = (8i\xi_n^3 - 2i\xi_n\gamma(t)u(0, t)) \chi_l^n + (24i\xi_n^2 - 2i\xi_n\gamma(t)u(0, t)) \chi_{l-1}^n$$

$$+ 24i\xi_n\chi_{l-2}^n + 8i\chi_{l-3}^n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad l = 4, 5, \dots, m_n - 1.$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(4).

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} + \gamma(t)u(0,t)u_x = 0; \quad u(x, 0) = -\frac{2}{\operatorname{ch} 2x},$$

где $\gamma(t) = 2(t^2 + 1) + \frac{t^2 + 1}{2\sqrt{t^2 + 2}}$.

Решение данной задачи Коши имеет вид $u(x, t) = -\frac{2}{\operatorname{ch} 2\left(x + \operatorname{arcsch} \frac{t}{\sqrt{2}}\right)}$.

Литература

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. — Москва: Мир, 1987, — 479 с.
2. *Кожанов А.И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **44**:4 (2004), 694–716.
3. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. — Москва: Высшая школа, 1995.
4. *Хасанов А.Б.* Об обратной задаче теории рассеяния для системы двух несамосопряженных дифференциальных уравнений первого порядка // *Докл. АН СССР*, **277**:3 (1984), 559–562.
5. *Хасанов А.Б., Хоитметов У.А.* Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом в классе быстроубывающих функций // *Докл. АН РУз.*, 1 (2021), 13–18.
6. *Gardner C.S., Greene I.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation // *Phys. Rev. Lett.*, 19 (1967), 1095–1097.
7. *Lax P.D.* Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves // *Comm. Pure and Appl. Math.* 1968, **21**:5 (1968), 467–490.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

@ С.Р. Худайбердиева, Я. Мухтаров
fvss141597@gmail.com, ya-muxtarov@rambler.ru

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.44.

Исследуются фазовые траектории одной нелинейной системы дифференциальных уравнений. Найдены достаточные условия сосуществования изолированных особых точек системы в бесконечности.

Ключевые слова: нелинейная система, преобразование Пуанкаре, изолированные особые точки, седло, узел.

Investigation of the behavior of phase trajectories of a plane system of differential equations in infinity

The phase trajectories of one nonlinear system of differential equations are investigated. Sufficient conditions are found for the coexistence of isolated singular points of the system at infinity.

Keywords: nonlinear system, Poincare transform, isolated singular points, saddle, node.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a_1x^m + b_1y^m + c_1), \\ \frac{dy}{dt} = y(a_2x^m + b_2y^m + c_2) \end{cases} \quad (1)$$

где $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ постоянные и m – нечетное число ($m > 1$).

Для исследования бесконечно удаленных особых точек системы (1) применим преобразование Пуанкаре [1]:

$$x = \frac{1}{z}, y = \frac{\tau}{z}, \left(x = \frac{\mu}{z}, y = \frac{1}{z} \right)$$

получим систему которая имеет шесть диаметрально противоположно расположенных особых точек, угловые коэффициенты направлений которых будет

$$\tau_1 = 0, \tau_2 = \left(-\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} \right)^{\frac{1}{m}}, \tau_3 = \left(\frac{1}{\mu = 0} = \infty \right) \text{ при } b_2 \neq b_1 \text{ и } a_2 \neq a_1$$

Худайбердиева Сабина Рахматовна, магистрант, СамГУ (Самарканд, Узбекистан); Sabina Khudayberdiyeva (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Мухтаров Яхъё, доцент, СамГУ (Самарканд, Узбекистан); Yakhyo Mukhtarov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Имеет место

Теорема 1. Все три изолированные бесконечно удаленные особые точки

$$(z = 0, \tau_1 = 0), \left(z = 0, \tau_2 = \left(-\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} \right)^{\frac{1}{m}} \right), (z = 0, \tau_3 = \mu = 0)$$

системы (1) не могут быть седлами.

Теорема 2. Если система (1) при $a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$ имеет три бесконечно удаленные особые точки, то реализуется следующие случаи их совместного сосуществования:

1. три узла;
2. два узла, седло;
3. узел, два седла.

Если m — четное и $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) < 0$, то на экваторе существует четыре изолированные особые точки.

Теорема 3. Если m — четное и $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) < 0$, то система (1) имеет на экваторе четыре изолированных особых точек, для которых реализуется следующие случаи:

1. два седла, два узла;
2. три узла, одно седло.

Литература

1. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. — Москва: Наука, 1990. — 488.
2. Шарипов Ш.Р., Мухтаров Я. Некоторые свойства траекторий полиномиальной обобщенно - однородной системы в целом. — Вопросы теории ОДУ. — Самарканд, 1984. — 66-73.

ОСОБЕННОСТЬ ТИПА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

@ А.М. Шавлуков

aza3727@yandex.ru

УДК 517.958

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.45.

Описана особенность типа гиперболической омбилики (D_{4+}) формального решения системы уравнений газовой динамики. Уточняется классификация особенностей римановых инвариантов.

Ключевые слова: математика, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, уравнений газовой динамики, теория особенностей, теория катастроф.

Hyperbolic umbilic catastrophe of the formal solution of one-dimensional gas dynamics system

Hyperbolic umbilic catastrophe of the formal solution of one-dimensional gas dynamics system described. Riemannian invariants singularities classification corrected.

Keywords: mathematics, differential equations, mathematical physics equations, gas dynamics equations, singularity theory, catastrophe theory.

Рассматривается типичная (с точки зрения математической теории катастроф) омбилическая особенность решения системы уравнений одномерной газовой динамики

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где функция $\alpha(\rho) = \frac{p_\rho}{\rho}$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности точки $\rho_* > 0$. Здесь $p(\rho)$ – уравнение состояния газа, $\rho > 0$.

В терминах инвариантов Римана

$$r = u + \int_0^\rho \frac{c}{\rho} d\rho, l = u - \int_0^\rho \frac{c}{\rho} d\rho, c^2 = p_\rho,$$

Шавлуков Азамат Мавлетович, аспирант БашГУ (Уфа, Россия), инженер-исследователь отдела дифференциальных уравнений Института математики с ВЦ УФИЦ РАН; Azamat Shavlukov (Bashkir State University, Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science, Ufa, Russia)

где c – скорость звука (рассматривается $c > 0$), $r \neq l$, система (1) принимает вид

$$\begin{cases} r_t + \left(\frac{r+l}{2} + c\right)r_x = 0 \\ l_t + \left(\frac{r+l}{2} - c\right)l_x = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Возмущение роста катастрофы особенности отличается от описанного в [1]. Утверждается неточность представленной в [1] классификации особенностей инвариантов Римана.

Исследование выполнено совместно с Б.И. Сулеймановым.

Литература

1. *Рахимов А.Х.* Особенности римановых инвариантов // Функциональный анализ и его прил., **27**:1 (1993), 46-59; Funct. Anal. Appl., **27**:1 (1993), 39-50

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

@ Б. Шарипов, Э.Х. Джумаев

boboali.sharipov@mail.ru, eraj59_59@mail.ru

УДК 517.956

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.46.

В настоящем сообщении рассматривается одна нелинейная обобщённая система Коши-Римана с сингулярными точками. В случае тождественного выполнения условий совместности получены многообразия решений этой системы непрерывной во всей области исследования.

Ключевые слова: переопределённая система дифференциальных уравнений, условия совместности, тождественное выполнение, многообразия решений системы, сингулярные точки.

On one nonlinear generalized system Coshi-Riemana with singular coefficients

In this post, we consider one nonlinear generalized Cauchy-Riemann system with singular points. In the case of identical fulfillment of the compatibility conditions, the manifolds of solutions of this system are obtained, which are continuous in the entire field of study.

Keywords: overdetermined system of differential equations, compatibility conditions, identical fulfillment, manifolds of solutions to the system, singular points.

Рассмотрим переопределённую обобщённую систему Коши-Римана (п.о.с. К.-Р.) вида

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = f(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W), \\ \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = g(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W), \\ \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_3} = \frac{h(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3; W)}{\bar{z}_2}, \end{cases} \quad (1)$$

где $f, g, h \in RA(\bar{\Pi}_3)$, $W \in RA(\Pi_4^{(0)})$, f, g, h - вещественно-аналитические функции по переменной W .

Шарипов Бобоали, к.ф.-м.н., доцент, ТГУЭФ (Душанбе, Таджикистан); Boboali Sharipov (Tajik State Financial and Economical University, Dushanbe, Tajikistan)

Джумаев Эраж Хакназарович, к.ф.-м.н., доцент, Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе (Душанбе, Таджикистан); Jumaev Eraj Khaqnazarovich (Lomonosov Moscow State University in Dushanbe, Dushanbe, Tajikistan)

Система (1) рассматривается в бицилиндре $\bar{\Pi}_3 = \{z_k : |\bar{z}_k| \leq a_k, k = 1, 2, 3\}$, а $\Pi_4^{(0)}$ является полицилиндром не содержащим особые точки области $\bar{z}_k = 0$, т.е. $\bar{\Pi}_4 = \{z_k : |\bar{z}_k| < a_k, |W| < b, (k = 1, 2, 3)\}$.

Для существования непрерывного решения системы (1), аналогично [1 – 2], требуется ограниченность производных неизвестной функции W по переменным \bar{z}_2, \bar{z}_3 и выполнение условий

$$\lim_{\bar{z}_1 \rightarrow 0} (\bar{z}_1 \cdot \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2}) = 0, \quad \lim_{\bar{z}_2 \rightarrow 0} (\bar{z}_2 \cdot \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_3}) = 0, \quad (2)$$

При выполнении условий (2) имеем

$$W = h_1(z_2, \bar{z}_2, z_3, \bar{z}_3), \quad W = h_2(z_1, \bar{z}_1, z_3, \bar{z}_3).$$

Возможно, эти найденные функций будут либо частными, либо особыми решениями данной системы.

Следуя результатов работ [2 – 3] можно доказать, что при тождественном выполнении условий совместности системы (1) многообразия решений этой системы можно представить в виде

$$W = F[z, \bar{z}; V(z, \bar{z}_3; \Phi(z))], \quad z = (z_1, z_2, z_3). \quad (3)$$

Теорема. Пусть в п.о.с. К.-Р. (1) $f, g \in RA(\bar{\Pi}_3)$ $W \in RA(\Pi_4^{(0)})$, f, g - аналитические по переменной W . Если для этой системы имеют места условия (2), а также условия совместности системы выполняются, но не тождественно, то находятся некоторые частные, либо особые решения системы (1). В случаи, когда условия совместности системы (1) выполняются тождественно, тогда система (1) разрешима и многообразия её решений определяется формулой (3), непрерывной всюду в области $\bar{\Pi}_3$, возможно многозначной на данном бицилиндре.

Полученные результаты обобщены для некоторых более общих подобных п.о.с. К.-Р.

Литература

1. Михайлов Л.Г. Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. Душанбе, 1986, -116 с.
2. Шарипов Б. Явные формулы представления решений некоторых квазилинейных систем Коши-Римана с двумя комплексными переменными // Докл. АН Тадж. ССР, **28:1**(1985), 16-20.
3. Шарипов Б., Джумаев Э.Х. Представление решений одного класса переопределённой обобщённой системы Коши-Римана с сингулярными точками // Матер. межд. науч. конф. “Современные проблемы математики и её приложений”. – Душанбе: Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе, 2018, 121-124.

СМЕШАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯМИ ВЫРОЖДЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ

@ А.Ф. Шуклина, М.В. Плеханова

isaf@csu.ru, mariner79@mail.ru

УДК 517.977

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.47.

В работе рассматриваются задачи с двумя типами управляющего воздействия: распределенным и стартовым. Основные результаты касаются разрешимости задачи Коши для нелинейного уравнения с выделенной дробной производной Герасимова – Капуто.

Ключевые слова: смешанное управление, уравнение дробного порядка.

Mixed control of solutions to a degenerate nonlinear fractional equation

The paper considers tasks with two types of control action: distributed and initial. The main results concern the solvability of the Cauchy problem for a nonlinear equation with a distinguished Gerasimov - Caputo fractional derivative.

Keywords: mixed control, fractional-order equation.

Пусть \mathcal{Z} , \mathcal{Z}_1 — рефлексивные банаховы пространства, \mathcal{Z} компактно вложено в \mathcal{Z}_1 , \mathcal{U} — банахово пространство, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{Z})$, (L, p) -ограниченный оператор, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Z})$, $F : (t_0, T) \times \mathcal{Z}^{m-1} \rightarrow \mathcal{Z}$. Введём в рассмотрение пространство управлений $\mathcal{U} = L_q(t_0, T; \mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$ с нормой $\|(u, v)\|_{\mathcal{U}}^2 = \|u\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{U})}^2 + \|v\|_{\mathcal{Z}^m}^2$. Рассмотрим задачу смешанного управления

$$LD_t^\alpha z(t) = Mz(t) + F(t, z(t), z^{(1)}(t), \dots, z^{(r)}(t)) + Bu(t), \quad t \in (t_0, T), \quad (1)$$

$$(Pz)^{(k)}(t_0) = v_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

$$(u, v) = (u, v_0, v_1, \dots, v_{m-1}) \in \mathcal{U}_\partial, \quad (3)$$

$$J(z, u, v) = \|z - z_d\|_{C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})} + \delta \|u - u_d\|_{L_q(t_0, T; \mathcal{U})}^q + \delta_1 \sum_{k=0}^{m-1} \|v_k - v_{dk}\|_{\mathcal{Z}}^2 \rightarrow \inf, \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-51-54003).

Шуклина Анна Фаридовна, к.ф.-м.н., доцент, ЧелГУ (Челябинск, Россия); Anna Shuklina (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Плеханова Марина Васильевна, д.ф.-м.н., профессор, ЧелГУ (Челябинск, Россия); Marina Plekhanova (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

где \mathcal{U}_δ — множество допустимых управлений, $\mathcal{U}_\delta \subset \mathfrak{U}$, J — некоторый функционал качества, при заданных $z_d \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $u_d \in L_q(t_0, T; \mathcal{U})$, $v_{dk} \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \leq m$, $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$.

Решения задачи (1), (2) будем искать в пространстве

$$\mathcal{Q}_{\alpha, q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \equiv \left\{ z \in L_2(t_0, T; D_M) \cup C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z}) : \right. \\ \left. J_t^{m-\alpha} \left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0) \tilde{g}_{k+1} \right) \in W_q^m(t_0, T; \mathcal{Z}) \right\}.$$

Назовем отображение $F : [t_0, T] \times \mathcal{Z}_1^m \rightarrow \mathcal{Z}_1$ локально липшицевым по $\bar{z} \in \mathcal{Z}_1$ равномерно по $t \in [t_0, T]$, если для любого $\bar{z} \in \mathcal{Z}_1$ существуют $\delta, l > 0$, такие, что при всех $\bar{y} \in \mathcal{Z}_1$, для которых $\sum_{k=0}^{m-1} \|y_k - z_k\|_{\mathcal{Z}_1} < \delta$, для всех $t \in [t_0, T]$ выполняется неравенство

$$\|F(t, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) - F(t, z_0, z_1, \dots, z_{m-1})\|_{\mathcal{Z}_1} \leq l \sum_{k=0}^{m-1} \|y_k - z_k\|_{\mathcal{Z}_1}.$$

Теорема 1. Пусть $\alpha > 1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $r = m - 2$, отображение $F : (t_0, T) \times \mathcal{Z}_1^{m-1} \rightarrow \mathcal{Z}_1$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\bar{z} \in \mathcal{Z}_1^{m-1}$, $F : (t_0, T) \times \mathcal{Z}^{m-1} \rightarrow \mathcal{Z}$ каратеодориево, равномерно липшицево по $\bar{z} \in \mathcal{Z}^{m-1}$, при некотором $\bar{y} \in \mathcal{Z}^{m-1}$ выполняется $F(\cdot, \bar{y}) \in L_q(t_0, T; \mathcal{Z})$. Оператор M (L, p) -ограничен. Предположим, что \mathcal{U}_δ — непустое выпуклое замкнутое подмножество в $\mathfrak{U} = L_q(t_0, T; \mathcal{U}) \times \mathcal{Z}^m$ содержит (\tilde{u}, \tilde{v}) , для которого $(GD_t^\alpha)^k M_0^{-1} (I - Q) B \tilde{u} \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathcal{Z})$, $D_t^\alpha (GD_t^\alpha)^k M_0^{-1} (I - Q) B \tilde{u} \in L_q(t_0, T; \mathcal{Z})$ при $k = 0, 1, \dots, p$, пространство $\mathcal{Q}_{\alpha, q}(t_0, T; \mathcal{Z})$ непрерывно вложено в банахово пространство \mathfrak{Y} , которое, в свою очередь, непрерывно вложено в $W_q^{m-2}(t_0, T; \mathcal{Z}_1)$. Тогда задача (1)–(4). имеет решение $(\hat{z}, \hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{Q}_{\alpha, q}(t_0, T; \mathcal{Z}) \times \mathcal{U}_\delta$.

Литература

1. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Научная книга: Новосибирск, 1999.
2. Plekhanova M.V. Degenerate distributed control systems with fractional time derivative // Ural Mathematical Journal, 2:2 (2016), 58-71.

О СВЯЗИ РЕШЕНИЙ ДВУХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

@ А.И. Эгамов
albert810@yandex.ru

УДК 517.968.742

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.48.

Для некоторого интегро-дифференциального уравнения поставлена начально-краевая задача со вторыми краевыми условиями. Решение этой задачи связано с решением линейной второй начально-краевой задачи гиперболического типа.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, начально-краевая задача, задача гиперболического типа.

On the connection between solutions of two initial-boundary value problems

The integro-differential equation with the second-type boundary and initial conditions is considered. The solution of this problem is associated with the solution of the standard linear second initial-boundary value problem of hyperbolic type.

Keywords: integro-differential equation, initial-boundary value problem, hyperbolic type problem.

Пусть множество $Q = (0, l) \times (0, T)$, $l > 0$, $T > 0$ с "границей" Σ , состоящей из точек $\{(x, t) : t = 0 \text{ или } (l - x)x = 0\}$. Рассмотрим начально-краевую задачу для интегро-дифференциального уравнения: на множестве Q с границей Σ , найти функцию $y(x, t) \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$, – решение уравнения:

$$y''_{tt}(x, t) = a^2 y''_{xx}(x, t) + b(x, t)y(x, t) - 2y'_t(x, t) \int_0^l b(x, t)y(x, t) dx - y(x, t)R[y], \quad (1)$$

с краевыми и начальными условиями

$$y'_x(0, t) = y'_x(l, t) = 0, \quad y(x, 0) = \varphi(x), \quad y'_t(x, 0) = \psi(x). \quad (2)$$

Эгамов Альберт Исмаилович, к.ф.-м.н., доцент, ННГУ им. Н.И.Лобачевского (Н.Новгород, Россия); A.I. Egamov (Lobachevsky University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia)

Функция $b(x, t)$ – непрерывно дифференцируемая функция по t и непрерывная по x . Начальные функции $\varphi(x) \in C_2^3[0, l]$, $\psi(x) \in C_2[0, l]$. Оператор

$$R[y] = \left(\int_0^l b(x, t)y(x, t) dx \right)^2 + \int_0^l (b'_t(x, t)y(x, t) + b(x, t)y'_t(x, t)) dx. \quad (3)$$

Широко известна [1] начально-краевая задача для гиперболического уравнения: на множестве Q , найти функцию $z(x, t) \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q})$, – решение уравнения:

$$z''_{tt}(x, t) = a^2 z''_{xx}(x, t) + b(x, t)z(x, t), \quad (4)$$

с краевыми и начальными условиями

$$z'_x(0, t) = z'_x(l, t) = 0, \quad z(x, 0) = \varphi(x), \quad z'_t(x, 0) = \psi(x). \quad (5)$$

Пусть $p(t) = \int_0^l z'_t(x, t) dx$. Тогда

$$p'_t(t) = \int_0^l b(x, t)z(x, t) dx, \quad \frac{p'_t(t)}{p(t)} = \int_0^l b(x, t)y(x, t) dx,$$

$$\frac{p''_{tt}(t)}{p(t)} = \left(\frac{p'_t(t)}{p(t)} \right)' + \left(\frac{p'_t(t)}{p(t)} \right)^2 = R[y].$$

Из работы [2] (см. также [3]) справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ положительны и удовлетворяют указанным условиям гладкости, кроме того, выполняются равенства $\int_0^l \psi(x) dx = 1$, $\int_0^l b(x, 0)\varphi(x) dx = 0$. Функция $p(t) = \int_0^l z'_t(x, t) dx > 0$ для любого $t \in [0, T]$. Тогда на этом отрезке справедливо тождество

$$y(x, t) = \frac{z(x, t)}{p(t)},$$

где $y(x, t)$ – единственное решение задачи (1)–(2), $z(x, t)$ – единственное решение задачи (4)–(5).

Литература

1. Владимиров В.С., Жаринюв В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. 400с.

2. Бураго П.Н., Эгамов А.И. О связи решений начально-краевых задач для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и линейного гиперболического уравнения // Журнал Средневолжского математического общества. 2019. Т. 21, № 4. С. 413–429.

3. *Egamov A.I.* The Existence and Uniqueness Theorem for Initial-Boundary Value Problem of the Same Class of Integro-Differential PDEs // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 315. Network Algorithms, Data Mining, and Applications. I. Bychkov et al (eds) 2020. P. 173-186.

ПОСТРОЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ДОПУСКАЮЩИЙ ЗАДАННУЮ ГРУППУ ЛИ

@ Т. Эргашбоев, Д.А. Воситова, М.Ш. Набиева

vositova.dilorom@mail.ru, manzura.nabieva.2014@mail.ru

УДК 517.91

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.49.

В работе рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее группу Ли. По заданной группе выводится общий вид таких уравнений.

Ключевые слова: Группа преобразований, оператор группы, инвариант, дифференциальное уравнение, инвариантное уравнение.

Constructions of the ordinary differential equation of the second order, admitting a given Lie hum

The paper considers an ordinary differential equation of the second order admitting a lie group. For a given group, the general form of such equations is displayed.

Keywords: Transformation group, group operator, invariant, differential equation, invariant equation.

Пусть

$$(\bar{x}, \bar{y}) = T_a(x, y) = (\varphi(x, y, a), \psi(x, y, a)), \quad (1)$$

группа преобразований G плоскости R^2 ($a \in \Delta \subset R$) и

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$$

оператор группы (1), где $\xi = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial a} \right|_{a=0}$, $\eta = \left. \frac{\partial \psi}{\partial a} \right|_{a=0}$ ([1], §1. с. 4-6).

Функция $F(x, y)$ называется инвариантом группы (1), если выполнено условие $F(\bar{x}, \bar{y}) = F(x, y)$. Функция $F(x, y)$ является инвариантом группы (1) тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$XF = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Эргашбоев Турсунбой, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа имени проф. А.Мухсинова, ГОУ ХГУ имени Б. Гафурова (Худжанд, Таджикистан); Ergashboev Tursunboy (B.Gafurov Khujand State University, Khujand, Tajikistan)

Воситова Дилором Абдурасуловна, к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа имени проф. А.Мухсинова, ГОУ ХГУ имени Б. Гафурова (Худжанд, Таджикистан); Vositova Dilorom (B.Gafurov Khujand State University, Khujand, Tajikistan)

Набиева Манзура Шокировна, преподаватель кафедры математического анализа имени проф. А.Мухсинова, ГОУ ХГУ имени Б. Гафурова (Худжанд, Таджикистан); Nabieva Manzura (B.Gafurov Khujand State University, Khujand, Tajikistan)

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (2)$$

Инвариантность дифференциального уравнения (2) связана с оператором $X = X_1 + \varsigma_2 \frac{\partial}{\partial y''}$, где

$$X_1 = \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \varsigma_1 \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad (3)$$

здесь $\varsigma_1 = D(\eta) - y'D(\xi)$, $\varsigma_2 = D(\varsigma_1) - y''D(\xi)$.

Уравнение (2) инвариантно тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$X_2 F = X_1 F + \varsigma_2 \frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \quad (4)$$

Составляя характеристическое уравнение находим инвариант группы G_2 [1, с. 7]. Рассмотрим реализации этих результатов на конкретном примере.

Пример. Пусть задан оператор группы преобразований плоскости

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

Найдем общий вид дифференциального уравнения второго порядка, допускающий группу преобразований $\bar{x} = xe^a$, $\bar{y} = ye^a$. Так как $\xi = x$, $\eta = y$ и $\varsigma_1 = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - y'^2\xi_y = 0$, то составляя характеристическое уравнение для (3) находим

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dy'}{0}.$$

Тогда инвариант $u(x, y) = J_0(x, y) = \frac{y}{x}$ нулевого, а $\vartheta(x, y) = y'$ инвариант первого порядка. Так как $\varsigma_2 = D(\varsigma_1) - y''D(\xi) = -y''$, то $J_2 = xy''$ инвариант второго порядка, который находится из характеристического уравнения для (4). Тогда уравнение $xy'' = F\left(\frac{y}{x}, y'\right)$ является дифференциальным уравнением второго порядка, инвариантное относительно группы $\bar{x} = xe^a$, $\bar{y} = ye^a$.

Литература

1. *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа. – М.: Знание, 8/1989
2. *Ибрагимов Н.Х.* Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений – М.: Знание, 7/1991.

**МЕЖДУНАРОДНАЯ
НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ**

**«УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2021»**

**СЕКЦИЯ
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»**

г. Уфа, 6 - 9 октября 2021 г.

ПРИМЕНЕНИЕ СЕМАТИЧЕСКИХ СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ДЕТЕКЦИИ ТРЕЩИН ДОРОЖНОГО ПОКРЫТИЯ

@ А.А. Акимов, С.И. Мустафина

a.a.akimov@strbsu.ru, sofiamustafina@mail.ru

УДК 004.93

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.50.

Своевременное устранение дефектов в зонах повышенной транспортной нагрузки снижает риск аварий. В настоящее время для контроля состояния дорожного покрытия используются методы фото- и видеонаблюдения. Оценка и анализ новых ручных данных может занять слишком много времени. Таким образом, для оценки состояния объектов требуется совершенно другая процедура. Авторы сравнили результаты работы 3 нейронных сетей (Unet, Linknet, PSPNet), используемые для семантической сегментации, на примере набора данных Crack500. Полученные результаты могут быть использованы в процессе мониторинга и прогнозирования износа дорожного покрытия.

Ключевые слова: трещина, дорожное покрытие, нейронная сеть, Unet, LinkNet, PSPNet

Application of Semantic Convolutional Neural Networks to detect pavement cracks

Timely repair of defects (cracks, spalls, etc.) in areas of increased traffic reduces the risk of accidents. Currently, photo and video surveillance methods are used to monitor the condition of the road surface. Evaluating and analyzing new manual data can take too long. Therefore, a completely different method is needed to check and evaluate the condition of the controlled objects using technical vision. The authors compared the results of 3 neural networks (Unet, Linknet, PSPNet) used for semantic segmentation using the Crack500 dataset as an example. The obtained results can be used in modeling, monitoring and predicting road surface wear.

Keywords: crack, road surface, neural network, Unet, LinkNet, PSPNet

Непрерывный видеомониторинг дорожного покрытия может быть чрезвычайно утомительной задачей для людей, но достаточно простой

Акимов Андрей Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Akimov Andrey, Ph.D. of Physico-mathematical Sciences, associate professor (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Мустафина Софья Ильшатовна, студент, БашГУ (Уфа, Россия); Mustafina Sofya, student, (Bashkir State University, Ufa, Russia)

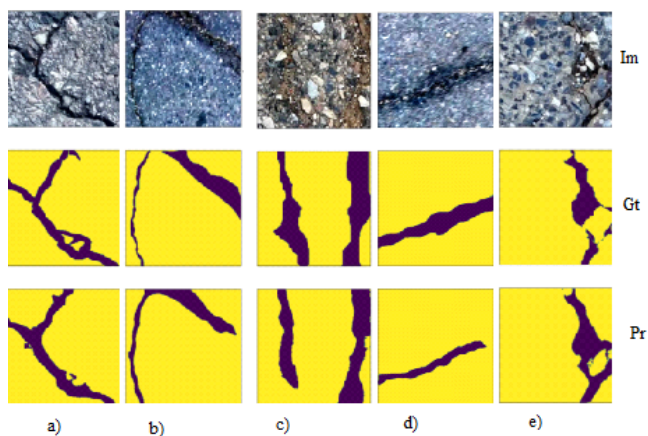
задачей для автоматизированных систем на базе компьютерного зрения (CV). Как было отмечено в [1], транспортная инфраструктура является основой национальной экономики, которую необходимо систематически улучшать. Многие исследования посвящены совершенствованию алгоритмов обнаружения дорожных дефектов. Обнаружение дефектов возможно проводить, как на двумерных изображениях (2D), так и трехмерных (3D), получаемых с помощью лазерного сканирования в виде облака точек. По сравнению с двумерными (2D) изображениями дорожного покрытия, трехмерные данные о поверхности дорожного покрытия менее уязвимы к условиям освещения и предоставляют больше полезной информации. Кроме того, 2D-методы не могут обнаружить некоторые дефекты из-за недостатка информации о глубине. Существующие алгоритмы визуального обнаружения дефектов на дороге можно условно разделить на две ветви: традиционные методы [2] обнаружения дефектов и методы искусственного интеллекта [3]. До недавнего времени для решения указанных задач использовались в основном ручные техники мониторинга, такие, как:

- морфологические операции [4],
- анализ геометрических особенностей ,
- применение фильтров Габора [5],
- вейвлет-преобразования ,
- построение гистограмм ориентированных градиентов (HOG, histograms oriented gradients),
- текстурный анализ,
- машинное обучение [6].

В работе проведено исследование сегментации трещин дорожного покрытия на основе семантических нейронных сетей и изучена эффективность применения методов машинного обучения и нейросетевых технологий для обнаружения и классификации повреждений асфальтобетонных покрытий по сравнению с традиционными методами. На основе результатов анализа известных архитектур, для детектирования дефектов, были выбраны следующие архитектуры: классическая архитектура автоэнкодера U-Net [7] и автоэнкодеры LinkNet [8], PSPNet [9]. Для обучения построенных моделей используется набор данных трещин на асфальте Crack500. Размер каждого изображения в наборе данных достаточно велик, поэтому существует проблема с размером входных данных нейронной сети, которая решается путем «разрезания» изображения на фрагменты размером 320 на 320 пикселей. На каждом изображении присутствует хотя бы один дефект. При этом учитываются только дефекты, занимающие не менее 6% площади изображения. Все данные разделены на три части: обучающая выборка (содержит 2270 изображений), ва-

лидационная (164 изображения) и тестовая (759 изображений). В работе проводится искусственное увеличение числа данных (augmentation) путем изменения яркости, масштабирования, осевой симметрии, добавления гауссовского шума. Модели были обучены на смешанном наборе данных для 5 эпох со скоростью обучения 0,001. Учитывались только значения из выходных данных нейронной сети с доверительной вероятностью выше или равной 50%. Лучшее решение оценивалось с помощью метрик качества accuracy, F1 и IoU. Пример работы нейронной сети U-Net с различными бэкбонами приведен на рисунке

Рисунок 1. Результаты работы обученной нейронной сети U-Net с различными бэкбонами a) *Densenet121* b) *Inceptionv3* c) *Inceptionresnetv2* d) *Mobilnet* e) *Seresnext50* f) *Efficientnetb0*



В работе представлены результаты сравнения работы трех нейронных сетей на заданном датасете. Представлены техники построения обучающей выборки. Прделанная работа показала, что применение подобных архитектур достаточно эффективно для обнаружения трещин на дорожном покрытии.

Литература

1. *Gopalakrishnan, K* Deep learning in data-driven pavement image analysis and automated distress detection: A review // *Data* **3**:28 (2018).
2. *Oliveira, H.* CrackIT — An Image Processing Toolbox for Crack Detection and Characterization // *H. Oliveira, P. L. Correia* // *IEEE International Conference on Image Processing — ICIP 2014. — Paris : IEEE, 2014. — 798–802.*
3. *Augustauskas R, Lipnickas A.* Improved Pixel-Level Pavement-Defect Segmentation Using a Deep Autoencoder // *Sensors* **20.9**:2557 (2020)
4. *Jahanshahi M. R. et al.* An innovative methodology for detection and quantification of cracks through incorporation of depth perception // *Machine vision and applications*

24:2 (2013), 227-241.

5. *Xu W. et al.* Pavement crack detection based on saliency and statistical features // IEEE International Conference on Image Processing (2013), 4093-4097

6. *Sobol B. V. et al.* Deep convolution neural network model in problem of crack segmentation on asphalt images // Vestnik of Don State Technical University 19:1 (2019)

7. *Ronneberger O., Fischer P., Brox T.* U-net: Convolutional networks for biomedical image segmentation // International Conference on Medical image computing and computer-assisted intervention (2015), 234-241

8. *Chaurasia A., Culurciello E.* Linknet: Exploiting encoder representations for efficient semantic segmentation // IEEE Visual Communications and Image Processing (2017), 1-4

9. *Zhao H. et al.* Pyramid scene parsing network // Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition (2017), 2881-2890

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ РЕАКЦИИ СИНТЕЗА БЕНЗИЛАЛКИЛОВЫХ ЭФИРОВ НА PYTHON

@ А.А. Александрова, К.Ф. Коледина
nastena1425@gmail.com, koledinakamila@mail.ru

УДК 622.24.051

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.51.

На основе кинетической модели каталитической реакции синтеза бензилалкиловых эфиров рассмотрена задача многокритериальной оптимизации в зависимости от изменяемых параметров температуры, мольного соотношения реагентов и времени проведения, имеющих ограничения. В роли критериев оптимальности использованы выход целевого и побочных продуктов. При помощи средств языка программирования Python построен фронт Парето, приведено решение задачи многокритериальной оптимизации с использованием библиотеки Platypus, метода идеальной точки и метода лексико-графического упорядочивания.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, задача нелинейного программирования, фронт Парето, кинетическая модель, мольные соотношения исходных реагентов, Python.

Multi-criteria optimization of the synthesis reaction of benzylalkyl esters in Python

Based on the kinetic model of the catalytic reaction of the synthesis of benzylalkyl esters, the problem of multi-criteria optimization is considered depending on the variable parameters of temperature, the molar ratio of reagents and the time of conducting, which have limitations. The yield of the target and by-products are used as optimality criteria. Using the tools of the Python programming language, the Pareto front is constructed, the solution of the multi-criteria optimization problem is given using the Platypus library, the ideal point method and the lexico-graphical ordering method.

Keywords: multi-criteria optimization, nonlinear programming problem, Pareto front, kinetic model, molar ratios of initial reagents, Python.

Кинетическая модель каталитической реакции синтеза бензилалкиловых эфиров выглядит следующим образом [1]:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^J \nu_{ij} k_j^0 \exp\left(-\frac{E_j}{RT}\right) \prod_{i=1}^I y_i^{|a_{ij}|}, i = 1, \dots, I \quad (1)$$

Александрова Анастасия Александровна, студент, УГНТУ (Уфа, Россия);
Alexandrova Anastasya Alexandrovna (Ufa State Petroleum Technical University)

Коледина Камила Феликсовна, к.ф.-м.н., доцент кафедры ИТМ, УГНТУ (Уфа, Россия);
Koledina Kamila Felixovna (Ufa State Petroleum Technical University of Ufa, Russia)

С начальными условиями $t = 0, y_i(0) = y_i^0, t \in [0, t^*]$.

Здесь y_i - концентрации веществ, участвующих в реакции, моль/л; t -время, мин; J -число стадий; I -число реагентов; ν_{ij} -коэффициенты стехиометрической матрицы; k_j^0 -предэкспоненциальные множители констант скоростей стадий, 1/min; a_{ij} -отрицательные элементы матрицы k_j^0 ; E_j -энергии активации стадий б ккал/моль; R -газовая постоянная, 2 кал/(моль*К); T -температура, К;

Критерии оптимальности для задачи многокритериальной оптимизации:

$$f_1(X) = y_{PhCH_2OBu(Y_6)}(t^*, T, N) \rightarrow \max \quad (2)$$

$$f_2(X) = y_{PhCH_2OCH_2Ph(Y_9)}(t^*, T, N) \rightarrow \min \quad (3)$$

$$f_3(X) = y_{BuOBu(Y_{12})}(t^*, T, N) \rightarrow \min \quad (4)$$

Постановка задачи нелинейного программирования [2]:

Минимизировать

$$f(x), x \in E^n \quad (5)$$

при m линейных или нелинейных ограничениях в виде равенств

$$h_j(x) = 0, j = 1, \dots, m \quad (6)$$

и $(p - m)$ линейных или нелинейных ограничениях в виде неравенств

$$g_j(x) \geq 0, j = m + 1, \dots, p \quad (7)$$

При решении задачи был построен фронт Парето. Оптимальность по Парето — такое состояние системы, при котором ни один показатель системы не может быть улучшен без ухудшения какого-либо другого показателя.

Решение СДУ средствами языка python

Математическая модель химического процесса является системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Для решения СДУ используем функцию `odeint`, находящуюся в модуле `scipy.integrate`. Поиск решения задачи оптимизации средствами языка Python

Поиск решения задачи многокритериальной оптимизации проводилось с использованием библиотеки для работы с многоцелевой оптимизацией - `Platypus` и описания методов идеальной точки и лексикографического упорядочивания.

Литература

1. Коледина К.Ф., Губайдуллин И.М., Коледин С.Н., Байгузина А.Р., Галлямова Л.И., Хуснутдинов Р.И. Кинетика и механизм синтеза бензилбутилового эфира в присутствии медьсодержащих катализаторов // Журнал физической химии.,2019. Т. 93. № 11. С. 1–6.
2. David M. Himmelblau Applied nonlinear programming, 1972, pp.19-20.
3. Eyal Wirsansky Hands-On Genetic Algorithms with Python, 2020.

ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ПРОТЕКАНИЯ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ НА ОСНОВЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

© Е.В. Антипина, С.А. Мустафина, А.Ф. Антипин
stepashinaev@ya.ru, mustafina_sa@mail.ru, andrejantipin@ya.ru

УДК 517.977, 544.4

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.52.

В работе приведены результаты расчета оптимального температурного режима для реакции аминометилирования тиолов с помощью тетраметилметандиамина с целью получения максимального выхода продукта реакции.

Ключевые слова: кинетическая модель реакции, оптимальное управление, генетический алгоритм.

Search for optimal conditions for a chemical reaction based on a kinetic model

The paper presents the results of calculating the optimal temperature regime for the reaction of aminomethylation of thiols using tetraethylmethanediamine in order to obtain the maximum yield of the reaction product.

Keywords: kinetic reaction model, optimal control, genetic algorithm.

В настоящее время применение методов математического моделирования дает возможность повысить производительность технологической схемы процесса и получить конкретные количественные результаты, имитируя натуральный и лабораторный эксперименты с помощью компьютерных программ. Одним из способов поиска оптимального управления химико-технологическим процессом является применение генетических алгоритмов. Генетические алгоритмы имитируют процессы, происходящие в ходе эволюции (наследственность, изменчивость, естественный отбор), в результате чего выживают наиболее приспособленные особи, которые порождают новое поколение потомков.

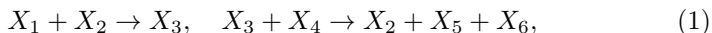
Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027).

Антипина Евгения Викторовна, к.ф.-м.н., мл. научный сотрудник, Стерлитамакский филиал БашГУ (Стерлитамак, Россия); Evgenia Antipina (Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Russia)

Мустафина Светлана Анатольевна, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Svetlana Mustafina (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Антипин Андрей Федорович, к.т.н., доцент, Стерлитамакский филиал БашГУ (Стерлитамак, Россия); Andrej Antipin (Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Russia)

На основе сформулированного авторами алгоритма в работе [1] решим задачу поиска оптимального температурного режима для реакции аминотетраметилирования тиолов с использованием тетраметилметандиамина. Схема данной реакции представляется последовательностью стадий [2]:



где $X_1 = N_2(CH_3)_4$, $X_2 = Sm$, $X_3 = N_2(CH_3)_4 \cdot [Sm]$, $X_4 = HSC_5H_{11}$, $X_5 = (CH_3)_2NSC_5H_{11}$, $X_6 = (CH_3)_2NH$.

Кинетические уравнения скоростей стадий определяются согласно закону действующих масс и имеют вид:

$$\omega_1 = k_1 x_1 x_2, \quad \omega_2 = k_2 x_3 x_4,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_6)^T$ — вектор концентраций веществ (моль/л), k_1 , k_2 — кинетические константы реакции (л/(моль·ч)), рассчитываемые исходя из уравнения Аррениуса.

Кинетическая модель реакции аминотетраметилирования тиолов представляет собой систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^2 \gamma_{ij} \omega_j, \quad i = \overline{1, 6}, \quad (2)$$

с начальными условиями

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1, 6}, \quad (3)$$

где (γ_{ij}) — матрица стехиометрических коэффициентов веществ, t — время протекания реакции (ч).

Пусть управляющим параметром является температура в реакторе. Необходимо найти оптимальный температурный режим $T = T(t)$ химического процесса (1), представляемого системой дифференциальных уравнений (2) с начальными условиями (3) с целью обеспечения максимального выхода целевого продукта реакции

$$G(x, T) = x_5(t_{end}) \rightarrow \max.$$

Допустимые значения температуры задаются неравенством:

$$293K \leq T(t) \leq 333K.$$

Сформулированная задача решена с помощью генетического алгоритма со следующими параметрами: размер популяции — 60, максимальное количество популяций — 5000, количество точек разбиения временного интервала — 450. Время протекания реакции — 1 ч. Для решения системы

дифференциальных уравнений применен метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

В результате расчета оптимального температурного режима реакции (1) установлено, что для обеспечения максимального выхода продукта реакции необходимо удерживать максимально допустимую температуру 333 К в течение всего времени протекания реакции (1 ч), а максимальный выход целевого продукта X_5 составляет 86 %. Полученный результат решения задачи оптимального управления на основе генетического алгоритма для схемы реакции (1) согласуется с тем, что для положительных значений энергий активации выход продукта всегда будет максимальным при максимальной температуре.

Литература

1. Антипина Е.В., Мустафина С.А., Антипин А.Ф. Поиск оптимального температурного режима химической реакции на основе генетического алгоритма // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Химия, **3** (2019), 14-23.
2. Новичкова А.В. Численный анализ реакционной способности олефинов и алюминийорганических соединений на основе кинетических моделей частных и общих реакций: дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Уфа, 2015. 110 с.

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ МОДЕЛЬ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДИНАМИКИ АОРТЫ И СОННЫХ АРТЕРИЙ

© В.Н. Аптуков, Б.И. Гомзяков, Е.Н. Орехова, Т.В. Матановская
aptukov@psu.ru, borisgomzyakov@yandex.ru

УДК 51-7

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.53.

Рассматриваются ультразвуковые показатели сегментарной функции аорты и сонных артерий 30 здоровых детей. Экспериментальные данные получены на ультразвуковом сканере Acuson S 2000 (Siemens Medical Systems, Mountain View, CA, USA) с использованием технологии визуализации вектора скорости движения. Проанализированы корреляционные зависимости данных показателей с выявлением сильной связи с динамическими параметрами восходящего отдела аорты и отдела сонной артерии. Установлена связь показателей с касательными напряжениями на внутрисосудистой стенке, определенными в рамках классической задачи Пуазейля.

Ключевые слова: корреляционная модель, аорта, сонная артерия, ультразвуковая оценка показателей, касательные напряжения.

Correlation model of ultrasound indicators of the dynamics of the aorta and carotid arteries

The ultrasound indices of the segmental function of the aorta and carotid arteries of 30 healthy children are considered. The experimental data were obtained on an Acuson S 2000 ultrasound scanner (Siemens Medical Systems, Mountain View, CA, USA) using the motion velocity vector visualization technology. The correlation dependences of these indicators were analyzed, with the identification of a strong connection with the dynamic parameters of the ascending aorta and the carotid artery. The relationship between the indicators and the shear stresses on the intravascular wall, determined within the framework of the classical Poiseuille problem, has been established.

Keywords: correlation model, aorta, carotid artery, ultrasound evaluation of indicators, shear stresses.

Аптуков Валерий Нагимович, д-р техн. наук, профессор, ПГНИУ (Пермь, Россия); Valery Aptukov (Perm State University, Perm, Russia)

Гомзяков Борис Игоревич, аспирант, ПГНИУ (Пермь, Россия); Boris Gomzyakov (Perm State University, Perm, Russia)

Орехова Екатерина Николаевна, д-р мед. наук, ФГБУ "ФЦССХ им. С.Г. Суханова" МЗ РФ (Пермь, Россия); Orekhova Ekaterina (Federal Center of Cardiovascular Surgery named after S.G. Sukhanov, Perm, Russia)

Матановская Татьяна Владимировна, канд. мед. наук, ФГБУ "ФЦССХ им. С.Г. Суханова" МЗ РФ (Пермь, Россия); Matanovskaya Tatiana (Federal Center of Cardiovascular Surgery named after S.G. Sukhanov, Perm, Russia)

Функциональные нарушения артериальной стенки считаются первым проявлением структурных изменений и предшествуют дальнейшим сердечно-сосудистым заболеваниям [1]. Основные механические свойства артерий определяются нелинейными упругими характеристиками, неоднородностью и анизотропией, вязкоупругими свойствами [2, 3]. В норме артериальная стенка демонстрирует пассивные и активные механические свойства. Пассивные механические свойства реализуются за счет наличия эластина и коллагена. Активные механические свойства артериальной стенки – это упругие деформации.

Наряду с динамическими параметрами кровотока, величиной деформации, артериальной жесткости сосуда и другими функциональными показателями, важное значение имеет величина касательных напряжений (КН) на внутрисосудистой стенке (интимальный слой).

В нашем исследовании предпринята попытка оценки КН на внутрисосудистой стенке в рамках классической задачи теории Пуазейля [4]. В исследовании приняли участие 30 здоровых детей.

Результаты. Выявлено, что КН на стенке восходящего отдела аорты прямо коррелирует со скоростными параметрами трансаортального доплеровского кровотока ($R=0,682$). Диаметр перешейка аорты обратно коррелирует с КН. Полученные нами референсные значения КН в восходящем отделе аорты у обследованных здоровых детей важны для практики, так как позволяют более точно оценить гемодинамическую значимость гипоплазированного участка дистальной дуги и перешейка аорты при наличии гипоплазии дуги аорты и рекоарктации аорты.

Выводы. Данные о КН восходящего отдела аорты и общей сонной артерии (ОСА) у детей могут быть использованы как нормативные для оценки механической функции артериальной стенки. Параметры КН восходящего отдела аорты связаны с размерами перешейка аорты. Касательные напряжения в отделе сонной артерии коррелируют с артериальной жесткостью ОСА. Разработана корреляционная модель. Касательные напряжения отражают нарушения биомеханики аорты и сонных артерий, что сопряжено с повышенным риском сердечно-сосудистых осложнений. Дальнейшие исследования по разработанной корреляционной модели могут быть связаны с обобщением приближенного решения для оценки КН на искривленные сосуды с применением численных методов.

Литература

1. *Saito M., Okayama H., Inoue K., Yoshii T., Hiasa G., Sumimoto T., Nishimura K., Ogimoto A., Higaki J.* Carotid arterial circumferential strain by two-dimensional speckle tracking: a novel parameter of arterial elasticity. // *Hypertens Res.* **35**(9): (2012), 897-902.
2. *Ando Y., Ochiai Y., Tokunaga S., et. al.* Size and Stiffness of the Pulmonary Autograft after the Ross Procedure in Children. // *Pediatr Cardiol.*, **Vol. 40**(4).

(2019),776-783.

3. *Nappi F., Nenna A., Spadaccio C., Chello M.* Pulmonary autograft in aortic position: is everything known? // *Transl Pediatr*, **Vol. 6(1)**. (2017),11-17.

4. *Г.Биркгоф* Гидродинамика. Методы, факты, подобие. Пер. со 2-го перераб. англ. изд. под ред. Гуревича М. И. и Смирнова В. А. // Москва: Изд-во Иностранной литературы, (1963),55-56.

5. *Sinelnikov Y., Orekhova E., Matanovskaya T.* Ultrasonographic evaluation of segmental function of the aorta and carotid arteries in healthy infants. // *Circulation pathology and cardiac surgery*, **Vol. 24(1)**. (2020),37-44.

6. *Синельников Ю.С., Орехова Е.Н., Матановская Т.В., Копытова Е.О., Баранова Д.О.* Циркумференциальная деформация и локальная артериальная жесткость общих сонных артерий у здоровых лиц и пациентов с факторами сердечно-сосудистого риска. // *Патология кровообращения и кардиохирургия*, **Том 25(2)**. (2021),60-68

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА СЕРНОКИСЛОТНОГО АЛКИЛИРОВАНИЯ ИЗОБУТАНА ОЛЕФИНАМИ ПУТЕМ РАЗРАБОТКИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

© И.А. Арефьев, Л.В. Еникеева, М.Р. Агзамова

Purgonga@gmail.com, leniza.enikeeva@yandex.ru

УДК 66.011

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.54.

На основе литературного анализа возможных схем химических превращений, механизма процесса и литературных данных построена математическая модель реакторного блока процесса и определены кинетические параметры, протекающих реакций. Проведены расчёты по поиску оптимального соотношения изобутан:олефин в сырье для увеличения выхода целевых и снижения выхода побочных продуктов процесса сернокислотного алкилирования.

Ключевые слова: алкилирование, математическая модель, кинетическая модель, химическая реакция.

Optimization of the process of sulfuric acid alkylation of isobutane with olefins by developing a mathematical model

Based on the literary analysis of possible schemes of chemical transformations, the mechanism of the process and the literary data, a mathematical model of the reactor unit of the process is constructed and the kinetic parameters of the reactions are determined. Calculations are carried out to find the optimal ratio of isobutane:olefin in raw materials to increase the yield of target and reduce the yield of by-products of the sulfuric acid alkylation process.

Keywords: alkylation, mathematical model, kinetic model, chemical reaction.

В связи с общемировым ужесточением эксплуатационных, а также экологических характеристик автомобильного топлива увеличилось количество процессов, которые повышают степень переработки нефти, и способствуют увеличению октанового числа бензинов. Международные

Арефьев Илья Александрович, аспирант Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Arefyev Ilya Alexandrovich (Institute of Petrochemistry and Catalysis, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)

Еникеева Лениза Васимовна, к.ф.-м.н. Новосибирский национальный исследовательский государственный университет(Новосибирск, Россия), УГНТУ (Уфа, Россия); Enikeeva Leniza Vasimovna (Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk Russian, Ufa state oil technical University Ufa, Russia)

Агзамова Миляуша Раиловна, магистр УГНТУ (Уфа, Россия); Agzamova Milyausha Railovna (Ufa state oil technical University Ufa, Russia)

и отечественные нормативы существенно ограничивают содержание ароматических углеводородов, бензола, олефинов и серы в топливе.

В середине XX века на этапе проектирования большинства промышленных технологических установок, глубокому изучению механизма процессов уделялось недостаточно внимания. В настоящее же время развитые информационные технологии, привели к созданию универсальных программных комплексов, позволяющих более подробно подойти к изучению химизма протекающих реакций и разрабатывать модели промышленных процессов, с помощью которых можно отслеживать текущую деятельность и заложить основы для интенсификации процесса [1,2].

Поскольку любая математическая модель химико-технологических процессов строится на физико-химической основе, для успешного моделирования процесса необходимо детализированное изучение химизма и составление подробной кинетической модели с наиболее полным учетом термодинамических и кинетических закономерностей целевых и побочных реакций [3,4]. На языке Python был написан программный код для построения кинетической модели процесса сернокислотного алкилирования изобутана олефинами, задача решалась использованием неявного метода Рунге-Кутты метода Радо – II А пятого порядка (Radau 5). Для определения констант скоростей реакций, был выбран метод GeneticAlgorithmBase. Решение обратной кинетической задачи определяется функционалом:

$$F = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |x_{ij}^{exp} - x_{ij}^{calc}| \quad (1)$$

где N - количество параметров оптимизации, M - количество опытов, x_{ij}^{exp} - экспериментальное значение, x_{ij}^{calc} - расчетное значение.

Количество параметров оптимизации составило 15 (n= 15).

Методом DifferentialEvolutionBase проведены расчёты по поиску оптимального соотношения изобутан:олефин в сырье. Согласно литературе необходимо, чтобы соотношение изобутан:олефин находилось в пределах (6-10):1. Это связано с тем, что избыток изобутана интенсифицирует целевые реакции алкилирования и подавляет протекание побочных, но при этом через чур большой избыток изобутана может способствовать протеканию побочных реакций самоалкилирования.

Литература

1. Zainullin R.Z., Koledina K.F., Akhmetov A.F., Gubaidullin I.M. Kinetics of catalytic reforming of gasoline // Kinetics and catalysis. 2017. — Т. 59, № 3. — 292-303 р..
2. Зернов П.А., Мурзин Д.Ю., Парпуц О.И., Кузичкин Н.В. Моделирование процесса алкилирования изобутана бутиленами в аппарате реакционно-

ректификационного типа // Химия и химические технологии. 2014. Т. 57, № 9. —100-104 с

3. *Смилько, М.Г.* Теоретические основы химической технологии. 2007. — Т. 41, № 1.С. 16.

4. *Cao P., Zheng, Sun L. W., Zhao L.* Multiscale Modeling of Isobutane Alkylation with Mixed C4 Olefins Using Sulfuric Acid as Catalyst // Industrial and Engineering Chemistry Research. 2019

ДИЗАЙН ПРАЙМЕРОВ ДЛЯ ПЕТЛЕВОЙ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ АМПЛИФИКАЦИИ

© Л.У. Ахметзянова, Т.М. Давлеткулов, И.М. Губайдуллин

www.lianab@mail.ru, russian.lolik@gmail.com, irekmars@mail.ru

УДК 51-76

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.55.

В данной работе представлены результаты разработки компьютерной программы, которая позволяет подбирать (моделировать) праймеры с учетом рекомендуемых условий подбора для проведения петлевой изотермической амплификации (Loop-mediated isothermal AMPlification). Программа написана на языке программирования Python с использованием биоинформатической библиотеки biopython.

Ключевые слова: дизайн праймеров, LAMP, изотермическая петлевая амплификация, Python.

Design of primers for loop-mediated isothermal amplification

This paper presents the software which allows user to do primer design (primer modeling) for taking into account the recommended selection conditions for loop-mediated isothermal amplification. The authors used the Python programming language with biopython library.

Keywords: primer design, LAMP, loop mediated isothermal amplification, Python.

Петлевая изотермическая амплификация (Loop-mediated isothermal amplification, LAMP) – это способ амплификации нуклеиновых кислот, который заключается в использовании для амплификации дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК) или рибонуклеиновой кислоты (РНК) в изотермических условиях [1]. Для успешного проведения LAMP необходимо правильно подобрать праймеры. Праймеры – это короткие искусственно созданные нуклеотидные последовательности комплементарные целевым участкам ДНК [2]. Чаще всего используют наборы из шести праймеров, схема расположения которых представлена на рисунке 1 [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-37-90091).

Ахметзянова Лиана Ульфатовна, ассистент, УГНТУ, аспирант, ИНК УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Liana Akhmetzianova (Ufa State Petroleum Technological University, Institute of Petrochemistry and Catalysis, Ufa Scientific Center of RAS, Ufa, Russia)

Давлеткулов Тимур Маратович, студент, УГНТУ (Уфа, Россия); Timur Davletkulov (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

Губайдуллин Ирек Марсович, д.ф.-м.н., заведующий лабораторией математической химии, ИНК УФИЦ РАН, профессор, УГНТУ (Уфа, Россия); Irek Gubaydullin (Institute of Petrochemistry and Catalysis, Ufa Scientific Center of RAS, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)



Рис. 1: Схема расположения праймеров при LAMP

Комплект праймеров содержит внешние (F3, B3), внутренние (F2, F1c, B1c, B2), имеют удвоенную длину (FIP, BIP)) и петлевые (LoopF, LoopB) праймеры.

Дизайн праймеров для LAMP представляет собой нетривиальную задачу из-за большого количества праймеров и длины генома, и поэтому требует разработки специальных компьютерных программ. Однако существующие программы не обладают достаточным функционалом для эффективного компьютерного моделирования [4, 5]. Кроме того, они позволяют проводить подбор праймеров исключительно для стандартного проведения LAMP, не предусматривающего повышенной специфичности проведения этой реакции. Нами разработана специальная компьютерная программа, реализованная на языке программирования Python с использованием библиотеки biopython, позволяющей работать с последовательностями ДНК, РНК.

Входными параметрами являются: файл в формате FASTA, в котором хранится нуклеотидная последовательность генома для проведения LAMP, длина целевого участка (нуклеотиды), диапазон длины праймеров (нуклеотиды), GC-состав (%), температура плавления ($^{\circ}\text{C}$). Программа формирует праймеры согласно заданным начальным условиям и группирует их по наборам. Наборы формируются с учетом заданных начальных условий подбора праймеров и ключевых параметров: отсутствие гомо- и гетеродимеров, минимальная разница температур плавления и GC-состава среди праймеров в наборе. Выходными данными программы являются: оптимальные наборы праймеров, их позиции присоединения к геному, температура плавления, GC-состав и энергия Гиббса. Для проведения конкретного лабораторного эксперимента пользователь может выбрать подходящий набор из представленных.

В дальнейшем планируется учитывать термодинамические характеристики праймеров, а также добавить необходимый ключевой параметр гибридизационный зонд с самостоятельным местом отжига, который будет служить дополнительным идентификатором амплификации искомой последовательности, тем самым, исключая ложные результаты.

Литература

1. *Notomi T.* Loop-mediated isothermal amplification of DNA // *Nucleic Acids Research*, 2000. V.28 № 12. — E63.
2. *Гарафутдинов Р.Р., Мавзютов А.Р., Алексеев Я.И., Воробьев А.А., Никонов Ю.М., Чубукова О.В., Маттиязов Р.Т., Баймиев Ан.Х., Максимов И.В., Кулуев Б.Р., Баймиев Ал.Х., Чемерис А.В.* Бетакоронавирусы человека и их высокочувствительная детекция с помощью ПЦР и прочих методов амплификации // *Биомика*, 2020. Т.12. № 1. — 121-179.
3. *Хафизов К.Ф., Петров В.В., Красовитов К.В., Золкина М.В., Ажимкин В.Г.* Экспресс-диагностика новой коронавирусной инфекции с помощью реакции петлевой изотермической амплификации // *Вопросы вирусологии*, 2021. Т.66. № 1. — 17-28.
4. *PrimerExplorer*. URL: <https://primerexplorer.jp/e/>
5. *NEB LAMP Primer Design Tool*. URL: <https://lamp.neb.com/>

APPLYING PROBABILITY THEORY TO NEURAL NETWORKS

@ Ye. Ashimov
yeskendyr@gmail.com

УДК 004.032.26

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.56.

Using mathematical models to create an image of the human brain reproduction of machines by artificial intelligence. An artificial neural network consists of three components: input layer, hidden layers, output layer. Also, in the center of the neural network is the loss function. Which minimizes errors known as: quadratic, cross-entropy, AdaBoost, Kullback distance. Loss function should not depend on the activation values of the neural network.

Keywords: artificial intelligence, neural networks, automation of intelligence.

Artificial intelligence worked at a high level required to use deep neural networks. It is a class of machine learning algorithms for creating efficient and multilayer neural networks. With this method, we can achieve great results in machine learning. As the data grows, noise appears that interferes with the accuracy of the results. In many problems it uses the Bayesian method to solve. However, this method cannot guarantee the accuracy of the results. Also, the maximum a posteriori is used for the accuracy of the results. All methods suffer from overfitting. For this we will use probability theory to train neural networks. As a result, we will use batch size data that will not lead to overfitting. This will greatly reduce the resources and time used. In practice, with data processing in a Python program, we got 98 percentage efficiency. Using this technique, you do not need to guess the layers of neural networks and training steps. In this practice, the system automatically selects the necessary parameters for effective results.

Литература

1. *Cybenko, G.V.* Approximation by Superpositions of a Sigmoidal function // In van Schuppen, Jan H. (ed.). Mathematics of Control, Signals, and Systems. Springer International. pp. 303Б^а314.
2. *Duda R.O., Hart P.E, Stork D.G.* Pattern classification (2 ed.). Wiley.

Ashimov Yeskendyr, Master, Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ЗАШИФРОВАННОЙ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ

@ М.Г. Бабенко, Н.Н. Кучеров
mgbabenko@ncfu.ru, nkuchеров@ncfu.ru

УДК 004.042

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.57.

Задача вычисления определителя возникает при решении целого практического ряда задач. Однако вычисления определителя зашифрованной матрицы является вычислительно сложной задачей. Существующие на данный момент алгоритмы вычисления определителя зашифрованной квадратной матрицы приводят к частичной или полной краже секретного ключа несанкционированным пользователем. В работе предлагаем два алгоритма вычисления определителя зашифрованной матрицы. Первый алгоритм основан на определении, он применим для матриц 2 и 3 порядка. Вторым алгоритмом основан на модификации формулы дополнения по Шура, позволяющий уменьшить количество шагов по сравнению с первым алгоритмом.

Ключевые слова: вычисление определителя, шифрование, секретный ключ.

Calculating the determinant of an encrypted square matrix

The problem of calculating the determinant arises when solving a number of practical problems. However, computing the determinant of an encrypted matrix is computationally challenging. Moreover, the currently existing algorithms for calculating the determinant of an encrypted square matrix lead to partial or complete theft of the secret key by an unauthorized user. In this paper, we propose two algorithms for calculating the determinant of an encrypted matrix. The first algorithm is based on the definition applicable for matrices of orders 2 and 3. The second algorithm is based on modifying the Schur complement formula, making it possible to reduce the number of steps compared to the first algorithm.

Keywords: calculation of determinant, encryption, secret key.

Пусть задана квадратная матрица A для которой необходимо вычислить определитель.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-71-10033).

Бабенко Михаил Григорьевич, к.ф.-м.н., доцент, СКФУ (Ставрополь, Россия); Mikhail Babenko (North Caucasus Federal University, Stavropol, Russia)

Кучеров Николай Николаевич, к.т.н., СКФУ (Ставрополь, Россия); Nikolay Kuchеров (North Caucasus Federal University, Stavropol, Russia)

Определение [1]. Определителем квадратной матрицы $A = (a_{i,j})$, порядка n называется число

$$\det A = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} \text{sign}(k_1, k_2, \dots, k_n) \cdot a_{1, k_1} \cdot a_{2, k_2} \cdots a_{n, k_n}$$

где знак перестановки (k_1, k_2, \dots, k_n) обозначается через $\text{sign}(k_1, k_2, \dots, k_n)$.

Рассмотрим алгоритм вычисления определения, основанный на Определении 1, мы получим:

Алгоритм. Вычисления определителя зашифрованной квадратной матрицы $A_i(x) = (a_{i,j})$ порядка n по определению:

Input: Матрица A представленная в зашифрованном виде n -многочленами $A_i(x)$, где i -я строка матрицы A закодирована многочленом $A_i(x)$. Единичная матрица E порядка n , представленная в зашифрованном виде n многочленами $E_i(x)$, где i -я строка матрицы E закодирована многочленом $E_i(x)$.

Output: $A(x)$ – значение определителя $\det A$ в зашифрованном виде.

1. $Per = (1, 2, \dots, n)$

2. $A(x) = A_1(x) \otimes E_1(x)$

3. **For** $i = 2$ **to** n **do**:

(a) $a(x) = A_i(x) \otimes E_i(x)$

(b) $A(x) = A(x) \otimes a(x)$

4. **while** ($\text{nextPermutation}(Per)$):

(a) $S = \text{sign}(Per)$

(b) $Temp(x) = A_1(x) \otimes E_{Per_1}(x)$

(c) **For** $i = 2$ **to** n **do**:

i. $a(x) = A_i(x) \otimes E_{Per_i}(x)$

ii. $Temp(x) = Temp(x) \otimes a(x)$

(d) **IF** $S > 0$ **then** $A(x) = A(x) \oplus Temp(x)$ **else** $A(x) = A(x) \ominus Temp(x)$

5. **return**($A(x)$)

Функция $\text{nextPermutation}(Per)$ возвращает True в случае, если существует следующая перестановка в лексикографическом порядке, и False, если нет.

Если функция $nextPermutation(Per)$ вернула True, то значение следующей в лексикографическом порядке перестановки будет записано в переменную Per. Оценим необходимое количество арифметических операций с зашифрованными числами: глубина умножений равна $2 \cdot n - 1$, количество сложений зашифрованных чисел $n! - 1$ (так как количество перестановок равно $n!$ [2]).

Литература

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры: Электронное издание // М.: МЦНМО. – 2014.
2. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления // М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984, 320 с.

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ ОБРАБОТКА ЗАЯВЛЕНИЙ О ПЕРЕВОДЕ И ВОССТАНОВЛЕНИИ В БАШГУ

@ В.С. Байбаков, М.Л. Бердникова

mlo@mail.ru

УДК 681

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.58.

Работа посвящена созданию удобного и интуитивно понятного приложения для сравнения данных из справок для перевода и учебного плана.

Ключевые слова: приложение, распознавание, анализ.

Automated processing of applications for transfer and restoration to BSU

The work is devoted to creating a convenient and intuitive application for comparing data from translation references and the curriculum.

Keywords: application, recognition, analysis.

Очень часто студенты вузов приносят в деканаты заявления и документы о переводе или восстановлении, в связи с чем приходится их анализировать и решать какие дисциплины можно перезачесть данному студенту, а какие необходимо ему досдать. Делается это все вручную, занимает много времени, поэтому автоматизация этого процесса очень актуальна для многих учебных заведений.

Так как эти документы оформлены на бумажных носителях, необходимо перевести их в электронный вид с целью дальнейшей обработки. Поэтому имеются две задачи, которые нужно решить: перевод данных в электронный вид и их последующий анализ.

Было разработано приложение, которое получает на вход заявление студента, переводит его в электронный табличный вид, анализирует полученную информацию и в качестве выходного файла выводит таблицу, где содержится информация, какие дисциплины можно перезачесть, каких дисциплин не хватает, а для каких дисциплин недостаточно академических часов. Пользователю же остается только конечная обработка полученной информации.

Для решения проблемы конвертации информации из поступающего на вход скана документа в электронный вид была использована нейронная сеть Tesseract-OCR, которая из картинки конвертирует текст и записывает его в файл для табличного процесса Excel.

Байбаков Владислав Станиславович, студент, БашГУ (Уфа, Россия); Vladislav Baibakov (Bashkir State University, Ufa, Russia);

Бердникова Марина Леонидовна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Marina Berdnikova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Далее программа сравнивает содержимое сформированного .xls файла с учебным планом, в котором содержится информация о всех курсах и часах той специальности, на которую студент переводится или восстанавливается. Результат выводится в файл в виде таблицы. В ней названия предметов из учебного плана будут выделены одним из трех цветов.

Если у студента в списке дисциплин есть данный предмет и количество часов не менее, чем в образовательной программе, то текст будет зеленого цвета.

Если данный предмет есть, но часов недостаточно, то текст в ячейке будет окрашен в желтый цвет, и в ячейке с часами образовательной программы в скобках будет указано количество академических часов из справки студента.

В случае, если в списке дисциплин студента нет какого-то предмета, то его название будет выделено красным цветом.

Программа написана на языке программирования Python. Весь процесс разработки происходил в среде программирования PyCharm.

Приложение может быть использовано вне зависимости от факультета и даже вуза. Для этого необходимо выбрать файл учебного плана соответствующей специальности, который должен располагаться в папке проекта. Поэтому приложение можно использовать не только в БашГУ, но и в других вузах.

Литература

1. Федоров, Д. Ю. Программирование на языке высокого уровня Python : учеб. пособие для прикладного бакалавриата. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2019
2. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Tesseract>

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПССС ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ СКВАЖИНЫ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИНЫ ГРП

@ Р.А. Башмаков, А.А. Шамматова
bashmakov_rustem@mail.ru, stasya_7@mail.ru

УДК 532.5

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.59.

С помощью метода последовательной смены стационарных состояний (ПССС) находится приближенное решение системы уравнений, описывающих фильтрацию флюида в трещине ГРП и пласте, окружающем трещину при переменных режимах работы нефтяной скважины.

Ключевые слова: метод последовательной смены стационарных состояний, нефтяная скважина, трещина ГРП, гидроразрыв пласта, эволюция давления, расход жидкости, низкопроницаемый коллектор.

Application of the method of sequential change of steady states to describe transient well operation modes in the presence of a hydraulic fracture

Using the method of sequential change of steady states, an approximate solution of the system of equations describing fluid filtration in the fracture and the reservoir surrounding the fracture at variable operating modes of the oil well is found.

Keywords: method of sequential change of steady states,, oil well, hydraulic fracturing, pressure evolution, fluid flow rate, low-permeability reservoir.

Гидроразрыв пласта (ГРП) – один из наиболее активно применяемых на практике методов интенсификации добычи нефти из низкопроницаемых пластов. В данной работе для скважин с вертикальной гидроразрывной трещиной предлагаются простые формулы, позволяющие по заданному изменяющемуся дебиту приближенно определять, как должно

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>

Башмаков Рустэм Абдрауфович, к.ф.-м.н., БашГУ (Уфа, Россия), ИМех УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Rustem Bashmakov (Bashkir State University, Ufa, Russia, Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa, Russia)

Шамматова Анастасия Анатольевна, старший преподаватель, Уфимский государственный нефтяной технический университет (Уфа, Россия), ИМех УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Anastasia Shammatova (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia, Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa, Russia)

изменяться давление на скважине для поддержания выбранного режима работы и, наоборот, по заданному графику изменения давления на скважине определять изменение дебита.

Результаты работы также позволяют по данным о работе скважины анализировать коллекторские характеристики пласта и трещины, определять параметры трещины.

Метод последовательной смены стационарных состояний (ПССС) был предложен И.А. Чарным (см. [1]). Будем также использовать результаты работ [2-6].

Пусть в момент времени $\tau_0 = 0$ начинается работа скважины и давление на скважине, приняв значение $P_{(w)0}$, поддерживается постоянным до момента времени τ_1 , первоначальное давление в пласте считаем равным 0. С момента времени τ_1 до момента времени τ_2 давление на скважине равно $P_{(w)1}$ и т. д., то есть давление на скважине изменяется ступенчато. Тогда решение, полученное применением метода ПССС, описывающее изменение давления в трещине, может быть записано в виде

$$P_f(t, x) = H(t)\Delta P_{(w)0} \exp\left(-2^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{A}{2}}\frac{x}{t^{1/4}}\right) + \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (P_{(w)i} - P_{(w)i-1}) \exp\left(-2^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{A}{2}}\frac{x}{(t - \tau_i)^{1/4}}\right),$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда, x — координата (расстояние по трещине от скважины).

Дебит (расход) жидкости на единицу высоты трещины в этом случае будет равен

$$q = -2^{1/4}\sqrt{\frac{A}{2}}\frac{d_f k_f}{\mu} \left(\Delta P_{(w)0} H(t)t^{-1/4} + \sum_{i=1}^n (\Delta P_{(w)i} - \Delta P_{(w)i-1}) H(t - \tau_i)(t - \tau_i)^{-1/4} \right),$$

Отсюда можно найти количество жидкости, извлекаемое из двух рукавов трещины высоты h_f за время t :

$$V = \frac{2^{7/4}d_f k_f \sqrt{A}}{3\mu} \left(t^{3/4}\Delta P_{(w)0} + \sum_{i=1}^n (\Delta P_{(w)i} - \Delta P_{(w)i-1}) H(t - \tau_i) (t - \tau_i)^{3/4} \right).$$

Пусть теперь дебит жидкости принимает постоянные значения $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$ в промежутках времени $[0, \tau_1), [\tau_1, \tau_2), \dots, [\tau_n, \infty)$. Тогда мы

можем найти соответствующий закон изменения давления в трещине:

$$P_f = \frac{-\mu}{2^{1/4} d_f k_f \sqrt{A/2}} \left(q_0 H(t) t^{1/4} \exp \left(-x \sqrt{A/\sqrt{2t}} \right) + \sum_{i=1}^n H(t - t_i) (q_i - q_{i-1}) (t - \tau_i)^{1/4} \exp \left(-x \sqrt{A/\sqrt{2(t - \tau_i)}} \right) \right).$$

Для перепада давления на забое скважины $P_{f(w)} = P_f(t, 0)$ получим:

$$P_{f(w)} = \frac{-\mu}{2^{1/4} d_f k_f \sqrt{A/2}} \left(t^{1/4} q_0 H(t) + \sum_{i=1}^n (t - \tau_i)^{1/4} H(t - \tau_i) (q_i - q_{i-1}) \right).$$

Данные формулы удобны в применении и дают результаты очень близкие к точным аналитическим выражениям.

Литература

1. *Чарный И.А.* Подземная гидрогазодинамика. – М.: Изд-во нефтяной и горно-топливной литературы, 1963. – 396с.
2. *Cinco-Ley H.* Evaluation of Hydraulic Fracturing by Transient Pressure Analysis Methods // SPE 10043 Petrol. Exh. and Techn. Symp., Beijing China. Mar 18-26. 1982.
3. *Хабидуллин И.Л., Хисамов А.А.* Моделирование нестационарной фильтрации вокруг скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2019, № 5. – 6–14.
5. *Шагапов В.Ш., Нагаева З.М.* К теории фильтрационных волн давления в трещине, находящейся в пористой проницаемой среде // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58, № 5 (345). – 121-130.
6. *Нагаева З.М., Шагапов В.Ш.* Приближенное решение задачи об упругом режиме фильтрации в трещине, находящейся в нефтяном пласте // Инженерно-физический журнал. – 2020. – Т. 93, № 1. – 206 – 215.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЬЕЗОПРОВОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРОВОМ КОЛЛЕКТОРЕ

© Ю.О. Бобренёва, Р.М. Узянбаев, И.М. Губайдуллин
yu.o.bobreneva@gmail.com, ravil-11@mail.ru, irekmars@mail.ru

УДК 519.63

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.60.

В работе рассматривается математическая модель пьезопроводных процессов двухфазной жидкости в трещиновато-поровом коллекторе. Модель представлена системой, состоящей из четырех уравнений, описывающих фильтрацию двухфазной жидкости в трещинах и в матрице. Описан метод численного моделирования на основе расщепления по физическим процессам. Поставленная задача аппроксимировалась неявной разностной схемой. Для решения системы линейных алгебраических уравнений использовался метод скалярной прогонки. Проведены вычислительные эксперименты.

Ключевые слова: математическая модель, дифференциальные уравнения, массоперенос, трещиноватый коллектор, насыщенность.

Numerical modeling of piezoconductive processes of a two-phase fluid system in a fractured-porous reservoir

The paper considers a mathematical model of piezo-conductive processes of a two-phase fluid in a fractured-porous reservoir. The model is represented by a system of four equations describing the filtration of a two-phase fluid in fractures and in a matrix. A numerical simulation method based on splitting into physical processes is described. The problem posed was approximated by an implicit difference scheme. The scalar sweep method was used to solve a system of linear algebraic equations. Computational experiments have been carried out.

Keywords: mathematical model, differential equations, fluid transfer, fractured reservoir, saturation.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 21-71-20047

Бобренёва Юлия Олеговна, аспирант, УФИЦ РАН, Институт нефтехимии и катализа РАН (Уфа, Россия); Yulia Bobreneva (Ufa Branch of the Russian Academy of Sciences, Institute of Petrochemistry and Catalysis, Ufa, Russia)

Узянбаев Равиль Мунирович, старший преподаватель, УГНТУ (Уфа, Россия); Ravil Uzyanbaev (Ufa State Petroleum Technological University , Ufa, Russia)

Губайдуллин Ирек Марсович, д.ф.-м.н., в.н.с. Института нефтехимии и катализа УФИЦ РАН, профессор Уфимского государственного нефтяного технического университета (Уфа, Россия); Irek Gubaidullin (Ufa Branch of the Russian Academy of Sciences, Institute of Petrochemistry and Catalysis, Ufa, Russia)

Трещиновато-пористые коллектора характеризуются интенсивным обменным потоком жидкости между трещинами и пористыми блоками. Каждая рассматриваемая система имеет свой индивидуальный набор фильтрационно-емкостных параметров, что усложняет рассматриваемую задачу. Для изучения массопереноса двухфазной жидкости в среде с двойной пористостью предложена математическая модель, которая описывается системой дифференциальных уравнений с частными производными. В основе математического описания процессов фильтрации лежат уравнения механики сплошных сред, включающие в себя законы сохранения массы, импульса и энергии, дополненные фазовыми равновесными соотношениями. В качестве функций перетока используются классические функции, предложенные в работах Уоррена-Рута.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial(\varphi^f \rho_o^f S_o^f)}{\partial t} + \nabla(\rho_o U_o^f) + q_o^f = \rho_o q_j, \\
 & \frac{\partial(\varphi^f \rho_w^f S_w^f)}{\partial t} + \nabla(\rho_w U_w^f) + q_w^f = \rho_w q_j, \\
 & \frac{\partial(\varphi^m \rho_o^m S_o^m)}{\partial t} + q_o^m = \rho_o q_j, \\
 & q_o^m = -q_o^f = -\rho_o^m \sigma \lambda_o^m (P^f - P^m), \lambda_o^m = \frac{k^m k_{ro}(S_o^m)}{\mu_o}, \\
 & \frac{\partial(\varphi^m \rho_w^m S_w^m)}{\partial t} + q_w^m = \rho_w q_j, \\
 & q_w^m = -q_w^f = -\rho_w^m \sigma \lambda_w^m (P^f - P^m), \lambda_w^m = \frac{k^m k_{rw}(S_w^m)}{\mu_w}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

P^f – пластовое давление в сети трещин (МПа), P^m – пластовое давление в матрице (МПа), φ^f – пористость в системе трещин, φ^m – пористость в матрице, ρ_o – плотность нефти (г/м^3), ρ_w – плотность воды (г/м^3), S_i^f – насыщенность нефти/воды в системе трещин, S_i^m – насыщенность нефти/воды в матрице, U_i^f – скорость течения нефти/воды, q_j – дебит жидкости ($\text{м}^3/\text{сут}$), q_i^α – функция перетока между матрицей и трещинами, k^α – абсолютная проницаемость (м^2), k_{rw} , k_{ro} – относительные фазовые проницаемости (м^2), μ_o – вязкость нефти (Па·с), μ_w – вязкость воды (Па·с), σ – коэффициент трещиноватой породы ($1/\text{м}^2$), $\alpha = f, m$, где f – система трещин, m – система матриц, $i = o, w$, где o – нефть, w – вода [1, 2].

Полученная система является сложной и влечет за собой ряд трудностей, которые связаны с отсутствием важных свойств линеаризованной системы уравнений, таких как самосопряженность и симметричность, присутствующих при описании пьезопроводных процессов [3]. Для устранения возникшей проблемы проводится полное расщепление системы по физическим процессам [4]. После расщепления системы строится неявная разностная схема для блока по пьезопроводности. На основе предложенной разностной схемы рассчитываются давления в системе трещин и матрице. Для решения системы линейных алгебраических уравнений использовался метод скалярной прогонки. Проведены вычисли-

тельные эксперименты.

Литература

1. *Bobreneva Yu.O., Mazitov A.A. and Gubaydullin I.M.* Mathematical Modeling of Fluid Flow Processes in The Fracture-Porous Reservoir // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1096 (2019) 012187, doi:10.1088/1742-6596/1096/1/012187.
2. *Aziz H and Settari E* 2004 Mathematical modeling of reservoir systems (Moscow-Izhevsk:Institute for Computer Research)
3. *Патанкар С.В.* Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. [ред.] Яньков Г.Г. [перев.] Калабин Е.В. б.м.: МЭИ, 2003 г. - 312 с.
4. *Рагимли П.И., Повеценок Ю.А., Рагимли О.Р., Подрыга В.О., Казакевич Г.И., Гасилова И.В.* Использование расщепления по физическим процессам для численного моделирования диссоциации газовых гидратов // Математическое моделирование, 2017, т.29, №7, с.133-144

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЗАБОЛЕВАНИЯ САХАРНЫМ ДИАБЕТОМ

@ Р.П. Варманаев, Г.К. Хисаметдинова
varmanaev.roman@yandex.ru, gullirgk@mail.ru

УДК 519.8

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.61.

В статье рассматривается процесс заболевания сахарным диабетом как процесс многих состояний. При математическом моделировании используется Марковский процесс.

Ключевые слова: Математическое моделирование, Марковский процесс, медицинское страхование

Mathematical modeling of the process of diabetes mellitus

The article examines the process of diabetes mellitus as a process of many conditions. In mathematical modeling, the Markov process is used.

Keywords: Mathematical modeling, Markov process, health insurance

В современном мире важно заранее моделировать различные ситуации возможного будущего. В наше время существует подход, который позволяет применять теорию марковских процессов для моделирования ситуации как поведение системы со многими состояниями. Рассмотрим процесс заболевания сахарным диабетом, как модель состояний, которую используют для описания состояния застрахованного человека.

При математическом моделировании на основе Марковских процессов можно провести расчет вероятностей соответствующих состояний при известных параметрах модели.

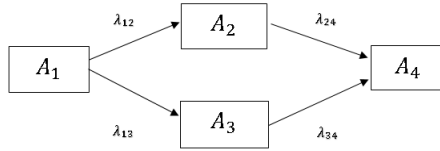
В каждый момент времени индивид может находиться в одном из перечисленных состояний. Нужно оценивать вероятность его нахождения в том или ином состоянии.

Для процесса заболевания сахарным диабетом рассмотрим четыре состояния системы: А1 – «здоров», А2 – «болен сахарным диабетом первого типа», А3 – «болен сахарным диабетом второго типа», А4 – «смерть», где λ - интенсивности переходов из одного состояния в другое. Соответствующая схема представлена на рисунке.

Для того, чтобы найти вероятности нахождения индивида в том или ином состоянии составим уравнения Колмогорова. Для схемы, представленной на рисунке, система дифференциальных уравнений имеет вид:

Варманаев Роман Петрович, магистрант, БашГУ (Уфа, Россия); Roman Varmanaev (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Хисаметдинова Гульназ Курбангалеевна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Gulnaz Khisametdinova (Bashkir State University, Ufa, Russia)



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_1}{dt} = -\lambda_{12}p_1(t) - \lambda_{13}p_1(t), \\ \frac{dp_2}{dt} = \lambda_{12}p_1(t) - \lambda_{24}p_2(t), \\ \frac{dp_3}{dt} = \lambda_{13}p_1(t) - \lambda_{34}p_3(t), \\ \frac{dp_4}{dt} = \lambda_{24}p_2(t) + \lambda_{34}p_3(t), \end{array} \right.$$

Здесь $p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)$ вероятности состояний системы A_1, A_2, A_3, A_4 соответственно. Кроме того, для любого момента времени t выполняется нормировочное условие $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) = 1$.

Когда становятся известными интенсивности переходов, остается только решить уравнения Колмогорова. Для соответствия расчета реальным данным, нужно найти такие значения интенсивности переходов, при которых модель будет описывать экспериментальные данные и даст возможность прогнозирования.

Данная математическая модель описывает процесс заболевания сахарным диабетом. Зная значения интенсивности переходов, мы по модели можем посчитать вероятности нахождения системы в том или ином состоянии, а затем и количество человек находящихся в соответствующих состояниях.

Литература

1. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология –Москва, высшая школа 2001.
2. *Спивак С.И., Абдюшева С.Р.* Обратные задачи для марковских моделей. Системы управления и информационные технологии, 2008, №3(33), с.20-25

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СРЕДНЕГО ИЗГИБА АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

@ П.Г. Великанов, Д.М. Халитова
pvelikanov@mail.ru, diana98200093@gmail.com

УДК 531.39

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.62.

Развитие отраслей современного машиностроения ставит задачи расчета тонкостенных конструкций, сочетающих в себе легкость и экономичность с одной стороны и высокую прочность и надежность с другой. В связи с этим широкое использование анизотропных материалов и пластиков представляется оправданным. Задачи теории пластин и оболочек относятся к классу краевых задач, аналитическое решение которых в силу различных обстоятельств (нелинейность дифференциальных уравнений и др.) определить невозможно. Решить эту проблему помогают численные методы. Среди численных методов незаслуженно мало внимания уделено методу граничных элементов (МГЭ). В связи с этим дальнейшее развитие МГЭ для решения задач теории анизотропных пластин и оболочек, основанных на применении фундаментальных решений, является актуальным.

Ключевые слова: механика, математика, дифференциальные уравнения, фундаментальные решения.

Determination of the fundamental solution problem of an anisotropic plate average bending

The development of branches of modern mechanical engineering poses the task of calculating thin-walled structures that combine lightness and economy on the one hand and high strength and reliability on the other. In this regard, the widespread use of anisotropic materials and plastics seems justified. The problems of the theory of plates and shells belong to the class of boundary value problems, the analytical solution of which, due to various circumstances (the nonlinearity of differential equations, etc.), cannot be determined. Numerical methods help to solve this problem. Among the numerical methods, undeservedly little attention is paid to the boundary element method (BEM). In this regard, the further development of the BEM for solving problems of the theory of anisotropic plates and shells based on the application of fundamental solutions is relevant.

Великанов Петр Геннадьевич, к.ф.-м.н., доцент, КФУ (Казань, Россия); Petr Velikanov (Kazan Federal University, Kazan, Russia)

Халитова Диана Марселевна, магистрант, КФУ (Казань, Россия); Diana Khalitova (Kazan Federal University, Russia)

Keywords: mechanics, mathematics, differential equations, fundamental solutions.

Рассматриваются малые деформации тонкой линейно-упругой полой оболочки, деформирование которой описывается моделью, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява в рамках теории среднего изгиба [1].

При рассмотрении пластин и оболочек постоянной толщины получим систему нелинейных дифференциальных уравнений равновесия гибкой полой анизотропной оболочки, в которой были выделены слева линейные операторы задач о плоском напряженном состоянии и изгибе анизотропной пластины. Для решения поставленной задачи МГЭ необходимо предварительно определить компоненты матрицы фундаментального решения задачи о плоском напряженном состоянии и фундаментальное решение задачи изгиба анизотропной пластины.

Для того, чтобы свести задачу по поиску компонент матрицы фундаментального решения задачи о плоском напряженном состоянии анизотропной пластины к дифференциальному уравнению, подобному задаче изгиба анизотропной пластины, была использована методика, предложенная в [2]. Таким образом, определение матрицы фундаментального решения системы линейных дифференциальных уравнений данным методом предполагает:

- 1) Вычисление компонент ассоциированного дифференциального оператора по методике, аналогичной методике вычисления компонент обратной матрицы;
- 2) Решение уравнения, подобного уравнению задачи изгиба;
- 3) В соответствии с найденным ассоциированным дифференциальным оператором проведение всех необходимых вычислений производных функции скалярной функции.

Дифференциальные уравнения для двух отмеченных задач отличаются лишь коэффициентами в дифференциальных операторах, и их решение может быть найдено по аналогичной методике.

В процессе получения фундаментальных решений для задачи изгиба анизотропных пластин все авторы, следуя [3], считали, что корни характеристического уравнения задачи изгиба для реальных однородных анизотропных материалов являются комплексно сопряженными (первой или второй кратности). В общем случае, что особенно важно для поиска компонент матрицы фундаментального решения задачи о плоском напряженном состоянии анизотропной пластины, корни характеристического уравнения могут быть и действительными (первой или второй кратности) – этот вариант ранее в работах учтен не был.

Литература

1. Галлимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. — Казань:

Изд-во Казанского ун-та, 1975. — 326 с.

2. *Shanz M., Antes H.* A Boundary Integral Formulation for the Dynamic Behavior of a Timoshenko Beam// Electronic Journal of Boundary Elements. Vol. ВЕТЕQ 2001. No. 3. — С. 348-359.

3. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. — Москва: ОГИЗ-Гостехиздат, 1947. — 355 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И КОГНИТИВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПО ДАННЫМ СОЦИАЛЬНЫХ МЕДИА

@ Н.Т. Габдрахманова, М.А. Пильгун

gabdrakhmanova nt@rudn.ru, mpilgun@iling-ran.ru

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.63.

Статья посвящена разработке различных типов моделей с использованием когнитивных вычислений по речевым данным акторов социальных медиа для выявления наличия/отсутствия социальной напряжённости в районах реализации градостроительных проектов на примере строительства транспортно-пересадочного узла «Нижегородская» в городе Москве (Россия). Эмпирической базой исследования послужили данные социальных сетей. Исследование проводилось с использованием трансдисциплинарного подхода, включало семантический анализ с использованием нейросетевых технологий, методов математической статистики и топологического анализа данных.

Ключевые слова: нейронная сеть, восприятие речи, топологический анализ данных

Mathematical modeling and Cognitive Computing from Social Media Data

The paper deals with the development of various types of models using cognitive computing based on speech data of social media actors to reveal the presence/absence of social tension in the areas where urban development projects are being implemented, as illustrated by the construction of the Nizhegorodskaya transport interchange hub in Moscow (Russia). The empirical base of the study was data from social networks. The research was carried out using a transdisciplinary approach, including semantic analysis using neural network technologies and methods of mathematical statistics, topological data analysis

Keywords: neural network, speech perception, topological data analysis

Когнитивные исследования в последнее время привлекают все большее внимание исследователей. Под когнитивными вычислениями обобщают различные технологические подходы, такие как искусственные

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00261).
Габдрахманова Наиля Талгатовна, к.т.н., доцент, РУДН (Москва, Россия); Nailia Gabdrakhmanova (RUDN University, Moscow, Russia)

Пильгун Мария Александровна, д.ф.н., профессор, Институт языкознания РАН (Москва, Россия); Maria Pilgun (Institute of Linguistics, RAS, Moscow, Russia)

нейронные сети, нечеткие системы и эволюционные вычисления, для моделирования когнитивных способностей человека (мышление, обучение, рассуждение и т. д.) с помощью компьютерных моделей [1]. Когнитивные вычисления применяются в различных профессиональных сферах. Цель работы: разработка математических моделей с использованием когнитивных вычислений по речевым данным акторов социальных медиа для выявления наличия/отсутствия социальной напряженности в районах реализации градостроительных проектов на примере строительства транспортно-пересадочного узла (ТПУ) «Нижегородская» в городе Москве (Россия). Эмпирической базой исследования послужили данные социальных сетей, микроблогов, блогов, мессенджеров, видео хосингов, форумов, Интернет-СМИ, тематических порталов и отзывы, посвященные реализации проекта ТПУ «Нижегородская». Date of collection: 1 Январь 2020 - 31 Март 2021. Сбор данных проводился с использованием алгоритмов Brand Analytics. Для интерпретации данных применялся трансдисциплинарный подход. Нейросетевая технология TextAnalyst 2.3. позволила выявить и проанализирована тематическую структуру базы данных, выделить семантическую сеть и проанализировать ядро семантической сети, провести обобщение и анализ словесных ассоциаций. Сентимент-анализ осуществлялся с помощью модуля определения тональности Eureka Engine. Контент-анализ проводился с помощью сервиса AutoMap. Скалярные данные, полученные с использованием TextAnalyst 2.3, можно рассматривать как временные ряды. Достаточно общей математической моделью для временных рядов $x(t)$ служит модель вида: $x(t)=u(t)+v(t)$, где $u(t)$ – детерминированная последовательность или систематическая составляющая, $v(t)$ – случайная составляющая. В работе, для оценки $u(t)$ использованы регрессионные модели [2], для оценки $v(t)$ – авторегрессионные модели. В работе исследованы возможности использования топологического анализа данных (ТДА) [3] для классификации ситуации по данным социальных медиа. По данным временных рядов построены персистентные диаграммы и барркоды с использованием библиотек языка R. Показано, что вычисления оценок характеристик Эйлера позволяют решать актуальные задачи.

Семантический анализ контента с использованием нейросетевых технологий показал нейтральное восприятие жителей реализации проекта, отсутствие социального стресса в районах строительства. Возглавляют рейтинг контента официальные сообщения, которые анонсируют планы московских властей по развитию транспортной системы в районе и ход строительства. Цифровые следы пользователей подтверждают нейтральное восприятие и оценки потребности жителей в изменении транспортной ситуации после окончания реализации проекта. Построенные

математические модели временных рядов по данным интенсивностей сообщений с нейтральным, позитивным и негативным отношением к строительству позволяют: 1) количественно оценить динамику этих рядов; 2) прогнозировать значения временных рядов на несколько шагов. Результаты исследований имеют важное значение для принятия управленческих решений при выявлении и предотвращении градостроительных конфликтов. Алгоритмы, разработанные с использованием методов ТДА, показывают потенциал использования этих методов для решения аналогичных задач.

Литература

1. *Portmann E., D'Onofrio S.* Cognitive Computin. Theorie, Technik und Praxis. — Wien: Springer Vieweg, 2020.
2. *Borovikov V.P., Ivchenko G.I.* Forecasting in the Statistica system in the Windows environment. Fundamentals of theory and intensive practice on a computer. — Moscow: Finance and Statistics, 2006
3. *Carlsson G., Zomorodian A.* Computing persistent homology //Proc. 20th Ann. Sympos.Comput. Geom, 2004, 347–356.

ОПИСАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ВЕСОВОГО ПРОСТРАНСТВА МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

© О.Г. Гайдамак, В.И. Луценко, А.Р. Сагитова

gajdamakog@yandex.ru

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.64.

В работе даётся описание функционалов для весового пространства многих переменных

Ключевые слова: весовое пространство, функционал

On representation by series of exponents in the normed space of analytic functions

The paper describes functionals for the weighted space of many numbers

Keywords: weight space, functional

Пусть $w(t)$ положительная функция определенная на \mathbb{R}^n . Обозначим через $L^2(w)$ пространство локально интегрируемых функций $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна следующая норма

$$\|f\|_{L^2(w)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 / w(t) dt \right)^{1/2},$$

где $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ и $dt = dt_1 dt_2 \dots dt_n$.

Пусть S линейный непрерывный функционал над гильбертовым пространством $L^2(w)$. Определим преобразование Фурье-Лапласа функционала S следующим образом

$$\hat{S}(z) = S(\exp(\langle t, z \rangle)), \text{ где } \langle z, t \rangle = z_1 t_1 + z_2 t_2 + \dots + z_n t_n.$$

Преобразование Фурье-Лапласа сопоставляет каждому линейному функционалу S целую функцию $\hat{S}(z)$ в \mathbb{C}^n и, тем самым, определяет сопряженное пространство $L_2^*(w)$. В данной статье рассматривается задача описание этого подпространства целых функций.

Гайдамак Ольга Григорьевна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Gaidamak Olga (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Луценко Владимир Иванович, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Lucenko Vladimir (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Сагитова Айгуль Рашитовна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Sagitova Aigul (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Одно из решений этой задачи сводится к определению нормы в пространстве целых функций с помощью формулы

$$\|F\|_{\mu} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(z)|^2 d\mu(z) \right)^{1/2},$$

где $\mu(z)$ – неотрицательная мера Бореля, такая, что для любого функционала S выполняется следующее соотношение

$$c\|S\|_{L_2^*(w)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{S}(z)|^2 d\mu(z) \right)^{1/2} \leq C\|S\|_{L_2^*(w)}$$

Если такая мера существует, то преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм пространства $L_2^*(D, w)$ и пространства целых функций с нормой $\|\cdot\|_{\mu}$.

При $n = 1$ для произвольных логарифмически выпуклых весов в работе [4] получено описание пространства функционалов с аналогом равенства Парсеваля (1), с абсолютными константами в оценке. В работе ([1]) доказано, что для получения (1) с абсолютными оценками требование логарифмической выпуклости весовой функции необходимо.

Аналогичные описания пространств функционалов над пространствами последовательностей, Смирнова, Бергмана представлены в работах [2-5].

Справедлива следующая теорема.

Теорема Пусть $\ln w(t) = 2kt^{\alpha}$ ($\alpha > 1$) и $h(t) = k|t|^{\alpha}$ – выпуклая, радиальная функция в \mathbb{R}^n . Также определим сопряженную по Юнгу функцию

$$\tilde{h}(|x|) = \sup_{t \in \mathbb{R}^n} (\langle x, t \rangle - h(t)) = (\alpha - 1)k \left(\frac{|x|}{k\alpha} \right)^{\beta},$$

где $1/\alpha + 1/\beta = 1$ Обозначим

$$s(y) = \begin{cases} y^{(n-1)/2}, & y > 1, \\ 1, & y \leq 1. \end{cases}$$

Тогда пространство $L_2^*(w)$ изоморфно относительно преобразования Фурье - Лапласа пространству целых функций $H^2(\mathbb{C}^n)$ с нормой

$$\|F\|_{H^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x + iy)|^2 d\sigma(\tilde{h}(x)) dy \right)^{1/2},$$

где $dy = dy_1 dy_2 \dots dy_n$,
 $d\sigma(\tilde{h}(x)) = \exp(-2\tilde{h}(x)) \rho(|x|) \left(s \left(\frac{|x|}{h'(|x|)} \right) \right) dA(\tilde{h}(x))$, и
 $dA(\tilde{h}(x)) = d\tilde{h}'_{x_1}(x) \wedge d\tilde{h}'_{x_2}(x) \wedge \dots \wedge d\tilde{h}'_{x_n}(x)$ – обобщенный оператор Монжа-Ампера, причем выполняется аналог равенства Парсеваля

$$c \|S\|_{L_2^*}^2 \leq \|\hat{S}(z)\|_{H^2}^2 \leq 3C \left(\frac{(n-1)(\beta-1)}{2} \right)^{\frac{(n-1)}{2}} \|S\|_{L_2^*}^2 \quad (1)$$

Замечание: В работе [1] доказано, что верхняя оценка принципиально не улучшаема.

Литература

1. Youlmukhametov R. S. and Lutsenko V. I. Weighted Laplas transform. // Pitman Research Notes in Mathematics, Logman Scientific & Technical, –1991, – С. 232-240..
2. Saïtoh S. Generalization of Paley–Wiener’s theorem for entire function of exponential type. // Proc. Amer. Math. Soc. –99 (1987), С. 465–467.
3. Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С. Обобщение теоремы Пэли – Винера на функционалы в пространствах Смирнова. // Труды Математического института им. В. А. Стеклова, Москва, «Наука», –1991 – Т. 200. –С. 245–254.
4. Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С. Обобщение теоремы Пэли - Винера на весовые пространства. // Математические заметки –1990. –Т.48., –вып. 5, – С. 80–87.
5. Луценко В. И. Теорема Пэли - Винера на неограниченном интервале. // Исследования по теории приближений. Уфа, –1989, –С. 79–85.
6. Юлмухаметов Р. С. Асимптотика многомерного интеграла Лапласа. // Исследования по теории приближений. Уфа, –1989, –С. 132–139.
6. Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С. Описание функционалов для весовых пространств с радиальным весом. // Вестник УГАТУ, серия –2007. – Т.9., –№. 3(21), –С. 104–109.

НЕСТРУКТУРИРОВАННОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ МАГНИТНОЙ МУФТЫ

@ Р.Р. Гизатуллин, С.Н. Пещеренко
gizatullin-fcsm@mail.ru, peshcherenko@yandex.ru

УДК 532.54

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.65.

Методами вычислительной гидродинамики изучалось течение жидкости в узких каналах магнитной муфты, применяемой для защиты погружного электродвигателя. Установлено, что в зазоре между корпусом и внешней полумуфтой реализуется ламинарное течение с вихрями Тейлора.

Ключевые слова: магнитная муфта, вихри Тейлора, ламинарное течение, вычислительная гидродинамика

Unstructured fluid flow in the channels of the magnetic coupling

The fluid flow in narrow channels of a magnetic coupling used to protect a submersible motor was studied using the methods of computational fluid dynamics. It was found that a laminar flow with Taylor vortices is realized in the gap between the housing and the outer coupling half.

Keywords: magnetic coupling, Taylor vortices, laminar flow, computational fluid dynamics

Основной вид течения в магнитной муфте — это течение в узком зазоре между вращающимся и неподвижным цилиндрами. Его можно наблюдать в зазоре между внешней полумуфтой и корпусом муфты, а также в зазоре между внутренней полумуфтой и защитным экраном. Течение между коаксиальными цилиндрами, один из которых вращается, было изучено Дж. И. Тейлором [1, 2] и определяется выражением:

$$Ta = \frac{U_i d}{\nu} \sqrt{\frac{d}{R_i}},$$

где Ta — число Тейлора, U_i — окружная скорость внутреннего цилиндра, d — ширина зазора между внутренним и внешним цилиндром, R_i — радиус внутреннего цилиндра, ν — кинематическая вязкость жидкости.

Гизатуллин Роман Ринатович, старший преподаватель, ПНИПУ (Пермь, Россия); Roman Gizatullin (Perm National Research Polytechnic University, Permu, Russia)

Пещеренко Сергей Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор, ПНИПУ (Пермь, Россия); Sergey Peshcherenko (Perm National Research Polytechnic University, Permu, Russia)

При небольших частотах вращения, когда $Ta \geq 41.3$ наблюдается ламинарное течение с вихрями Тейлора (правильно чередующиеся вихри с правым и левым вращением и с осями, параллельными направлению окружной скорости вращающегося цилиндра). При $Ta > 400$ течение становится полностью турбулентным, хаотическим [3, 4].

В магнитной муфте между корпусом и внешней полумуфтой $R_i = 0.059$ м, $d = 0.001$ м, $f = 100$ Гц, $\nu = 1.3 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Число Тейлора $Ta = 371$. Течение содержит вихри, см. рисунок 1. Также из рисунка 1 видно, что часть линий тока расположены между вихрями и огибают их. Эти линии характеризуют течение продольной прокачки вдоль гильзы.

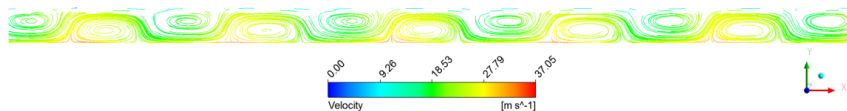


Рис. 1. Вихри Тейлора в зазоре между корпусом и внешней полумуфтой

Между защитным экраном и внутренней полумуфтой $R_i = 0.03951$ м, $d = 0.001115$ м, $f = 100$ Гц, $\nu = 3.9 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Число Тейлора $Ta = 11.8$. Течение ламинарное, вихрей нет, линии тока имеют вид спиралей. Реализуется только продольная прокачка жидкости.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. — 5-е изд., стереот. — М.: Физматлит. 2001. 736 с.
2. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости / М.: Физматлит. 2005. — 288 с.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
4. Аржаник А.Р., Михайличенко Ю.П., Сотиради Г.Н. Постановка демонстраций ячеек Бенара и вихрей Тейлора. // Физическое образование в вузах. / А.Р. Аржаник, Ю.П. Михайличенко, Г.Н. Сотиради. — 2000. — т. 6. — № 4. — С. 60-67.

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ПРОЕКЦИЙ ДЛЯ ЛОКАЛИЗАЦИИ ОШИБКИ В СИСТЕМЕ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ

© А.В. Гладков, М.Г. Бабенко, Н.Н. Кучеров
agladkov@ncfu.ru, mgbabenko@ncfu.ru, nkuchеров@ncfu.ru

УДК 004.04

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.66.

В статье исследуются алгоритмы обнаружения, локализации и исправления ошибок в системе остаточных классов (СОК). В работе показано, что алгоритм локализации, основанный на методе проекций, является универсальным, но при этом обладает экспоненциальной вычислительной сложностью. Алгоритм, основанный на методе синдрома, накладывает дополнительные ограничения на основания СОК и при этом для его реализации требуются LUT, размер которых растёт по экспоненциальному закону в зависимости от количества исправляемых ошибок. Мы предложили модификацию метода проекций позволяющую снизить вычислительную сложность с экспоненциальной до полиномиальной за счет использования нейронной сети.

Ключевые слова: обнаружение ошибок, система остаточных классов, нейронные сети

Modification of the projection method to localize the error in the residue number system

The article examines algorithms for detecting, localizing, and correcting errors in the residue number system (RNS). The paper shows that the localization algorithm based on the projection method is universal, but at the same time, it has exponential computational complexity. The algorithm based on the syndrome method imposes additional restrictions on the bases of the RNS. At the same time, LUT are required for its implementation, the size of which grows exponentially depending on the number of errors being corrected. We have proposed a modification of the projection method that allows us to reduce the computational complexity from exponential to polynomial by using a neural network.

Keywords: error detection, residue number system, neural networks

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-71-10033).
Гладков Андрей Владимирович, СКФУ (Ставрополь, Россия); Andrey V. Gladkov (North Caucasus Federal University, Stavropol, Russia)
Бабенко Михаил Григорьевич, к.ф.-м.н., доцент, СКФУ (Ставрополь, Россия); Mikhail Babenko (North Caucasus Federal University, Stavropol, Russia)
Кучеров Николай Николаевич, к.т.н., СКФУ (Ставрополь, Россия); Nikolay Kucherov (North Caucasus Federal University, Stavropol, Russia)

Коды исправления ошибок основаны на идее Хэмминга о добавлении дополнительных данных для обнаружения и исправления ошибок [1]. В зависимости от области применения подходы к построению систем исправления ошибок различаются. Баланс между надежностью и избыточностью данных важен для систем хранения, поскольку избыточность данных влияет на объем данных и затраты. Самый дорогой механизм обеспечения надежности - это репликация данных.

С другой стороны, коды исправления ошибок и их модификации, такие как коды стирания и коды регенерации, могут обеспечить большую надежность с меньшей избыточностью, чем репликация [2]. Важным вопросом при выборе кода исправления ошибок является максимальное количество ошибок, которые могут быть обнаружены и исправлены для данной избыточности данных [3].

Watson & Hastings [4] предлагают альтернативное решение - модулярные коды исправления ошибок, основанные на избыточной системе остаточных классов (ИСОК). ИСОК – непозиционная система, представляющая целое число как набор остатков, полученных путем деления исходного числа на набор взаимно простых чисел. Дополнительным преимуществом ИСОК для проектирования распределенных систем хранения является то, что это схема совместного использования секретов, обеспечивающая безопасность данных [3, 5].

Однако есть две основные проблемы: вычислительная сложность метода проекций и большой объем данных для метода синдрома. Метод проекции – универсальный метод обнаружения и исправления ошибки с любыми модулями ИСОК. Его недостатком является экспоненциальная вычислительная сложность, зависящая от количества исправляемых ошибок [4]. Метод синдрома снижает вычислительную сложность до квадратичной, но требует хранения большого объема LUT [6].

Чтобы уменьшить объем используемой памяти, исследователи могут полагаться на два подхода. Первый использует вспомогательные функции как синдром ошибки, например, ранг числа [7]. Второй подход предполагает дополнительные ограничения на модули ИСОК. Другие коды исправления ошибок обеспечивают надежность хранения отдельных модулей.

Литература

1. *Hamming R. W.* Error detecting and error correcting codes // The Bell system technical journal. – 1950. – Т. 29. – №. 2. – С. 147-160.
2. *Morelos-Zaragoza R. H.* The art of error correcting coding. – John Wiley & Sons, 2006.
3. *Krishna H., Lin K. Y., Sun J. D.* A coding theory approach to error control in redundant residue number systems. I. Theory and single error correction // IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal

Processing. – 1992. – T. 39. – №. 1. – C. 8-17.

4. *Watson R. W., Hastings C. W.* Self-checked computation using residue arithmetic // Proceedings of the IEEE. – 1966. – T. 54. – №. 12. – C. 1920-1931.

5. *Garner H. L.* The residue number system // Papers presented at the the March 3-5, 1959, western joint computer conference. – 1959. – C. 146-153

6. *Tay T. F., Chang C. H.* A non-iterative multiple residue digit error detection and correction algorithm in RRNS // IEEE transactions on computers. – 2015. – T. 65. – №. 2. – C. 396-408.

7. *Chervyakov, N., Babenko, M., Tchernykh, A., Kucherov, N., Miranda-López, V., Cortés-Mendoza, J. M.* AR-RRNS: Configurable reliable distributed data storage systems for Internet of Things to ensure security // Future Generation Computer Systems. – 2019. – T. 92. – C. 1080-1092.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОКИСЛИТЕЛЬНОЙ РЕГЕНЕРАЦИИ ЗАКОКСОВАННЫХ КАТАЛИЗАТОРОВ

© О.В. Дубинец, Л.В. Еникеева, И.М. Губайдуллин

olesya.vladimirovna9@bk.ru, leniza.enikeeva@yandex.ru, irekmars@mail.ru

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.67.

Одним из важнейших процессов в области нефтехимии и нефтепереработки, как в России, так и за рубежом, является процесс выжига кокса с поверхности катализатора. В рамках данной статьи рассмотрена математическая модель, включающая в себя уравнения материального и теплового балансов. В качестве метода решения системы дифференциальных уравнений выбран метод прогонки, реализованный на языке программирования Python.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, зерно катализатора, окислительная регенерация, математическая модель, программная реализация.

Mathematical modeling of the process of oxidative regeneration of coked catalysts

One of the most important processes in the field of petrochemistry and oil refining, both in Russia and abroad, is the process of burning coke from the surface of the catalyst. Within the framework of this article, a mathematical model is considered, which includes the equations of material and thermal balances. The run-through method implemented in the Python programming language is chosen as a method for solving a system of differential equations.

Keywords: differential equations, catalyst grain, oxidative regeneration, mathematical model, software implementation.

В практике математического моделирования и в промышленных условиях выжигу кокса с поверхности рассматриваемого катализатора уделяется большое внимание. Главным вопросом является выбор оптимального режима проведения процесса. Это связано с возможными перегревами при осуществлении регенерации, что может привести его к спеканию. Перед началом моделирования важно определить начальные условия, к которым можно отнести количество и масса кокса, размер зерна

Дубинец Олеся Владимировна, студент группы МТС02-21-01, УГНТУ, (Уфа, Россия); Olesya Dubinets (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

Еникеева Лениза Васимовна, к.ф.-м.н., доцент, УГНТУ (Уфа, Россия); Leniza Enikeeva (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

Губайдуллин Ирек Марсович, д.ф.-м.н., профессор, УГНТУ (Уфа, Россия); Irek Gubaydullin (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

и гранул катализатора, а также температуру газа и содержания кислорода в нём. Сложным моментом при математическом является перенос тепла и вещества в порах зерна, который влияет на скорость и характер выжига кокса [1].

Для реализации поставленной задачи необходимо определить кинетические параметры скоростей реакции для используемой модели. Изменение концентрации коксовых отложений исследовано экспериментальным путём. Поэтому обработка результатов экспериментальных исследований показало, что регенерация согласуется с кинетической моделью [1].

Моделирование рассматриваемого процесса ориентировано на раздельный учёт материального и теплового балансов газового потока и катализатора. Недостатком диффузионной модели заключается в учёте переноса компонентов в порах зерна за счёт диффузии [1]. Следует отметить, что изменение реакционного объёма приводит к возникновению стефановского потока [2].

В рассматриваемой модели учитывается перенос компонентов за счёт стефановского потока и диффузии.

Литература

1. *Губайдуллин И.М.* Математическое моделирование динамических режимов окислительной регенерации катализаторов в аппаратах с неподвижным слоем. // дис. канд. ф.-м. наук: 05.13.16: утв. 22.04.96. – У., (1996), 109 с.
2. *Франк -Каменецкий Д.А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике // М.: Наука, 1967. – 491 с.

ИЗУЧЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РЕАКТОРА СИНТЕЗА МТВЭ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

@ Д.А. Дубовцев, Л.В. Еникеева

dubovcev2@yandex.ru, leniza.enikeeva@yandex.ru

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.68.

Исследование термодинамических характеристик реакторов является важнейшей задачей при моделировании системы. Рассматривается температурная зависимость константы равновесия реактора синтеза МТВЭ, а также энтальпия реакции.

Ключевые слова: математика, дифференциальные уравнения, МТВЭ

Study of changes in the thermodynamic parameters of the МТВЭ synthesis reactor based on a mathematical model

The study of the thermodynamic characteristics of reactors is the most important task in modeling the system. The temperature dependence of the equilibrium constant of the МТВЭ synthesis reactor, as well as the enthalpy of the reaction, is considered.

Keywords: mathematics, differential equations, mtbe.

Метил-трет-бутиловый эфир (МТВЭ) — эффективный нетоксичный высокооктановый компонент. Применение МТВЭ позволяет производить высокооктановый бензин на основе широкой гаммы базового бензина. Для производства МТВЭ используется реактор адиабатического типа. Моделирование реактора является актуальной задачей, решение которой позволяет составить адекватную математическую модель процесса, описывающую изменение термодинамических характеристик системы [2]. Температурная зависимость константы равновесия приведена в [1]:

$$\ln K_p = I_k - I_H/RT + (a/R)\ln T + (b/2R)T + (c/6R)T^2 + (d/12R)T^3 \quad (1)$$

где I_n и I_k - константы интегрирования уравнений Кирхгофа и Вант-Хоффа соответственно. Параметры a , b , c и d могут быть выведены из молярной теплоемкости соединений, участвующих в реакции в форме

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 19-37-60014).

Дубовцев Дмитрий Александрович, аспирант, УФИЦ РАН ИНК (Уфа, Россия); Dmitry Dubovtsev (Institute of Petrochemistry and Catalysis, Ufa, Russia)

Еникеева Лениза Васимовна, к.ф.-м.н., доцент, Новосибирский государственный университет (Новосибирск, Россия); Leniza Enikeeva (Novosibirsk State University, Russia)

$$C_{pi} = a_i + b_i T + c_i T^2 + d_i T^3, \quad (2)$$

и $\ln K$ можно рассчитать по зависимости изменения энтальпии реакции от температуры [1]:

$$\Delta H_0 = I + aT + (b/2)T^2 + (c/3)T^3 + (d/4)T^4 \quad (3)$$

Изменения энтальпии и свободной энергии реакции были рассчитаны на основе литературных данных при 298 К, которые составили $\Delta H_0 = -14,4$ ккал/моль и $\Delta G_0 = -3,44$ ккал/моль. Из них были получены уравнения для температурной зависимости константы равновесия и изменения энтальпии реакции [1]:

$$\ln K_p = -2,18 + 6970/T - 1,3102 \ln T + (8,432 \cdot 10^{-3})T - (3,155 \cdot 10^{-6})T^2 + (2,332 \cdot 10^{-9})T^3 \quad (4)$$

$$\Delta H_0 = -13800,6142T + (1,670 \cdot 10^{-2})T^2 - (1,250 \cdot 10^{-5})T^3 + (1,485 \cdot 10^{-9})T^4 \quad (5)$$

Литература

1. *Izquierdo J.F.* Константы равновесия для жидкофазного синтеза метил-трет-бутилового эфира // *J. Chem. Eng. Data*, **123**:3 (2009), 339-343.
2. *Царева З.М., Орлова Е.А.* Теоретические основы химтехнологии. — Высшая школа: Киев, 1986.

МОДИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЯ БЛЭКА-ШОУЛСА ДЛЯ УЧЕТА СТОИМОСТИ ЛИКВИДНОСТИ И ТРАНЗАКЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК

@ М.М. Дышаев, В.Е. Федоров

Mikhail.Dyshaev@gmail.com, kar@csu.ru

УДК 517.957, 336.76

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.69.

Добавляя учет стоимости ликвидности как квадратичной и линейной функций от объема операций, получены нелинейные уравнения типа Блэка — Шоулса. Для определения транзакционных издержек используется модель методологии ценообразования с поправкой на риск (risk-adjusted pricing methodology (RAPM) model).

Ключевые слова: ликвидность, транзакционные издержки, нелинейные уравнения типа Блэка — Шоулса

Modification of the Black-Scholes equation to account for the cost of liquidity and transaction costs

We take into account the liquidity of the underlying assets and transaction costs for delta hedging. The liquidity cost is considered as a linear and quadratic function of the transaction amount. New nonlinear equations of Black-Scholes type are obtained. The Risk Adjusted Pricing Methodology (RAPM) model is used to determine transaction costs.

Keywords: liquidity, transaction costs, nonlinear Black — Scholes equations

Модель Блэка — Шоулса [1] для колл (call) опциона Европейского типа можно записать как:

$$\begin{aligned}u_t + \frac{1}{2}\sigma^2x^2u_{xx} + r(xu_x - u) &= 0, \\u(0, t) &= 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x, t)}{x - Ke^{-r(T-t)}} = 1, \\u(x, T) &= \max(x - K, 0), \\x \in [0, +\infty), \quad t \in [0, T], \quad K &= \text{const}, \quad K > 0, \\ \sigma &= \text{const}, \quad \sigma > 0, \quad r = \text{const}, \quad r \geq 0.\end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00244).
Дышаев Михаил Михайлович, к.ф.-м.н., ЧелГУ (Челябинск, Россия); Mikhail Dyshaev (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Федоров Владимир Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор, ЧелГУ (Челябинск, Россия) Vladimir Fedorov (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Здесь x представляет собой цену базового актива, $u(x, t)$ - цена колл опциона Европейского типа, K - цена «страйк», то есть цена исполнения опциона, σ - это историческая волатильность, а r - это безрисковая процентная ставка.

Модель RAPM получена в работе [2]. Соответствующее уравнение Блэка — Шоулса с поправкой на риск представлено в виде

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3}\right) x^2 u_{xx} - r(u - xu_x) = 0,$$

где $q = 3(k^2 R/2\pi)^{1/3}$. Здесь k - транзакционные издержки, пропорциональные объему операций, а $R \geq 0$ - коэффициент премии за риск.

Представляется возможным дополнить модель RAPM новым фактором риска, если учитывать премию за риск неликвидности так же, как и другие премии.

Функция общей премии за риск имеет вид

$$\begin{aligned} r_R &= r_{TC} + r_{VP} + r_{IL} = \\ &= \frac{kx\sigma|u_{xx}|}{\sqrt{2\pi}} \Delta t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}R\sigma^4 x^2 u_{xx}^2 \Delta t + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)^\alpha (\sigma x|u_{xx}|)^\alpha \Delta t^{\frac{\alpha}{2}-1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Если рассмотреть простую модель, когда стоимость ликвидности является линейной функцией относительно объема транзакции, то есть $\alpha = 1$, мы получим следующее нелинейное уравнение Блэка — Шоулса

$$\begin{aligned} u_t - \frac{1}{2}\sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3}\right) x^2 u_{xx} - r(xu_x - u) &= 0, \\ q &= 3((k + \varepsilon)^2 R/2\pi)^{1/3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для случая квадратичной функции стоимости ликвидности, $\alpha = 2$, получена новая нелинейная модель Блэка — Шоулса:

$$\begin{aligned} u_t - \frac{1}{2}\sigma^2 \left(1 - q(xu_{xx})^{1/3} - pxu_{xx}\right) x^2 u_{xx} - r(xu_x - u) &= 0, \\ q &= 3(k^2 R/2\pi)^{1/3}, \quad p = 2\varepsilon/\pi. \end{aligned}$$

Литература

1. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy, **81**:3 (1973), 637-654.
2. Jandačka M., Ševčovič, D. On the risk-adjusted pricing-methodology-based valuation of vanilla options and explanation of the volatility smile // Journal of Applied Mathematics, **2005**:3 (2005), 235-258.

РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ РУССКОГО ДАКТИЛЬНОГО ЯЗЫКА

@ Д.Г. Еникеев, С.А. Мустафина
cooldeepband@gmail.com, mustafina_sa@mail.ru

УДК 004.93'1

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.70.

В работе представлена система распознавания русского дактильного алфавита, основанная на сверточной нейронной сети. Собрана база данных из 400 статичных жестов для оценки точность нейронной сети с глубоким обучением. Эксперимент показал высокую точность предложенной системы.

Ключевые слова: русский дактильный язык, распознавание образов, нейронная сеть, Leap Motion

Development of a Russian dactyl language recognition system

The paper presents a Russian dactyl alphabet recognition system based on a convolutional neural network. We assembled a database of 400 static gestures to evaluate the accuracy of a deep learning neural network. The experiment showed the high accuracy of the proposed system.

Keywords: Russian dactyl, pattern recognition, neural net, Leap Motion

Русский жестовый язык является официальным инструментом общения людей с нарушениями слуха. Он состоит из невербальных действий: жестов рук, мимики, положения тела и полностью независим от словесной речи. Жестовый язык неизвестен и сложен для восприятия обществом, поэтому возникает коммуникативный барьер. Система распознавания жестового языка призвана предоставить быстрый и удобный интерфейс для общения глухих и слышащих людей. Её задача состоит в переводе жестового языка в письменную или устную речь.

В работе объектом распознавания является русский дактильный алфавит - отдельный компонент жестового языка, в котором каждой букве русского алфавита соответствует определенный жест. В отличие от

Еникеев Данияр Гадиевич, аспирант, СФ БашГУ (Стерлитамак, Россия); Daniyar Enikееv (Sterlitamak Branch Bashkir State University, Sterlitamak, Russia)

Мустафина Светлана Анатольевна, д.ф.-м.н., доцент, СФ БашГУ (Стерлитамак, Россия); Svetlana Mustafina (Sterlitamak Branch Bashkir State University, Sterlitamak, Russia)

изменяющегося со временем [1] русского жестового языка, дактиль обладает строго определенным набором жестов, устоявшихся в обществе глухих. Жесты выполняются всегда правой рукой и не включают в себя мимику и прочие атрибуты жестового языка. Ограниченность словаря в совокупности с одной рукой, выступающей в качестве единственного объекта отслеживания, значительно упрощает создание и тестирование системы распознавания.

Для задачи обучения и последующей проверки классификации, исследователем, под руководством сурдопереводчика, была создана база данных, насчитывающая 400 примеров жестов. Набор состоит из 10 статических букв русского дактильного алфавита. В качестве инструмента сбора визуальной информации о жестах был использован контроллер Leap Motion. Устройство снимает изображения в инфракрасном диапазоне, тем самым нивелируя влияние освещения на детализацию и уровень шумов. Реализация захвата информации в Leap Motion предоставляет данные в виде изображения и математической модели в трехмерном пространстве.

В качестве классификатора использована сверточная нейронная сеть. Она позволяет минимизировать этап подготовки и препроцессинга изображения, обеспечивает автоматическое выделение паттернов, характеризующих жест. Сеть состоит из двух последовательных сверточных слоев, max pooling (операции выделения максимума) и выходных связанных слоев.

Эксперимент показал, что разработанная система успешно классифицирует изображения различных жестов с достоверностью 97,5%. Ошибочными жестами выбраны буквы алфавита, в которых ладонь сжата ("Ю", "А"), либо различаются конфигурации вытянутых пальцев ("П", "Я"). В будущих исследованиях мы планируем добавить в систему математическую модель из Leap Motion API, расширить базу данных и добавить алгоритм определения перехода между жестами для процедуры распознавания в реальном времени.

Литература

1. Буркова С.И., Варинова О.А. К вопросу о территориальном и социальном варьировании русского жестового языка // Русский жестовый язык. Первая лингвистическая конференция. — МГУ, Москва, 2012. — 127-143.

МЕТОД ТИПА РОЗЕНБРОКА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КОМПЛЕКСНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

@ А.М. Ефимов, Д.И. Аптыкаева
a.efimov.bashedu@yandex.ru, diana.aptykaeva@mail.ru

УДК 519.622

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.71.

Строится L -устойчивый метод типа Розенброка четвертого порядка точности, в котором промежуточные формулы также L -устойчивые.

Ключевые слова: жесткая система, метод Розенброка

Rosenbrock type method of the fourth order with complex parameters

An L -stable method of the Rosenbrock type of the fourth order of accuracy is constructed, in which the intermediate formulas are also L -stable.

Keywords: stiff system, Rosenbrock method

Довольно часто при решении задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений применяют различные варианты методов типа Розенброка [1-4].

В работе для численного решения задачи Коши

$$\dot{x} = \varphi(x), \quad x(t_0) = x_0$$

рассматривается метод типа Розенброка четвертого порядка

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3 + p_4 k_4, \\D_n k_1 &= \tau \varphi(x_n), \\D_n k_2 &= \tau \varphi(x_n + \beta_{21} k_1), \\D_n k_3 &= \tau \varphi(x_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2), \\D_n k_4 &= \tau \varphi(x_n + \beta_{41} k_1 + \beta_{42} k_2 + \beta_{43} k_3),\end{aligned}$$

где $D_n = E - \alpha \tau \varphi'_n$, E — единичная матрица, $\varphi'_n = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x_n)$ — якобиан системы, α, p_i, β_{ij} — числовые коэффициенты.

Ефимов Андрей Михайлович, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия), Институт Нефтехимии и Катализа РАН (Уфа, Россия); Andrey Efimov (Bashkir State University, Ufa, Russia), (Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia);

Аптыкаева Диана Игоревна, магистрант, БашГУ (Уфа, Россия); Diana Aptykaeva (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Следуя схеме определения параметров метода, изложенной Е. А. Новиковым в [4], приходим к уравнению

$$6\alpha^4 + 18\alpha^2 + \frac{1}{4} = 4(6\alpha^3 + \alpha),$$

корнями которого являются

$$\alpha_1 \approx 0.106439, \alpha_2 \approx 0.220428, \alpha_3 \approx 0.572816, \alpha_4 \approx 3.10032$$

Наиболее подходящим корнем для указанного выше метода является $\alpha_3 \approx 0.572816$. Определение оставшихся параметров метода по схеме Е. А. Новикова дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.572816, \\ p_1 &= 0.572816, p_2 = 0.281649 \pm 0.00503726i, \\ p_3 &= 0.0336418 \mp 0.0268835i, p_4 = 0.111893 \pm 0.0218462i, \\ \beta_{21} &= 0.572816, \\ \beta_{31} &= 0.572816, \beta_{32} = -2.98883 \pm 1.27971i, \\ \beta_{41} &= 0.572816, \beta_{42} = -2.09751 \mp 0.580976i, \beta_{43} = -0.273906 \mp 0.0588767i, \end{aligned}$$

откуда, естественно, получаем комплекснозначное решение для задачи Коши. Однако, следует отметить, что, несмотря на нелинейность системы дифференциальных уравнений в общем случае, вещественная часть решения для проведенных расчетов по нескольким задачам химической кинетики неплохо согласуется с опытными данными, а сам метод в его реализации с автоматическим выбором длины шага дает неплохое сокращение количества итераций по сравнению с методом, изложенным Е. А. Новиковым в [4], незначительно проигрывая ему по времени расчетов.

Литература

1. *Rosenbrock H.H.* Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // Computer, 1963. Vol. 5, no. 4. pp. 329–330.
2. *Hairer E., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems / Springer Series in Computational Mathematics. Vol. 14. Berlin: Springer-Verlag, (1996). 614 pp.; русск. пер.: *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, (1999). 685 с.
3. *Артёмьев С.С.* Построение полунявных методов Рунге–Кутта // Докл. АН СССР, (1976), т. 228, №4, — 776–778.
4. *Новиков Е.А.* Метод типа Розенброка третьего порядка с внутренней L -устойчивостью // Информатика и системы управления, (2015), №1(43), — 54–62.

РАСЧЕТ КИНЕТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПРОЦЕССА ГИДРИРОВАНИЯ ПОЛИЦИКЛИЧЕСКИХ АРОМАТИЧЕСКИХ УГЛЕВОДОРОДОВ

@ Ш.Г. Загидуллин, К.Ф. Коледина

zagidullin-shamil@mail.ru, koledinakamila@mail.ru

УДК 517.977.58

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.72.

В данной работе, посредством математического моделирования в программной среде MatLab, исследован процесс гидрирования полициклических ароматических углеводородов. Рассмотрена детализированная схема химических превращений с основными реакциями: гидрирование моноциклических ароматических углеводородов (бутил бензол), гидрирование бициклических ароматических углеводородов (нафталин, дифенил) и трициклических ароматических углеводородов (антрацен). Рассчитаны кинетические параметры: константы скоростей реакций, предэкспоненциальные множители, энергии активации. Получено удовлетворительное описание изменений концентраций в зависимости от времени контакта при разных температурах процесса.

Ключевые слова: энергия активации, кинетика, ароматические углеводороды, математическое моделирование

Calculation of the kinetic parameters of the hydrogenation process of polycyclic aromatic hydrocarbons

In this work, by means of mathematical modeling in the MatLab software environment, the process of hydrogenation of polycyclic aromatic hydrocarbons is investigated. A detailed scheme of chemical transformations with the main reactions is considered: hydrogenation of monocyclic aromatic hydrocarbons (butyl benzene), hydrogenation of bicyclic aromatic hydrocarbons (naphthalene, diphenyl) and tricyclic aromatic hydrocarbons (anthracene). Kinetic parameters were calculated: reaction rate constants, preexponential factors, activation energies. A satisfactory description of changes in concentrations depending on the contact time at different temperatures of the process has been obtained.

Работа выполнена по теме «Разработка новых теоретических подходов и программного обеспечения для моделирования сложных химических процессов и поиска соединений с заданными физико-химическими свойствами» (Регистрационный номер: АААА-А19-119022290011-6).

Загидуллин Шамиль Галиевич, аспирант, ИНК УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Shamil Zagidullin, (Institute of Petrochemistry and catalysis RSA, Ufa, Russia)

Коледина Камила Феликсовна, к.ф.-м.н., н.с. ИНК УФИЦ РАН (Уфа, Россия), доцент УГНТУ (Уфа, Россия); Kamila Koledina (Institute of Petrochemistry and catalysis RSA, Ufa, Russia), Ufa State Petroleum Technological university, Ufa, Russia

Keywords: activation energy, kinetics, aromatic hydrocarbons, mathematical modeling

Рассмотрена технология получения реактивных топлив для сверхзвуковой авиации – гидрирование полициклических ароматических углеводородов, с целью детального изучения кинетики реакций на основе математического моделирования [1], поскольку данная задача является актуальным на сегодняшний день. Опыты для получения данного вида топлива проводились при разных технологических параметрах и на разных катализаторах: никель Ренея, АП-64, Никель на кизельгуре.

Для моделирования кинетики процесса, на основе полученных данных, применено математическое описание на базе закона действующих масс, что представляет собой систему дифференциальных уравнений. Решение системы уравнений, представляет собой прямую кинетическую задачу. Для восстановления кинетических параметров процесса была решена обратная кинетическая задача на основе экспериментальных данных. В работе для решения прямой задачи применяется многошаговый метод Гира переменного порядка. Численный метод Гира удовлетворяет требованию жесткой устойчивости [2].

При решении обратной кинетической задачи, как задачи однокритериальной оптимизации, на первом этапе применяется алгоритм глобальной оптимизации - генетический алгоритм. На втором этапе найденное решение уточняется алгоритмом локальной оптимизации - метод Хука-Дживса (patternsearch) [3].

Разработка методики многокритериальной оптимизации (МКО) процесса деароматизации на основе кинетической модели, позволит определять наилучшие условия проведения, в зависимости от критериев оптимальности (например, для более глубокого гидрирования – полного насыщения) [4]. Также применение разработанной кинетической модели можно применить и для других промышленных задач: расчет необходимого количества катализатора, габаритов реактора.

Литература

1. *Ахметов А.Ф., Ахметов А.В.* Реактивные топлива: свойства, марки, технологии получения.-Уфа: РИЦ УГНТУ, 2014.- 111 с.
2. *Gear C.V.* Numerical initial value problems in ordinary differential equations.- Englewood Cliffs: Pentice-Hall, 1971.- 252 P.
3. *Карпенко А.П.* Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой: учебное пособие.-Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.- 446с с.
4. *Коледина К.Ф., Коледин С.Н., Губайдуллин И.М.* Автоматизированная система идентификации условий проведения гомогенных и гетерогенных реакций в задачах многоцелевой оптимизации // Сиб. журн. вычисл. Математики / РАН Сиб. отделение. — Новосибирск, 2019. — Т.22, № 2 — С.137 — 151.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛООБМЕНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

@ Р.Г. Зайнуллин
zaynulin_r.g@mail.ru

УДК 517.95

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.73.

Излагается применение метода разложения по собственным функциям самосопряженного дифференциального оператора к решению одной нестационарной задачи теплообмена с фазовым переходом в неавтомодельной постановке при специальных начальных условиях на примере процесса промерзания некоторой сплошной среды. В ходе решения задачи устанавливается параболический закон движения границы раздела двух фаз. Задачи подобного типа возникают при математическом моделировании процессов теплообмена в строительстве, особенно в районах вечной мерзлоты, в нефтегазодобыче при бурении и эксплуатации скважин, в металлургии и т.д.

Ключевые слова: Фазовый переход, свободные границы, движущиеся границы, задача Стефана, конечные интегральные преобразования, вырожденные гипергеометрические функции, возмущенный дифференциальный оператор.

NON-STATIONARY HEAT TRANSFER PROBLEM FOR A PARABOLIC TYPE EQUATION IN A NON-CYLINDRICAL DOMAIN

The application of the eigenfunction decomposition method of a self-adjoint differential operator to the solution of a non-stationary heat transfer problem with a phase transition in a non-automatic formulation under special initial conditions is presented on the example of the freezing process of a continuous medium. In the course of solving the problem, a parabolic law of motion of the interface of two phases is established. Problems of this type arise in the mathematical modeling of heat exchange processes in construction, especially in permafrost areas, in oil and gas production during drilling and operation of wells, in metallurgy, etc.

Keywords: Phase transition, free boundaries, moving boundaries, Stefan problem, finite integral transformations, degenerate hypergeometric functions, perturbed differential operator.

Зайнуллин Рифат Гильметдинович, к.ф.-м.н., доцент, УГАТУ (Уфа, Россия);
Rifat Zaynulin (Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia)

Рассмотрим задачу о динамике зон кристаллизации ($k = 1$) и охлаждения ($k = 1$) некоторой сплошной среды под действием точечного источника холода, когда граница фазового переход имеет сферическую форму и с течением времени продвигается внутрь среды. В начальный момент времени среда обладает постоянной температурой $t_0 > 0$ при $r \geq a\xi_0$. Точечный источник обладает температурой $t_e < 0$. Математическую модель этого процесса для радиальной схемы можно представить в виде:

$$\frac{1}{a_k^2} \frac{\partial t_k(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 t_k(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t_k(r, \tau)}{\partial r}; \quad (1)$$

$$r \in D_k(\tau) : \quad D_1(\tau) = \{0 < r < \xi_1(\tau)\}, \quad D_2(\tau) = \{\xi_1(\tau) < r < \xi_2(\tau)\};$$

$$\tau > 0, \quad \xi_1(+0) = \xi_0 > 0, \quad \xi_2(\tau) = a\xi_1(\tau), \quad a > 1;$$

$$t_1(r, 0) = \left(1 - \frac{r}{\xi_0}\right) t_e; \quad t_2(r, 0) = \frac{r - \xi_0}{(a - 1)\xi_0} t_0; \quad (2)$$

$$t_1(0, \tau) = t_e; \quad t_k(\xi_1(\tau), \tau) = 0; \quad t_2(\xi_2(\tau), \tau) = t_0; \quad (3)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(\xi_1(\tau), \tau)}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial t_2(\xi_1(\tau), \tau)}{\partial r} = \sigma \nu \frac{d\xi_1(\tau)}{d\tau}. \quad (4)$$

Здесь a_k и λ_k – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности в $D_k(\tau)$, σ – скрытая теплота кристаллизации, а ν – плотность образующейся фазы, a – безразмерный параметр теплового влияния [18]. Требуется найти функции $t_k(r, \tau)$ и $\xi_1(\tau)$, такие, что имеют место равенства (1)-(4).

Для решения задачи вводится подвижная граница; задача преобразуется к области с неподвижными границами с неоднородной правой частью и переменными коэффициентами в исходном уравнении, но с однородными краевыми условиями, и далее, для решения преобразованной задачи строится интегральное преобразование по пространственной координате с неизвестным ядром, нахождение которого связано с постановкой и решением соответствующей спектральной задачи через вырожденные гипергеометрические функции. Находятся собственные функции и собственные числа, а также формула для обращения для введенного интегрального преобразования, что позволяет выписать аналитическое решение исходной задачи и рассмотреть ряд частных случаев.

Литература

1. *Шафеев М.Н.* Решение одной плоской задачи Стефана методом ВГГП // Инженерно-физический журнал, 1978, Т. 34, № 4, С. 713-722.
2. *Шафеев М.Н.* Решение одной нелинейной задачи методом ВГГП // Известия вузов. Математика, 1980, № 12(233), С. 73-75.
3. *Хакимов Р.Х.* Замораживание грунтов в строительных целях. М.: Госстройиздат, 1962, с.257.
4. *Зайнуллин Р.Г.* Об одном аналитическом подходе к решению одномерной задачи переноса тепла со свободными границами // Известия вузов. Математика, 2008, № 2, С. 24-31.
5. *Зайнуллин Р.Г., Фазуллин З.Ю.* Краевая задача для уравнения параболического типа в нецилиндрической области // Мат.заметки СВФУ, т.27, №2, апр.-июн., 2020, С.3-20.

ТЕОРЕТИКО-ГРАФОВЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ КИНЕТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

@ Р.Ф. Исмагилов, З.А. Хамидуллина

ruzelistmagilov@gmail.com, shakirova111@mail.ru

УДК 51-73

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.74.

Общая теория анализа информативности кинетических параметров при решении обратных задач представляет собой достаточно трудоемкий процесс. Увеличение количества параметров математической модели ведет к трудностям вычислительного характера. Здесь речь идет об аналитических вычислениях с нелинейными выражениями. В настоящей работе предложен алгоритм определения функциональных зависимостей кинетических параметров, основанный на анализе графа Вольперта, который позволит обойти громоздкие вычисления, не нарушая физико-химического смысла. Данный алгоритм предназначен для первичной обработки экспериментальной информации при решении обратных задач химической кинетики.

Ключевые слова: математическое моделирование, кинетические параметры, граф Вольперта

Graph-theoretic algorithm for determining functional dependencies of kinetic parameters

The general theory of analysis of the information content of kinetic parameters in solving inverse problems is a rather laborious process. An increase in the number of parameters of a mathematical model leads to computational difficulties. Here we are talking about analytical calculations with nonlinear expressions. In this work, we propose an algorithm for determining the functional dependences of the kinetic parameters, based on the analysis of the Volpert graph, which will make it possible to bypass cumbersome calculations without violating the physicochemical meaning. This algorithm is intended for primary processing of experimental information when solving inverse problems of chemical kinetics.

Keywords: math modeling, kinetic parameters, Volpert graph

Исмагилов Рузель Фанилевич, студент, БашГУ (Уфа, Россия); Ruzel Ismagilov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Хамидуллина Зульфия Абударовна, к.ф.-м.н., ст.преподаватель, УГНТУ (Уфа, Россия); Zulfiya Khamidullina (Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, Russia)

Система дифференциальных уравнений для каталитических реакций, протекающих в квазистационарном режиме, представляется в виде [1]:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y, k), 0 = f_2(x, y, k), x'(0) = x'_0$$

где x, y – вектора концентраций измеряемых и промежуточных веществ, $k = (k_1 \dots k_S)$ – вектор кинетических параметров, $x'(0) = x'_0$ – начальное условие, функции f_1, f_2 выписываются согласно закону действующих масс.

Так как экспериментальные данные по концентрации промежуточных веществ отсутствуют, то для определения изменения концентраций исходных веществ и продуктов реакции во времени необходимо разрешить систему уравнений относительно промежуточных веществ. При этом однозначно оценить кинетические константы обычно невозможно. Это влечет за собой проблему неоднозначности решения обратной задачи. Решение обратной задачи химической кинетики есть восстановление математической модели на основе экспериментальных данных.

Основой для построения математических моделей сложных химических реакций стала теория стационарных реакций, разработанная Д.Хориути и М.И.Темкиным [2]-[3].

Функциональные зависимости кинетических параметров можно определить по общей теории анализа информативности кинетических параметров [4]. Однако данный подход представляет собой достаточно трудоемкий процесс. Более того, увеличение размерности и нелинейность механизмов химических реакций на практике повышают сложность расчетов.

Взаимно однозначное соответствие механизма химической реакции и графа Вольперта [5] позволяет сформулировать следующие правила для определения функциональных зависимостей кинетических параметров.

1. Выделить подграфы в графе Вольперта путем исключения: а) вершин, соответствующих промежуточным веществам; б) вершин, отвечающих за наблюдаемые вещества, которые не являются исходными веществами, в) вершин-реакций, для которых нет ребер исходящих от вершин-наблюдаемых веществ; г) ребра, инцидентные удаленным вершинам; д) ребра, направленные от вершин-реакций к вершинам-веществам.

2. Выписать из полученного несвязного графа матрицу связей. Строкам данной матрицы соответствуют определяемые кинетические параметры. Число столбцов матрицы связей равно числу вершин-наблюдаемых веществ. Вершины-реакции и вершины-вещества (наблюдаемые), смежные в полученном подграфе, определяют местоположение ненулевых

элементов матрицы. Значение элемента определяется соответствующим кинетическим параметром.

3. Функциональные зависимости кинетических параметров определяются как совокупность частных решений системы дифференциальных уравнений в частных производных, построенной на основании полученной матрицы связей, согласно общей теории анализа информативности.

Определение функциональных зависимостей кинетических параметров необходимо для определения структуры теоретических моделей, приводит к уменьшению общего количества параметров модели, что благоприятно для моделирования технологических процессов. Последующая оценка численных значений кинетических параметров по доступному массиву экспериментальных данных увеличивает достоверность прогнозирующих построенных моделей.

Литература

1. Яблонский Г.С., Быков В.И., Горбань А.Н. Кинетические модели каталитических реакций. — Новосибирск: Наука, 1983.

2. Хорицуги, Дз. Как найти кинетическое уравнение обратной реакции? Проблемы физической химии. — М.: Госхимиздат, 1959.

3. Темкин М.И. Графический метод вывода кинетических уравнений сложных реакций // Доклады Академии Наук СССР. **16**:3 (1965), 615-618.

4. Спивак С.И., Горский В.Г. Исследование идентифицируемости – один из важнейших этапов построения математических моделей в химии // Журнал структурной химии. **29**:6 (1988), 119-125.

5. Вольперт А.И., Худяев С.И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. — М.: Наука, 1975.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДЕФОРМАЦИОННОГО ПОВЕДЕНИЯ СФЕРИЧЕСКИХ
ОПОРНЫХ ЧАСТЕЙ МОСТОВ С ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ
УГЛУБЛЕНИЯМИ ПОД СМАЗКУ ПРИ НОРМАТИВНОЙ
ВЕРТИКАЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ**

© А.А. Каменских, Ю.О. Носов
anna_kamenskih@mail.ru, ura.4132@yandex.ru

УДК 531.4

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.75.

В рамках работы выполнено моделирование контактного взаимодействия элементов сферических опорных частей мостов, воспринимающих нагрузки от мостового пролета, в трехмерной постановке с учетом технологических углублений под смазочный материал. Созданы параметризованные конечно-элементные модели опорных частей с двумя типами углублений под смазку: кольцевые канавки, сферические лунки. Выполнена серия численных экспериментов, направленная на сравнительный анализ влияния конфигурации и положения углублений на работоспособность конструкций. Математическое моделирование задачи выполнено с использованием прикладного пакета ANSYS.

Ключевые слова: математическое моделирование, итерационная процедура, смазка, геометрическая конфигурация, полимер

**Mathematical modeling of the spherical bearing
deformation behavior of bridges with technological grooves
for lubrication under a normative vertical load**

Modeling of the contact interaction elements spherical bearings of bridges which perceive the loads from the bridge span in a three-dimensional setting taking into account the technological grooves for the lubricant was carried out as part of the work. Parameterized finite element models of bearings with two types of lubrication recesses are created: annular grooves, spherical hole. A numerical experiments series aimed at a comparative analysis of the configuration and position influence of the recesses on the structures performance has been carried out. Mathematical modeling of the problem was carried out using the ANSYS application package.

Keywords: mathematical modeling, iterative procedure, lubricat, geometric configuration, polymer

Каменских Анна Александровна, к.т.н., доцент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Anna Kamenskih (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Носов Юрий Олегович, студент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Yuriy Nosov (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Упрощенная расчетная схема сферической опорной части пролетных строений мостов включает верхнюю и нижнюю стальную плиту, а также сферический слой скольжения [1]. В работе рассматривается один из вариантов типоразмера опорной части, рассчитанный на нормативную вертикальную нагрузку 1000 кН высотой 55 мм и шириной 155 мм. При этом особый интерес представляет влияние на параметры зон контакта и деформационное поведение конструкции в целом технологических углублений под смазочный материал. Рассматриваются две геометрические конфигурации углублений под смазку: кольцевые канавки и сферические лунки. В рамках математического моделирования расчетных схем выполнена параметризация модели по геометрическим характеристикам углублений и их положению относительно центральной части сферической опоры. В процессе моделирования прослойки со сферическими вырезами под смазочный материал возникла необходимость в создании процедуры для внедрения лунок. Процедура позволяет строить отпараметризованную модель со сферическими вырезами под смазочный материал и последующее внедрение, в них, смазочного материала, в зависимости от задаваемых параметров конструкции (расстояние между вырезами под смазочный материал, глубина лунок, толщина прослойки и т.д.).

Исследования включали серию численных экспериментов, направленных на анализ влияния конфигурации углублений под смазку и положения углублений относительно центра опорной части. В качестве материала сферического слоя скольжения используется модифицированный фторопласт, физико-механические и фрикционные свойства получены экспериментально [2]. При реализации задачи рассматривалось три коэффициента трения сталь-полимер (табличное, экспериментальное с учетом и без учета смазки по сопрягаемым поверхностям) и два варианта трения смазка-сталь (минимальное и максимальное значение коэффициента трения для твердых и пастообразных смазок). Для автоматизации расчета и обработки результатов большого набора вычислительных экспериментов была реализована итерационная процедура.

Установлено, что прослойки со сферическими вырезами имеют наименьшее деформирование по сравнению со слоем скольжения с кольцевыми канавками. Максимальные значения контактного давления и контактного касательного напряжения антифрикционной прослойки со сферическими углублениями выше, чем у прослойки с кольцевыми канавками в среднем на 10-12%. Влияние коэффициента трения сталь-смазка наблюдается только при экспериментально полученном коэффициенте трения сталь-полимер с учетом смазки: при минимальном значении трения сталь-смазка максимальный уровень контактного касательного напря-

жения меньше на 38,7%. Трение сталь-полимер оказывает значительное влияние на уровень контактного касательного напряжения.

Литература

1. *Adamov A.A., Kamenskih A.A., Pankova A.P.* Numerical analysis of the spherical bearing geometric configuration with antifriction layer made of different materials // PNRPU Mechanics Bulletin, **4** (2020), 15-26.

2. *Адамов А.А., Каменских А.А., Носов Ю.О.* Математическое моделирование поведения современных антифрикционных полимеров // Прикладная математика и вопросы управления, **4** (2019), 43-56.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ СФЕРИЧЕСКИХ ОПОРНЫХ ЧАСТЕЙ В РАМКАХ ФРИКЦИОННОГО КОНТАКТА

© А.А. Каменских, А.П. Панькова, В.И. Струкова

anna_kamenskih@mail.ru, anastasiya_pankova@mail.ru, velov_pstu@mail.ru

УДК 531.4

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.76.

В работе рассмотрено численное моделирование контакта конструктивных элементов сферических опорных частей. Сферические опорные части воспринимают нагрузки от мостового пролета. Таким образом, создание качественных математических моделей конструкций является одной из важных проблем мостостроения и механики деформируемого твердого тела. Математическое моделирование задачи реализовано в осесимметричной постановке с учетом фрикционного контакта между сопрягаемыми поверхностями. Рассмотрены разные варианты конфигурации сферического слоя скольжения и его местоположения относительно других элементов конструкции. Как результат получены качественные и количественные закономерности деформационного поведения конструкции в зависимости от конфигурации опорной части.

Ключевые слова: математическое моделирование, полимер, геометрическая конфигурация, сферический слой скольжения

Numerical modeling of spherical bearing mating elements within the framework of frictional contact

Numerical modeling of the structural elements contact of spherical bearing is considered in the work. The spherical bearing take up the loads from the bridge span. In this way one of the important problems of bridge construction and deformable solids mechanics is the creation of high-quality mathematical models of structures. Mathematical modeling of the problem is implemented in an axisymmetric formulation taking into account the frictional contact between the mating surfaces. Various configuration options for the spherical sliding layer and its location relative to other structural elements are considered. Qualitative and quantitative patterns of the structure deformation behavior depending on the bearing configuration were obtained as a result.

Каменских Анна Александровна, к.т.н., доцент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Anna Kamenskih (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Панькова Анастасия Петровна, студент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Anastasiya Pankova (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Струкова Вероника Ивановна, студент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Veronika Strukova (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Keywords: mathematical modeling, polymer, geometric configuration, spherical sliding layer

Сферические опорные части пролетных строений мостов воспринимают вертикальные и горизонтальные нагрузки от мостового пролета. Основной контактный узел опорной части включает в себя сферическую и плоскую поверхности скольжения, а так же две стальные плиты [1, 2]. Плоский слой скольжения в конструкциях опорных частей разных фирм производителей располагается либо на верхней поверхности стальной плиты со сферическим сегментом, либо на нижней поверхности плиты со сферическим вырезом. В данной работе не плоский слой скольжения не моделируется. Классическое местоположение сферического слоя скольжения нижняя стальная плита, прослойка впрессовывается в сферический вырез и имеет стандартную толщину 4 мм. Габаритные размеры конструкции изменяются в зависимости от проектных нагрузок, на которые рассчитана опорная часть. Интересен ряд вопросов, связанных с конфигурацией сферических опорных частей: 1. местоположение сферического слоя скольжения относительно стальных элементов конструкции; 2. толщина антифрикционной прослойки.

В рамках работы рассмотрено деформирование сферической опорной части Л-100 производства ООО "АльфаТех" рассчитанную на нормативную вертикальную и горизонтальную нагрузку 1000 и 300 кН соответственно. Так как задача рассматривается в осесимметричной постановке, то горизонтальная нагрузка не учитывается. Проанализировано влияние толщины слоя скольжения при стандартном угле наклона торца и местоположением антифрикционной прослойки [1]. Установлено, что при увеличении толщины слоя скольжения до 6-8 мм наблюдается снижение максимального уровня параметров зон контакта, нормальные перемещения относительно свободного торца слоя скольжения и пластические деформации изменяются незначительно. Далее было выполнено сравнение напряженно-деформированного состояния и работы конструкции Л-100 с опорной частью отличающейся только положением слоя скольжения относительно плит [2]: антифрикционная прослойка наносится на сферический элемент.

Установлено, что при стандартном угле наклона торца слоя скольжения в конструкции с антифрикционной прослойкой, расположенной в верхней стальной плите, наблюдается расхождение поверхностей сопряжения вблизи края слоя скольжения на 5 % площади контактного взаимодействия. Поэтому было принято решение рассмотреть влияние угла наклона торца в конструкциях опорных частей при разном местоположении слоя скольжения на работоспособность конструкции. Было рассмотрено 10 вариантов угла наклона торца слоя скольжения от 5 до

45 градусов. Проанализировав результаты исследования выявлены углы, которые дают наиболее благоприятный характер деформирования контактного узла. Моделирование выполнено для набора разных материалов слоя скольжения с разными физико-механическими и фрикционными свойствами [3].

Литература

1. *Adamov A.A., Kamenskikh A.A., Pankova A.P.* Numerical analysis of the spherical bearing geometric configuration with antifriction layer made of different materials // PNRPU Mechanics Bulletin, **4** (2020), 15-26.

2. *Адамов А.А., Каменских А.А., Струкова В.И.* О влиянии геометрии и конфигурации сферического слоя скольжения опорных частей мостов на работоспособность конструкции // Вычислительная механика сплошных сред, **3** (2021), 289-299.

3. *Адамов А.А., Каменских А.А., Носов Ю.О.* Математическое моделирование поведения современных антифрикционных полимеров // Прикладная математика и вопросы управления, **4** (2019), 43-56.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДЕГРАДАЦИИ СТЕКЛОПЛАСТИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НАПРЯЖЕНИЙ И ЩЕЛОЧНОЙ СРЕДЫ

@ Р.А. Каюмов, И.З. Мухамедова

Kayumov@rambler.ru, Muhamedova-inzilija@mail.ru

УДК 539.3

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.77.

Построена конечно-элементная модель находящейся в щелочной среде стеклопластиковой балки при ее кинематическом нагружении. Закон диффузии щелочи по глубине композита описывается уравнением Фика. Рассмотрена задача оценки долговечности.

Ключевые слова: модель, деградация, диффузия, конечный элемент, балка

Modeling the degradation process of fiberglass under stress and alkaline environment

A finite element model of a fiberglass beam in an alkaline medium under its kinematic loading has been constructed. The law of diffusion of alkali over the depth of the composite is described by the Fick equation. The problem of assessing durability is considered.

Keywords: model, degradation, diffusion, finite element, beam

При построении модели процесса деградации стеклопластика в качестве характеристик состояния введены параметр поврежденности, который описывает накопление в материале дефектов типа микротрещин и микропор, а также параметр, определяющий концентрацию щелочи в материале. Щелочь как химическая агрессивная среда приводит к изменению механических свойств композита, а именно к накоплению микроповреждений в материале. Закон диффузии щелочи по глубине композита описывается уравнением Фика. Рассмотрена задача оценки долговечности стеклопластиковой балки. Для проведения качественного анализа поведения исследуемого композитного материала задача сформулирована при некоторых модельных определяющих соотношениях. Предлагаемое исследование позволит разработать методику расчета, позволяющую прогнозировать срок службы конструкций из стеклопластика с учетом накопления повреждений и деструкции материала под воздействием

Работа выполнена в рамках Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00349) и Российского научного фонда (проект № 19-19-00059).

Каюмов Рашит Абдулхакович, д.ф.-м.н., профессор, КазГАСУ (Казань, Россия); Rashit Kayumov (Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia)

Мухамедова Инзилия Заудатовна, к.ф.-м.н., доцент, КазГАСУ (Казань, Россия); Inzilija Muhkamedova (Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia)

агрессивных факторов, влияющих на снижение прочности исследуемого материала.

Литература

1. *Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций* (М.: Наука, 1965)
2. *Работнов Ю.Н. Избранные труды. проблемы деформируемого твердого тела* (М.: Наука, 1991)
3. *Качанов Л.М. Основы механики разрушения* (М.: Наука, 1974)

ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ С НЕЛИНЕЙНО УПРУГИМИ ОПОРАМИ

@ Р.А. Каюмов
kaikumov@rambler.ru

УДК 539.3

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.78.

Рассматривается закритический изгиб стержня, сжатого продольной силой и имеющего в шарнирных опорах нелинейно упругие жесткости повороту его оси. Относительно угла наклона получено разрешающее нелинейное интегро-дифференциальное уравнение. Предложено решать задачу методом коллокаций, что приводит к алгебраическому уравнению третьего порядка. Изложен подход для вычисления податливости рассматриваемых стержней на сжатие с учетом их закритического изгиба. Приводятся результаты численных исследований, анализ которых позволил выявить ряд особенностей в поведении рассматриваемого стержня, в частности, обнаружено, что в некоторых случаях он может терять устойчивость хлопком.

Ключевые слова: закритический изгиб стержня, нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, метод коллокаций, особенности решения

Postcritical behavior of compressed rods with nonlinearly elastic supports

The article considers the postcritical bending of a bar compressed by a longitudinal force and having nonlinear elastic stiffness in the pivot bearings to the rotation of its axis. A resolving nonlinear integro-differential equation is obtained with respect to the angle of inclination. It is proposed to solve the problem by the collocation method, which leads to an algebraic equation of the third order. An approach is presented for calculating the compressive compliance of the considered rods taking into account their postcritical bending. The results of numerical studies are presented, the analysis of which made it possible to reveal a number of features in the behavior of the rod under consideration, in particular, it was found that in some cases it can lose stability with cotton.

Keywords: postcritical bending of a bar, nonlinear integro-differential equation, collocation method, solution features

Работа выполнена в рамках Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00349) и Российского научного фонда (проект № 19-19-00059)

Каюмов Рашит Абдулхакович, д.ф.-м.н., профессор, Казанский ГАСУ; Kaikumov Rashit (Abdulhakovich, Kazan State University of Architecture and Building Construction, Russia)

Литература

1. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712с.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
3. *Алфутов Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312 с.
4. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. М. 1955.
5. *Кауитов Р.А.* Postbuckling behavior of compressed rods in an elastic medium// Mechanics of Solids. 2017. V. 52. No 5. pp. 575-580.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ СТРУКТУРИРОВАННЫХ ФЛЮИДОВ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

@ Ш. Каюмов, А.П. Марданов, А.Б. Каюмов

kayumovmatemic@gmail.com, apardayevich@mail.ru, AkayumovB@gmail.ru

УДК 517.519+532.546

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.79.

Статья посвящена построению математического модели и разработки алгоритме решение структурированных флюидов в трех-слойной пористой среде.

Ключевые слова: модель, структурированный, многослойный, плохо проницаемый, расщепления, алгоритмы.

Mathematical modeling of the problem of the theory of filtration of structured fluids in layered media

The article is devoted to the construction of a mathematical model and the development of an algorithm for the solution of structured fluids in a three-layer porous medium.

Keywords:

нотация по-английски model, structured, multilayer, poorly permeable, splitting, algorithms.

Слоистые среды по своей сути является сложными структурами, где обычно невозможно определить четко начертанные границы слоев. При исследовании подземную среду считают, как слоистые среды с четко разделенными кровлями и подошвами. Исходя из характеристик среды можно их считать гидродинамически связанных или несвязанных пластей. Исследование таких пластов посвящены работы [1-2]. Если физические и химика - технологические параметры среды отличный от существующих моделей а также структурные свойства флюида иначе, то принято такие флюиды назвать структурированными. Для них характерны наличие трех зоны фильтрации (зона ползучести, зона аномальности и зона сильных подвижностей).

Исследование структурированных флюидов в слоистых средах почти отсутствует, имеется частичные работы [3,4], предполагающие существовании различных типов флюидов в слоях среды.

Каюмов Шукур, к.ф.-м.н., доцент, ТГТУ (Ташкент, Узбекистан); Shukur Kayumov (Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan)

Марданов Арслан Пардаевич, стр.преп., ТГТУ (Ташкент, Узбекистан); Arslan Mardanov (Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan)

Каюмов Анвар Бахадирович. соискатель, Университет Инха в городе Ташкенте, Узбекистан (Ташкент, Узбекистан); Anvar Kayumov (Inxa University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan)

Пусть область Ω состоит из трех пропластков (области D_1, D_2 и D_3), где предполагается что верхние D_3 и нижние D_1 хорошо проницаемые (горизонтальные характеристика преобладает над вертикальными), а средний D_2 плохопроницаемы и в нем вертикальные характеристики преобладает над горизонтальными.

Тогда математическая модель процесса фильтрации флюидов в таких средах ставится так.

Необходимо найти непрерывную функции $u_i(x, y)$, ($i = \overline{1, 2}$), $v(x, y, z)$ а также $R_j(x, y, t)$, ($j = \overline{1, 2}$) из следующей системы уравнений.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\chi(|\nabla u|, \beta) \frac{\partial u_i}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\chi(|\nabla u|, \beta) \frac{\partial u_i}{\partial y}) - A \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=h_i} &= \\ &= \overline{M} \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad t > 0, \quad y \in (0, H) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(k(x, y, z) \frac{\partial v}{\partial z}) = M \frac{\partial v}{\partial t}, \quad t > 0, \quad z(h_1; h_2) \quad (2)$$

С начальными

$$\begin{aligned} u_i(x, y, 0) &= u_{i_0}(x, y), \quad v(x, y, z, 0) = v_0(x, y, z), \\ R_1(x, y, 0) &= R_2(x, y, 0) = R_0(x, y), \end{aligned} \quad (3)$$

и граничными

$$\chi_1(|\nabla u|, \beta_1) \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=R_1-0} = \chi_2(|\nabla u|, \beta_2) \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=R_1+0}, \quad (4)$$

$$\chi_2(|\nabla u|, \beta_2) \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=R_2-0} = \chi_3(|\nabla u|, \beta_3) \frac{\partial u_i}{\partial x} \Big|_{x=R_2+0}, \quad (5)$$

а также краевыми условиями

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 \chi_1(|\nabla u|, \beta_1) \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{(x,y) \in \Gamma_0} &= \varphi_1(t), \quad t > 0, \\ \tilde{b}_1 \chi_3(|\nabla u|, \beta_3) \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{(x,y) \in \Gamma} &= 0, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

$$S_1 \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{(x,y) \in H} = 0. \quad (7)$$

Здесь функции $\chi(j = \overline{1, 3})$, $k(x, y, z)$ выражает нелинейности процесса фильтрации и берется как в [3,4], $\{\chi, A\} = \{\chi_1, A_1; \chi_2, A_2; \chi_3, A_3\}$ при

$x \in (0, R_1(t)); x \in (R_1(t), R_2(t)); x \in (R_2(t), L)$ соответственно. Нелинейная задача (1)-(7) решается методом прямых по t а также методом расщепления с дальнейшим применением потокового варианта разностной прогонки [5,6]. Построенные вычислительные алгоритмы апробирован на тестовых данных, анализ которых показали применимости данного способа моделирование для определение технологических параметров месторождений аналогичного типа.

Литература

1. Гусейнзаде М. А., Колосовская А. К. Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах. М. «Недра». 1972.
2. Мухидинов Н. М. Методы расчета показателей разработки многопластовых месторождений нефти и газа. Издательство «Фан», Ташкент, 1978. 117 с.
3. Каюмов Ш., Марданов А.П., Хаитов Т.О., Каюмов А.Б. Математическая моделирования структурированных флюидов в связанных пластах. Сборник трудов международной научной конференции « Актуальные проблемы прикладной математика, информатики и механики». Воронеж 2020г. с.934-942.
4. Qayumov Sh., Mardanov A.P., Xaitov T.O., Qayumov A.B. Multiparameter mathematical models of the problem of problem of filtration of unstructured and structured fluids. E3S. Web of conferences 264. 01030(2021) <https://doi.org/10.1051/t3sconf/202126401030>.
5. Самарский А. А., Гумин А.В. Численные методы. М. Наука. 1989. 484 с.
6. Каюмов Ш. Математическое моделирование задачи теории фильтрации со свободными границами. Ташкент. ТГТУ, 2017 г. 274 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КИНЕТИКИ КАТАЛИТИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

@ К.Ф. Коледина, С.Н. Коледин, И.М. Губайдуллин
koledinakamila@mail.ru, koledinsrg@gmail.com, irekmars@mail.ru

УДК 517.977.58

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.80.

Математическое описание кинетики каталитических реакций позволяет поставить и решить задачу определения кинетических параметров и механизма химической реакции, то есть разработать кинетическую модель

Ключевые слова: кинетическая модель, системы дифференциальных уравнений, математическое описание

Mathematical description of the kinetics of catalytic reactions

The mathematical description of the kinetics of catalytic reactions makes it possible to formulate and solve the problem of determining the kinetic parameters and the mechanism of a chemical reaction, that is, to develop a kinetic model

Keywords: kinetic model, systems of differential equations, mathematical description

Основными терминами кинетического моделирования каталитических реакций является:

- 1) реагенты процесса: исходные компоненты, катализатор, промежуточные вещества, продукты реакции (целевые и побочные).
- 2) переменные процесса: независимые (имеют детерминированное значение для каждого эксперимента – время протекания реакции, начальные значения по реагентам, температура и т.д.), зависимые (характеризуют течение реакции – текущие концентрации реагентов, температура (для неизотермического процесса) и др.);

Работа выполнена по теме «Разработка новых теоретических подходов и программного обеспечения для моделирования сложных химических процессов и поиска соединений с заданными физико-химическими свойствами» (Регистрационный номер: АААА-А19-119022290011-6).

Коледина Камила Феликсовна, к.ф.-м.н., н.с. ИНК УФИЦ РАН (Уфа, Россия), доцент УГНТУ (Уфа, Россия); Kamila Koledina (Institute of petrochemistry and catalysis RSA, Ufa, Russia, Ufa State Technological Petroleum University, Ufa, Russia)

Коледин Сергей Николаевич, к.ф.-м.н., доцент УГНТУ (Уфа, Россия); Sergey Koledin (Ufa State Technological Petroleum University, Ufa, Russia)

Губайдуллин Ирек Марсович, д.ф.-м.н., в.н.с. ИНК УФИЦ РАН (Уфа, Россия), профессор УГНТУ (Уфа, Россия); Irek Gubaydullin (Institute of petrochemistry and catalysis RSA, Ufa, Russia, Ufa State Technological Petroleum University, Ufa, Russia)

- 3) параметры процесса: параметры, включенные в кинетическую модель – энергии активации стадий, предэкспоненциальные множители, константы скоростей стадий, параметры адсорбции процесса;
- 4) кинетические уравнения – уравнения скоростей стадий;
- 5) механизм реакций – представление химической реакции через элементарные или брутто стадии;
- 6) кинетическая модель – сочетание схемы химических превращений реакции, значений кинетических параметров, физико-химических выводов по реакции.

Уравнения химической кинетики, составленные для описания реакций – система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений для модели изотермической нестационарной реакции, протекающей без изменения объема реакционной смеси в закрытой системе по закону действующих масс (1). Для гомогенных реакций, и в случае, если реакция протекает при невысоких давлениях и температурах, допускается, что процесс описывается Аррениусовской кинетикой [1, 2]:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^J \nu_{ij} w_j, i = 1, \dots, I; w_j = k_j \prod_{i=1}^I x_i^{|\alpha_{ij}|} - k_{-j} \prod_{i=1}^I x_i^{\beta_{ij}}; k_j = k_j^0 \exp\left(-\frac{E_j}{RT}\right); \quad (1)$$

с начальными условиями: при $t = 0, x_i(0) = x_i^0; t \in [0, t^*];$

где ν_{ij} – стехиометрические коэффициенты; J – количество стадий, x_i – концентрации веществ участвующих в реакции, моль/л; I – количество веществ; w_j – скорость j -ой стадии, 1/мин; E_j – энергии активации прямой и обратной реакций, ккал/моль; R – газовая постоянная, равная 8,31 Дж/(моль×К); T – температура, К; α_{ij} – отрицательные элементы матрицы (ν_{ij}) , β_{ij} положительные элементы (ν_{ij}) , k_j^0 – предэкспоненциальные множители, 1/с; t^* – время проведения реакции, с.

Для каталитических реакций, протекающих с изменением температуры необходим учет термодинамических параметров. При исследовании гетерогенных процессов математическая модель разрабатывается на основе механизма Ленгмюра-Хиншельвуда по закону действующих поверхностей с допущением о равномерном распределении активных центров и их равномерной активности). Для нестационарной реакции в математическое описание вводится учет изменения объема реакционной смеси.

Литература

1. Димитров В.И. Простая кинетика // Новосибирск: Наука и жизнь, 1982, 380 с.
2. Спивак С.И., Коледина К.Ф., Коледин С.Н., Губайдуллин И.М. Инфор-

мационно-вычислительная аналитическая система теоретической оптимизации каталитических процессов // Прикладная информатика (2017). Т. 12 №1 (67) — С. 39-49.

Б ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРЕХОДНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ КАТОДНО-ПОЛЯРИЗУЕМОГО МАГИСТРАЛЬНОГО ТРУБОПРОВОДА ПО ДАННЫМ МАГНИТОМЕТРИИ

© В.Н. Кризский, С.В. Викторов, Я.А. Лунтовская

krizsky@rambler.ru, s.v.viktorov@strbsu.ru, yanaluntovskaya@yandex.ru

УДК 519.688

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.81.

Рассмотрена математическая модель обратной задачи определения переходного сопротивления на границе "грунт/труба" по данным измерений модуля вектора магнитной индукции постоянного магнитного поля, возбуждаемого системой катодной электрохимической защиты трубопровода.

Ключевые слова: Слоистое полупространство, катодная электрохимическая защита магистрального трубопровода, математическое моделирование электрических и магнитных полей, обратная задача определения переходного сопротивления по данным магнитометрии.

On the definition of transition resistance cathode-polarized main pipeline according to magnetometry data

The mathematical inverse problem of determining the transient resistance from the measurement data of the modulus of the vector induction of a constant magnetic field, excited by the system of cathodic electrochemical protection of the pipeline, is considered.

Keywords: Layered half-space, cathodic electrochemical protection of the main pipeline, mathematical modeling of electric and magnetic fields, the inverse problem of determining the transient resistance according to magnetometry data.

Для защиты трубопроводных магистралей от коррозии в системах катодной электрохимической защиты необходим мониторинг их состояния, который традиционно осуществляется на основе измерения электрического поля методом выносного электрода на поверхности грунта над трубопроводом. Разработка интеллектуальных роботизированных магнитометрических измерительных комплексов и систем на основе беспилотных летательных аппаратов позволяет осуществлять замеры в воздухе над трассой, что открывает перспективы для повышения эффективности мониторинга (увеличение скорости получения измерительных данных, сокращение финансовых затрат).

Кризский Владимир Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, СПГУ (Санкт-Петербург, Россия);

Викторов Сергей Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, СФ БашГУ (Стерлитамак, Россия);

Лунтовская Яна Алексеевна, аспирант, СПГУ (Санкт-Петербург, Россия);

В работе рассматривается математическая модель определения переходного сопротивления изоляции трубопровода по данным магнитометрии в воздухе над трассой трубопровода. Математическая модель представляет собой обратную задачу математической физики, в которой искомой функцией является коэффициентная функция граничного условия третьего рода на границе "грунт/труба". Математические модели, алгоритмы и программы решения прямых [1–4] и обратных задач систем катодной защиты, наряду с моделями процессов гидродинамики, деформации грунта и др., могут формировать аналитическое ядро цифрового двойника магистральных трубопроводов.

Для поиска решения обратной задачи – функции переходного сопротивления изоляционного покрытия трубы ($c_{gt}(s)$) – применен вариационный метод академика А.Н.Тихонова, согласно которому искомое решение ищется как минимум регуляризирующего функционала

$$F^\alpha(c_{gt}(s)) = F_1(c_{gt}(s)) + \alpha F_2(c_{gt}(s)) =$$

$$= \left\| \left| B(r_0, c_{gt}(s)) \right| - \left| B^{UAV}(r_0, c_{gt}(s)) \right| \right\|_{L_2(V_{UAV})}^2 + \alpha \left\| c_{gt}(s) - c_{gt}^0(s) \right\|_{K(V_i(s))}^2$$

где $F_1(c_{gt}) = \left\| \left| B(r_0, c_{gt}) \right| - \left| B^{UAV}(r_0, c_{gt}) \right| \right\|_{L_2(V_{UAV})}^2$ – функционал невязки; $\left| B^{UAV}(r_0, c_{gt}) \right|$ – модуль измеренного вектора магнитной индукции; $\left| B(r_0, c_{gt}) \right|$ – моделируемый модуль вектора магнитной индукции, полученный в результате вычисления прямой задачи; $F_2(c_{gt}) = \left\| c_{gt}(s) - c_{gt}^0(s) \right\|_{K(V_i(s))}^2$ – регуляризирующий функционал, $c_{gt}^0(s)$ – априори известное переходное сопротивление изоляции вдоль трубы (полученное, например, по данным предыдущего мониторинга трассы с учетом старения изоляции за время, прошедшее между мониторингами); $c_{gt}(s)$ – искомая функция переходного сопротивления изоляционного покрытия трубы; α – параметр регуляризации; V_{UAV} – траектория движения датчиков магнитометрической системы в воздухе, L_2 – пространство интегрируемых с квадратом функций, определенных на кривой V_{UAV} . В качестве множества функций $K(V_i(s))$ рассматривается компактное множество ограниченных кусочно-постоянных функций, на котором существует единственное квазирешение дискретизированной обратной задачи.

Проведенные вычислительные эксперименты показывают, что в классе предложенных математических моделей функция переходного сопротивления на границе "грунт/труба отражающая состояние изоляционного покрытия трубопровода, может быть найдена. Полученные результаты компьютерных экспериментов позволяют оценить влияние уровня

шума в исходных данных и высоты перемещения датчиков магнитометрической системы в воздухе на результаты вычислений.

Литература

1. Кризский В.Н., Александров П.Н., Ковальский А.А., Викторов С.В. Моделирование электромагнитных полей систем катодной защиты магистральных трубопроводов в горизонтально-слоистых средах // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. 2019. Т.9, №5. С. 558-567.

2. Кризский В.Н., Александров П.Н., Ковальский А.А., Викторов С.В. Математическое моделирование электрических полей катодной защиты магистральных трубопроводов в анизотропных средах // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. 2020. Т.10, №1. С. 52-63.

3. Кризский В.Н., Викторов С.В. Расчет электрических и магнитных полей катодной защиты магистрального трубопровода в горизонтально-слоистой среде // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № RU 2019619307, 02.07.2019 г.

4. Кризский В.Н., Викторов С.В. Программный комплекс решения прямой задачи рассеивания электромагнитных полей в системах катодной защиты магистральных трубопроводов // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021661274, 08.07.2021 г.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ СХЕМ ПОГАШЕНИЯ КРЕДИТА

@ А.И. Кузнецов
aleksander2055@mail.ru

Кузнецов А.И. УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.82.

Актуальность потребительского кредитования обусловливается тем, что развитие области потребительского кредитования способствует ускоренному развитию не только потребительского рынка, но и банковского сектора экономики, что способствует росту экономики нашей страны в общем, а также увеличению качества и жизненного уровня российских граждан.

Ключевые слова: математика, финансовая математика, потребительское кредитование.

Modeling and calculation of loan repayment schemes

The relevance of consumer lending is due to the fact that the development of consumer lending contributes to the accelerated development of not only the consumer market, but also the banking sector of the economy, which contributes to the growth of the economy of our country in general, as well as to an increase in the quality and living standards of Russian citizens.

Keywords: mathematics, financial mathematics, consumer lending.

В настоящее время в нашей стране наблюдается стремительное развитие рынка кредитования населения. Объемы предоставленных физическим лицам кредитов продолжают увеличиваться, несмотря на то, что многие кредитные организации всячески стараются утаивать от потенциального заемщика реальную стоимость кредита на стадии оформления кредитной заявки.

Потребительский кредит относится к одному из наиболее распространенных вариантов банковских операций в большинстве стран. Кроме этого, сфера применения потребительского кредита является более широкой, чем просто приобретение товаров длительного пользования, например, таких как автомобилей, бытовой техники. . . Он приобрел достаточно широкое распространение в развитых странах в основном из-за того, что при применении данной технологии финансирования покупок происходит значительное расширение рынка по внушительному спектру потребительских товаров, а также недвижимости.

Кузнецов Александр Игоревич, студент, БашГУ (Уфа, Россия); Aleksander Kuznetsov, student (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Реализованная программа помогает легко и быстро рассчитать затраты на приобретение кредита у любого банка.

Кредитный калькулятор – инструмент расчета стоимости кредита, который позволяет рассчитать кредит, определить сумму ежемесячного платежа и построить график платежей до окончания срока кредитования. С помощью данного калькулятора, можно выяснить какой размер выплаченной суммы пошел на погашение кредита, а какой на погашение процентов. Используя калькулятор, можно определить полный размер выплат по уже взятому или запланированному кредиту в зависимости от вида платежа. Кредитный калькулятор предоставляет возможность произвести расчеты для аннуитетного и дифференцированного платежей.

Несомненным достоинством программы является ее универсальность. В первую очередь, это относится к просчету условий разных банков.

В результате вычислений выявлено, что погашение кредита «Равными срочными выплатами» для заемщика является более невыгодным, по сравнению с погашением кредита по схеме «Равными долями от общей суммы долга»

Литература

1. *Четыркин Е.М.* Методы финансовых и коммерческих расчетов — Издательство: Дело.,1995. — 320 с.
2. *Лью Ю.Д.* Методы и алгоритмы финансовой математики — пер. Бином: Лаборатория знаний,2007. — 738 с.
3. *Брусев П.Н.* Финансовая математика. — М.: Инфра-М,2014. — 480 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМБИНАЦИИ МЕТОДОВ ГОДУНОВА И РУСАНОВА НА ОСНОВЕ КУСОЧНО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЗРЫВА СВЕРХНОВЫХ ТИПА Ia

@ И.М. Куликов

kulikov@ssd.ssc.ru

УДК 519.6

DOI: [10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.83](https://doi.org/10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.83).

В статье представлен новый численный метод на основе комбинации методов Годунова и Русанова с использованием кусочно-параболического метода на локальном шаблоне. Метод верифицирован на задаче Седова о точечном взрыве и астрофизическом приложении.

Ключевые слова: математическое моделирование, вычислительная астрофизика, метод Годунова

Keywords: Numerical Modeling, Computational Astrophysics, Godunov Method

Метод основан на использовании кусочно-параболического представления физических переменных в комбинации методов Годунова и Русанова для получения инвариантного относительно поворота решения. Численный метод верифицирован на задаче Седова о точечном взрыве, допускающей аналитическое решение. Параллельная реализация на основе разработанного метода была использована для исследования сценария приливной детонации белого карлика при близком прохождении черной дыры с последующим взрывом сверхновой типа Ia.

Литература

1. *Kulikov I., Vorobyov E.* Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows // *Journal of Computational Physics*, **317** (2016), 318-346.
2. *Kulikov I., Chernykh I., Tutukov A.* A New Hydrodynamic Code with Explicit Vectorization Instructions Optimizations that Is Dedicated to the Numerical Simulation of Astrophysical Gas Flow. I. Numerical Method, Tests, and Model Problems // *The Astrophysical Journal Supplement Series*, **243** (2019), Article Number 4.
3. *Kulikov I.* A new code for the numerical simulation of relativistic flows on supercomputers by means of a low-dissipation scheme // *Computer Physics Communications*, **257** (2020), Article Number 107532.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 18-11-00044).

Куликов Игорь Михайлович, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, ИВМиМГ СО РАН (Новосибирск, Россия); Igor Kulikov (ICM&MG SB RAS, Novosibirsk, Russia)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСНОЙ ЛАЗЕРНОЙ АБЛЯЦИИ МАТЕРИАЛА

@ И.И. Латыпов, Л.А. Бигаева, В.В. Чудинов

LatypovII@rambler.ru, BigLA@rambler.ru, Chudinovvv@rambler.ru

УДК 517.956

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.84.

В докладе рассматривается математическое описание абляции материала под действием нано-фемтосекундного импульсного лазерного излучения. Исходная краевая задача сводится к решению сингулярно возмущенной краевой задачи нестационарной теплопроводности с нелинейными граничными условиями на подвижных границах. Приближенное решение получается в виде асимптотического разложения решения в смысле Пуанкаре по степеням малых параметров, в зависимости от близости рассматриваемой точки к границам.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, сингулярное возмущение, подвижная граница, асимптотическое разложение

Modeling of pulsed laser ablation of a material

The paper considers a mathematical description of the ablation of a material under the action of nano-femtosecond pulsed laser radiation. The initial boundary value problem is reduced to the solution of a singularly perturbed boundary value problem of non-stationary thermal conductivity with nonlinear boundary conditions on mobile boundaries. The approximate solution is obtained in the form of an asymptotic expansion of the solution in the Poincare sense by degrees of small parameters, depending on the proximity of the point under consideration to the boundaries.

Keywords: heat equation, singular perturbation, moving boundary, asymptotic expansion

Быстрое развитие экспериментальной техники привело к тому, что стало необходимым изучения воздействия высокоэнергетических источников на различные материалы. Одним из этих направлений является исследование абляции под действием ультракоротких лазерных импульсов пикосекундного и фемтосекундного диапазонов, важнейшими параметрами которого являются длина волны, интенсивность и длительность

Латыпов Ильмир Ибрагимович, к.ф.-м.н., доцент, Бирский филиал БашГУ (Бирск, Россия); Ilmir Latypov (Birsk branch Bashkir State University, Birsk, Russia)

Бигаева Люзия Ахатовна, к.ф.-м.н., доцент, Бирский филиал БашГУ (Бирск, Россия); Luzia Bigaeva (Birsk branch Bashkir State University, Birsk, Russia)

Чудинов Валерий Валентинович, к.ф.-м.н., доцент, Бирский филиал БашГУ (Бирск, Россия); Valera Chudinov (Birsk branch Bashkir State University, Birsk, Russia)

импульса. При этом процессы абляции и плазмообразование являются основными при лазерной обработке материалов. Импульсная лазерная абляция лежит в основе многих технологий обработки материалов (сверление, резка, напыление тонких пленок, структурирование материалов на микро-и нано уровнях). При воздействии лазерного излучения на ультракоротких диапазонах усиливается роль испарения (как поверхностного, так и объемного) [1]. В последние годы наблюдается повышение интереса к исследованиям воздействия лазерного излучения в пико-и фемтосекундном диапазонах на различные материалы [3-5].

В работе ставится задача аналитического исследования распределения температуры в материале, который подвергается высокоинтенсивному воздействию лазерного излучения ультракороткого диапазона. Рассматривается процесс абляции материала, предполагая, что расплавленный материал мгновенно выносится из области воздействия, область облучения намного превосходит глубину проплавления, что позволяет математически описать данный процесс в одномерном и однофазном приближении [2,4,5].

$$\rho(T) \cdot c(T) \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \rho(T) c(T) \nu(t) \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T) \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right) + A(z, t),$$

$$-\lambda(T) \cdot \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0} = \nu(t) \cdot L \cdot \rho(T_s) + \psi_1(t) + \sigma_1 [T^4(z, t) - U_0^4],$$

$$A(z, t) = I_0 A_s \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot z - \alpha_g \cdot h} \cdot e^{-\frac{t}{t_1}} \cdot \frac{t}{t_1}, \quad A_s = 1 - R(T_s), \quad I_0 = \frac{F}{t_1}, \quad h = \int_0^t \nu(t) dt,$$

$$-\chi \cdot \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=H} = \psi_2(t) + \sigma_2 [T^4(z, t) - U_0^4], \quad T(z, 0) = T_0, \quad T_s = T(0, t),$$

$$\Omega = \{ (x, t) : 0 < z < H, \quad 0 < t < t_\infty \},$$

где $c(T)$, $\lambda(T)$, $\rho(T)$ - соответственно удельная теплоемкость, теплопроводность и плотность материала при температуре $T(z, t)$; h - глубина кратера на поверхности материала; ν - скорость перемещения границы из-за испарения; L - удельная теплота сублимации; I_0 - интенсивность лазерного излучения; R - коэффициент отражения лазерного излучения; α , α_g - коэффициенты поглощения лазерного импульса; t_1 длительность импульса. Функции ψ_1 , ψ_2 и константы σ_1 , σ_2 определяют режимы теплообмена на соответствующих сторонах пластины. Функция $A(z, t)$ - описывает вид и характер источника тепла.

Литература

1. Анисимов С.И., Лукьянчук Б.С. Избранные задачи теории лазерной абляции. // УФН, Т.172, 3 (2002), 301-333.
2. Латыпов И.И. Приближенный расчет распределения температурного поля активного элемента твердотельного лазера.// Труды кафедры экспериментальной и теоретической физики института физики молекул и кристаллов УНЦ РАН. Вып. 1. Уфа.: Гилем, 2001. –С. 82-92.
3. *Latypov I.I.* Approximate solution to a singular perturbed boundary value problem of thermal shielding//IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 918 (2017) 012005
4. *Latypov I.I., Bigaeva L.A., Chudinov V.V. [et al.]* Material evaporation with ultrashort laser exposure // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering : International Workshop "Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering – MIP: Engineering – 2019 Krasnoyarsk, 04–06 апреля 2019 года / Krasnoyarsk Science and Technology City Hall of the Russian Union of Scientific and Engineering Associations. – Krasnoyarsk: Institute of Physics and IOP Publishing Limited, 2019. – P. 22068. – DOI 10.1088/1757-899X/537/2/022068.
5. *Латыпов, И.И.* Испарение пластины под действием потоков энергии переменной интенсивности / И. И. Латыпов, Л. А. Бигаева, В. В. Чудинов // Доклады Башкирского университета. – 2018. – Т. 3. – № 6. – С. 601-607.

**АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ХАРАКТЕРА КОНТАКТНОГО
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И КОЭФФИЦИЕНТА ЛИНЕЙНОГО
ТЕМПЕРАТУРНОГО РАСШИРЕНИЯ НА
ДЕФОРМАЦИОННЫЕ И ОПТИЧЕСКИЕ
ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛОКНА ТИПА PANDA**

**@ Ю.И. Лесникова, А.Н. Труфанов, А.А. Каменских, М.М.
Пашенко**

ulesig@gmail.com, ant@pstu.ru, anna_kamenskih@mail.ru, midubk@gmail.com

УДК 531.4

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.85.

В работе рассмотрены задачи о деформировании оптических волокон типа Panda при учете разных особенностей моделей. Проанализировано влияние физико-механических, термомеханических и frictionных свойств материалов, из которых изготовлено волокно, на его работу. Оптическое волокно типа Panda защищено от воздействия внешней среды многослойным полимерным покрытием. Зависимости коэффициента линейного температурного расширения от времени и вязкоупругие свойства материалов первичного и вторичного защитно-упрочняющего покрытия получены экспериментально. Так же выполнена реализация задач в прикладном инженерном пакете ANSYS с введением в модели разного характера контактного взаимодействия волокна с металлическими и не металлическими поверхностями сопряжения.

Ключевые слова: покрытие, полимер, оптическое волокно, контакт, термомеханика

**Analysis of the influence contact interaction pattern and
the linear thermal expansion coefficient on the deformation
and optical characteristics of a Panda-type fiber**

The deformation problems of Panda type optical fibers taking into account different features of the models are considered in the work. The influence of the materials physicommechanical, thermomechanical and frictional properties from which the fiber is made has been analyzed.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Пермского края в рамках научного проекта № 20-48-596009.

Лесникова Юлия Игоревна, ведущий инженер, ПНИПУ (Пермь, Россия); Yulia Lesnikova (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Труфанов Александр Николаевич, к.т.н., доцент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Aleksander Trufanov (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Каменских Анна Александровна, к.т.н., доцент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Anna Kamenskih (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Пашенко Максим Михайлович, студент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Maksim Paschenko (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Panda type optical fiber is protected from the external environment by a multilayer polymer coating. The dependences of the linear thermal expansion coefficient on time and the viscoelastic properties of the primary and secondary protective-hardening coatings materials were obtained experimentally. The implementation of tasks in the applied engineering package ANSYS with the introduction in the model of a contact interaction different pattern of the fiber with metal and non-metal interfaces is completed also.

Keywords: coating, polymer, optical fiber, contact, thermomechanics

Оптические волокна получили широкое распространение по всему миру и являются актуальным объектом изучения [1, 2]. Ученые России и мира решают много задач, направленных на улучшение оптических характеристик и уменьшение выбраковки волокон при производственных процессах. Данное исследование направлено на выявление и анализ закономерностей деформационного поведения оптического волокна с защитно-упрочняющими покрытиями (ЗУП) в рамках термоцикла и при комнатной температуре и включает в себя ряд задач. Интересен анализ влияния характера контактного взаимодействия в зоне сопряжения оптического волокна типа Panda с металлическими и не металлическими элементами конструкций и между слоями многослойного волновода на напряженно-деформированное состояние конструкции. Так же особый интерес представляет анализ влияния термомеханических свойств материалов, из которых изготовлено волокно и ЗУП, на деформационные и оптические характеристики.

В рамках исследования выполнен ряд задач:

1. Тестовая задача об индентировании оптического волокна в полупространство, изготовленного из разных материалов;
2. Тестовая задача о контактном взаимодействии между волокнами;
3. Моделирование контактного взаимодействия волокна и алюминиевой катушки в рамках первичной технологической пробы.

Все задачи рассматриваются при постепенном вводе параметров термомеханического поведения. Первоначально задачи рассматривались в рамках теории упругости, далее выполнен учет вязкоупругого поведения материалов ЗУП, последним этапом усложнения математической модели поведения материалов стал учет переменного коэффициента линейного температурного расширения (КЛТР). Можно отметить, что учет зависимости КЛТР от температуры оказывает влияние на деформационные и оптические характеристики, наиболее существенный вклад параметра наблюдается при отрицательных температурах (зоны охлаждения до -60°C и выдержки при -60°C). При T более 14°C в модели наблюдается расхождение контакта из-за усадки катушки, поэтому влияние переменного КЛТР на оптические характеристики наблюдает-

ся более значительно, при $T > 14^{\circ}\text{C}$ влияние контактного взаимодействия на деформационное поведение волокна более значительное, чем влияние переменного КЛТР.

В рамках тестовых задач рассматривается так же влияние характера контактного взаимодействия как между волокном и элементами системы, так и между элементами оптического волокна: контакт без трения, фрикционный контакт, контактная склейка. Дальнейшим развитием задачи станет учет в реальной конструкции разного характера сопряжения элементов и анализ их влияния на деформационные и оптические характеристики.

Литература

1. *Esipenko I.A., Lykov D.A., Smetannikov O.Y.* Using the transversely isotropic characteristics of the coil to calculate the thermal-drift parameters of a fiber-optic gyroscope // Journal of optical technology, **5** (2019), 289-295.
2. *Сметанников О.Ю., Труфанов А.Н., Лесникова Ю.И.* Исследование оптико-механических характеристик волокна в условиях термоцикла // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, **6-2** (2018), 255-260.

КАСКАДЫ БИФУРКАЦИЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СОЦИАЛЬНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В УЧЕБНОЙ ГРУППЕ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ НЕФОРМАЛЬНЫМ ЛИДЕРОМ

@ Е.Ю. Лискина, С.А. Бельман

katelis@yandex.ru, sabelman@mail.ru

УДК 517.925.41

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.86.

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующая педагогическое взаимодействие в группе студентов. Педагогическое воздействие выражено суммой некоторой константы и управляющего параметра. Найдены состояния равновесия системы, определены типы и последовательности их бифуркаций, возникающие при изменении управляющего параметра. Получены коэффициентные условия возникновения устойчивых продуктивных состояний равновесия и соответствующие бифуркационные значения параметра.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, состояние равновесия, устойчивость бифуркация

Cascades of bifurcations in a dynamic model of socio-pedagogical interaction in a study group with a negative informal leader

We consider a system of ordinary differential equations that models pedagogical interaction in a group of students. The pedagogical impact is the sum of a certain constant and a control parameter. We found the equilibrium points of the system, determined the types and sequences of their bifurcations that occur when the control parameter changes. We obtained the coefficient conditions for the occurrence of stable productive equilibrium points and the corresponding bifurcation values of the parameter.

Keywords: ordinary differential equations, equilibrium point, stability, bifurcation

В работе [1] предложена модель социально-педагогического взаимодействия в студенческой группе. Внесем в модель уточнения:

Лискина Екатерина Юрьевна, к.ф.-м.н., заведующий кафедрой, РГУ имени С.А. Есенина (Рязань, Россия); Ekaterina Liskina (Ryazan State University named for S.A. Esenin, Ryazan, Russia)

Бельман Светлана Александровна, к.ф.-м.н., доцент, РГУ имени С.А. Есенина (Рязань, Россия); Svetlana Belman (Ryazan State University named for S.A. Esenin, Ryazan, Russia)

1) скорость изменения количества вовлеченных студентов пропорциональна численности этих студентов, ограниченной максимальной численностью w_1 суммы количества вовлеченных студентов и количества тех не вовлеченных студентов потока, которые могут рассматривать профессию учителя среди своих возможных профессий ($w_1 \leq w$), и убывает при наличии отрицательного воздействия на вовлеченных студентов;

2) скорость изменения количества не вовлеченных студентов зависит от их численности, ограниченной максимальной численностью w_2 суммы количества не вовлеченных студентов и тех вовлеченных студентов потока, которые в процессе обучения могут перестать рассматривать профессию учителя своей возможной профессией ($w_2 \leq w$), и увеличивается за счет влияния не вовлеченных студентов на вовлеченных (т.е. студент из группы вовлеченных студентов может перейти в группу не вовлеченных студентов);

3) численность потока w является постоянной; $w_1 + w_2 \leq 2w$.

Тогда система дифференциальных уравнений, моделирующая взаимную динамику вовлеченных и не вовлеченных студентов, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \left(1 - \frac{x}{w_1}\right) - d_1xy, \\ \dot{y} = -(a + \alpha)y \left(1 - \frac{y}{w_2}\right) + d_2xy. \end{cases} \quad (1)$$

Непосредственными вычислениями установлено, что система (1) имеет 4 состояния равновесия: $O(0, 0)$, $K(0, w_2)$, $L(w_1, 0)$, $M(x_0(\alpha); y_0(\alpha))$, где

$$x_0(\alpha) = \frac{(a + \alpha)w_1(w_2d_1 - a)}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}, \quad y_0(\alpha) = \frac{aw_2(w_1d_2 - (a + \alpha))}{w_1w_2d_1d_2 - a(a + \alpha)}.$$

Состояние равновесия $M(x_0(\alpha), y_0(\alpha))$ необходимо рассматривать в I координатной четверти.

При этом предельное положение точки $M(x_0(0), y_0(0))$ в I координатной четверти существует при выполнении следующей совокупности коэффициентных условий:

$$\begin{cases} d_1w_2 - a > 0, \\ w_1w_2d_1d_2 - a^2 > 0, \\ d_2w_1 - a \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} d_1w_2 - a < 0, \\ w_1w_2d_1d_2 - a^2 < 0, \\ d_2w_1 - a \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Получены бифуркационные значения параметра: $\alpha_0 = d_2w_1 - a$, $\alpha_1 = d_2w_1 - d_1w_2$, $\alpha_2 \in (\alpha_1; \alpha_0)$.

Пусть справедлива первая система неравенств совокупности (2). Тогда в I четверти расположено 4 состояния равновесия: седла O , K , L и

точка M . При $d_1w_2 - d_2w_1 > 0$ и $\alpha = 0$ точка M — устойчивый узел. При возрастании α точка M приближается к точке L , оставаясь устойчивым узлом. При $d_1w_2 - d_2w_1 < 0$ и $\alpha = 0$ точка M — неустойчивый фокус. При переходе через $\alpha = \alpha_1$ фокус меняет характер устойчивости, в системе возможно возникновение периодических решений. При $\alpha_2 \in (\alpha_1, \alpha_0)$ точка M меняет характер с фокуса на узел. При $d_1w_2 - d_2w_1 = 0$ и $\alpha = 0$ точка M — сложное состояние равновесия. При возрастании $\alpha \geq 0$ она может до трех раз менять характер с фокуса на узел (устойчивый). Во всех трех случаях при $\alpha = \alpha_0$ происходит седло-узловая бифуркация точек L и M , состояние равновесия M исчезает в I четверти. При дальнейшем возрастании параметра α точка L остается устойчивым узлом.

Если справедлива вторая система неравенств совокупности (2), то при любом соотношении d_1w_2 и d_2w_1 и при $\alpha = 0$ в системе (1) в I четверти расположено 4 состояния равновесия: седла O , M , устойчивый узел L и неустойчивый узел K . При возрастании $\alpha \geq 0$ топологическая структура фазового портрета в I координатной четверти не меняется.

Литература

1. Бельман С.А., Лискина Е.Ю. О регулировании педагогического воздействия в динамической модели студенческой группы, имеющей отрицательного неформального лидера // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование, **2** (2021), с. 10-19.

MATHEMATICAL MODELING OF NONLINEAR VIBRATIONS OF A ROPE WITH A MOVING BOUNDARY

@ V.L. Litvinov , K.V. Litvinova

vladlitvinov@rambler.ru, kristinalitvinova900@rambler.ru

УДК 534.11

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.87.

Until now, the problems of longitudinal - transverse vibrations of objects with moving boundaries were solved mainly in a linear setting, the energy exchange through the moving boundary and the interaction between longitudinal and transverse vibrations were not taken into account. The paper presents a new nonlinear mathematical model of transverse vibrations of an unbounded rope with a moving boundary, in which geometric nonlinearity is taken into account. The obtained mathematical model allows one to describe high-intensity vibrations of a rope with a moving boundary.

Keywords: nonlinear mathematical model, vibrations of a rope, moving boundaries

Until now, the problems of longitudinal - transverse vibrations of objects with moving boundaries were solved mainly in a linear setting, the energy exchange through the moving boundary and the interaction between longitudinal and transverse vibrations were not taken into account [1–5, 7–10]. In rare cases, the action of the forces of resistance of the external environment was taken into account [6]. Real technical objects are much more complicated, for example, with an increase in the intensity of oscillations, the geometric nonlinearities of the object have a great influence on the oscillatory process. In connection with the intensive development of numerical methods, it became possible to more accurately describe complex mathematical models of longitudinal-transverse oscillations of objects with moving boundaries, taking into account a large number of factors influencing the oscillatory process. The paper presents a new nonlinear mathematical model of longitudinal-transverse vibrations of a rope with a moving boundary, which takes into account geometric nonlinearity, viscoelasticity, energy exchange across the boundary. The boundary conditions are obtained in the case of interaction between the parts of the object to the left and to the right of the moving boundary. The

Vladislav L. Litvinov, Head of Dept., Dept. of General-Theoretical Disciplines, Syzran' Branch of Samara State Technical University (Syzran', Russia); doctoral student, Moscow State University (Moscow, Russia)

Litvinova V. Kristina, student, Moscow State University (Moscow, Russia)

resulting model is linearized. In this case, the principle of homogeneity is observed: in the particular case of small fluctuations, the obtained linear models coincided with the classical ones, which indicates the correctness of the results obtained. The obtained mathematical model allows one to describe high-intensity vibrations of a rope with a moving boundary.

Литература

1. *Savin G.N., Goroshko O.A.* Dynamics of a variable length thread // Nauk. dumka, Kiev, 1962, 332 p.
2. *Samarin Yu.P.* On a nonlinear problem for the wave equation in one-dimensional space // Applied Mathematics and Mechanics. - 1964. - Т. 26, V. 3. - P. 77–80.
3. *Vesnitsky A.I.* Waves in systems with moving boundaries and loads // Fizmatlit, Moscow, 2001, 320 p.
4. *Lezhneva A.A.* Bending vibrations of a beam of variable length // Izv. Academy of Sciences of the USSR. Rigid Body Mechanics. - 1970. - No. 1. - P. 159-161.
5. *Litvinov V.L.* Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations // Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 2020. Vol. 26, No. 2. P. 188-199.
6. *Anisimov V.N., Litvinov V.L.* Mathematical models of longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries // Vestn. Himsel'f. tech. un-t. Ser. Phys and mat. science, 2015. Vol. 19, No. 2. P. 382-397.
7. *Anisimov V.N., Litvinov V.L.* Mathematical modeling and study of the resonance properties of mechanical objects with a changing boundary: monograph / V. L. Litvinov, V. N. Anisimov - Samara: Samar. state tech. un – t, 2020. - 100 p.
8. *Litvinov V.L., Anisimov V.N.* Application of the Kantorovich - Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Rigid Body Mechanics. 2018. No. 2. P. 70–77.
9. *Litvinov V.L., Anisimov V.N.* Transverse vibrations of a rope moving in a longitudinal direction // Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. T. 19. No. 4. – P.161–165.
10. *Litvinov V.L., Anisimov V.N.* Mathematical modeling and research of oscillations of one–dimensional mechanical systems with moving boundaries: monograph / V. L. Litvinov, V. N. Anisimov – Samara: Samar. state tech. un–t, 2017. – 149 p.

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

@ Ф.В. Лубышев, М.Э. Файрузов

fairuzovme@mail.ru

УДК 519.632.4

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.88.

В работе предлагается итерационный метод для решения задачи оптимального управления системой эллиптического типа. Исследованы вопросы сходимости итерационного процесса, установлены оценки скорости сходимости итераций.

Ключевые слова: итерационный метод, оптимальное управление, краевая задача, эллиптическое уравнение, сходимость итерационного метода.

On an iterative method for solving the optimal control problem for an elliptic-type system

The paper proposes an iterative method for solving the optimal control problem for an elliptic system. The issues of convergence of the iterative process are investigated, estimates of the rate of convergence of iterations are established.

Keywords: iterative method, optimal control, boundary value problem, elliptic equation, convergence of the iterative method.

Рассмотрим задачу оптимального управления, состоящую в том, чтобы найти такое управление $u = u_*(x) \in U = L_2(\Omega)$, которое минимизирует на множестве управлений U функционал цели

$$J(u) = \int_{\Omega} (T(x, u) - T_0(x))^2 d\Omega + \gamma \|u(x)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \gamma = \text{const} > 0, \quad (1)$$

причем связь управления $u = u(x)$ с состоянием процесса управления $T(x) = T(x, u)$, соответствующий управлению $u \in U$, определяется как решение задачи Дирихле в $\Omega \in \mathbb{R}^2$:

$$LT(x, u) = -\Delta T(x, u) = -\left[\frac{\partial^2 T(x, u)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T(x, u)}{\partial x_2^2} \right] = u(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

Лубышев Федор Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Fedor Lubyshv (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Файрузов Махмут Эрнстович, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Mahmut Fayruzov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

$$T(x, u) = 0, \quad x \in \Gamma; \quad (3)$$

здесь Ω – область в \mathbb{R}^2 с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$.

Иначе говоря, задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти функцию (управление) такую, что

$$u_* \in U = L_2(\Omega), \quad J(u_*) = \inf_{u \in U} J(u). \quad (4)$$

Элемент $u_* \in U$, удовлетворяющий условию (4), называется оптимальным управлением, а совокупность U_* всех элементов u_* , удовлетворяющих (4) называется множеством оптимальных управлений [1]-[4]. В функционале (1) функция $T_0(x)$ – заданный элемент пространства $L_2(\Omega)$.

Теорема 1. *Для того, чтобы элемент $u_* \in U = L_2(\Omega)$ был оптимальным управлением задачи (1)-(4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия оптимальности вида*

$$LT(x, u_*) = -\Delta T(x, u_*) = -\frac{1}{\gamma}\psi(x, u_*), \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

$$T(x, u_*) = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (6)$$

$$L\psi(x, u_*) = -\Delta\psi(x, u_*) = T(x, u_*) - T_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

$$\psi(x, u_*) = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (8)$$

$$\psi(x, u_*) + \gamma u_* = 0, \quad x \in \Omega. \quad (9)$$

В работе было показано, что оптимальное управление единственно, т.е. соотношениям (5)-(9) удовлетворяет единственный элемент $u_* \in U = L_2(\Omega)$. Так что оптимальное управление $u_*(x)$ находится по следующему правилу: 1) решается граничная задача для системы уравнений с частными производными (5)-(8); 2) находится оптимальное управление по формуле

$$u_*(x) = -\frac{1}{\gamma}\psi(x, u_*), \quad x \in \Omega.$$

Рассмотрим последовательность управлений $\{u_*^{(n)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, определяемую формулой

$$u_*^{(n)}(x) = -\frac{1}{\gamma}\psi^{(n)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где последовательность $\{\psi^{(n)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ определяется из итерационного процесса (приближенного решения системы уравнений в частных производных (5)-(8):

$$-\Delta T^{(n+1)}(x) = -\Delta T^{(n)}(x) - \tau \left[LT^{(n)}(x) + \frac{1}{\gamma}\psi^{(n)}(x) \right], \quad x \in \Omega, \quad (10)$$

$$T^{(n+1)}(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$-\Delta\psi^{(n)}(x) = T^{(n)}(x) - T_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (12)$$

$$\psi^{(n)}(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (13)$$

Здесь $\tau > 0$, $\gamma > 0$ – параметры, которыми следует распорядиться для достижения сходимости последовательности управлений $\{u_*^{(n)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

В работе исследованы вопросы сходимости итерационного процесса (10)-(13), установлены оценки скорости сходимости итераций.

Литература

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. 414 с.
2. *Литвинов В. Г.* Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. — М.: Наука, 1987. 368 с.
3. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. — М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
4. *Лубышев Ф. В.* Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. — Уфа: БашГУ, 1999. 244с.

ФОРМИРОВАНИЕ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ВОЗОБНОВЛЯЕМОЙ ГЕНЕРАЦИИ

@ Я.Ю. Малькова
yamalkova96@gmail.com

УДК 517.977

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.89.

Декарбонизация в электроэнергетике предполагает ввод в эксплуатацию объектов на основе возобновляемых источников энергии, в том числе совместно с системами накопления энергии, например, водородными. Оптимальность установки объекта генерации с теми или иными параметрами возможно определить по значению целевой функции. В статье приведена формульная запись целевой функции в контексте обозначенной задачи, а также пояснение используемых переменных.

Ключевые слова: оптимизационная задача, возобновляемая генерация, водородные накопители, целевая функция, переменные, весовые коэффициенты

Forming of the objective function for solving the optimization task of renewable generation placement

Decarbonization in the electric power industry is involved the penetration of facilities based on renewable energy sources, in particular, in association with the storage systems, for example, hydrogen. The optimality installation of the renewable generation with appropriate parameters can be determined by the value of the objective function. In the article is presented formula of the objective function in the context of this task and also an explanation of the used variables.

Keywords: optimization task, renewable generation, hydrogen storage systems, objective function, variables, weight coefficients

Тенденцией развития современной экономики является оценка предприятиями углеродного следа единицы производимой ими продукции, а также принятие и проведение совокупности мероприятий по уменьшению величины данного следа, что, в свою очередь, имеет место в контексте следования глобальной цели перехода к углеродной нейтральности.

В электроэнергетической отрасли к мероприятиям по декарбонизации относится следующее:

– повышение энергетической эффективности уже существующих объектов традиционной генерации, например, тепловых электростанций, в

Малькова Яна Юрьевна, магистрант, ТПУ (Томск, Россия); Yana Malkova (Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia)

качестве источника энергии на которых выступают углеводородные топливные ресурсы;

– обеспечение растущего спроса на электроэнергию (ожидаемый рост спроса в 2021 году составляет 4,6%, тем самым превышая величину спроса до осложнения эпидемиологической обстановки в 2019 году на 0,5% [1]) единичной установкой объектов на основе возобновляемых источников энергии (ВИЭ), а также в совокупности с водородными системами накопления энергии (так называемый "зеленый" водород).

Определить оптимальные параметры, в том числе, мощность и место подключения к энергосистеме, объекта ВИЭ с водородным накопителем представляется возможным по значению целевой функции. К переменным целевой функции в контексте обозначенной задачи относится следующее:

– суммарные потери активной и реактивной мощности на линиях связи исследуемой схемы;

– максимальное отклонение уровня напряжения от номинального значения среди всех узлов схемы;

– соотношение затрат на строительство и ввод в эксплуатацию 1 кВт установленной мощности объекта ВИЭ в соответствии с природой объекта (солнечные, ветряные, геотермальные электростанции и др.) и выгоды от сокращения суммарных потерь мощности ввиду уменьшения перетоков мощности от основной энергосистемы.

Приведем формульное представление целевой функции:

$$\begin{cases} F = a \cdot P^i + b \cdot Q^i + c \cdot U^i + d \cdot S^i, \\ P^i = \frac{dP'}{dP}, \\ Q^i = \frac{dQ'}{dQ}, \\ U^i = \frac{dU - dU'}{dU}, \\ S^i = d' \cdot s_1 \cdot P_{DG} + d'' \cdot s_2 \cdot dP', \end{cases}$$

где P^i – индекс суммарных потерь активной мощности, dP и dP' – суммарные потери активной мощности в исходной схеме и в схеме после установки объекта ВИЭ, Q^i – индекс суммарных потерь реактивной мощности, dQ и dQ' – суммарные потери реактивной мощности в исходной схеме и в схеме после установки объекта ВИЭ, U^i – индекс максимального отклонения уровня напряжения от номинального значения среди всех узлов схемы, dU и dU' – уровень напряжения узла в исходной схеме и в схеме после установки объекта ВИЭ, S^i – индекс экономической эффективности установки объекта ВИЭ, s_1 – стоимость 1 кВт установленной мощности выбранного типа объекта ВИЭ, P_{DG} – установленная мощность объекта ВИЭ, s_2 – стоимость 1 кВт потерь активной мощ-

ности на линиях связи исследуемой схемы, a , b , c , d , d' , d'' – весовые коэффициенты, причем $a + b + c + d \equiv 1$ и $d' + d'' \equiv 1$.

Таким образом, минимальное из возможных значений целевой функции в контексте обозначенной задачи определения оптимальных параметров объекта возобновляемой генерации и водородного накопителя при интеграции в энергосистему соответствует оптимальной установленной мощности и месту подключения нового ввода генерации. Непосредственный расчет целевой функции осуществляется в программной форме с применением одного из существующих оптимизационных алгоритмов, в частности, эвристической группы.

Литература

1. Global Energy Review 2021. Assessing the effects of economic recoveries on global energy demand and CO2 emissions in 2021. — International Energy Agency (IEA) Publications, April 2021, <https://www.iea.org/reports/global-energy-review-2021>.

РАЗРАБОТКА МОБИЛЬНОГО ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ЛИЧНЫМИ ФИНАНСАМИ

@ П.Р. Мамалимов, М.Л. Бердникова

ML0@mail.ru

УДК 517.518

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.90.

Работа посвящена созданию удобного в использовании мобильного приложения для анализа личных финансов.

Ключевые слова: финансы, приложение, Android.

Development of a mobile application for personal finance management

The work is devoted to creating an easy-to-use mobile application for analyzing personal finances.

Keywords: finance, application, Android.

Управление личными финансами зачастую понимается людьми как экономия денежных средств. В свою очередь управление личными финансами является распределением денег в зависимости от целей человека. Все большую актуальность в наше время имеет неправильное управление личными финансами. К сожалению, многие люди еще со школьного возраста не понимают, что помимо знаний, которые они получают в школе, нужно расширять свой кругозор и обучаться навыкам ведения управлением личных финансов и денежных отношений. Как правило большинство просто видит неудовлетворенность определенной части общества своим финансовым положением, которые ничего не делают чтобы научиться управлять своими финансами, приумножать их, правильно экономить и делать накопления, и продолжают поступать так же.

Управление личными финансами помогает выбрать план согласно целям, учит с умом тратить деньги и организовывать семейный бюджет.

Управляя личными финансами можно получить ответ на следующие вопросы:

? Какие денежные средства используются неэффективно?

? Каковы причины недостатка денег и как найти способ их решения?

? Как проанализировать структуру расходов с целью повышения их эффективности?

Мамалимов Павел Ралифович, студент БашГУ (Уфа, Россия); Pavel Mamalimov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Бердникова Марина Леонидовна, к.ф.-м.н., доцент БашГУ (Уфа, Россия); Marina Berdnikova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Результатом исследования явилось создание мобильного приложения для управления личными финансами, которое является простым в использовании и которое обеспечивает хранение в электронном виде данных о доходах и расходах пользователя.

Декомпозиция исследования привела к следующему списку задач:

1. Анализ аналогичных приложений для управления личными финансами.
2. Изучение среды разработки для мобильных приложений.
3. Разработка мобильного приложения под управлением операционной системы Android.

Были проанализированы мобильные операционные системы такие как IOS, Android и в качестве операционной системы приложения была выбрана Android ОС. Так же рассматривались аналогичные приложения для управления личными финансами такие, как Monefy и Spendee. Сравнивались такие среды разработки, как Eclipse и Android Studio и была выбрана среда разработки Android Studio.

В результате исследования было разработано мобильное приложение для управления личными финансами. Приложение имеет следующие функции: регистрация, авторизация, главное меню приложения, добавление транзакций, просмотр транзакций за определенный период, сканер QR кода, перенос транзакций в документ формата Excel и возможность отправки этого отчета по почте.

Литература

1. *Гриффитс Д.* Head First. Программирование для Android. 2-е издание. / Санкт-Петербург: Питер, 2018. – 704 с.
2. *Spendee* – Приложения в магазине «Google Play» [Электронный ресурс]. – <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.cleevio.spendeehl=rugl=US>
3. *Варакин М.В.* Разработка мобильных приложений под Android. УЦ «Специалист» при МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012
4. *Дэрси Л.* Разработка приложений для Android-устройств. Базовые принципы /Л. Дэрси, Ш. Кондер – Том 1. – Москва: Эксмо, 2014. – 598 с

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАКЦИИ СЕРНОКИСЛОТНОГО АЛКИЛИРОВАНИЯ ИЗОБУТАНОВ ОЛЕФИНАМИ МЕТОДОМ РОЯ ЧАСТИЦ И ГЕНЕТИЧЕСКИМ АЛГОРИТМОМ

@ Д.Ф. Махмутова, Л.В. Еникеева

mahmutenko.dianka@gmail.com, leniza.enikeeva@yandex.ru

УДК 004.021

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.91.

В последнее время интенсивно развиваются алгоритмы поисковой оптимизации. Среди них наибольшую популярность набирают популяционные алгоритмы. Их эффективность часто превосходит эволюционные алгоритмы. Значительное внимание в докладе уделяется методу роя частиц и генетическому алгоритму.

Ключевые слова: метод роя частиц, генетический алгоритм, оптимизация

Modeling the reaction of sulfuric acid alkylation of isobutanes with olefins by the particle swarm method and genetic algorithm

In recent years, search engine optimization algorithms have been intensively developing. Among them, population algorithms are gaining the greatest popularity. Their efficiency is often superior to evolutionary algorithms. Much attention is paid to the particle swarm method and genetic algorithm.

Keywords: particle swarm method, genetic algorithm, optimization

Процесс алкилирования изопарафинов олефинами предназначен для получения высокооктановых добавок к бензину. Бензины — алкилаты, состоящие из разветвленных парафиновых углеводородов. Они имеют высокое октановое число. Алкилирование в настоящее время является одним из направлений развития нефтепереработки, где за последние годы появилось наибольшее число новых технологий.

Оптимизация — это целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при наличии множества альтернативных при определенных условиях. Оптимизационной называется задача определения наилучших структуры или значений параметров объектов. Оптимальный результат, как правило, находится не сразу, а

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-37-60014).
Махмутова Диана, студент, УГНТУ (Уфа, Россия); Makhmutova Diana (Ufa State Petroleum Technical University)

Еникеева Лениза Васимовна, к.ф.-м.н., доцент кафедры ИТМ, УГНТУ (Уфа, Россия); Enikeeva Leniza (Ufa State Petroleum Technical University of Ufa, Russia)

в результате процесса, называемого процессом оптимизации. Применяемые в процессе оптимизации методы получили название методов оптимизации.

Под роевой оптимизацией понимается класс алгоритмов, направленных на решение сложных оптимизационных задач (дискретная оптимизация, многомерная оптимизация и многокритериальная оптимизация), работа которых основана на моделировании коллективного поведения различных колоний живых организмов. Системы роевого интеллекта представляют собой модели разнообразных типов коллективного поведения в колониях различных живых организмов — стаях птиц, косяках рыб, колониях муравьев и т. п. Для того, чтобы понять, как функционирует алгоритм метод роя частиц, можно рассмотреть область поиска в виде многомерного пространства с агентами нашего алгоритма. Изначально все агенты находятся в случайных местах пространства и со случайным вектором скорости. В каждой из точек, которую частица посещает, она рассчитывает заданную функцию и фиксирует наилучшее значение искомой функции. Так же все частицы знают местоположение наилучшего результата поиска во всём рое и с каждой итерацией агенты корректируют вектора своих скоростей и их направления, При этом постоянно происходит расчёт искомой функции и поиск наилучшего значения [2].

Генетический алгоритм (ГА) представляет собой эвристический алгоритм оптимизации, в основу которого положены биологические принципы естественного отбора и изменчивости. Процесс работы алгоритма представляет собой последовательную смену поколений, состоящих из фиксированного числа особей-точек пространства решений, причем особи с большим значением целевой функции (более приспособленные) получают больше потомков в каждом следующем поколении. Для работы ГА выбирают множество натуральных параметров оптимизационной проблемы и кодируют их в последовательность конечной длины в некотором алфавите. Они работают до тех пор, пока не будет выполнено заданное число генераций (итераций алгоритма) или на некоторой генерации будет получено решение определенного качества [3].

В данной работе для поиска параметров применяются перечисленные алгоритмы. На конференции будут представлены результаты численного моделирования.

Литература

1. Царева З. М., Орлова Е. А. Теоретические основы химтехнологии. Киев: Высшая школа, 1986.-271с.
2. J. Kennedy, R. C. Eberhart. Particle swarm optimization, Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, Piscataway, NJ, pp. 1942–1948,

1995.

3. *Beyer, Schwefe, Wegener, 2002* Beyer H.-G., Schwefel H.-P., Wegener I. How to analyse Evolutionary Algorithms. Technical Report No.CI-139/02. – University of Dortmund, Germany, 2002.

ОБЛАЧНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МОДЕЛИРОВАНИИ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

@ Э.Н. Мифтахов, С.А. Мустафина

promif@mail.ru

УДК 004.424, 678.7

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.92.

Рассматриваются основные сложности проведения вычислительных экспериментов средствами локальных ЭВМ и актуальность внедрения технологий облачных вычислений при описании расчетных модулей с целью моделирования физико-химических процессов.

Ключевые слова: моделирование, облачные технологии, вычисления, физическая химия.

Cloud technologies in modeling physical and chemical processes

The main difficulties of carrying out computational experiments by means of local computers and the relevance of the introduction of cloud computing technologies in the description of computational modules in order to simulate physical and chemical processes are considered.

Keywords: modeling, cloud computing, computing, physical chemistry.

Более 60 лет существует научное направление – математическое моделирование химических процессов и реакторов, методология которого была разработана в классических работах академика РАН Г.К. Борескова и члена-корреспондента РАН М.Г. Слинько. В основе этой методологии лежат знания кинетики химических реакций, применение которых позволяет создавать инструмент эмпирической оценки качества получаемого продукта. В настоящий момент разработка высокоэффективных технологий в химико-технологической отрасли предполагает создание инновационных методов, позволяющих не только проводить оценку качества получаемого продукта, но и решать задачи проектирования энергосберегающих химико-технологических процессов и систем с целью получения продуктов производства с заданными свойствами. В связи с этим большую актуальность приобретают моделирующие программы и алгоритмы, позволяющие не только оценивать технологические свойства

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027).

Мифтахов Эльдар Наилевич, к.ф.-м.н., БашГУ (Уфа, Россия); Eldar Miftakhov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Мустафина Светлана Анатольевна, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Svetlana Mustafina (Bashkir State University, Ufa, Russia)

продукции, но и служащие в качестве инструмента организации подбора оптимальных условий организации производства.

Системный подход в моделировании сложных химико-технологических процессов предполагает переход от отдельных реакторов к сложным системам, состоящих из множества аппаратов, и последовательное усложнение модельного описания системы по схеме кинетическое описание процесса – учет гидродинамических закономерностей при организации непрерывного производства – контроль качественных показателей получаемого продукта – управление технологическим процессом. Очевидно, что задача построения адекватной математической модели, способной в полной мере отражать показатели получаемого продукта, представляет собой итерационное решение прямых и обратных задач химической кинетики с применением различных математических подходов и методов. Постановка задач поиска оптимальных режимов ведения производства в этом случае потребует многократного решения прямой задачи и, как следствие, может привести к невозможности вычисления подобных задач в разумные сроки стандартными средствами организации вычислений.

Решение проблемы нехватки вычислительных ресурсов возможно за счет организации проведения всех вычислительных экспериментов средствами высокопроизводительного кластера. Необходимость регулярных ресурсоемких расчетов определяет актуальность разработки таких систем сетевой направленности, которые позволят в режиме единого окна предоставить доступ к вычислительным ресурсам высокопроизводительного кластера целому ряду пользователей. А сетевой подход с разделением логики хранения данных от вычислительной логики также позволит развить теорию хранения вычислительных и лабораторных экспериментов в едином информационном пространстве и сформировать ценный источник данных для глобального развития теории исследования физико-химических процессов.

Литература

1. *Подвальный С.Л.* Моделирование промышленных процессов полимеризации. — М.: Химия, 1979.
2. *Miftakhov E.N., Mustafina S.A., Mikhailova T.A., Podvalny S.L.* Development of a cloud SaaS service for a comprehensive research of polymerization processes // *Journal of Physics*, **1902**:1 (2021).
3. *Erl T., Mahmood Z., Puttini R.* Cloud Computing: Concepts, Technology & Architecture. — Prentice Hall, 2019.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВЫБРОСОВ АВТОТРАНСПОРТА В УЛИЧНОМ КАНЬОНЕ

@ А.В. Старченко, Е.А. Данилкин, Д.В. Лещинский
starch@math.tsu.ru, ugin@math.tsu.ru, 360flip182@gmail.com

УДК 519.6

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.93.

Представлены результаты численного моделирования качества атмосферного воздуха в уличном каньоне для различных условий солнечного нагрева ограничивающих турбулентный поток поверхностей, расположения источника выбросов и геометрических характеристик уличного каньона.

Ключевые слова: математическое моделирование, вычислительная гидродинамика, перенос примеси.

A numerical simulation of vehicle pollution distribution in a street canyon

The results of numerical modeling of the quality of atmospheric air in a street canyon for various solar heating conditions, limiting the turbulent flow of surfaces, the location of the emission source and the geometric characteristics of the street canyon are presented.

Keywords: mathematical modeling, computational fluid dynamics, impurity transport.

Рассматривается стационарное неизотермическое турбулентное движение воздуха над уличным каньоном, который представляет собой протяженный участок улицы с параллельно расположенными высокими зданиями с обеих ее сторон. По нижней границе уличного каньона интенсивно движется автотранспорт, выбрасывающий в атмосферу продукты сгорания углеводородного топлива. Высота зданий соизмерима с шириной улицы. Целью данного исследования является определение наиболее неблагоприятных условий (неравномерный солнечный нагрев стен зданий, расположение источника выбросов вблизи нижней границы каньона, соотношение высоты и ширины каньона), приводящих к ухудшению

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2021-1392).

Старченко Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, ТГУ (Томск, Россия); Alexander Starchenko (Tomsk State University, Tomsk, Russia)

Данилкин Евгений Александрович, к.ф.-м.н., доцент, ТГУ (Томск, Россия); Evgeniy Danilkin (Tomsk State University, Tomsk, Russia)

Лещинский Дмитрий Викторович, ассистент, ТГУ (Томск, Россия); Dmitriy Leshchinskiy (Tomsk State University, Tomsk, Russia)

качества воздуха в зоне дыхания (до 2 метров от нижней границы каньона) и росту максимальной концентрации примеси в области исследования. Математическая модель рассматриваемого процесса включает в себя осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса, неразрывности, энергии и переноса примеси [1]. Замыкание этой системы стационарных уравнений проводится с использованием градиентно-диффузионной гипотезы Буссинеска. Для вычисления турбулентной вязкости используется двухпараметрическая k - ϵ модель турбулентности, учитывающая влияние сил плавучести [2]. Для расчета значений скорости, турбулентных параметров, трения и теплового потока вблизи твердой поверхности используется метод пристеночных функций Лаундера-Сполдинга.

Дискретизация дифференциальной задачи выполнена методом конечного объема на структурированной декартовой сетке. Аппроксимация конвективных членов уравнений переноса выполняется с использованием противопотоковой схемы MLU Ван Лира. Аппроксимация диффузионных членов осуществляется с использованием центрально-разностной схемы второго порядка. Для согласования полей скорости и давления использовался метод Патанкара-Сполдинга SIMPLE. Разработана итерационная вычислительная процедура для согласования поля скорости и давления и последовательного решения систем сеточных уравнений – неявных дискретных аналогов адвективно-диффузионных уравнений нелинейной задачи на основе метода неполной факторизации Н.И. Булеева. Более подробное описание аппроксимации и численного метода решения на примере двумерной задачи представлено в работе [3].

Расчеты проводились при следующих значениях определяющих параметров: скорость горизонтального потока воздуха 1 м/с, температура – 20°C. Температура образующих уличного каньона принимала значения от 20 до 40°C. Высота зданий и ширина уличного каньона менялись в диапазоне от 10 до 40 м. Источник инертных выбросов автотранспорта располагался на высоте 0,3 м над нижней границей каньона в его середине, 1/4 и 3/4 от левой границы каньона.

Анализ полученных результатов показывает, что наиболее худшие условия для пешеходов образуются при нагреве наветренной стороны уличного каньона (максимальные концентрации в зоне дыхания увеличиваются с ростом перепада температур), в уличных каньонах, высота которого в несколько раз превышает его ширину, при смещении источника примеси к зданиям, образующим каньон (максимальные концентрации в зоне дыхания при размещении источника вблизи левой границы каньона).

Литература

1. *Старченко А.В., Нутерман Р.Б., Данилкин Е.А.* Численное моделирование турбулентных течений и переноса примеси в уличных каньонах — Томск: Изд. дом Томского гос. ун-та, 2015.
2. *Henkes R. A.W.M., Van Der Flugt F. F., Hoogendoorn C. J.* Natural Convection Flow in a Square Cavity Calculated with Low-Reynolds-Number Turbulence Models // *Int. J. Heat Mass Transfer*, **34** (1991), 1543-1557.
3. *Данилкин Е.А., Старченко А.В.* Моделирование распространения выбросов автомобильного транспорта в уличном каньоне // *Вычислительные технологии*, **25**:2 (2020), 4–21.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ В ТРЕЩИНЕ ГРП ПРИ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ РАБОТЫ СКВАЖИНЫ

@ Н.О. Фокеева, Р.А. Башмаков

ffoxnina@gmail.com, bashmakov_rustem@mail.ru

УДК 532.5

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.94.

В работе рассматривается фильтрация флюида к бесконечной трещине ГРП в однородном пласте при переходных режимах работы скважины, а так же взаимосвязь распределения давления и расхода.

Ключевые слова: переходный режим, расход, низкопроницаемый коллектор, гидроразрыв пласта, фильтрация флюида.

Pressure distribution in a hydraulic fracturing during transient well operation modes

The article discusses the fluid filtration to an infinite hydraulic fracture in a homogeneous formation during transient well operation modes and the relationship between pressure and flow rate.

Keywords: transient modes, rate, low-permeability reservoir, hydraulic fracturing, fluid filtration.

Гидроразрыв пласта (ГРП) — один из важнейших методов интенсификации добычи нефти из низкопроницаемых пластов. Определение параметров трещины, полученной путем гидроразрыва является актуальной в настоящее время задачей, когда значительная часть нефти добывается из низкопроницаемых пластов, либо обладает большой вязкостью.

По результатам многолетнего опыта применения метода ГРП написано обширное количество работ [1-2]. В случае низкопроницаемых пластов, жидкость в основном растекается по трещине, и из трещины перетекает в пласт, что можно описать системой дифференциальных уравнений (см. [3-6]). В работах [5–6] описание распределения давления в трещине сведено к одному интегро - дифференциальному уравнению и изучены вопросы об эволюции давления в окрестности трещины ГРП и динамике распределение давления в скважине и вертикальной трещине

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>

Фокеева Нина Олеговна, аспирант, ИМех УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Nina Fokeeva (Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Investigation Center, R.A.S., Russia)

Башмаков Рустэм Абдрауфович, к.ф.-м.н., БашГУ (Уфа, Россия); ИМех УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Rustem Bashmakov (Bashkir State University, Ufa, Russia; Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Investigation Center, R.A.S., Russia)

при поддержании постоянного расхода и постоянного давления на скважине [4-6].

Рассмотрим вертикальную закреплённую пропантом трещину, полученную путем гидроразрыва пласта. Пласт однородный, ширина трещины значительно меньше ее высоты $d_f \ll h_f$. Скелет пористой среды пласта и трещины несжимаемый, длина трещины бесконечная. Жидкость в пласте распространяется перпендикулярно ее направлению и далее по трещине течет к скважине. В силу симметрии рассматривается одно крыло трещины. Движение флюида в трещине квазиодномерное вдоль оси OX , так как от изменения глубины давление в пласте и трещине не меняется. Начало координат на стенке забойного участка. Ось OY перпендикулярна трещине. Отсчет идет от границы пласт – трещина. Система, описывающая распределение давления в трещине и пласте:

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \alpha_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + 2 \frac{m_p}{m_f} \frac{\alpha_p}{d_f} \left(\frac{\partial P_p}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}, \quad (0 < x < \infty)$$

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \alpha_p \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2}, \quad (0 < x < \infty, 0 < y < \infty)$$

где $\alpha_i = \frac{\rho_0 C^2 k_i}{\mu m_i}$ — коэффициенты пьезопроводности, $P_f = P_f(t, x)$, $P_p = P_p(t, x, y)$. Индексы $i = f, p$ соответствуют значениям параметров в трещине и пласте, окружающем трещину. Данные уравнения рассматривались в работах [3], [4], [6] при различных краевых условиях.

Пусть до момента τ_0 флюид в пласте находится в покое, а в момент времени τ_0 расход резко выходит на значение q_0 и поддерживается постоянным до момента времени τ_1 , когда он резко изменяется до величины q_1 и держится постоянным до момента τ_2 , и т. д.

Для перепада давления $\Delta P_{(w)}$ между значениями на забое скважины и пластом получим

$$\Delta P_{(w)} = \frac{-0.78\mu}{\sqrt{\frac{A_f}{2}} d_f k_f} \left(H(t - \tau_0) q_0 (t - \tau_0)^{\frac{1}{4}} + \sum_{i=1}^n H(t - \tau_i) (q_i - q_{i-1}) (t - \tau_i)^{\frac{1}{4}} \right)$$

Здесь $H(t)$ — функция Хевисайда.

Результаты работы могут быть применены для интерпретации результатов гидродинамических исследований скважин. Новизна статьи в изучении переменных режимов работы скважины, получены формулы для определения связи давления и расхода в трещине ГРП в зависимости от времени и расстояния до скважины. В настоящее время ведется

работа по сравнению результатов, полученных в работе с данными полевых испытаний.

Литература

1. *Экономидес М., Олини Р., Валько П.* Унифицированный дизайн гидро-разрыва пласта: от теории к практике // Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2007. — 237.
2. *Каневская Р.Д., Дзяшев И.Р., Некипелов Ю.В.* Применение гидравлического разрыва пласта для интенсификации добычи и повышения нефтеотдачи // Нефтяное хозяйство. 2002, № 5. — 96-101.
3. *Cinco-Ley H.* Evaluation of Hydraulic Fracturing by Transient Pressure Analysis Methods. — SPE 10043 Petrol. Exh. and Techn. Symp., Beijing China. Mar 18-26. 1982.
4. *Хабидуллин И.Л., Хисамов А.А.* Моделирование нестационарной фильтрации вокруг скважины с вертикальной трещиной гидроразрыва // Вестник Башкирского университета. 2017. Т. 22, № 2. — 309-314.
5. *Шагапов В.Ш., Нагаева З.М.* К теории фильтрационных волн давления в трещине, находящейся в пористой проницаемой среде. Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58, № 5 (345). — 121-130.
6. *Нагаева З.М., Шагапов В.Ш.* Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте. Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 81, № 3. — 319-329.

ЭВОЛЮЦИЯ ТРЕЩИНЫ РОМБИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

@ С.С. Хабиров

salavat.s.khabirov@gmail.com

УДК 517.958; 532.5

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.95.

Выводится модель эволюции трещины ромбического сечения. На основе представлений о размерах трещины и прискважинной зоны получены два начальных условия, условие на подвижной границе и два условия на скважине. Эволюция трещины описывается квазилинейным параболическим уравнением.

Ключевые слова: эволюция трещины, начальные условия, граничные условия, квазилинейные параболические уравнения.

Evolution of a rhombic section fracture

A model of the evolution of a fracture with a rhombic section is derived. Based on ideas about the size of the fracture and the near-wellbore zone, two initial conditions, a condition at the moving boundary and two conditions at the well were obtained. The fracture evolution is described by a quasilinear parabolic equation.

Keywords: fracture evolution, initial conditions, boundary conditions, quasilinear parabolic equations.

При закачивании жидкости из скважины радиуса r , через перфорацию в пласт, образуется первичный жидкий объем толщиной l_0 вокруг обсадной колонны. За время Δt интенсивной закачки масса жидкости из скважины поступает в первичный объем с толщиной

$$l_0 = \sqrt{\frac{2r\Delta t Q_0}{\rho} + r^2} - r, \quad (1)$$

где Q_0 – массовый расход в скважине в единицу времени через единицу площади, ρ – плотность жидкости.

Трещину в пласте представляем как беспоровый объем с малой шириной $2a(t, x)$, фиксированной высотой $2b$ ($a \ll b$) и меняющейся длиной $l(t)$ ($l(0) = l_0$). Обозначая границу начальной области развития трещины через $a^0(x)$, получим

$$a^0(x) = \sqrt{l_0^2 - x^2 + 2r(l_0 - x)}. \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10071 МК) и в рамках госзадания (№ 0246-2019-0052).

Хабиров Салават Салаватович, аспирант, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Salavat S Khabirov (Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia)

Краевую полуширину трещины на скважине обозначим через $a_0(t)$.

Контуром сечения трещины можно выбрать любую алгебраическую кривую второго порядка [1]. Самый простой вариант симметричного контура ограничен прямыми линиями. Тогда площадь сечения трещины S равна $2a_0(t)b$ при $x = 0$, $2a^0(x)b$ при $t = 0$, $2a(t, x)b$ при $x > 0, t > 0$. Тем самым определен симметричный ромб в сечении: $a(0, x) = a^0(x)$, $a(t, 0) = a_0(t)$.

Предполагаем, что в начальный момент деформация породы имеет вид одностороннего сжатия. По закону Гука деформация пропорциональна приложенному давлению, что, согласно [2], приводит к формуле

$$a_0(t) = r \sqrt{\left(\frac{P_{net}}{E'} + 1\right)^2 - 1}, \quad (3)$$

где $E' = E(1 - \nu)(1 + \nu)^{-1}(1 - 2\nu)^{-1}$, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $P_{net}(t) = p_0(t) - \Sigma_0$ – избыточное давление жидкости при $x = 0$, $p_0(t)$ – давление жидкости в скважине при $x = 0$, Σ_0 – полное горизонтальное напряжение породы.

Используя решение краевой задачи о движении вязкой жидкости в трещине в квазистационарном случае из [1], получим второе условие на границе

$$a_x(t, 0) = [a_0(t)b(A_1 a_0(t) + A_2 b) - 6Q_0] \frac{a_0^2(t) + b^2}{a_0^3(t)b^3} \frac{2\nu(1 - \nu^2)b\rho}{E}, \quad (4)$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные.

На двигающемся конце трещины $l(t)$, используя соотношение на скачке течения $QS^{-1} - q = l'(1 - m)$ из [1], где q – величина скорости утечки жидкости гидроразрыва через берега трещины в породе, m – пористость породы, Q – расход жидкости в сечении скважины, получим краевое условие

$$l' = \frac{1}{1 - m} \left[\frac{1}{12} \left(A_1 a + A_2 b - \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \frac{E a_x}{2\nu(1 - \nu^2)b\rho} \right) - q \right]. \quad (5)$$

Из закона сохранения массы получено основное квазилинейное дифференциальное уравнение параболического типа

$$2ba_t + \frac{1}{6} \left(ab(A_1 a + A_2 b) - \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \frac{E a_x}{2\nu(1 - \nu^2)b\rho} \right)_x + 4q\sqrt{a^2 + b^2} = 0. \quad (6)$$

В качестве скорости фильтрации на границе используется автомодельный закон выведенный в работе [3]

$$q = \frac{C_2}{a} \left[1 - \exp \left(\sigma \left(p_\infty - p_0(t) - \frac{E}{2(1 - \nu^2)b} (a_x x + a) \right) \right) \right],$$

где $\sigma = 1/K_\rho + 1/K$, K_ρ , K – модули упругости, C_2 – эмпирический коэффициент, p_∞ – пластовое давление.

Итак, для уравнения (6) имеем начальные условия (1), (2) и краевое условие (5) на подвижной границе ($x = l(t)$) и два условия (3), (4) на границе $x = 0$. Из общей теории параболических уравнений существует решение, если коэффициенты уравнения не вырождаются ($a_0 \neq 0$), иначе возможны интервалы схлопывания или точки обострения [4].

Литература

1. Хабиров С.В., Хабиров С.С. Модели раскрытия трещины на основе точных решений уравнений Навье-Стокса // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 2. С. 169–179.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
3. Хабиров С.В., Хабиров С.С. Автомодельный упругий режим фильтрации через подвижную границу // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 1. С. 64–72.
4. Самарский А.А., Гоактчионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

© Л.Э.Хаймина, Л.И.Зеленина, Е.А.Деменкова, М.Е.Деменков,
Е.С.Хаймин, Д.Д.Хрипунов

l.khaimina@narfu.ru , *l.zelenina@narfu.ru* , *e.demenkova@narfu.ru*,
m.demenkov@narfu.ru , *e.khaymin@narfu.ru*, *khripunov.d@edu.narfu.ru*

УДК 519.2

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.96.

В статье рассматривается процесс моделирования временных рядов с учетом тренд-сезонных факторов, скрытых связей внутри данных, а также интегрированной модели авторегрессии. Представлены результаты проведенного исследования.

Ключевые слова: модель Хольта-Уинтерса, модель Тейла-Вейджа, модель Брауна, модель Бокса — Дженкинса, скрытая марковская модель.

Modeling and analysis of processes based on time series

The article discusses the process of modeling time series taking into account trend-seasonal factors, hidden relationships within the data, as well as an integrated autoregression model. The results of the conducted research are presented.

Keywords: Holt-Winters model, Body-Wage model, Brown model, Box — Jenkins model, hidden Markov model.

Прогнозирование на основе временных рядов производится посредством использования трендовых моделей, являющихся динамическими

Хаймина Людмила Эдуардовна, к.п.н., доцент, САФУ (Архангельск, Россия); Ludmila Naumina (Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russia)

Зеленина Лариса Ивановна, к.т.н., доцент, САФУ (Архангельск, Россия); Larisa Zelenina (Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russia)

Деменкова Екатерина Алексеевна, к.т.н., САФУ (Архангельск, Россия); Ekaterina Demenkova (Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russia)

Деменков Максим Евгеньевич, к.т.н., доцент, САФУ (Архангельск, Россия); Maxim Demenkov (Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russia)

Хаймин Евгений Сергеевич, ст.преп., САФУ (Архангельск, Россия); Evgeniy Naumin (Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russia)

Хрипунов Даниил Дмитриевич, магистрант, САФУ (Архангельск, Россия); Daniil Hripunov (Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russia)

моделями, в которых развитие моделируемой системы отражается через тренд ее основных показателей [1,2]. При этом если выбранный временной ряд содержит квартальную статистику, а это значит присутствует зависимость сезонного характера, то возможно использование таких адаптивных моделей, как модели Брауна, Хольта-Уинтерса и Тейла-Вейджа. Модели Хольта-Уинтерса и Тейла-Вейджа учитывают тренд-сезонный фактор, модель Брауна является простой моделью, не учитывающей другие факторы. Остановимся на одной из них более подробно. Модель Хольта-Уинтерса:

$$y_{th} = (a_{0(t)} + \tau a_{1(t)})F_{t-l+\tau}, \quad (1)$$

где l – значение цикла сезонности, принимается $l=4$ при построении моделей по квартальной статистике и $l=1$ для годовой статистики.

Параметры a_0 , a_1 оцениваются МНК, затем осуществляется корректировка по формулам

$$a_{0(t)} = \frac{\lambda_1 y_t}{F_{t-1}} + (1 - \lambda_1)(a_{0(t-1)} + a_{1(t-1)}), \quad (2)$$

$$F_t = \frac{\lambda_2 y_t}{a_{0(t)}} + (1 - \lambda_2)F_{t-1}, \quad (3)$$

$$a_{1(t)} = \lambda_3(a_{0(t)} - a_{0(t-1)}) + (1 - \lambda_3)a_{1(t-1)}, \quad (4)$$

Для исследования нестационарных временных рядов широкое применение имеет интегрированная модель авторегрессии ARIMA (модель Бокса – Дженкинса) [3]:

$$\Delta^d X_t = c + \sum_{i=1}^p a_i \Delta^d X_{t-i} + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (5)$$

где ε_t – стационарный временной ряд; c , a_i , b_j – параметры модели; Δ^d – оператор разности временного ряда порядка d .

В процессе моделирования и прогнозирования финансовых временных рядов может быть использован метод скрытых марковских цепей. Данный алгоритм позволяет исследовать скрытые (ненаблюдаемые явно) связи внутри данных (по аналогии с нейронными сетями).

В исследовании в качестве исходных данных был выбран ряд, отображающий стоимость условного (минимального) набора продуктов питания по Архангельской области, включая Ненецкий автономный округ в рублях. Данные представлены за каждый месяц в период с 2002 по март 2021 год. Проверка временного ряда на стационарность на основе среднеквадратического отклонения и скользящего среднего показала

его нестационарность, поэтому было проведено дифференцирование ряда. Проведенная декомпозиция ряда на тренд и сезонные компоненты подтвердила наличие сезонности и тренда. Некоторые результаты проведенного исследования представлены ниже.



Рис. 2: Построенные модели Брауна и Хольта-Уинтерса

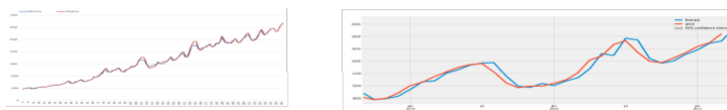


Рис. 3: Модели Тейла-Вейджа и ARIMA

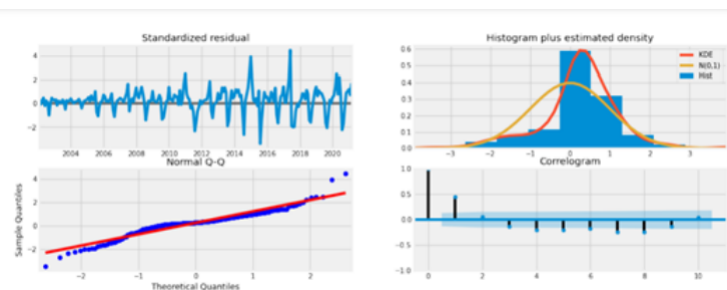


Рис. 4: Результаты обучения (скрытая марковская модель)

Проведенная проверка построенных моделей на точность и адекватность позволила определить модель для прогнозирования исследуемого показателя.

Литература

1. *Афанасьев, В. Н.* Анализ временных рядов и прогнозирование / В.Н. Афанасьев, М.М. Юзбашев. - М.: Финансы и статистика, Инфра-М, 2015. - 320 с.

2. *Бокс, Дж.* Анализ временных рядов прогноз и управление. Выпуск 1 / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. - М.: Мир, 2017. - 408 с.

3. *Бриллинджер, Д.* Временные ряды. Обработка данных и теория / Д. Бриллинджер. - М.: [не указано], 2015. - 420 с.

3. *Тимофеев Д.А., Самочадин А.В.* Описание процессов разработки программ с помощью скрытых марковских моделей // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2017. Т. 10. № 4. С. 70–77. DOI: 10.18721/JCSTCS.10406

К ПРИМЕНЕНИЮ ГИБРИДНОГО ПОДХОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СПЕКТРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

@ А.Д. Ханазарян, А.Н. Шпак, М.В. Голуб
artur97.10@mail.ru

УДК 539.3

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.97.

Рассматривается приложение метода спектральных элементов для решения динамических задач теории упругости. Решается антиплоская задача для составной области, результаты расчетов сравниваются с известными методами.

Ключевые слова: слоистый волновод, метод спектральных элементов

On the application of a hybrid approach for solving dynamic problems of elasticity theory based on the spectral element method

The application of the spectral element method for elastic dynamic problems is considered. The antiplane problem for a composite domain is solved, the calculation results are compared with known methods.

Keywords: layered waveguide, spectral element method.

Как правило, конечноэлементные пакеты (например, COMSOL Multiphysics), основанные на методе конечных элементов, позволяют строить решение для протяженных волноводов с неоднородностями сложных форм, но не позволяют проводить модальный анализ решений [1]. Основной мотивацией данной работы является развитие подходов на основе метода спектральных элементов (МСЭ) [2] для решения динамических задач теории упругости в случае слоистых волноводов с неоднородностями. При этом МСЭ используется не только для описания поведения областей сложной формы, но и для моделирования распространения волн в протяженных волноводах [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (грант № МК-470.2020.1).

Ханазарян Артур Дереникович, асп., Кубанский государственный университет (Краснодар, Россия); Artur Khanazaryan (Kuban State University, Krasnodar, Russia)

Шпак Алиса Николаевна, к.ф.-м.н., науч. сотр., Кубанский государственный университет (Краснодар, Россия); Alisa Shpak (Kuban State University, Krasnodar, Russia)

Голуб Михаил Владимирович, д.ф.-м.н., зав. каф., Кубанский государственный университет (Краснодар, Россия); Mikhail Golub (Kuban State University, Krasnodar, Russia)

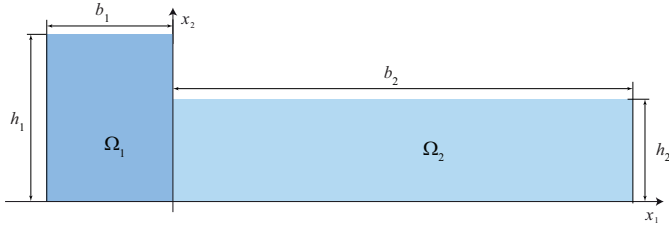


Рис. 5: Геометрия задачи для составной области.

В данной работе рассматривается антиплоская задача для составной области $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset R^2$, см. рис. 1. В этом случае колебания каждой области Ω_j описываются уравнениями Гельмгольца

$$\nabla^2 u_j(x_1, x_2) + \kappa_j^2 u_j(x_1, x_2) = 0.$$

Для первой области $\Omega_1 = [-b_1, 0] \times [0, h_1]$ решение уравнения Гельмгольца отыскивается численно с использованием МСЭ в виде разложения по базисным функциям, а именно, используя интерполяционные полиномы на узлах Гаусса–Лежандра–Лобатто

$$u_1(x_1, x_2) = \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_{i_1 i_2}^{l_1 l_2} C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}) = \sum_I u^I C^{i_1}(\xi_1^{l_1}) C^{i_2}(\xi_2^{l_2}).$$

Для второй области $\Omega_2 = [0, b_2] \times [0, h_2]$ решение отыскивается полуаналитически в виде

$$u_2(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^G c_n^m U(\alpha, x_2, \overline{\beta^n}) e^{(-1)^m i \sqrt{\lambda_n} (b_m - x_1)}.$$

Неизвестные $U(\alpha, x_2, \overline{\beta^n})$, λ_n и $\overline{\beta^n}$ находятся из решения вспомогательной задачи также с использованием МСЭ, где $U(\alpha, x_2, \overline{\beta^n})$ является преобразованием Фурье исходного уравнения по горизонтальной координате, а λ_n и $\overline{\beta^n}$ собственные значения и собственные вектора соответственно. Коэффициенты разложения c_n^m отыскиваются с помощью проекционно-го метода Бубнова–Галёркина.

Для удобства вводится вектор нагрузки $\boldsymbol{\tau} = \{\sigma_{12}, \sigma_{22}\}$, состоящий из касательных и нормальных напряжений. На общей для двух областей границе $\Omega_1 \cup \Omega_2$ задаются условия на непрерывность перемещений и напряжений:

$$[\mathbf{u}(0, x_2)] = 0, \quad [\boldsymbol{\tau}(0, x_2)] = 0,$$

здесь квадратные скобки $[f]$ означают скачок заданной функции f . Также на границе двух областей вводится функция \mathbf{q} и задаются условия на напряжения:

$$\mathbf{q}(x_2) = \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_2=1}^{N+1} q_{i_2}^{l_2} C^{i_2}(\xi_2^{l_2}), \quad \tau(0, x_2) = \mathbf{q}(x_2).$$

Неизвестные коэффициенты разложения функции $\mathbf{q}(x_2)$ находятся на основе метода коллокаций. Проверяется выполнение граничных условий. Результаты расчетов сравниваются с известными методами.

Литература

1. *Golub M. V., Shpak A. N.* Semi-analytical hybrid approach for the simulation of layered waveguide with a partially debonded piezoelectric structure // *Applied Mathematical Modelling*, **65** (2019), 234-255.
2. *Komatitsch D., Vilotte J.P., Vai R., Castillo-Covarrubias J.M., Sanchez-Sesma F.J.* The spectral element method for elastic wave equations application to 2-D and 3-D seismic problems // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **45:9** (2019), 1139-1164.
3. *Kalkowski M.K., Rustighi E., Waters T.P.* Modelling piezoelectric excitation in waveguides using the semi-analytical finite element method // *Computers & Structures*, **173** (2016), 174-186.

ДИАГНОСТИКА ПОВРЕЖДЕННЫХ УЧАСТКОВ ТРУБОПРОВОДОВ ВОЛНОВЫМ ЗОНДИРОВАНИЕМ

@ В.Ш.Шагапов, Э.В.Галиакбарова, З.Р.Хакимова

Shagapov@rambler.ru, emi.galiakbar@yandex.ru, zulfya.hakimova@yandex.ru

УДК 532/529.534.2

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.98.

Для обнаружения повреждений при транспорте углеводородных жидкостей или газов предложено создавать зондирующий импульс давления во флюиде, заполняющем трубопровод. Построена теоретическая модель распространения импульса конечной длительности по трубопроводу с повреждениями типа коррозионных прожвальных, трещин и пробоев, пробок. Рассмотрены случаи наземного и подземного расположения трубопроводов. Получены системы интегро-дифференциальных уравнений. Исследованы дисперсионные уравнения, коэффициенты отражения и прохождения в зависимости от типа повреждения. Изучена динамика импульсов в трубопроводе с поврежденными участками на основе быстрого преобразования Фурье.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, гармоническая волна, быстрое преобразование Фурье.

Diagnostics of damaged pipeline sections by wave probing

To detect damage in pipelines during the transport of hydrocarbon liquids or gases, it is proposed to create a probing pressure pulse in the fluid filling the channel. A theoretical model of the propagation of pulses of finite duration through a pipeline with damages such as corrosive rusting, cracks and holes, plugs has been built. Cases of above-ground and underground location of pipelines are considered. Systems of integro-differential equations are obtained. Dispersion equations, reflection and transmission coefficients are derived depending on the type of damage. The dynamics of impulses in a pipeline with damaged sections was studied based on the fast Fourier transform.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207, <https://rscf.ru/project/21-11-00207/>

Шагапов Владислав Шайхулагзамович, д.ф.-м.н., профессор, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Vladislav Shagapov (Mavlutov Institute of Mechanics, Investigation Center, R.A.S., Ufa, Russia)

Галиакбарова Эмилия Вильевна, к.ф.-м.н., доцент, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, УГНТУ (Уфа, Россия); Emiliya Galiakbarova (Mavlutov Institute of Mechanics, Investigation Center, R.A.S., Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

Хакимова Зульфия Разифовна, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, УГНТУ (Уфа, Россия); Zulfya Khakimova (Mavlutov Institute of Mechanics, Investigation Center, R.A.S., Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

Keywords: integro-differential equations, harmonic wave, fast Fourier transform.

Рассматривается трубчатый канал (трубопровод), заполненный газом или жидкостью, содержащий поврежденный участок протяженностью l_δ в виде щелей, трещин, пробоин или пробок. На конце трубопровода, радиуса a создается сканирующий импульс давления длительностью l_δ и длиной волны λ . Приняты допущения [1]: $\lambda \gg l_\delta, \lambda > 2a$, ($\lambda = 2\pi C/\omega$, — скорость звука в среде). Повреждения рассматриваются отражающей поверхностью, возмущения давления и скорости — функции одной пространственной координаты z и времени t ; ось Oz направлена по оси симметрии трубопровода, начало отсчета ($z = 0$) совпадает с поврежденным участком; расстояние до повреждения равно l .

Импульсный сигнал при распространении по трубопроводу затухает. Принята модель [2], в которой вязкость и теплопроводность флюида проявляются в тонком слое вблизи внутренней поверхности стенки трубопровода ($a \gg 2\sqrt{\nu^{(j)}/\omega}, j = T, \nu$, где $\nu^{(j)}, j = T, \nu$ — коэффициент температуропроводности и кинематической вязкости газа или жидкости).

Решение ищется в виде затухающих гармонических волн.

В работах [2-5] получены дисперсионные уравнения, которые проанализированы для различных газов, жидкостей, заполняющих канал, характеристик канала, выведены коэффициенты отражения и прохождения в зависимости от типа повреждения. Динамика импульсного сигнала конечной длительности изучалась с помощью быстрого преобразования Фурье [6-7]. Теоретические построения положены в основу патента на изобретение [8].

Литература

1. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: — Наука, 1973. 496 с.
2. *Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р.* К теории акустического сканирования трубопроводов с поврежденными участками // Труды института механики им. Р.Р. Мавлютова. Электронный журнал теоретической механики. 2016. Т. 11, №2. С. 180-188.
3. *Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р.* К теории акустического зондирования трубчатых каналов, содержащих участки с нарушением герметичности// Инженерно физический журнал. 2018. Т. 91. № 3, С. 709-719.
4. *Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хусаинов И.Г., Хакимова З.Р.* Акустическое сканирование поврежденных трубопроводов, находящихся в грунте// Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59. № 4. С. 169-178.
5. *Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р.* Динамика импульсных сигналов в трубопроводе, заполненном метано-парокапельной смесью и

подверженной газогидратным отложениям// Инженерно- физический журнал. 2021. Т. 94. № 3. С. 698 –706.

6. *Ефимов В. А.* Математический анализ (специальные разделы), ч. I, М: Высшая школа. 1980. 279 с.

7. *Губайдуллин А. А., Болдырева О. Ю.* Компьютерное моделирование волновых процессов в пористых средах// Вестник кибернетики. 2016. № 2(22). С. 103–111.

8. *Галиакбаров В. Ф., Галиакбарова Э. В., Ковшов В. Д., Аминев Ф. М., Хакимова З. Р.* Система контроля состояния трубопровода. Пат. 2606719 С1 РФ, F17D5/00, опубл. 10.01.2017, Бюл. № 1.

О ПРИЧИНАХ ПОТЕРИ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КОМПОЗИТНОЙ БАЛКИ ПРИ ТРЕХТОЧЕЧНОМ ИЗГИБЕ

@ Ф.Р. Шакирзянов, Каюмов Р.А., Паймушин В.Н., Холмогоров
С.А.

faritbox@mail.ru, kayumov@rambler.ru, vpajmushin@mail.ru, hkazan@yandex.ru

УДК 539.3

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.99.

Приводятся результаты экспериментальных и численных исследований задача о трехточечном изгибе композитной балки. При численном анализе поведения балки, которое проводится в физически и геометрически нелинейной постановке, учитывается, что она изготовлена путем склеивания препрегов, уложенных вдоль оси образца. Для определения предельной нагрузки, при достижении которой происходит потеря прочности элементов образца, использован критерий Цая-Ву. Проведен сравнительный анализ поведения композитной балки при различных ее толщинах и различных диаметрах нагружающего ролика. Выявлено, что разрушение коротких балок происходит в результате потери прочности материала под нагружающим роликом (посередине), а в длинных происходит расслоение образцов по адгезионному слою, которое вызывается потерей устойчивости этого слоя по неклассической поперечно-сдвиговой форме. Показано, что диаметр ролика практически не влияет на величину предельной нагрузки, в то время как нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости несущего слоя, весьма чувствительна к изменению его величины. Выявлена хорошая корреляция численных результатов с данными, полученными в экспериментальных исследованиях рассматриваемых типов образцов.

Работа выполнена в рамках Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00349) и Российского научного фонда (проект № 19-19-00059).

Шакирзянов Фарид Рашитович, к.ф.-м.н., доцент, КазГАСУ (Казань, Россия); Farid Shakirzyanov (Kazan State State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia)

Каюмов Рашит Абдулхакович, д.ф.-м.н., профессор, КазГАСУ (Казань, Россия); Rashit Kayumov (Kazan State State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia)

Паймушин Виталий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, КНИТУ КАИ (Казань, Россия); Vitalii Pajmushin (Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev – KAI, Kazan, Russia)

Холмогоров Сергей Андреевич, к.ф.-м.н., ведущий инженер, КНИТУ КАИ (Казань, Россия); Sergei Kholmogorov Kayumov (Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev – KAI, Kazan, Russia)

Ключевые слова: композит, геометрическая нелинейность, физическая нелинейность, потеря устойчивости, прочность, адгезионный слой.

On the causes of the loss of the bearing capacity of a composite beam in three-point bending

The results of experimental and numerical studies of the problem of three-point bending of a composite beam are presented. In the numerical analysis of the behavior of the beam, which is carried out in a physically and geometrically nonlinear formulation, it is taken into account that it is made by gluing prepregs laid along the axis of the sample. To determine the ultimate load, upon reaching which there is a loss of strength of the sample elements, the Tsai-Wu criterion was used. A comparative analysis of the behavior of a composite beam for different thicknesses and different diameters of the loading roller is carried out. It was revealed that the destruction of short beams occurs as a result of the loss of strength of the material under the loading roller (in the middle), and in the long beams, the delamination of the samples along the adhesion layer occurs, which is caused by the loss of stability of this layer in a nonclassical shear shape. It is shown that the roller diameter has practically no effect on the value of the ultimate load, while the load at which the stability of the bearing layer is lost is very sensitive to a change in its value. A good correlation was found between the numerical results and the data obtained in experimental studies of the considered types of samples.

Keywords: composite, geometric nonlinearity, physical nonlinearity, buckling, strength, adhesive layer.

Литература

1. *Паймушин В.Н., Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., Холмогоров С.А.* О специфике работы композитного несущего слоя трёхслойной пластины при локальном нагружении. Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020; (4): 152-164.
2. *Паймушин В.Н., Холмогоров С.А.* Физико-механические характеристики волокнистого композита на основе углеродной ЭЛUR-II и связующего ХТ-118 // Механика композиционных материалов. – 2018. – Т. 54. – С. 5-20.
3. *Thomsen O.T.* Theoretical and experimental investigation local bending effects in sandwich plates // Composite Structures. – 1995. – Vol. 30 – pp. 85-101.
4. *Bonet J., Wood D.* Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis. – Cambridge University Press, 2008. – 318 p.

ПСЕВДОАДАМАРОВЫ МАТРИЦЫ

@ Р.А. Шарипов

r-sharipov@mail.ru

УДК 519.101

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.100.

В докладе даётся определение псевдоадамаровых матриц первого и последующих поколений. В случае псевдоадамаровых матриц первого поколения приводятся некоторые доказанные результаты о строении этих матриц и формулируются гипотезы, проверенные численным счётом до размера $m = 22$.

Ключевые слова: адамаровы матрицы, псевдоадамаровы матрицы.

Pseudo-Hadamard matrices

In the report pseudo-Hadamard matrices of the first and the further generations are defined. In the case of pseudo-Hadamard matrices of the first generation some proved results are given and some conjectures are formulated which are tested for the sizes up to $m = 22$.

Keywords: Hadamard matrices, pseudo-Hadamard matrices.

Стандартные матрицы Адамара определяются как целочисленные ортогональные матрицы $n \times n$ с элементами 1 и -1 (см. [1]). Имеется процедура преобразования таких матриц к матрицам с элементами 0 и 1 с понижением размера на единицу (см. [2]). Полученные матрицы называются адамаровыми матрицами в представлении $\{0, 1\}$. Класс таких матриц инвариантен относительно перестановок строк и столбцов в них. При помощи таких перестановок каждая адамарова матрица приводится к виду

$$H = \left\| \begin{array}{cccccc} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & & & & & \\ 0 & & \{0, 1\} & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array} \right\| . \quad (1)$$

Определение. Псевдоадамаровой матрицей первого поколения называется обведённый рамкой правый нижний диагональный блок в некоторой адамаровой матрице, приведённой к виду (1). Псевдоадамаровы

Шарипов Руслан Абдулович, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Ruslan Sharipov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

матрицы каждого следующего поколения получаются из матриц предыдущего поколения понижением размера при помощи процедуры, аналогичной (1).

Пусть $m = 4q - 2$, где $q \in \mathbb{N}$, и пусть $a = (m+2)/4 = q$, $b = (m+2)/2 = 2q$, $\tilde{a} = a - 1$, $\tilde{b} = b - 1$. Рассмотрим матрицу

$$G = \begin{pmatrix} \overbrace{\tilde{b} \ \dots \ \tilde{a}}^{2q-1} & \overbrace{a \ \dots \ a}^{2q-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a} & \dots & \tilde{b} & a & \dots & a \\ a & \dots & a & b & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & a & \dots & b \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Теорема 1. *Квадратная матрица $m \times m$ с элементами 0 и 1 является псевдоадмаровой матрицей первого поколения в том и только в том случае, когда $m = 4q - 2$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$ и когда её столбцы и её строки, рассматриваемые как вектора в \mathbb{R}^m , порождают матрицы Грама вида (2) с $a = (m+2)/4 = q$, $b = (m+2)/2 = 2q$, $\tilde{a} = a - 1$ и $\tilde{b} = b - 1$ относительно стандартного скалярного произведения в \mathbb{R}^m .*

Вероятно теорема 1 может быть усилена. Однако, соответствующее утверждение ещё не доказано и оно формулируется в виде гипотезы.

Гипотеза 1. *Пусть \tilde{H} — квадратная $m \times m$ матрица, где $m = 4q - 2$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$, с элементами 0 и 1, строки которой, рассматриваемые как вектора в \mathbb{R}^m , порождают матрицу Грама вида (2) с $a = (m+2)/4 = q$, $b = (m+2)/2 = 2q$, $\tilde{a} = a - 1$ и $\tilde{b} = b - 1$ относительно стандартного скалярного произведения в \mathbb{R}^m . Тогда матрица \tilde{H} совпадает с некоторой псевдоадмаровой матрицей первого поколения после некоторой перестановки её столбцов.*

Другая гипотеза, назовём её **гипотезой 2**, получается из гипотезы 1 путём замены в её формулировке строк на столбцы и столбцов на строки. В [3] гипотезы 1 и 2 были проверены и подтверждены численным счётом на псевдоадмаровых матрицах первого поколения размером до $m = 22$. Общее число матриц, для которых они проверены и подтверждены, превышает 31 тысячу.

Стандартные адмаровы матрицы связаны с проблемой Адамара о максимальности детерминанта матрицы с элементами 1 и -1 (см. [4] и [5]). Упрощённая версия этой проблемы предложена в [6]. Однако, как сама проблема Адамара, так и её упрощённая версия остаются нерешёнными математическими задачами.

Стандартные матрицы Адамара находят применение в криптографии. Такого же применения следует ожидать и для псевдоадамаровых матриц.

Литература

1. *Hadamard matrix* // Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
2. *Sharipov R.A.* Hadamard matrices in $\{0,1\}$ presentation and an algorithm for generating them // e-print arXiv:2105.01485 (2021).
3. *Sharipov R.A.* Pseudo-Hadamard matrices of the first generation and an algorithm for producing them // e-print arXiv:2105.08974 (2021).
4. *Hadamard's maximal determinant problem* // Wikipedia, Wikimedia Foundation Inc., San Francisco, USA.
5. *Hadamard J.* Résolution d'une question relative aux déterminants // Bulletin des Sciences Mathématiques, 1893, V. 17, P. 240–246.
6. *Sharipov R.A.* On a simplified version of Hadamard's maximal determinant problem // e-print arXiv:2104.01749 (2021).

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОКИСЛИТЕЛЬНОЙ РЕГЕНЕРАЦИИ КАТАЛИЗАТОРА

@ О.С. Язовцева, И.М. Губайдуллин, Е.Е. Пескова

kurinaos@gmail.com, irekmars@mail.ru, e.e.peskova@mail.ru

УДК 51-73

DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.101.

В докладе представлены математические модели окислительной регенерации, описанные нелинейными системами дифференциальных уравнений. Освещены основные проблемы, связанные с исследованием моделей. Приведены результаты качественного исследования устойчивости усредненной модели, результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: нелинейные модели, дифференциальные уравнения, химическая кинетика, жесткие системы.

Investigation of a mathematical model of oxidative catalyst regeneration

The report presents mathematical models of oxidative regeneration described by nonlinear systems of differential equations. There are the main problems associated with the investigation of models. The results of a qualitative study of the stability of the averaged model and the results of computational experiments are presented.

Keywords: nonlinear models, differential equations, chemical kinetics, stiff systems.

Настоящий доклад посвящен исследованию математических моделей окислительной регенерации. Актуальность темы обусловлена стратегически важной политикой вторичного использования материалов. Отработанный катализатор непригоден к дальнейшему использованию из-за коксовых отложений на его зернах, снижающих каталитическую активность [1]. Одним из методов восстановления эффективности катализатора является окислительная регенерация, т. е. выжиг кокса кислородсодержащим газом [2]. В работах [3, 4] показано, что при различных начальных условиях проведения подобного процесса возникают различные

Язовцева Ольга Сергеевна, к.ф.-м.н., доцент, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (Саранск, Россия); Olga Yazovtseva (National Research Mordovian State University, Saransk, Russia)

Губайдуллин Ирек Марсович, д.ф.-м.н., профессор, Уфимский государственный нефтяной технический университет (Уфа, Россия); Irek Gubaydullin (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

Пескова Елизавета Евгеньевна, к.ф.-м.н., доцент, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (Саранск, Россия); Elizaveta Peskova (National Research Mordovian State University, Saransk, Russia)

проблемы — от низкой эффективности метода до необратимой порчи катализатора. Безопасное и рентабельное исследование процесса возможно при помощи математического моделирования.

В общем случае математическая модель окислительной регенерации катализатора представляет собой нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений в частных производных [3]. Она учитывает материальный и тепловой балансы, теплообмен газа и слоя катализатора, экзотермический характер процесса окисления и прочие немаловажные аспекты. Наиболее эффективным методом исследования таких моделей является численный метод. Модель можно описать несколькими способами, например, в сферической или декартовой системе координат. Основной проблемой при этом остается жесткость системы, для искусственного снижения которой прибегают к обезразмериванию или масштабированию [5].

Одной из основных проблем, возникающих в ходе окислительной регенерации является образование «горячих пятен» [2-3]. Для исследования могут быть использованы методы теории устойчивости дифференциальных уравнений [6]. Этот этап допускает сведение модели к усредненному виду в обыкновенных дифференциальных уравнениях без потери общности [7]. Однако практические модели чаще всего обладают большим количеством фазовых переменных и технологических параметров, что затрудняет использование второго метода Ляпунова. Первый метод же неприменим ввиду наличия критического случая (множества нулевых собственных значений у матрицы линейного приближения). Возможным вариантом решения проблемы представляется использование метода асимптотической эквивалентности [8-10] или нахождение некоторого преобразования, не меняющего асимптотических свойств [11].

В докладе представлены визуализированные результаты вычислительных экспериментов для модели окислительной регенерации и теоретическое исследование устойчивости для усредненной нелинейной модели.

Литература

1. Хьюз Р. Деактивация катализаторов. М.: Химия, 1989. 280 с.
2. Масагутов Р.М., Морозов Б.Ф., Кутепов Б.И. Регенерация катализаторов в нефтепереработке и нефтехимии. М.: Химия, 1987. 144 с.
3. Губайдуллин И.М. Математическое моделирование динамических режимов окислительной регенерации катализаторов в аппаратах с неподвижным слоем: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / Институт Нефтехимии и катализа АН РБ. Уфа, 1996. 109 с.
4. Буянов Р.А. Закоксование и регенерация катализаторов дегидрирования при получении мономеров. Новосибирск: Наука, 1968. 64 с.

5. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.

6. Губайдуллин И.М. Устойчивость зон высокой температуры в неподвижном слое катализатора // Тез. докл. II Всесоюз. конф. молодых ученых по физхимии. М., 1983. С. 232–233.

7. Губайдуллин И.М., Язовцева О.С. Исследование усредненной модели окислительной регенерации закоксованного катализатора // Компьютерные исследования и моделирование, 2021, т. 13, № 1, с. 149–161.

8. Воскресенский Е.В. Асимптотические методы: теория и приложения. Саранск: СВМО, 2000. 300 с.

9. Шаманаев П.А., Язовцева О.С. Достаточные условия полиустойчивости по части переменных нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 3. С. 304–317.

10. Язовцева О.С., Мамедова Т.Ф., Губайдуллин И.М. Исследование устойчивости некоторого решения системы кинетических уравнений химической реакции // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 4. С. 152–158.

11. Yazovtseva O.S., Gubaydullin I.M. Investigation of stability of an averaged catalyst oxidative regeneration model // Mathematical physics, Dynamical systems and Infinite-dimensional analysis. Moscow, 2021. Pp. 208-209.

МНОГОМАСШТАБНЫЙ ПОДХОД ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ ФЛЮИДОВ В УСТАНОВКАХ ПО ПЕРЕРАБОТКЕ ОРГАНИЧЕСКИХ ТОПЛИВ

@ В.О. Подрыга, С.В. Поляков, М.А. Трапезникова,
Н.Г. Чурбанова
pvictoria@list.ru

УДК 519.6 DOI: 10.33184/mnkuomsh2t-2021-10-06.102

Рассматривается проблема моделирования многофазных течений жидкости и газа в пористой среде, возникающая в технологии очистки природных углеводородов от вредных примесей. Предложен многомасштабный подход для расчета подобных течений, предполагающий разделение модели по пространственно-временным масштабам и физическим процессам. Макроскопические компоненты модели реализуются сеточными методами, микроскопические модели используют методы частиц. Подход ориентирован на использование высокопроизводительных вычислительных систем. На данном этапе исследования проведено согласование всех компонент многомасштабной модели.

Ключевые слова: математическое моделирование, многомасштабный подход, многофазные течения, переработка органических топлив, очистка природного газа

Multiscale approach for modeling multiphase fluid flows in installations for reprocessing organic fuels

The problem of modeling multiphase flows of liquid and gas in a porous medium, which arises in the technology of purification of natural hydrocarbons from harmful impurities, is considered. A multiscale approach is proposed for calculating such flows, which assumes the separation of the model by space-time scales and physical processes. Macroscopic components of the model are implemented with mesh

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-71-20054).

Подрыга Виктория Олеговна, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия); Viktoriia Podryga (Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia)

Поляков Сергей Владимирович, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия); Sergey Polyakov (Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia)

Трапезникова Марина Александровна, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия); Marina Trapeznikova (Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia)

Чурбанова Наталья Геннадьевна, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия); Natalia Churbanova (Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia)

methods, microscopic models use particle methods. The approach is focused on the use of HPC systems. At this stage of the study, the coordination of all components of the multiscale model has been carried out.

Keywords: mathematical modeling, multiscale approach, multiphase flows, reprocessing of organic fuels, purification of natural gas

Работа посвящена разработке многомасштабных подходов [1-3] для моделирования многофазных течений жидких и газообразных углеводородов в установках по переработке органических топлив. Одним из важных этапов такой переработки является очистка сырой нефти или природного газа от различного рода загрязнений (металлических частиц, твердых органических соединений и др.). Для моделирования процессов очистки нами предложены многоуровневые математические модели, сочетающие макроскопические и микроскопические описания течений многофазных флюидов в канале очистной системы. В данной работе речь идет об очистке природного газа путем пропусканием его через пористый материал.

Общая математическая модель течения загрязненной газовой смеси состоит из двух основных компонент. Первая компонента связана с макроскопическими масштабами очистной системы и включает модифицированные квазигазодинамические (КГД) уравнения [4-5] для смеси газов, дополненные уравнениями конвекции-диффузии для концентраций частиц твердых примесей. Вторая компонента модели описывает процессы в пограничных слоях и базируется на уравнениях молекулярной динамики (МД) [6]. Целью работы являлась физически обоснованная реализация сопряжения компонент модели.

На макроскопическом масштабе использована модель расчета неизотермического течения многофазной слабосжимаемой жидкости через пористую среду, являющаяся аналогом системы КГД уравнений [4-5], записанная в гиперболической форме [7-8]. Требования консервативности требуют учета в модели многокомпонентного состава флюидов. Законы сохранения в предложенной формулировке модели выполняются покомпонентно и для каждой фазы. Уравнение баланса массы включает в себя регуляризирующий член и производную по времени второго порядка с малыми параметрами, имеющими смысл минимальных эталонных масштабов в пространстве и во времени. Уравнение аппроксимируется трехуровневой явной разностной схемой со вторым порядком аппроксимации во времени и в пространстве и с довольно мягким условием устойчивости. Модель включает в себя одно уравнение сохранения полной энергии, измененное по аналогии с КГД уравнениями и аппроксимированное явной схемой. Фазовые плотности, а также вязкости зависят от

многокомпонентного состава. Константы фазового равновесия указаны для всех компонентов, которые должны быть конденсированы. Модель учитывает гравитационные и капиллярные силы, включает сильно нелинейные функции относительной фазовой проницаемости.

Для численной реализации макроскопической модели был разработан алгоритм явного типа. Проверка чистой макроскопической модели (без уравнений конвекции-диффузии и без МД) была проведена с помощью широкого спектра тестовых прогнозов извлечения углеводородов, проникновения загрязняющих веществ в почву, потоков с фазовыми переходами в технологических объектах. Получены физически корректные результаты, хорошее согласие с результатами других авторов [9-10] было достигнуто. Была продемонстрирована высокая эффективность распараллеливания на CPU ядрах и на графических процессорах гибридного суперкомпьютера.

На микроскопическом масштабе в качестве модели используется метод молекулярной динамики [6]. Эволюция исследуемой системы микрочастиц описывается уравнениями Ньютона. МД описывает взаимодействия частиц с ограничивающими среду поверхностями, в том числе проникновение в поры, процессы в самих порах и в их пограничных слоях. Для интегрирования уравнений используется схема Верле, которая позволяет статистически правильно воспроизводить поведение частиц среды в течение большого промежутка времени.

Проведенные предварительные численные эксперименты позволили определить параметры согласования компонент модели и подтвердили возможность ее применения к выбранному классу задач. Представленную модель планируется в будущем расширять на случай многокомпонентных течений, содержащих твердые, жидкие и газообразные фазы.

Литература

1. Polyakov S.V., Podryga V.O., Puzyrkov D.V. *High performance computing in multiscale problems of gas dynamics* // LJM, **39:9** (2018), 1239-1249.
2. Podryga V.O., Polyakov S.V. *Multiscale mathematical modeling of the metal nanoparticles motion in a gas flow* // LNCS, **11386** (2019), 387-394
3. Подрыга В.О. *Многомасштабный подход к трехмерному расчету течений газов и их смесей в микроканалах технических систем* // ДАН, **469:6** (2016), 656-658.
4. Chetverushkin B.N. *Kinetic Schemes and Quasi-Gas Dynamic System of Equations*. — Barcelona: CIMNE, 2008.
5. Elizarova T.G. *Quasi-Gas Dynamic Equations*. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.
6. Rapaport D.C. *The Art of Molecular Dynamics Simulations. Second Edition*. — Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
7. Chetverushkin B., Churbanova N., Kuleshov A., Lyupa A., Trapeznikova M.

Application of kinetic approach to porous medium flows simulation in environmental hydrology problems on high-performance computing systems // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 31:4 (2016), 187-196.

8. Trapeznikova M., Churbanova N., Lyupa A. *CMMSE 2019: an explicit algorithm for the simulation of non-isothermal multiphase multicomponent flow in a porous medium // J. Math. Chem., 58:3 (2020), 595-611.*

9. Pinder G.F., Gray W.G. *Essentials of Multiphase Flow and Transport in Porous Media. — John Wiley&Sons, 2008.*

10. Class H., Helmig R., Bastian P. *Numerical simulation of non-isothermal multiphase multicomponent processes in porous media // Adv. Water Resour., 25 (2002), 533-550.*

Авторский указатель

- Alfimov G.L., 18
Ashimov Ye., 147
Azamatov A.SH., 28
- Babadjanov O.K., 28
Babajanov B.A., 28
- Старченко А.В., 239
- Djaghout M., 40
- Klevtsova Yu.Yu., 49
- Litvinov V.L., 224
Litvinova V.K., 224
- Slobodyanyuk A.O., 18
- Zezyulin D.A., 18
- Абдурагимов Г.Э., 6
Абушахмина Г.Р., 8
Агзамова М.Р., 141
Акимов А.А., 128
Акманова С.В., 10
Александрова А.А., 132
Алланазарова Т.Ж., 13
Антипин А.Ф., 135
Антипина Е.В., 135
Аптуков В.Н., 138
Аптыкаева Д.И., 183
Арабов М.К., 20
Арефьев И.А., 141
Асхабов С.Н., 23
Ахмедов Дж.Т., 25
Ахметзянова Л.У., 144
- Бабенко М.Г., 148, 172
Байбаков В.С., 151
Башмаков Р.А., 153, 242
Белова А.С., 31
Бельман С.А., 221
Беляева Ю.О., 97
- Бердникова М.Л., 151, 232
Бигаева Л.А., 215
Бобренёва Ю.О., 156
Борздыко В.И., 33
Бострем И.Г., 36
- Варманаев Р.П., 159
Великанов П.Г., 161
Викторов С.В., 209
Вильданова В.Ф., 38
Воситова Д. А., 125
- Габдрахманова Н.Т., 164
Гайдамак О.Г., 167
Гайнетдинова А.А., 46
Галиакбарова Э.В., 255
Гебхард Б., 97
Гизатуллин Р.Р., 170
Гладков А.В., 172
Голуб М.В., 252
Гомзяков Б.И., 138
Губайдуллин И.М., 144, 156, 175, 206,
263
- Давлеткулов Т.М., 144
Данилкин Е.А., 239
Данияров С.М., 106
Деменков М.Е., 248
Деменкова Е.А., 248
Джумаев Э.Х., 118
Дубинец О.В., 175
Дубовцев Д.А., 177
Дышаев М.М., 179
- Екомасов Е.Г., 36
Еникеев Д.Г., 181
Еникеева Л.В., 141, 175, 177, 234
Есмаханова К., 42
Ефимов А.М., 183
- Жибер А.В., 44
- Загидуллин Ш.Г., 185

- Зайнуллин Р.Г., 187
 Зеленина Л.И., 248
- Ибрагимов Р.К., 56
 Искандаров А.У., 13
 Исмагилов Р.Ф., 190
 Исхакова Р.В., 46
- Каменских А.А., 193, 196, 218
 Канкенова А.М., 71
 Кашникова А.П., 51
 Каюмов А.Б., 203
 Каюмов Р.А., 199, 201, 258
 Каюмов Ш., 203
 Кожевникова Л.М., 51
 Коледин С.Н., 206
 Коледина К.Ф., 132, 185, 206
 Кризский В.Н., 209
 Кузнецова М.Н., 44
 Куликов И.М., 214
 Кучеров Н.Н., 148
 Кучеров Н.Н., 172
 Кучкарова А.Н., 54
 Кучкарова Л.А., 54
- Латыпов И.И., 215
 Лесникова Ю.И., 218
 Лещинский Д.В., 239
 Лискина Е.Ю., 221
 Лубышев Ф.В., 226
 Лунтовская Я.А., 209
 Луценко В.И., 167
- Малькова Я.Ю., 229
 Мамалимов П.Р., 232
 Марданов А.П., 203
 Матановская Т.В., 138
 Махмутова Д.Ф., 234
 Миратов С.К., 90
 Мифтахов Э.Н., 237
 Муминов У.Б., 56, 106
 Муравник А.Б., 61
 Мургазина Р.Д., 88
 Мустафина С.А., 135, 181, 237
 Мустафина С.И., 128
 Мухамадиев Э., 63, 66
- Мухамедова И.З., 199
 Мухтаров Я., 114
 Мырзакулов Р., 42
 Мырзакулова Ж., 42
- Набиева М.Ш., 125
 Назимов А.Б., 63
 Наимов А.Н., 66
 Насыров Ф.С., 69
 Носов Ю.О., 193
 Нугманова Г.Н., 71
 Нуров И.Дж., 25
- Овчинников А.С., 36
 Орехова Е.Н., 138
- Павленко В.Н., 73
 Паймушин В.Н., 258
 Панькова А.П., 196
 Пашенко М.М., 218
 Пескова Е.Е., 263
 Петросян Г.Г., 76
 Пещеренко С.Н., 170
 Пильгун М.А., 164
 Пиров Р., 79, 82
 Плеханова М.В., 120
 Потапов Д.К., 73
- Рассадин А.Э., 85
 Рахимзода Ф.Ш., 82
- Сагидуллаева Ж.М., 71
 Сагитова А.Р., 167
 Садриева Р.Т., 88
 Сафаров Д.С., 90
 Сергеев А.Г., 93
 Сидельникова Н.А., 88
 Синельщиков Д.И., 94
 Синицын В.Е., 36
 Сипайло П.А., 96
 Скубачевский А.Л., 97
 Солонуха О.В., 99
 Сорока М. С., 76
 Струкова В.И., 196
 Сулейманов Б.И., 101

Труфанов А.Н., 218

Узьянбаев Р.М., 156

Файрузов М.Э., 226

Фаминский А.В., 102

Федоров В.Е., 179

Фокеева Н.О., 242

Хабилов С.С., 245

Хаймин Е.С., 248

Хаймина Л.Э., 248

Хакимова А.Р., 104

Хакимова З.Р., 255

Халитова Д.М., 161

Хамидуллина З.А., 190

Ханазарян А.Д., 252

Хасанов А.Б., 106, 111

Хасанов Т.Г., 13

Хисаметдинова Г.К., 159

Хоитметов У.А., 111

Холмогоров С.А., 258

Хрипунов Д.Д., 248

Худайбердиева С.Р., 114

Чудинов В.В., 215

Шавлуков А.М., 116

Шагапов В.Ш., 255

Шакирзянов Ф.Р., 258

Шамматова А.А., 153

Шарипов Б., 118

Шарипов Р.А., 260

Шпак А.Н., 252

Шуклина А.Ф., 120

Эгамов А.И., 122

Эргашбоев Т., 125

Язовцева О.С., 263

Научное издание

**УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2021**

**МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ
НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ**

Том 2

В авторской редакции

Подписано в печать 29.09.2021 г. Формат 60x84/16.

Печать: цифровая. Гарнитура: Times New Roman

Усл. печ. л. 15,81. Тираж 100. Заказ 1491.



Отпечатано в редакционно-издательском отделе

НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА «АЭТЕРНА»

450076, г. Уфа, ул. М. Гафури 27/2

<https://aeterna-ufa.ru>

info@aeterna-ufa.ru

+7 (347) 266 60 68