

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ УФИЦ РАН

**МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ
НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2023»**

Том 1

г. Уфа, 4 октября – 8 октября 2023 г.



СЕКЦИИ:

«СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ»

«КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

«НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Уфа
Аэтерна
2023

УДК 517
ББК 22.1
У 88

Мероприятие проводится при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа.

Печатается по решению Ученого совета института информатики, математики и робототехники Уфимского университета науки и технологий.

Редакционная коллегия:

д.ф.-м.н. **З.Ю. Фазуллин** (отв. редактор);

д.ф.-м.н. **М.Г. Юмагулов**;

д.ф.-м.н. **Р.С. Юлмухаметов**;

д.ф.-м.н. **О.А. Кривошеева**;

Р.И. Габдрахманов (отв. секретарь)

Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 4 октября – 8 октября 2023 г.). В 2 томах. Том 1 / отв. редактор З.Ю. Фазуллин. - Уфа: Аэтерна, 2023. - 256 с.

В предоставленных материалах конференции детально обсуждаются новейшие результаты и открытые проблемы в спектральной теории, нелинейном и комплексном анализе, в теории дифференциальных уравнений, математическом моделировании. Материалы сборника предназначены для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся указанными проблемами.

Организаторы конференции: Уфимский университет науки и технологий, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (г. Уфа), НОМЦ Приволжского федерального округа.

Благодарим компании, оказавшие поддержку проведению конференции.



ISBN 978-5-00177-728-1 ч.1
ISBN 978-5-00177-730-4

©Коллектив авторов, 2023
©Аэтерна, 2023

Уфимский университет науки и технологий совместно с Институтом математики с ВЦ УФИЦ РАН ежегодно, начиная с 2012 г., проводит международные научные конференции, основные тематики которых связаны со спектральной теорией, с нелинейным и комплексным анализом, дифференциальными уравнениями и математическим моделированием. Выбор таких направлений определялся как активной работой в указанных областях многих математиков из Башкортостана, взаимопроникновением идей и методов спектральной теории, нелинейного и комплексного анализа при решении многих актуальных задач в указанных областях, так и сотрудничеством с коллегами из многих научных центров России и зарубежья.

В последние годы особенно активным стало сотрудничество в указанных областях математики с учеными из ряда научных и образовательных организаций Узбекистана, Казахстана и Таджикистана. Со многими организациями заключены соответствующие Договоры о научном сотрудничестве.

Начиная с 2019 г. конференция приобрела новый статус, преобразовавшись в "Уфимскую осеннюю математическую школу". Теперь, наряду с обсуждением новейших научных результатов и открытых проблем, важное место в работе конференции занимают обзорные лекции ведущих ученых для аспирантов и молодых ученых.

Научная программа конференции УОМШ-23 охватывает следующие направления:

- спектральная теория операторов;
- комплексный и функциональный анализ;
- нелинейные уравнения;
- дифференциальные уравнения и их приложения;
- математическое моделирование.

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2023»

СЕКЦИЯ

«СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ»

г. Уфа, 4 октября – 8 октября 2023 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ РОСТА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОДУ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПСЕВДОСПЕКТРА МАТРИЦЫ

Э.А. Бибердорф, Л. Ван
e.biberdorf@g.nsu.ru, l.van3@g.nsu.ru

УДК 519.6

В работе экспериментально установлено, что локальный рост решений зависит от параметра ε пятен ε -спектра матрицы, находящихся в правой полуплоскости. Созданы алгоритмы для получения таких начальных данных, при которых решение на начальном отрезке времени растет максимально. С помощью такого подхода исследована одна модель флаттера и линеаризованная система Навье-Стокса.

Ключевые слова: псевдоспектр, спектральные пятна, линейные системы ОДУ

Study of the growth of solutions of linear ODE systems depending on the pseudospectrum of the matrix

In the work, it was experimentally established that local growth of decisions depends on the spots ε -spectrum of the matrix located in the right half-plane. Algorithms have been created to obtain such initial data in which the solution at the initial period of time grows as much as possible. With the help of this approach, one model of flutter and the linearized Navier-Stoks system was investigated.

Keywords: pseudo-spectrum, spectral spots, linear systems of the ODE.

Некоторые экспериментальные исследования показали, что даже в том случае, когда весь спектр линейного дифференциального оператора соответствующей математической модели находится

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект №FWNF-2022-0008)

Бибердорф Элина Арнольдовна, к.ф.-м.н., с.н.с, ИМ СО ПАН (Новосибирск, Россия); Elina Biberdorf (Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia)

Ван Ли, аспирант, НГУ (Новосибирск, Россия); Van Li (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

в области устойчивости, может произойти развитие неустойчивости течений и других физических процессов. В качестве примера можно привести известные случаи докритических ламинарно-турбулентных переходов течений вязкой несжимаемой жидкости [1]. В некоторых работах предполагается, что этот феномен связан с расположением спектральных пятен соответствующих операторов.

Псевдоспектром, или ε -спектром матрицы A , называется такое множество комплексных чисел λ , для которых при фиксированном $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\sigma_{\min}(A - \lambda I) \leq \varepsilon.$$

Здесь $\sigma_{\min}$ – минимальное сингулярное число, I – единичная матрица.

В данной работе изучается поведение решений, если спектр линеаризованного дифференциального оператора полностью лежит в области устойчивости при том, что псевдоспектр частично находится в области неустойчивости. Для этой цели нами было сконструировано два алгоритма, позволяющих строить начальные данные задачи таким образом, чтобы соответствующее им решение имело близкий к максимальному локальный рост.

Первый алгоритм основывается на следующем наблюдении. Пусть у матрицы A есть несколько кратных собственных значений и $v_1, \dots, v_k$ – соответствующие им собственные векторы (о присоединенных векторах речь не идет, так как мы рассматриваем только ситуации, вычислимые в машинной арифметике). Пусть при этом вектор y_0 принадлежит тому же инвариантному подпространству матрицы A , но при этом составляет максимально большой угол со всеми собственными векторами. Тогда решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad y(0) = y_0$$

имеет локальный максимум. Такое же построение можно использовать для некоторой группы собственных значений (не обязательно кратных), включающей критическое (т.е. ближайшее к области неустойчивости).

Для построения второго алгоритма мы рассматриваем собственные значения, находящиеся в одном спектральном пятне, как кратные в обобщенном смысле. Пусть критическое собственное

значение находится в одном спектральном пятне с другими значениями, причем часть этого пятна находится в зоне неустойчивости. Выберем прямую, которая разделяет это пятно на две части, в одной из которых находится критическое значение. Применим метод дихотомии матричного спектра относительно этой прямой [2], в результате чего получим базисы инвариантных подпространств, соответствующих разделенным группам собственных значений. В этом случае начальный вектор y_0 выбираем так, чтобы угол между ним и обоими подпространствами был максимальный. При таком выборе решение задачи Коши также будет расти на начальном отрезке времени.

С помощью данных алгоритмов было построено локально растущее решение задачи Коши для одной модели флаттера [3]:

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad A = \begin{bmatrix} -vD & -(G + v^2F) \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0.73 \cdot 10^{-2}I,$$

$$G = \begin{bmatrix} 37.7 & & & \\ & 169 & & \\ & & 899 & \\ & & & 1792 \end{bmatrix}, \quad F = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0 & -1.97 & 0 & 0 \\ 0.12 & 0 & -4.19 & 0.171 \\ 0 & 0.176 & 0 & 0 \\ 0 & -0.154 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь: v – скорость потока, G – матрица частот собственных колебаний, D – матрица трения, F – матрица взаимодействий между частями крыла, y – вектор перемещений.

Рассмотрим случай $v = 425$, когда весь спектр матрицы A расположен в левой полуплоскости. В результате применения алгоритмов построения начальных данных (используется дихотомия относительно прямой $y = 19x + 30$) получаем решение, которое растет почти на два порядка.

Аналогичное построения применялись для спектра оператора Орра-Зоммерфельда для плоско-параллельного течения Пуазейля

$$\{i(\alpha U - w)(\frac{d^2}{dy^2} - k^2) - i\alpha U'' - \frac{1}{Re}(\frac{d^2}{dy^2} - k^2)^2\}\hat{v} = 0,$$

где $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $Re = UL/\nu$ – число Рейнольдса, U, L – характерные скорость и длина рассматриваемого течения, ν – кинематический коэффициент вязкости среды, $U(y) = 1 - y^2$ – профиль скорости течения Пуазейля. Условия прилипания и непротекания влекут за собой краевые условия для $\hat{v}$:

$$\hat{v}|_{y=\pm 1} = 0, \quad \hat{v}'|_{y=\pm 1} = 0.$$

С помощью указанных выше алгоритмов при $Re = 5000$, $\alpha = 1.02$, $\beta = 0$ были получены решения линеаризованной системы Навье-Стокса (то есть амплитуды возмущений течения Пуазейля), растущие более чем в 50 раз. Для дискретизации задачи использовались коллокационные производные размера 100×100 [4].

Таким образом в работе продемонстрировано, что в ситуации, когда все собственные значения оператора лежат в области устойчивости, решения соответствующих задач для дифференциальных уравнений могут демонстрировать локальный по времени, но существенный рост, что на практике может приводить к разрушению ламинарных течений или инженерных конструкций.

Литература

1. *Trefethen L.N., Trefethen A.E., Satish C.R., Tobin A.* Hydrodynamic Stability Without Eigenvalues // Science, New Series, **261**:5121 (1993) 578-584
2. *Годунов С.К.* Современные аспекты линейной алгебры. — Новосибирск: Научная книга, 1997.
3. *Буньков В.Г., Годунов С.К., Курзин В.Б., Садкейн М.* Применение нового математического аппарата «одномерные спектральные портреты матриц» к решению проблемы аэроупругих колебаний решеток лопастей // Ученые записки ЦАГИ, **XL**:6 (2009) 3-13
4. *Trefethen L.N.* Spectral Methods in MATLAB. — SIAM: Philadelphia. 2000.

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Н.П. Бондаренко
bondarenkonp@sgu.ru

УДК 517.984

Доказана единственность решения обратной задачи по трем спектрам для уравнения четвертого порядка с коэффициентами-распределениями. Доказательство основано на сведении к обратной задаче по матрице Вейля-Юрко.

Ключевые слова: обратные спектральные задачи, коэффициенты-распределения, задача Барсилона, теорема единственности, матрица Вейля-Юрко.

An inverse spectral problem for the fourth-order differential equation

The uniqueness of solution is proved for an inverse spectral problem by three spectra for the fourth-order differential equation. The proof is based on the reduction to the inverse problem by the Weyl-Yurko matrix.

Keywords: inverse spectral problems, distribution coefficients, Barcilon problem, uniqueness theorem, Weyl-Yurko matrix.

В статье [1] В. Барсилон рассмотрел обратную задачу, состоящую в восстановлении коэффициентов p и q дифференциального уравнения

$$y^{(4)} - (py')' + qy = \lambda y, \quad x \in [0, 1],$$

по спектрам трех краевых задач со следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned} y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = y''(1) = 0, \\ y(0) = y''(0) = 0, \quad y(1) = y'''(1) = 0, \\ y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(1) = y'''(1) = 0. \end{aligned}$$

Доклад посвящен результатам работы [2], в которой рассмотрено обобщение задачи Барсилона на случай коэффициентов-распределений $p \in W_2^{-1}(0, 1)$ и $q \in W_2^{-2}(0, 1)$. Для работы с данным классом операторов используется регуляризационный подход [3, 4]. Доказана единственность восстановления коэффициентов p и q по трем спектрам. Стоит отметить, что доказательство теоремы единственности в статье В. Барсилона [1] неверно, поэтому доказательство работы [2] —

Работа выполнена в Саратовском государственном университете при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-71-10001), <https://rscf.ru/en/project/21-71-10001/>

Бондаренко Наталья Павловна, д.ф.-м.н., доцент, СГУ (Саратов, Россия); Natalia Bondarenko (Saratov State University, Saratov, Russia)

первое известное автору, в том числе и для случая регулярных коэффициентов. Доказательство работы [2] основано на сведении обратной задачи Барсилона к обратной задаче по матрице Вейля-Юрко. Последняя задача была изучена для дифференциальных операторов произвольных порядков с регулярными коэффициентами в [5] и для случая коэффициентов-распределений в [6]. Отметим, что матрица Вейля-Юрко является универсальной спектральной характеристикой, которая однозначно определяет коэффициенты дифференциальных операторов высших порядков при любом поведении их спектров.

Литература

1. *Barcilon V.* On the uniqueness of inverse eigenvalue problems // Geophysical Journal International, **38**:2 (1974), 287-298.
2. *Guan A.-W., Yang C.-F., Bondarenko N.P.* Solving Barcilon's inverse problems for the method of spectral mappings, arXiv:2304.05747 [math.SP]
3. *Мирзоев К.А., Шкаликов А.А.* Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Матем. заметки, **99**:5 (2016), 788-793.
4. *Владимиров А.А.* О сходимости последовательностей обыкновенных дифференциальных операторов // Матем. заметки, **75**:6 (2004), 941-943.
5. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. — М.: Физматлит, 2007.
6. *Bondarenko N.P.* Inverse spectral problems for arbitrary-order differential operators with distribution coefficients // Mathematics **9**:22 (2021), Article ID 2989.

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С НЕПОЛНЫМИ ДАННЫМИ

Н.Ф. Валеев
valeevnf@yandex.ru

УДК 517.518

Рассматривается постановка обратной спектральной задачи с неполными спектральными данными для дифференциальных операторов эллиптического типа. Неполнота спектральных данных дополняется геометрическими условиями на коэффициенты дифференциального выражения, а также условиями на нормы собственных функции. На примере оператора Штурма-Лиувилля обсуждаются вопросы изолированности и единственности решений, а также связь этих задач с нелинейными дифференциальными уравнениями.

Ключевые слова: обратные спектральные задачи, нелинейные дифференциальные операторы, спектральная теория

On one inverse spectral problem with incomplete data.

The formulation of the inverse spectral problem with incomplete spectral data for differential operators of elliptic type is considered. The incompleteness of spectral data is supplemented by geometric conditions on the coefficients of the differential expression, as well as conditions on the norms of eigenfunctions. Using the example of the Sturm-Liouville operator, the issues of isolation and uniqueness of solutions are discussed, as well as the connection of these problems with nonlinear differential equations.

Keywords: inverse spectral problems, nonlinear differential operators, spectral theory.

Пусть $L(q)$ - с.с. оператор Штурма-Лиувилля, порожденный дифференциальным выражением вида

$$l_q y := -y'' + q(x)y, \quad x \in (0, 1),$$

и граничными условиями Дирихле (для определенности) $y(0) = y(1) = 0$, где $q \in L^p(0, 1)$, $1 < p < +\infty$.

Собственные значения оператора $L(q)$ обозначим $\lambda_1(q) < \lambda_2(q) < \dots < \lambda_m(q) < \dots$

Рассматривается оптимизационная обратная спектральная задача с неполными данными в следующей постановке.

($\mathcal{P}^0$) Оптимизационная обратная спектральная задача - ООСЗ

Пусть заданы:

- (а) числа $\lambda_1^* < \lambda_2^* < \dots < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$ - спектральные данные задачи;
- (б) вещественная функция $q_0 \in L^p(0, 1)$.

Требуется найти вещественный потенциал $\hat{q} \in L^p(0, 1)$, такой, что:

$$\lambda_k(\hat{q}) = \lambda_k^*, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

и $\|q_0 - \hat{q}\|_{L^2} =$

$$= \min\{\|q_0 - q\|_{L^2} : \lambda_k^* = \lambda_k(q), k = 1, 2, \dots, m; q \in L^2(0, 1)\}.$$

Ранее нами было доказано, что рассматриваемая ООСЗ ($\mathcal{P}^0$) имеет решение и связана с разрешимостью системы нелинейных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_1'' + q_0 u_1 = \lambda_1^* u_1 + \sum_{k=1}^m \sigma_k u_k^2 u_1, \\ \vdots \\ -u_m'' + q_0 u_m = \lambda_m^* u_m + \sum_{k=1}^m \sigma_k u_k^2 u_m, \end{array} \right\}$$

где $\sigma_i \in \{0, +1, -1\}$, $i = 1, \dots, m$.

В докладе будут обсуждаться результаты об изолированности и единственности решений ООСЗ ($\mathcal{P}^0$) с дополнительными условиями на начальные данные системы нелинейных уравнений.

Литература

1. Yavdat Ilyasov, Nur Valeev Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues, Physica D: Nonlinear Phenomena, Volume 426, 2021
2. Y. Tian, Q. Wei, and M. Zhang On the polynomial integrability of the critical systems for optimal eigenvalue gaps, J. Math. Phys., 64 (2023), p. 092701.
3. N. F. Valeev and Y. S. Ilyasov, Inverse spectral problem for Sturm-Liouville operator with prescribed partial trace, Ufa Math. J. 12, 19–29 (2020).
4. Садовничий В.А., Султанов Я.Т., Валеев Н.Ф., Оптимизационная обратная спектральная задача для векторного оператора Штурма-Лиувилля. Дифференциальные уравнения, 58:12, с. 1707-1711 (2022)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕЗОНАНСНЫХ ПОЛОСТЕЙ В УСТАНОВКЕ ДЛЯ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ ТЕМНОГО ФОТОНА

Л.Н. Валеева

valeeva.ln19@physics.msu.ru

УДК 519.6, 537.8

Установка в экспериментах типа "свет-сквозь-стену" для детектирования темных фотонов требует резонанса между сверхпроводящими полостями, и ее важным параметром, определяющим амплитуду выходящего поля, является так называемый "геометрический фактор". Работа посвящена численному моделированию парафотонного и наблюдаемого полей, а также оптимизации геометрической конфигурации полостей.

Ключевые слова: численное решение уравнения Прока, спектральная теория, задача оптимизации.

Simulation of dark photon field distribution between resonant cavities

The setup in light-shine-through-the-wall experiments for dark photon detection requires resonance between superconducting cavities, and its important parameter determining the amplitude of the output field is the geometrical factor. In this paper, numerical modelling of the paraphoton and observed fields is performed, and a geometrical modification of the cavities is shown to increase the geometrical factor of the setup.

Keywords: numerical solution of the Proca equation, spectral theory, optimization problem.

Рассматривается установка, состоящая из полости эмиттера, в которой генерируется парафотонное поле, и детектирующей полости, где регистрируется электромагнитное поле. Обозначим основные собственные функции детектора и эмиттера как $\vec{E}_{cav}$ и $\vec{E}_{em}$ соответственно. Введем геометрический фактор установки как:

$$G = \int_{V_{det}} d^3r \int_{V_{em}} d^3x \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{r}|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{r}|} (\vec{E}_{cav}(\vec{r}), \vec{E}_{em}(\vec{x})) \quad (1)$$

Исследование Л.Н.Валеевой поддержано Российским научным фондом (грант № 23-21-00225)

Валеева Лейсан Нурмухаметовна, МГУ им. Ломоносова, стипендиат Фонда развития теоретической физики и математики Базис; Leysan Valeeva (Moscow State University, Moscow, Russia), fellow of the Basis Foundation for the Development of Theoretical Physics and Mathematics

Тогда выражение для выходного сигнала определяется как

$$\vec{E}_{observed}(\vec{r}, t) = -\frac{Q}{\omega} G \eta \vec{E}_{cav}(\vec{r}) e^{i\omega t}, \quad (2)$$

где $\eta = \frac{|\vec{E}_{eff}(\vec{x})|}{|\vec{E}'(\vec{x}, 0)|} \equiv Const(m_{\gamma'}, \omega)$ определяется вкладом продольной и поперечной мод темного фотона.

Теорема 1. При $m_{\gamma'} \neq 0$ геометрический фактор представим в виде

$$G = \frac{1}{(k^2 - \omega^2)^2} \oint_{\partial V_{det}} d\sigma \left\{ \frac{\partial \vec{E}_{cav}(\vec{r})}{\partial n} - \vec{E}_{cav}(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial n} \right\} \times \\ \times \oint_{\partial V_{em}} d\sigma' [g(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \vec{E}_{em}(\vec{r}')}{\partial n'} - \vec{E}_{em}(\vec{r}') \frac{\partial g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}],$$

$$g de g(r, r') \equiv \frac{e^{ik|\vec{r}' - \vec{r}|}}{4\pi|\vec{r}' - \vec{r}|}.$$

Данное утверждение сокращает вычислительную размерность задачи с 6 до 4 порядка. При выборе геометрической конфигурации опи-раемся на следующую оценку фактора G:

$$G \leq \|\vec{E}_{em}\|_{V_{em}} \|\vec{E}_{cav}\|_{V_{cav}} \int_{V_{det}} d^3r \int_{V_{em}} d^3x \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{r}|} \quad (3)$$

Отсюда видно, что при близкорасположенных и протяженных полостях достигается максимум для G . В работе в качестве такой модели рассматриваются два вложенных коаксиальных цилиндра, причем область детектирования расположена внутри области генерации поля.

Для моделирования пространственного распределения эффективного тока разложим решение на продольные и поперечные моды. Для этого вводится представление для напряженности в эмиттере:

$$\vec{E}_{em}(\vec{r}) = U_1(\vec{r})\hat{x} + V_1(\vec{r})\hat{y} + W_1(\vec{r})\hat{z} \quad (4)$$

Далее, полагая

$$f(|\vec{r}' - \vec{r}|) = -\frac{e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|r - r'|} \cdot \left(ik + \frac{1}{|r - r'|} \right), \quad (5) \\ f_1(|\vec{r}' - \vec{r}|) = -\frac{f(|\vec{r}' - \vec{r}|)}{|r - r'|},$$

для эффективного тока получим следующее представление:

$$\vec{j}_{eff}(\vec{r}) = -\frac{i\varepsilon}{\omega} \left(m_{\gamma'}^2 \int_{V_{em}} d^3r' \frac{e^{ik|\vec{x} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}' - \vec{r}|} \vec{E}_{em}(\vec{r}') - \right. \\ \left. - \int_{V_{em}} d^3r' [f_1(|\vec{r} - \vec{r}'|) \cdot (\vec{r} - \vec{r}', \vec{E}_{em}(\vec{r}')) - f_1(|\vec{r} - \vec{r}'|) \vec{E}_{em}(\vec{r}')] \right)$$

Для численного моделирования и визуализации распределения эффективного тока, а также для вычисления геометрического фактора разработана программа в среде Matlab. Отметим, что благодаря теореме 1 удалось понизить объем вычислений на два порядка. Данная программа используется для проведения численных экспериментов для поиска оптимальной геометрической конфигурации установки для эксперимента типа "свет-сквозь-стену".

Литература

1. *Jaeckel, Joerg and Ringwald, Andreas*. A Cavity Experiment to Search for Hidden Sector Photons // Phys. Lett. B, **659** (2008), 509–514
2. *Graham, Peter W. and Mardon, Jeremy and Rajendran, Surjeet and Zhao, Yue*. Parametrically enhanced hidden photon search // Phys. Rev. D, **90**:7 (2014), 075017
3. *Caputo, Andrea and Millar, Alexander J. and O'Hare, Ciaran A. J. and Vitagliano, Edoardo*. Dark photon limits: A handbook// Phys. Rev. D, **104**:9 (2021), 095029

ОПЕРАТОРНЫЕ ПУЧКИ В ЗАДАЧЕ О ВОЗБУЖДЕНИИ ДЛИННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ ЖИДКОСТИ ИСТОЧНИКАМИ В УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

С.Ю. Доброхотов
s.dobrokhотов@gmail.com

УДК 517.9

В докладе обсуждается метод построения эффективных приближенных формул решения задачи о возбуждении длинных волн в слое жидкости источниками, находящимися в упругом основании.

Ключевые слова: математическая физика, дифференциальные уравнения, спектральная теория.

В рамках модели Подъяпольского рассматриваемая задача описывается функциями, заданными в слое жидкости (уравнением Лапласа) и в бесконечном полупространстве (уравнениями Ламе), связанными граничными условиями и условиями сопряжения. Математическая нестандартность задачи состоит в том, что производные по времени присутствуют в уравнениях Ламе и отсутствуют в уравнении Лапласа, кроме того часть граничных условий включает в себя производные по времени. В предположении, что упругое основание однородно и граница раздела упругое основание жидкость- горизонтальная плоскость, задача с помощью преобразования Фурье сводится к изучению спектра (сложной структуры) операторного пучка по вертикальной переменной. Это, в свою очередь, дает возможность правильно сформулировать задачу Коши и представить после ряда полезных преобразований (“трюков”) ее решение с начальными данными, локализованными в упругом полупространстве, в простой конструктивной форме явно отражающей влияние параметров задачи, таких как размеры, глубина залегания и направления действия источника, скорости распространения упругих волн, плотности жидкости и упругой среды и глубины слоя жидкости. Доклад основан на результатах, полученных в совместных работах с Р.Гринивым, К.Варгасом, Х.Ильясовым, С.Я.Секерж-Зеньковичем, О.Толстой, И. Чудиновичем и А.Шкаликовым.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, (проект 21-11-00341).

Доброхотов Сергей Юрьвич, д.ф.-м.н., профессор, ИПМех РАН (Москва, Россия); Sergey Dobrokhотов (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Moscow, Russia)

О ПОЛНОТЕ И БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА КРИВОЙ, ПОРОЖДЕННОГО ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Х.К. Ишкин
ishkin62@mail.ru

УДК 517.984, 517.928

В работе изучаются аппроксимативные свойства системы корневых функций (СКФ) оператора Штурма–Лиувилля, порожденно-го в $L^2(\gamma)$ интегральными краевыми условиями, где γ — кривая ограниченного наклона. Получены условия на функции, задающие краевые условия, при которых СКФ полна или образует базис для суммирования методом Абеля–Лидского.

Ключевые слова: дифференциальный оператор на кривой, интегральные краевые условия, полнота, базисность по Абелю системы корневых векторов.

On the completeness and Abel basis property of the root functions system of the Sturm–Liouville operator on a curve generated by integral boundary conditions

In this paper, we study the approximate properties of the root functions system (RFS) of the operator L_U generated in $L^2(\gamma)$ by integral boundary conditions, where γ is a curve of bounded slope. We have obtained conditions on the functions that specify the boundary conditions under which the RFS is complete or forms a basis for summation by the Abel–Lidskii method.

Keywords: differential operator on a curve, integral boundary conditions, completeness, Abel–Lidskii basis property of the root vectors system.

Пусть γ — кривая с параметризацией $z = z(x) = x + ih(x)$, $x \in [0, 1]$, где функция h удовлетворяет условиям: $h(0) = h(1) = 0$ и $M_1 := \inf_{t_1 \neq t_2} \frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1} > -\infty$, $M_2 := \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1} < \infty$. Такую кривую называют кривой *ограниченного наклона*.

Пусть $\alpha_j = \arctan M_j$ ($j = 1, 2$), $l(y) = -y'' + qy$, где $q \in L^1(\gamma)$, штрих означает производную вдоль γ . Введем оператор L , действующий в $L^2(\gamma)$ по правилу $Ly = l(y)$, $D(L) = D := \{y \in L^2(\gamma) : y, y' \in$

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, согл. № 075-02-2023-950.

Ишкин Хаби́р Каби́рович, д.ф.-м.н., профессор, УУНиТ (Уфа, Россия); Khabir Ishkin (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

$AC(\gamma), l(y) \in L^2(\gamma)\}$, и его сужение L_U на D_U — множество функций из D , удовлетворяющих условиям

$$U_j(y) := y^{(j-1)}(0) - (l(y), \sigma_j) = 0, \quad (1)$$

где $(f, g) = \int_{\gamma} f \bar{g} |dz|$, $\sigma_j \in L^2(\gamma)$.

Интегральные условия (1) дают полное описание всех сужений оператора L , имеющих непустое резольвентное множество [1, Теорема 2]. При этом оператор L_U^{-1} компактен, $\sigma(L_U) = \{(\lambda_k)^2\}$, где $\{\lambda_k\}$ — нули целой функции $\Delta(\lambda) = \det \|U_j(\varphi_k)\|_{j,\nu=1}^2$, $\varphi_\nu(z, \lambda)$ ($\nu = 1, 2$) — какая-либо фундаментальная система решений (ФСР) уравнения $l(y) = \lambda^2 y$, $z \in \gamma$.

Операторы типа L_U часто возникают в процессе решения краевых задач в результате разделения переменных (см., например, обзоры [2, 3]). В этой связи важно знать условия базисности (в каком-либо смысле) системы корневых функций (СКФ) оператора L_U . Если $h = \text{const}$ (то есть γ — отрезок), то удается выделить широкий класс условий (1), при которых СКФ оператора L_U образует базис Рисса со скобками или просто базис Рисса [4]. Применительно к случаю оператора Штурма–Лиувилля этот класс имеет вид

$$U_j(y) = V_j(y) + \sum_{\nu=1}^{\varkappa_j} \int_{\gamma} y^{(\nu-1)}(z) d\sigma_{j\nu}(z) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

$$V_j(y) = \sum_{\nu=1}^{\varkappa_j} \left(\alpha_{j\nu-1} y^{(\nu-1)}(0) + \beta_{j\nu-1} y^{(\nu-1)}(1) \right), \quad (3)$$

где $\sigma_{j\nu}$ — функции ограниченной вариации на $[0, 1]$, непрерывные в точках $0, 1$, $1 \leq \varkappa_j \leq 2$, краевые условия $V_1(y) = 0$, $V_2(y) = 0$ регулярны (усиленно регулярны) по Биркгофу. Полнота СКФ может иметь место для более широкого класса условий [5, 6]. Отметим, что в случае краевых условий (2) — (3) спектр оператора L_U имеет асимптотику

$$\mu_k \sim (\pi k)^2, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Если отказаться от условия $h = \text{const}$, то возникают трудности, связанные с отсутствием ВКБ-оценок для ФСР уравнения $l(y) = \lambda^2 y$. Вследствие этого даже в простейшей ситуации, когда $U_1(y) = y(0)$, $U_2(y) = y(1)$, ничего определенного о распределении спектра L_U утверждать нельзя, можно лишь установить сектор, вне которого спектр L_U конечен. В работе [7] доказано, что формула (4) имеет место тогда и только тогда, когда функция q допускает мероморфное продолжение в выпуклую оболочку кривой γ с полюсами, удовлетворяющими условию тривиальной монодромии [8]. В свете сказанного несколько неожиданной представляется полная аналогия условий полноты и базисности по Абелю СКФ оператора L_U в случаях, когда $h = \text{const}$ и $h \neq \text{const}$.

Теорема 1. Пусть выполнено условие

(А) функции $\tau_1(z) = \int_0^z \overline{\sigma_1} |dt|$ и $\tau_2(z) = \int_0^z \overline{\sigma_2} |dt|$ дифференцируемы в точках 0 и 1 и $\tau_1'(1)(\tau_2'(0) + 1) - \tau_1'(0)\tau_2'(1) \neq 0$.

Тогда справедливы утверждения:

а) спектр L_U за исключением конечного числа лежит внутри угла

$$-2\alpha_2 < \arg z < -2\alpha_1;$$

б) система корневых функций оператора L_U полна в $L^2(\gamma)$.

Теорема 2. Пусть условия (1) имеют вид (2) – (3), краевые условия $V_1(y) = 0$, $V_2(y) = 0$ регулярны по Биркгофу. Тогда система корневых функций оператора L_U образует базис для суммирования методом Абеля–Лидского порядка $\delta \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2(\alpha_2 - \alpha_1)}\right)$.

Литература

1. Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширения и сужения операторов // Докл. АН СССР, **271**:6 (1983), 1307–1310.
2. Krall A.M. The development of general differential operators and general differential boundary systems // Rocky Mountain J. Math., **5**:4 (1975), 493–542.
3. Скубачевский А.Л. Неклассические краевые задачи. I // СМФН // Bull. London Math. Soc., **26**:5 (2007), 3–132.
4. Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., **6** (1982), 12–21.
5. Кангуужин Б.Е., Токмагамбетов Н.Е. О полноте системы корневых функций обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с интегральными краевыми условиями // Вестник КазНУ, **81**:2 (2014), 72–87.
6. Кангуужин Б.Е., Нурахметов, Д.Б. Токмагамбетов Н.Е. Аппроксимативные свойства систем корневых функций, порождаемые корректно разрешимыми краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков // Уфимск. матем. журн., **3**:3 (2011), 80–92.
7. Ishkin Kh.K. A localization criterion for the spectrum of the Sturm-Liouville operator on a curve // St. Petersburg Math. J., **28**:1 (2017), 37–63.
8. Ishkin Kh.K. On the uniqueness criterion for solutions of the Sturm-Liouville equation // Math. Notes, **84**:3-4 (2008), 515–528.

О КРИТЕРИИ ОТСУТСТВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ КРАТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С МЕРОМОРФНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Х.К. Ишкин, Л.Г. Давлетова
ishkin62@mail.ru, L.matem2012@yandex.ru

УДК 517.984, 517.928

В работе получено необходимое и достаточное условие отсутствия асимптотически кратных собственных чисел оператора Штурма–Лиувилля на гладкой кривой γ с мероморфным потенциалом имеющим полюс второго порядка внутри отрезка, соединяющего концы γ .

Ключевые слова: спектр, оператор Штурма–Лиувилля, безмономные потенциалы, регуляризованные следы.

On the criterion for the absence of asymptotically multiple eigenvalues of a Sturm–Liouville operator with a meromorphic potential

In this paper, we have obtained a necessary and sufficient condition for the absence of asymptotically multiple eigenvalues of the Sturm–Liouville operator on a smooth curve γ with a meromorphic potential having a second-order pole inside the segment connecting the ends.

Keywords: spectrum, Sturm–Liouville operator, monodromy-free potentials, regularized traces.

Пусть $0 < a < 1$ и γ – кривая на комплексной плоскости с параметризацией $z = x + ih(x)$, $x \in [0, 1]$, где h непрерывно дифференцируема на $[0, 1]$, $h(a) \neq 0$ и $h(0) = h(1) = 0$. Далее, пусть $L = L_0 + V$, где L_0 – оператор, действующий в $L^2(\gamma)$ по правилу

$$L_0 y = l_0(y) := -y'' + \frac{\nu^2 - 1/4}{(z - a)^2} y \quad (\operatorname{Re} \nu > 0),$$

$$D(L) = \{y \in L^2(\gamma) : y, y' \in AC(\gamma), l_0(y) \in L^2(\gamma), y(0) = y(1) = 0\},$$

V – оператор умножения на функцию V , голоморфную в некоторой области G , содержащей кривую γ и отрезок $[0, 1]$. Так же, как при $\gamma = [0, 1]$, L будем называть оператором Штурма–Лиувилля с потенциалом

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, согл. № 075-02-2023-950.

Ишкин Хабиб Кабирович, д.ф.-м.н., профессор, УУНиТ (Уфа, Россия); Khabir Ishkin (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Давлетова Ляйсан Габдулловна, ассистент, УГНТУ (Уфа, Россия); Ljajsan Davletova (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

$$q = \frac{\nu^2 - 1/4}{(z - a)^2} + V.$$

L — замкнут, плотно определен, имеет компактную резольвенту [1]. Обозначим через $\{\lambda_n^0\}$ и $\{\lambda_n\}$ — собственные числа соответственно L_0 и L , пронумерованные в порядке возрастания модулей с учетом алгебраических кратностей.

В работе [2] показано, что если $\nu - 1/2 \in \mathbb{N}$, то

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + C_V + O(n^{-2}), \quad C_V = \int_{\gamma} V(z) dz, \quad (1)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_n^0 - C_V) = \frac{C_V}{2} - \frac{V(0) + V(1)}{4}.$$

Вывод оценки (1) существенно основывается на том, что при некотором N_0

$$\inf_{k \geq N_0, p \in \mathbb{N}} |\lambda_k - \lambda_{k+p}| > 0. \quad (2)$$

Если $\nu - 1/2 \notin \mathbb{N}$ и $a \in \mathbb{Q}$, свойство (2) все еще верно [3]. В связи с этим возникает вопрос: верно ли утверждение (2) при $\nu - 1/2 \notin \mathbb{N}$ и $a \notin \mathbb{Q}$?

Справедлива

Теорема 1. Пусть $\nu - 1/2 \notin \mathbb{N}$ и $a \notin \mathbb{Q}$. Тогда для выполнения (2) необходимо и достаточно чтобы

$$a^a(1-a)^{1-a} \neq \frac{1}{2|\cos \pi \nu|}.$$

Литература

1. *Ishkin Kh.K., Marvanov R.I.* On the class of potentials with trivial monodromy // Lobachevskii Journal of Mathematics, **42**: 6 (2021), 1166–1174.
2. *Ishkin Kh.K., Davletova L.G.* An Analogue of the Gelfand–Levitan Trace Formula for the Sturm–Liouville Operator with a Meromorphic Potential // Lobachevskii J. Math., **43** (2022), 1519–1531.
3. *Ishkin Kh.K., Davletova L.G.* Regularized Trace of a Sturm–Liouville Operator on a Curve with a Regular Singularity on the Chord // Differential Equations **56**:10 (2020), 1291–1303.

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ С ПРОПУСКАМИ ДЛИНЫ $2n$ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ БЕРНУЛЛИ И ЭЙЛЕРА

К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова

mirzoev.karahan@mail.ru, t.Safonova@narfu.ru

УДК 512.622.64

В работе методами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов найдены новые лакунарные рекуррентные соотношения с пропусками произвольной чётной длины для многочленов Бернулли и Эйлера. Из них получены ранее известные и некоторые новые соотношения и для чисел Бернулли и Эйлера.

Ключевые слова: рекуррентные соотношения с пропусками, многочлены и числа Бернулли и Эйлера.

Recurrent relations with gaps of length $2n$ for Bernoulli and Euler polynomials.

In this work, using the methods of the spectral theory of ordinary differential operators, we find new lacunary recurrence relations with gaps of arbitrary even length for Bernoulli and Euler polynomials. From them, previously known and some new relations are obtained for the Bernoulli and Euler numbers.

Keywords: recurrence relations with gaps, polynomials and Bernoulli and Euler numbers.

Символами $B_n(x)$ и $E_n(x)$ обозначим многочлены Бернулли и Эйлера, определяемые соответственно из разложений

$$\frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad \frac{2e^{tx}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!},$$

первое из которых справедливо при $|t| < 2\pi$, а второе - при $|t| < \pi$, а символами B_n и E_n - числа Бернулли и Эйлера, определяемые равенствами $B_n = B_n(0)$ и $E_n = 2^n E_n(1/2)$, $n = 0, 1, \dots$ (см., напр., [1, п. 23]).

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

Пусть $n \geq 2$ - фиксированное натуральное число и $\epsilon = e^{i\pi/n}$. Мощность множества всевозможных отображений множества $\{1, 2, \dots, n -$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФН (проект № 20-11-20261).

Мирзоев Карахан Агахан оглы, д.ф.-м.н., профессор, МГУ (Москва, Россия);
Mirzoev Karakhan (Moscow State University, Moscow, Russia)

Сафонова Татьяна Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия);
Safonova Tatyana (Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov (Arkhangelsk, Russia))

$1\}$ на множество $\{0, 1\}$ равна 2^{n-1} . Элементы этого множества занумеруем символами m_s и определим числа α_s , полагая

$$\alpha_s = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{m_s(j)} \epsilon^j, \quad s = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$$

(случай $n = 1$ мы также включаем в рассмотрение, полагая, что $\alpha_1 = 0$).

Теорема 1. При $n = 1, 2, \dots$ и $m = 0, 1, \dots$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{[m/(2n)]} 2^{m-2nk} C_{m+n}^{2nk+n} B_{m-2nk}(z) \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (-1)^{\nu(s)} (1 + \alpha_s)^{2nk+n-1} = \\ = (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{m}{n}\right) \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (-1)^{\nu(s)} (2z - 1 + \alpha_s)^{m+n-1}, \end{aligned}$$

где $[a]$ - целая часть числа a и $\nu(s) = 0$, если количество слагаемых со знаком плюс в числе α_s чётное, и $\nu(s) = 1$ в противном случае.

Теорема 2. При $n = 1, 2, \dots$ и $m = 1, 2, \dots$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} E_{m-1}(z) + \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^{[m/(2n)]-1} \frac{C_{m-1}^{2nk} E_{m-2nk-1}(z)}{2^{2nk-1}} \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (1 + \alpha_s)^{2nk-1} = \\ = \frac{1}{2^{m+n-2}} \sum_{s=1}^{2^{n-1}} (2z - 1 + \alpha_s)^{m-1}. \end{aligned}$$

При этом сумма по пустому множеству считается равной 0.

Полагая $z = 0$, $z = 1/6$, $z = 1/4$, $z = 1/3$ и $z = 1/2$ в равенствах теорем 1 и 2 можно получить рекуррентные соотношения с пропусками длины $2n$ для соответствующих чисел Бернулли и Эйлера. Некоторые из этих соотношений хорошо известны и являются классическими, а другие - новые.

При доказательстве теорем 1 и 2 мы применяем спектральную теорию обыкновенных дифференциальных операторов следующим образом (см. [2]). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$ и $0 < a < 1$. Рассмотрим самосопряжённый оператор S_α , порождённый в $\mathcal{L}^2[0, \pi]$ выражением

$$l_{2n}[y] = (-1)^n y^{(2n)} - a^{2n} y$$

и граничными условиями $y^{(j)}(0) = e^{\pi i \alpha} y^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \dots, 2n-1$. Спектр этого оператора состоит из собственных чисел $\mu_{\alpha, k} = (2k + \alpha)^{2n} - a^{2n}$, а собственному значению $\mu_{\alpha, k}$ соответствует собственная функция $\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i(2k+\alpha)x}$, $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

Если параметры α и a дополнительно удовлетворяют условиям $\alpha \neq a$ и $\alpha \neq 2 - a$, то число $\mu = 0$ не принадлежит спектру оператора S_α . Поэтому он имеет резольвенту R_α . Резольвента этого оператора является интегральным оператором с ядром - функцией Грина $G_\alpha(x, t)$ задачи

$$\begin{cases} l_{2n}[y] = f \\ y^{(j)}(0) - e^{\pi i \alpha} y^{(j)}(\pi) = 0, j = 0, \dots, 2n - 1 \end{cases},$$

для которой хорошо известная процедура её построения.

С другой стороны, для оператора R_α и, следовательно, для функции $G_\alpha(x, t)$ справедлива теорема о разложении в ряд по собственным функциям. Сравнивая полученные этими двумя способами представления функции Грина, заключаем, что для неё справедливо некоторое тождество. В данной работе эти тождества используются для вывода лакунарных рекуррентных соотношений с пропусками длины $2n$ для многочленов Бернулли и Эйлера.

Литература

1. *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — New York: Dover Publ., 1972.
2. *Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Обыкновенные дифференциальные операторы и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // Труды ММО, **80:2** (2019), 157-177.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ АПОСТЕРИОРНЫЕ ФОРМУЛЫ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

С.Н. Какушкин,
kakushkin-sergei@mail.ru

УДК 519.6

В работе приводятся асимптотические формулы оценок погрешности метода нахождения собственных функций возмущенных самосопряженных операторов. Для оценки всех величин, входящих в полученные апостериорные формулы, необходимо конкретизировать выбор координатной последовательности.

Ключевые слова: асимптотические формулы, апостериорные оценки, собственные функции, возмущенные операторы.

Asymptotic a posteriori formulas for error estimates for finding eigenfunctions of perturbed self-adjoint operators

The paper presents asymptotic formulas for error estimates of the method of finding the eigenfunctions of perturbed self-adjoint operators. To evaluate all the values included in the obtained a posteriori formulas, it is necessary to specify the choice of the coordinate sequence.

Keywords: asymptotic formulas, a posteriori estimates, eigenfunctions, perturbed operators.

Рассмотрим уравнение

$$(T + P)u = \mu u \quad (1),$$

где T – дискретный полуограниченный снизу оператор, а P – ограниченный оператор, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областями определения $D(T)$ и $D(P)$ соответственно, причем $D(T) \subset D(P)$. Введем энергетическое пространство H_T , полученное пополнением множества $D(T)$ по скалярному произведению $(u, v)_T = (Tu, v)$.

Уравнение (1) будем решать методом, описанным в работах [1 – 4]. Идея этого метода заключается в нахождении собственных функций возмущенной спектральной задачи, используя спектральные характеристики невозмущенного оператора T и его возмущающий оператор P . Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ($\varphi_i \in D(T) \subset H_T$) образуют полную в H_T координатную последовательность. Зададим возрастающую последовательность

Какушкин Сергей Николаевич, к.ф.-м.н., зав. сектором ИТиСО, Администрация МР Белорецкий район РБ (Белорецк, Россия); Sergey Kakushkin (Administration of the municipal district Beloretskiy district of the Republic of Bashkortostan, Beloretsk, Russia)

натуральных чисел $i_1 < i_2 < \dots < i_n < \dots$. Через $H_n \subset H_T$ обозначим пространство, натянутое на элементы $\{\varphi_i\}_{i=1}^{i_n}$, а через E_n^T – оператор ортогонального в смысле метрики в H_T проектирования в пространстве H_n . Приближение собственной функции уравнения (1) будем искать в виде $u^{(n)} = \sum_{k=1}^{i_n} a_k^{(n)} \varphi_k$, где $a_k^{(n)}$ – числовые коэффициенты, подлежащие определению, в соответствии с выбранной методикой. С учетом введенных обозначений, приближение собственной функции $u^{(n)} \in H_n$ уравнения (1) можно определить проекционным методом

$$E_n^T[u^{(n)} - \mu^{(n)}(E + T^{-1}P)^{-1}T^{-1}u^{(n)}] = 0.$$

Теорема 1. Пусть собственные числа μ уравнения (1) являются полюсом h -го порядка уравнения $\mu[(E + T^{-1}P)^{-1}T^{-1}]u = u$, где вполне непрерывные операторы $T^{-1}P$ и T^{-1} определены во всем энергетическом пространстве H_T . Тогда для приближенных собственных функций $u^{(n)}$ уравнения (1) справедливы оценки:

$$|u^{(n)} - \tilde{P}^{(j)}u^{(n)}|_T \leq C \left\{ \max_{\substack{u_0 \in U^{(h)}, v_0 \in V^{(h)} \\ |u_0|_T = |v_0|_T = 1}} [|E_T^{(n)}u_0|_T \cdot |E_T^{(n)}v_0|_T]^{j/h} + \right. \\ \left. + \max_{u_0 \in U^{(j)}, |u_0|_T = 1} |E_T^{(n)}u_0|_T \right\} \cdot |u_n|_T,$$

где C – числовая константа; $U^{(j)}$ – подпространства элементов $u_0 \in H_T$, удовлетворяющих уравнению $(E - \mu[E + T^{-1}P]^{-1}T^{-1})^j u_0 = 0$, а $V^{(j)}$ – подпространства элементов $v_0 \in H_T$, удовлетворяющих уравнению $\{E - \bar{\mu}[E + (T^{-1}P)^*]^{-1}(T^{-1})^*\}^j v_0 = 0$ (здесь $*$ означает сопряженность в смысле метрики в пространстве H_T); $\tilde{P}^{(j)}$ – оператор ортогонального в смысле метрики H_T проектирования в подпространстве $U^{(j)}$; оператор $E_T^{(n)} = E - E_n^T$ проектирует ортогонально в смысле метрики в H_T в ортогональное дополнение $H_T \ominus H_n$.

Используя результаты теоремы 1 можно получить оценки быстро-го сходимости метода нахождения собственных функций возмущенных самосопряженных операторов после выбора координатной последовательности $\{\varphi_i\}_{i=1}^{i_n}$. По результатам работ [1 – 4] были проведены вычислительные эксперименты, где в качестве координатных функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^{i_n}$ брались собственные функции невозмущенного оператора $T = -\Delta$, т.е. решения спектральной задачи $-\Delta\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi|_{\Gamma} = 0$, в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$, где Γ – граница области Ω . Как известно, собственные числа этой задачи имеют порядок $n^{2/m}$. Учитывая это и оценки теоремы 1, не сложно показать, что в рассмотренном примере

$$|u^{(n)} - \tilde{P}^{(j)}u^{(n)}|_T = o(n^{-2j/mh} + n^{-1/m}).$$

Предполагается, что $|u^{(n)}|_T = 1$, а $\dim H_n = n$.

Литература

1. *Какушкин, С. Н.* Развитие нового метода нахождения собственных функций возмущенных дискретных операторов, заданных на компактных графах / С. Н. Какушкин // Уфимская осенняя математическая школа - 2021 : МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ, Уфа, 06–09 октября 2021 года. Том 1. – Уфа: Общество с ограниченной ответственностью "Аэтерна 2021. – С. 46-49. – EDN RTHVJY.

2. *Какушкин, С. Н.* Алгоритм нахождения собственных функций возмущенных самосопряженных операторов, заданных на компактных графах / С. Н. Какушкин // Математическое моделирование процессов и систем : Материалы XI Международной молодежной научно-практической конференции, Стерлитамак, 10–12 ноября 2021 года / Отв. редактор С.В. Викторов. Том Часть 1. – Стерлитамакский филиал: Стерлитамакский филиал федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Башкирский государственный университет 2021. – С. 234-238. – EDN CUFWOY.

3. *Какушкин, С. Н.* Нахождение собственных функций возмущенных дискретных полуограниченных операторов / С. Н. Какушкин // Уфимская осенняя математическая школа : Сборник тезисов Международной научной конференции, Уфа, 16–19 октября 2019 года / Ответственный редактор З.Ю. Фазуллин. – Уфа: Башкирский государственный университет, 2019. – С. 103-104. – EDN QDFGHR.

4. *Kadchenko, S. I.* Spectral Problems on Compact Graphs / S. I. Kadchenko, S. N. Kakushkin, G. A. Zakirova // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. – 2017. – Vol. 10, No. 3. – P. 156-162. – DOI 10.14529/mmp170314. – EDN ZEZXCF.

**CORRECTLY SOLVABLE PROBLEM FOR THE
LAPLACE-BELTRAMI EQUATION ON A
THREE-DIMENSIONAL SPHERE WITH A CUT ALONG
THE CIRCLE**

B. Kanguzhin, K. Dosmagulova
kanbalta@mail.ru, karlygash.dosmagulova@gmail.com

A circle on a three-dimensional sphere from four-dimensional space has been removed. It is required to describe well-solvable problems for the Laplace-Beltrami equation on the resulting domain. The speech discusses a class of such problems for the Laplace-Beltrami equation on a three-dimensional sphere with a cut along a circle.

Kanguzhin Baltabek, Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan),
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

Dosmagulova Karlygash, Al-Farabi Kazakh National University (Almaty,
Kazakhstan), Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty,
Kazakhstan)

ОДНОЗНАЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ СОПРЯЖЕНИЯ ВО ВНУТРЕННИХ ВЕРШИНАХ ГРАФА ДЕРЕВА ПО КОНЕЧНОМУ НАБОРУ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Б.Е. Кангужин, Ж.А. Кайырбек, М.О. Мустафина
kanbalta@mail.ru, kaiyrbek.zhalgas@gmail.com,
mustafina@gmail.com

УДК 517.956

Доклад посвящен однозначному восстановлению области определения оператора Штурма–Лиувилля, заданного на граф–дереве. В случае когда область определения оператора Штурма–Лиувилля на граф–дереве соответствует граничной задаче, то для однозначного определения граничных форм достаточно задавать не весь спектр эталонных задач.

Ключевые слова: Граф, граф-дереве, спектр, условия Кирхгофа.

В докладе рассматривается граф-дереве с четырьмя поколениями. Изучается оператор Штурма–Лиувилля на граф-дереве. Внешние вершины жестко закреплены. Во внутренних вершинах дерева ставятся упруго-жесткие условия сопряжения. Надо однозначно восстановить условия сопряжения по конечному набору собственных значений. Определяется минимальное количество таких собственных значений. Задачи идентификации граничных условий эталонных задач обычно требуют однозначного восстановления конечного числа граничных коэффициентов. Можно понять, что для восстановления конечного числа граничных коэффициентов не обязательно задавать наборы полных спектров эталонных задач. В данной работе аналогичный результат доказывается для оператора Штурма–Лиувилля на графе-дереве. При этом особое внимание уделяется нераспадающимся граничным условиям.

Литература

1. *Levitan B.M., Gasymov M.G.* Determination of a differential equation by two of its spectra // Russian Math. Surveys, **19**:2 (1964), 1-63
2. *Plaksina O.A.* Inverse problems of spectral analysis for the Sturm-Liouville operators with nonseparated boundary conditions // Math. USSR-Sb, **59**:1 (1988), 1-23

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта (проект № AP19678089 и проект № AP19175972).

Кангужин Балтабек Есмаевич, д.ф.-м.н., профессор, (Алматы, Казахстан); Baltabek Kanguzhin (Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan)

Кайырбек Жалгас Аскарлович, (Алматы, Казахстан); Zhalgas Kaiyrbek (Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan)

Мустафина Мергуль Оралбековна, докторант (Усть-Каменогорск, Казахстан); Mustafina Mergul (East Kazakhstan State University named after S. Amanzholova, Kazakhstan)

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ДВУЧЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Н.Н. Конечная
n.konechnaya@narfu.ru

УДК 517.928

Доклад посвящен нахождению главного члена асимптотики при $x \rightarrow +\infty$ фундаментальной системы решений уравнения вида $(-1)^n(p(x)y^{(n)})^{(n)} + \sigma^{(k)}(x)y = \lambda y$, где λ — фиксированный комплексный параметр, комплекснозначная функция p такая, что $p, \frac{1}{p} \in L^1_{loc}[1, \infty)$, а комплекснозначная функция σ такая, что $\sigma \in L^1_{loc}[1, \infty)$, если $k < n$, и $\frac{\sigma^2}{p} \in L^1_{loc}[1, \infty)$, если $k = n$, причем производная k -го порядка от σ понимается в смысле теории распределений ($k = 0, 1, \dots, n$).

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами, асимптотика решений дифференциальных уравнений.

On the asymptotic behavior of solutions to two-term differential equations with singular coefficients

The report is devoted to finding of the main term of the asymptotics as $x \rightarrow +\infty$ of the fundamental system of solutions to equations of the form $(-1)^n(p(x)y^{(n)})^{(n)} + \sigma^{(k)}(x)y = \lambda y$, where λ is a fixed complex parameter, a complex-valued function p such that $p, \frac{1}{p} \in L^1_{loc}[1, \infty)$, and the complex-valued function σ is such that $\sigma \in L^1_{loc}[1, \infty)$, if $k < n$, and $\frac{\sigma^2}{p} \in L^1_{loc}[1, \infty)$, if $k = n$, where the k -th order derivative of σ is understood in the sense of the theory of distributions ($k = 0, 1, \dots, n$).

Keywords: differential equations with singular coefficients, asymptotic behavior of solutions to differential equations.

В первой части доклада речь пойдет о построении матриц типа Шина-Зеттла (см.[1, раздел I, с.8]), таких, что квазидифференциальное выражение, порожденное ими, совпадает с дифференциальным выражением $2n$ -го порядка ($n \geq 1$) вида

$$l(y) := (-1)^n(p(x)y^{(n)})^{(n)} + \sigma^{(k)}(x)y,$$

где $k = 0, 1, \dots, n$. Здесь комплекснозначная функция p такая, что $p, \frac{1}{p} \in L^1_{loc}[1, \infty)$, а комплекснозначная функция σ такая, что $\sigma \in L^1_{loc}[1, \infty)$, если $k < n$, и $\frac{\sigma^2}{p} \in L^1_{loc}[1, \infty)$, если $k = n$, причем производная k -го порядка от σ понимается в смысле теории распределений.

Во второй части доклада будут обсуждаться несколько теорем о главном члене асимптотики решений дифференциального уравнения вида

$$l(y) = \lambda y$$

при $x \rightarrow +\infty$, где λ — фиксированный комплексный параметр.

Символом $o(1)$ обозначим бесконечно малую функцию при $x \rightarrow +\infty$ и сформулируем две теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $p = (1+r)^{-1}$, где $r \in L^1[1, \infty)$. Пусть далее $\sigma \in L^1[1, \infty)$, если $k < n$, и $\sigma(1+|\sigma|)(1+|r|) \in L^1[1, \infty)$, если $k = n$. Тогда уравнение $l(y) = \lambda y$ при $\lambda \neq 0$ имеет фундаментальную систему решений y_j , $j = 1, 2, \dots, 2n$, вида

$$y_j(x) = e^{z_j x} (1 + o(1)),$$

где z_j — различные корни степени $2n$ из $(-1)^n \lambda$.

Теорема 2. Пусть функция $p = (1+r)^{-1}$, где $r \in L^1[1, \infty)$. Пусть далее $x^{2n-1-k} \sigma \in L^1[1, \infty)$, если $k < n$, и $x^{n-1} \sigma(1+x^n|\sigma|)(1+|r|) \in L^1[1, \infty)$, если $k = n$. Тогда уравнение $l(y) = 0$ имеет фундаментальную систему решений y_j , $j = 1, 2, \dots, 2n$, вида

$$y_j(x) = \frac{x^{j-1}}{(j-1)!} (1 + o(1)).$$

Доклад основан на совместных работах [2] – [4] автора с К.А. Мирзоевым и А.А. Шкаликовым.

Литература

1. *Everitt W.N., Marcus L.* Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-Differential Operators. — AMS: Mathematical Surveys and Monographs, vol. 61, 1999.
2. *Конечная Н.Н., Мирзоев К.А., Шкаликов А.А.* Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами // Математические заметки, **104**:2 (2018), 240-251.
3. *Конечная Н.Н., Мирзоев К.А., Шкаликов А.А.* Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами // Математические заметки, **113**:2 (2023), 217-235.
4. *Конечная Н.Н., Мирзоев К.А.* Об асимптотике решений линейных дифференциальных уравнений нечетного порядка // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика, **1** (2020), 22-28.

РЕШЕНИЯ БИРКГОФА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПОЛУОСИ

М.А. Кузнецова
kuznetsovama@info.sgu.ru

УДК 517.984

Получены решения Биркгофа системы дифференциальных уравнений первого порядка на полуоси $x \geq 0$. Данные решения строятся в усеченных секторах плоскости спектрального параметра λ и имеют экспоненциальные асимптотики при каждом фиксированном x . Специфика рассмотренного случая заключается в том, что вводя параметр $\alpha \geq 0$, мы получаем возможность построения решений для сколь угодно малых λ при $\alpha \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений, решения Биркгофа, асимптотические формулы.

On Birkhoff-type solutions of systems of differential equations on half-line

We obtain Birkhoff-type solutions of systems of first-order differential equations on the half-line $x \geq 0$. These solutions, being constructed in certain truncated sectors of the spectral parameter λ plane, for each fixed x , have exponential asymptotics. The specifics of the considered case is that introducing a parameter $\alpha \geq 0$, we can construct the solutions for arbitrarily small λ as $\alpha \rightarrow \infty$.

Keywords: systems of differential equations, Birkhoff-type solutions, asymptotic formulae.

Рассмотрим систему уравнений

$$y' = (\lambda V(x) + A(x) + C(x, \lambda))y, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

со спектральным параметром $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ относительно вектор-функции $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^t$, компоненты которой локально абсолютно непрерывны. В (1) V , A и C являются квадратными матрицами порядка n , которые удовлетворяют следующим условиям:

I. $V(x) = r(x) \operatorname{diag}\{\omega_j\}_{j=1}^n$, где $r \in L_{loc}[0, \infty)$, $r > 0$ п.в., а числа ω_j , $j = \overline{1, n}$ — все корни n -й степени из 1.

II. $A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1}^n$, где $a_{ij} \in L[0, \infty)$.

III. $C(x, \lambda) = [c_{ij}(x, \lambda)]_{i,j=1}^n$, где c_{ij} являются голоморфными отображениями из $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ в $L[0, \infty)$. Кроме того,

$$\max_{i,j=\overline{1,n}} \|c_{ij}(\cdot, \lambda)\|_{L[0,\infty)} \rightarrow 0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта №21-71-10001 РНФ (<https://rscf.ru/en/project/21-71-10001/>).

Кузнецова Мария Андреевна, к.ф.-м.н., аспирант, СГУ (Саратов, Россия); Kuznetsova Maria (Saratov State University, Saratov, Russia)

$$\exists m(\alpha) > 0, \alpha \geq 0: m(\alpha) \rightarrow 0, \sup_{\substack{|\lambda| > m(\alpha), \\ i, j = \overline{1, n}}} \|c_{ij}(\cdot, \lambda)\|_{L[\alpha, \infty)} \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \infty.$$

К системам вида (1) с условиями I–III сводятся уравнения n -го порядка с сингулярными коэффициентами (см. [1, 2]). При этом построение биркгофовских систем решений имеет важное значение для исследования прямых и обратных спектральных задач (см. [2, 3]).

Пусть $\Gamma_m = \{\lambda \in \mathbb{C}: \arg \lambda \in (\frac{\pi(m-1)}{n}, \frac{\pi m}{n})\}$, где $m \in \overline{1, 2n}$ фиксировано. Можно выбрать такую нумерацию $\{\omega_j\}_{j=1}^n$, что

$$\operatorname{Re} \lambda \omega_1 > \operatorname{Re} \lambda \omega_2 > \dots > \operatorname{Re} \lambda \omega_n, \quad \lambda \in \Gamma_m.$$

Теорема 1. При каждом значении параметра $\alpha \geq 0$ существует фундаментальная система решений (1) $Y(x, \lambda) = [y_{jk}(x, \lambda)]_{j,k=1}^n$, определенная при $\lambda \in \overline{\Gamma_m^\alpha}$, где $\Gamma_m^\alpha := \{\lambda \in \Gamma_m, |\lambda| > \lambda_\alpha\}$ — усечённый сектор, $\lambda_\alpha > 0$. При этом выполнены следующие свойства:

1) При $j, k = \overline{1, n}$ и каждом фиксированном $x \geq 0$ функция $y_{jk}(x, \lambda)$ голоморфна в Γ_m^α .

2) При $j, k = \overline{1, n}$ равномерно по $x \geq \alpha$

$$y_{jk}(x, \lambda) = \exp \left(\int_\alpha^x a_{jj}(t) dt + \lambda \omega_k \int_\alpha^x r(t) dt \right) (\delta_{jk} + o(1)), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

где δ_{jk} — символ Кронекера.

3) $\lambda_\alpha \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \infty$.

Литература

1. Савчук А.М., Шкаликов А.А. Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями // Матем. сб., **211**:11 (2020), 129-166
2. Bondarenko N.P. Inverse Spectral Problems for Arbitrary-Order Differential Operators with Distribution Coefficients // Mathematics, **9**:22 (2021), 2989
3. Юрко В.А. Обратные спектральные задачи и их приложения — Саратов: Изд-во Саратов. пед. ин-та, 2001.

СИСТЕМА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ-НЕЙМАНА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ОПЕРАТОРА СМЕШАННОГО ТИПА

А.Н. Кучкарова
kuchkarova_aigul@mail.ru

УДК 517.518

Найдены собственные значения спектральной задачи для вырождающегося оператора смешанного типа и построена соответствующая система собственных функций

Ключевые слова: Ключевые слова: уравнение смешанного типа, собственные числа, собственные функции.

Construction of a system of eigenfunctions of the Tricomi-Neumann type problem for a degenerate operator of mixed type

Eigenvalues of the spectral problem for the degenerate operator of mixed type are found and the corresponding eigenfunctions system is constructed

Keywords: mixed type equation, eigenvalues, eigenfunctions.

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} + \lambda^2 \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u = 0, \quad (1)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $m > 0$, в области D , ограниченной: 1) "нормальной" кривой $\Gamma_0 : x^2 + \frac{1}{\alpha^2} y^{2\alpha} = 1$, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A_1(-1, 0)$ и $A_2(1, 0)$; 2) характеристиками OC ($x - \frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha = 0$) и CA_2 ($x + \frac{1}{\alpha}(-y)^\alpha = 1$) уравнения (1) при $y < 0$, где $C = (\frac{1}{2}, -(\frac{\alpha}{2})^{\frac{1}{\alpha}})$, $O = (0, 0)$, $\alpha = \frac{m+2}{2}$.

Обозначим $D_0 = D \cap \{y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$.

В области D для уравнения (1) поставим следующую спектральную задачу.

Задача. Найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им функции $u(x, y)$, удовлетворяющие условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_0 \cup D_1), \quad (2)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_0 \cup D_1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial N} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (4)$$

$$u_y(x, 0) = 0, \quad -1 < x < 0, \quad (5)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in OC. \quad (5)$$

Найдены собственные значения и построены в явном виде собственные функции задачи (2)-(6) для уравнения (1)

Отметим, что ранее в работах [1]-[3] построены собственные функции задач Трикоми, Трикоми-Неймана и Геллерстедта.

Литература

1. *Сабитов К.Б., Кучкарова А.Н.* Спектральные свойства решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа и их применения // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42. № 5. С.1147-1161.
2. *Сабитов К.Б., Бибакова С.Л.* Построение собственных функций задачи Трикоми-Неймана для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением и их применение // Математические заметки. 2003. Т. 74. № 1. С. 76-87.
3. *Кучкарова А.Н.* Построение системы собственных функции задачи Трикоми- Неймана для вырождающегося оператора смешанного типа. // Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В.А.Садовниченко Современные проблемы математики и механики (г. Москва, 14 - 15 мая 2019г.) с.314-316

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА

А.С. Макин
alexmakin@yandex.ru

УДК 517.984.52

В настоящей работе изучается полнота системы корневых функций оператора Дирака с суммируемым комплекснозначным потенциалом и краевыми условиями, не являющимися регулярными. Также получена в явном виде фундаментальная система решений рассматриваемого оператора.

Ключевые слова: оператор Дирака, нерегулярные и вырожденные краевые условия, полнота системы корневых функций.

On the completeness of root function system of the non-self adjoint Dirac operator

The paper is concerned with the completeness property of root functions of the Dirac operator with summable complexvalued potential and non-regular boundary conditions. We also obtain explicit form for the fundamental solution system of the considered operator.

Keywords: Dirac operator, irregular and degenerate boundary conditions, completeness of root function systems.

В настоящей работе изучается система Дирака

$$By' + Vy = \lambda y, \quad (1)$$

где $y = \text{col}(y_1(x), y_2(x))$,

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & P(x) \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix},$$

функции $P, Q \in L_1(0, \pi)$, с двухточечными краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_1(y) &= a_{11}y_1(0) + a_{12}y_2(0) + a_{13}y_1(\pi) + a_{14}y_2(\pi) = 0, \\ U_2(y) &= a_{21}y_1(0) + a_{22}y_2(0) + a_{23}y_1(\pi) + a_{24}y_2(\pi) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где коэффициенты a_{jk} – произвольные комплексные числа, а строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы.

Макин Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., менеджер, ООО С.П.К (Москва, Россия);
Alexander Makin (Limited liability company S.P.K, Moscow, Russia)

Оператор $\mathbb{L}\mathbf{y} = B\mathbf{y}' + V\mathbf{y}$ является линейным оператором в пространстве $\mathbb{H} = L_2(0, \pi) \oplus L_2(0, \pi)$ с областью определения $D(\mathbb{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0, \pi] \oplus W_1^1[0, \pi] : \mathbb{L}\mathbf{y} \in \mathbb{H}, U_j(\mathbf{y}) = 0 \ (j = 1, 2)\}$.

Обозначим через A_{jk} ($1 \leq j < k \leq 4$) определитель, составленный из j -го и k -го столбцов матрицы A .

Краевые условия (2) называются регулярными, если $A_{14}A_{23} \neq 0$, в противном случае они являются нерегулярными или вырожденными.

В [1] установлено, что система корневых функций задачи (1), (2) с регулярными краевыми условиями полна в $\mathbb{H}$. Если условия (2) не являются регулярными, то свойство полноты существенно зависит от потенциала V , в частности, в этом случае система корневых функций (1), (2) при $V(x) \equiv 0$ неполна в $\mathbb{H}$ [1]. В работах [2-4] А.В. Агibalова, А.А. Лунев, М.М. Маламуд и Л.Л. Оридорога получили ряд результатов о полноте (неполноте) системы корневых векторов оператора Дирака (1), (2) и гораздо более общих систем первого порядка. Во всех указанных работах авторы накладывали определенные условия на гладкость коэффициентов рассматриваемого оператора. Например, для задачи (1), (2) функции P, Q должны были быть по меньшей мере непрерывны на концах основного интервала. Недавно в [5] А.П. Косарев и А.А. Шкальников доказали полноту системы корневых функций задачи типа (1), (2), если коэффициенты абсолютно непрерывны и удовлетворяют некоторым дополнительным условиям на концах основного интервала.

Целью настоящей заметки является исследование свойства полноты для системы корневых функций задачи (1), (2), когда краевые условия не являются регулярными и потенциал $V \in L_1(0, \pi)$.

Теорема 1. *Предположим, что выполнено хотя бы одно из условий (3), (4)*

$$A_{14} \neq 0, \quad (3)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{\pi-h}^{\pi} P(x)dx}{h^{\rho_1}} = \nu_1 \neq 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h Q(x)dx}{h^{\rho_2}} = \nu_2 \neq 0, \quad (4)$$

$$(|A_{13}| + |A_{42}|)|\rho_1 - \rho_2| + |-A_{13}\nu_1 + A_{42}\nu_2| > 0, \quad (4)$$

где $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$; а также выполнено хотя бы одно из условий (5), (6)

$$A_{32} \neq 0, \quad (5)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_0^h P(x)dx}{h^{\rho_3}} = \nu_3 \neq 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{\pi-h}^{\pi} Q(x)dx}{h^{\rho_4}} = \nu_4 \neq 0, \quad (6)$$

$$(|A_{13}| + |A_{42}|)|\rho_3 - \rho_4| + |-A_{13}\nu_3 + A_{42}\nu_4| > 0, \quad (6)$$

где $\rho_3 > 0$, $\rho_4 > 0$. Тогда система корневых функций задачи (1), (2) полна и минимальна в $\mathbb{H}$.

Литература

1. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.

2. *Lunyov A.A., Malamud M.M.* On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications // J. Spectr. Theory. **5**:1 (2015), 17-70.

3. *Malamud M.M., Oridoroga L.L.* On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations // J. Funct. Anal. **263**:7 (2012), 1939-1980.

4. *Agibalova A.V., Malamud M.M., Oridoroga L.L.* On the completeness of general boundary value problems for 2×2 first order systems of ordinary differential equations // Methods Funct. Anal. Topol. **18**:1 (2012), 4-18.

5. *Косарев А.П., Шкаликов А. А.* Спектральные асимптотики решений 2×2 -системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Матем. заметки, **110**:6 (2021), 939–943.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ОТРЕЗКЕ

Д.М. Поляков

DmitryPolyakow@mail.ru

УДК 517.927

Рассматривается самосопряженный дифференциальный оператор четвертого порядка с негладкими, вещественными 1-периодическими коэффициентами и краевыми условиями типа Неймана. Основные результаты связаны с асимптотикой собственных значений, а также формулой следа для этого оператора.

Ключевые слова: дифференциальный оператор четвертого порядка, асимптотика собственных значений, формула следа.

Spectral properties of a fourth-order differential operator on a segment

We consider self-adjoint fourth-order differential operator with real nonsmooth 1-periodic coefficients and Neumann-type boundary conditions. We obtain high energy eigenvalues asymptotics and a trace formula for this operator.

Keywords: fourth-order differential operator, eigenvalues asymptotics, trace formula.

Рассматривается самосопряженный оператор четвертого порядка $S = S(p, q)$, действующий в пространстве $L^2(0, 1)$, вида

$$Sy = y^{(4)} + (py')' + qy, \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0, \quad (1)$$

где p, q — вещественные, периодические (периода 1) коэффициенты, $p, q \in L^1(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Этот оператор задается на следующей области определения

$$\text{Dom}(S) = \{y \in L^2(0, 1) : y'', y''', (y''' + py')' \in L^1(0, 1), \\ y^{(4)} + (py')' + qy \in L^2(0, 1), \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0\}.$$

Основная цель настоящей работы — получить асимптотику собственных значений при высоких энергиях, а также формулу следа для оператора S .

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых-кандидатов наук (проект МК-160.2022.1.1).

Поляков Дмитрий Михайлович, к.ф.-м.н., ЮМИ ВНЦ РАН (Владикавказ, Россия); Dmitry M. Polyakov (Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center RAS, Vladikavkaz, Russia)

Через μ_n , $n \in \mathbb{Z}_+$, обозначаются собственные значения оператора S . Кроме того, определим коэффициенты Фурье некоторой функции $f \in L^1(0, 1)$:

$$f_0 = \int_0^1 f(x) dx, \quad \widehat{f}_{sn} = \int_0^1 f(x) \sin \pi(2n+1)x dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. Пусть $p, q \in L^1(\mathbb{T})$. Тогда собственные значения μ_n являются простыми, вещественными и допускают следующую асимптотику

$$\mu_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^4 - \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2 (p_0 + \widehat{p}_{sn} + \rho_{1,n}) + \mathcal{O}(n), \quad \text{при } n \rightarrow +\infty,$$

где

$$\rho_{1,n} = \int_0^1 e^{-\pi(n+1/2)s} (p(s) + p(1-s)) \cdot \left(e^{-\pi(n+1/2)s} - 2 \sin \pi(n+1/2) - 2 \cos \pi(n+1/2) \right) ds.$$

Если дополнительно предположить, что $p''', q' \in L^1(\mathbb{T})$, то асимптотика в этом случае примет вид:

$$\begin{aligned} \mu_n = & \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^4 - \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2 (p_0 + \widehat{p}_{sn}) + 3\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)p(0) + \frac{p_0^2 - \|p\|^2}{8} \\ & + q_0 - \widehat{q}_{sn} - \frac{p''(0)}{2\pi(2n+1)} - \frac{4\rho_{2,n}}{\pi(2n+1)} + \frac{2q(0)}{\pi(2n+1)} + \mathcal{O}(n^{-2}), \end{aligned}$$

при $n \rightarrow +\infty$, где

$$\begin{aligned} \rho_{2,n} = & \int_0^1 e^{-\pi(n+1/2)s} \left(\frac{1}{2} (p'''(s) - p'''(1-s)) \left(\sin \pi(n+1/2)s \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{e^{-\pi(n+1/2)s}}{8} \right) + (q'(1-s) - q'(s)) \left(\sin \pi(n+1/2)s + \frac{e^{-\pi(n+1/2)s}}{4} \right) \right) ds. \end{aligned}$$

В [1, Corollary 1] была выписана "грубая" асимптотика собственных значений для оператора S в случае $p \in C^3[0, 1]$ и $q \in C^1[0, 1]$. Подобный результат также был установлен в [2, Theorem 3.1] также для гладких коэффициентов. В теореме 1 доказана более точная асимптотика оператора S в общем случае $p, q \in L^1(\mathbb{T})$.

Используя результаты теоремы 1, мы получим формулу следа для оператора S . Для этого рассмотрим оператор со сдвигом $S_t(p_t, q_t)$ вида (1), где $p_t = p(\cdot + t)$, $q_t = q(\cdot + t)$, $t \in \mathbb{T}$. Через $\mu_n(t)$ мы обозначим собственные значения оператора S_t .

Имеет место следующий результат.

Теорема 2. Пусть p'''' , $q'' \in L^1(\mathbb{T})$. Тогда имеет место формула следа

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n(t) - \mu_n(0) - 3(p(t) - p(0)) \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) + \frac{p''(t) - p''(0)}{2\pi(2n+1)} - \frac{2(q(t) - q(0))}{\pi(2n+1)} \right) = G(0) - G(t),$$

где

$$G = -\frac{p''}{2} + q - \frac{p^2}{4}.$$

При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{T}$.

Литература

1. *McLaughlin J.R.* An inverse eigenvalue problem of order four — an infinite case // *SIAM J. Math. Anal.*, **9**:3 (1978), 395-413.
2. *Kerimov N.B., Aliev Z.S.* On the basis property of the system of eigenfunctions of a spectral problem with spectral parameter in the boundary conditions // *Differ. Equat.*, **43**:7 (2007), 905-915.

О ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ПО СПЕКТРАЛЬНЫМ ДАННЫМ

А.И. Седов,
sedov-ai@yandex.ru

УДК 517.984

Для дифференциальных операторов с непрерывной задержкой рассматривается задача: для произвольной строго возрастающей положительной последовательности чисел найти такую функцию задержки, чтобы собственные значения дифференциального оператора, порождённые уравнением, совпадали с этой последовательностью.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, собственные числа, обратная задача спектрального анализа, непрерывное запаздывание.

About the problem of restoring continuous delay from spectral data

The article considers the perturbed boundary-value problem of differential operators with a continuous delay. The problem is considered: for an arbitrary strictly increasing positive sequence of numbers, find such a delay function that the eigenvalues of the differential operator generated by the equation coincide with this sequence.

Keywords: differential operator, eigenvalues, inverse spectral problem, continuous delay.

Рассмотрим граничную задачу [1]: по заданной возрастающей последовательности чисел $\xi_n > 0$ найти функцию p , для которой краевые задачи

$$-y''(x) + (2 - p'(x))y(x - p(x)) = \xi_n y(x), \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

имеют решения. Будем полагать, что строго возрастающая функция p с непрерывной производной, удовлетворяет условиям: $p(0) = 0$, $p(\pi) = \pi$, $\|p'\|_{(L_2(0,\pi))} \leq \|p\|_{(L_2(0,\pi))}$.

В работе [1] показано, что при некоторых ограничениях на последовательность ξ_n такая функция p существует. Обоснован алгоритм поиска такой функции. Приведен численный пример реализации алгоритма.

В работе [2] рассмотрена аналогичная задача для сингулярных дифференциальных задач

$$-(1 - x^2)y''(x) + 2xy'(x) +$$

Седов Андрей Иванович, к.ф.-м.н., доцент, УрГЭУ (Екатеринбург, Россия);
Andrey Sedov (Ural State University of Economics, Yekaterinburg, Russia)

$$(2 + p'(x)\sqrt{1 - x^2})y(\cos(\arccos x - p(x))) - y(1) = \xi_n y(x).$$

Показано, что при некоторых ограничениях на последовательность ξ_n такая функция p существует. Обоснован алгоритм поиска такой функции и приведен численный пример реализации этого алгоритма.

Таким образом, на этих примерах показано, что для обыкновенных дифференциальных операторов обратная задача спектрального анализа по определению непрерывного запаздывания может быть решена.

Для аналогичной задачи по определению непрерывного запаздывания для краевых задач с частными производными пока имеется только частичное решение задачи.

Литература

1. *Sedov A.I., Kameneva G.A., Bondarenko T.A.* About one problem of identification of delay by spectral data // Lecture notes in electrical engineering, **729** (2021), 306-315
2. *Седов А.И.* Определение непрерывного запаздывания в спектральной задаче для оператора Чебышёва первого рода // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. **14:4** (2022), 34-39

О НОВЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Я.Т. Султанаев,

Э.А. Назирова

Н.Ф. Валеев

sultanaevyt@gmail.com, ellkid@gmail.com, valeevnf@yandex.ru

УДК 517.928.1

В докладе обсуждается новый подход, который позволяет строить асимптотики решений обыкновенных дифференциальных уравнений как второго, так и произвольных порядков с осциллирующими коэффициентами на полуоси

Ключевые слова: асимптотические методы, уравнение Штурма-Лиувилля, осциллирующие коэффициенты

On new asymptotic formulas for solution of a Sturm-Liouville equation with oscillating potential

In this note we show the development of a method that allows one to construct asymptotics for solutions to ordinary differential equations of arbitrary order with oscillating coefficients on the semiaxis.

Keywords: asymptotic methods, Sturm—Liouville equation, oscillating coefficients

Изучению асимптотических свойств решений сингулярных уравнений Штурма–Лиувилля и дифференциальных уравнений произвольного порядка посвящено значительное число работ (см. [3] и библиографию). Однако в этих работах, как правило, исследования проводятся при предположении о некотором "правильном росте" коэффициентов уравнения на бесконечности. В данном докладе обсуждается подход, предложенный авторами, для построения асимптотик сингулярных ОДУ в случае, когда коэффициенты содержат осцилляцию и условия регулярности не выполнены.

Рассмотрим модельное уравнение

$$y'' + \left(\mu^2 + \frac{\sin x}{x^\alpha} \right) y = 0, \quad x_0 \leq x < \infty, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \alpha > 0. \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФН (проект № 23-21-00225).

Султанаев Яудат Талгатович, д.ф.-м.н., профессор, БГПУ (Уфа, Россия); Sultanaev Yaudat Talgatovich (Bashkir State Pedagogical University named after Akmulla, Ufa, Russia)

Назирова Эльвира Айратовна, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Nazirova Elvira (Ufa University of Science and Technology, Russia)

Валеев Нурмухамет Фуатович, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Valeev Nurmukhamet Fuatovich (Institute of Mathematics with Computing Centre — Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Russia)

Основным результатом статьи является следующая

Теорема. Пусть для уравнения (1) $1/3 < \alpha < 1/2$ и параметр μ такой, что $\mu \neq \pm 1, \pm 1/2$.

Тогда для фундаментальной системы решений уравнения (1) при $x \rightarrow +\infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ie^{-ip(x)} + o(1) & -ie^{ip(x)} + o(1) \\ e^{-ip(x)} + o(1) & e^{ip(x)} + o(1) \end{pmatrix},$$
$$p(x) = \frac{x^{1-2\alpha}}{4(1-2\alpha)(4\mu^3 - \mu)} + \mu x. \quad (2)$$

Исследования, проведенные в [1] и ряде других работ авторов, а так же в данной работе, позволяют в рамках изложенного подхода изучать асимптотическое поведение фундаментальной системы решений уравнений произвольного порядка в широких классах коэффициентов, содержащих осцилляцию, а так же, вообще говоря, в классах обобщенных функций.

Литература

1. Валеев Н.Ф., Назирова Э.А., Султанов Я.Т., Построение асимптотик решений дифференциальных уравнений Штурма-Лиувилля в классах осциллирующих коэффициентов // Вестн. моск. ун-та. сер. 1, математика. механика. **123**:3 (2023), 61-65
2. А.М.Савчук, А.А.Шкаликос Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами// Матем. заметки, **66**:6 (1999), 897-912
3. Everitt W. N., Markus L. Boundary Value Problems and Symplectic Algebra for Ordinary Differential and Quasi-differential Operators. American Mathematical Soc., 1999.

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ДВУХМАГНОННЫХ СИСТЕМ С ТРЕХСПИНОВЫМ ОБМЕННЫМ ГАМИЛЬТониАНОМ

С.М. Ташпулатов

sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru,
toshpul@inp.uz

УДК 517.984

Рассматривается двухмагнонная система с трехспиновым обменным гамильтонианом и исследуется спектр системы. Показано, что спектр оператора состоит из непрерывного спектра и не более чем пяти собственных значений, лежащих вне области непрерывного спектра системы.

Ключевые слова: двух магнонная система, спектр, непрерывный спектр, дискретный спектр, трех спиновый обменный гамильтониан.

Spectra of the energy operator of two-magnon system with three-spin exchange Hamiltonian

We consider operator energy of two-magnon systems in the three-spin exchange Hamiltonian and investigated of spectra of the system. We show, the spectra of operator in consists of continuous spectrum and of no more that five eigenvalues, lying the outside the domain of continuous spectrum of the system.

Keywords: two-magnon systems, spectra, continuous spectrum, discrete spectrum, three-spin exchange Hamiltonian.

We consider the energy operator of two-magnon systems with three-spin exchange Hamiltonian in the lattice and describe the spectrum of this system. Hamiltonian of the considering system has the form [1]

$$H = J \sum_{m,t} (\vec{S}_m \vec{S}_{m+\tau})(\vec{S}_{m+\tau} \vec{S}_{m+2\tau}), \quad (1)$$

where J three-spin exchange parameter, $\tau = \pm e_j, j = 1, 2, \dots, \nu$, here e_j are unit mutually orthogonal vectors, $\vec{S}_m = (S_m^x, S_m^y, S_m^z)$ is the operator of the atomic spin s at the site m . Hamiltonian H acts in a symmetric Fock space $\mathcal{H}$. We let φ_0 denote the vector, called the vacuum, uniquely defined by the conditions $S_m^+ \varphi_0 = 0$ and $S_m^z \varphi_0 = s \varphi_0$, where $\|\varphi_0\| = 1$. We set $S_m^\pm = S_m^x \pm i S_m^y$, where S_m^- and S_m^+ are the magnon creation and annihilation operators at the site m . The vector $S_m^- S_n^- \varphi_0$ describes the state of the system of two magnons at the sites m and n with the spin s . The

Ташпулатов Саъдулла Мамаражабович, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, ИЯФ (Ташкент, Узбекистан); Sa'dulla Tashpulatov (Institute of Nuclear Physics of Academy of Science of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

vectors $S_m^- S_n^- \varphi_0$ constitute an orthonormal system. The closure the vector space spanned by them is denoted by $\mathcal{H}_2$. This space is called the space of two-magnon states of the operator H . We denote by H_2 the restriction of operator H to the space $\mathcal{H}_2$.

Theorem 1. *The space $\mathcal{H}_2$ is invariant under the operator H . The operator H_2 is bounded and self-adjoint; it generates a bounded self-adjoint operator $\bar{H}_2$ acting in the space $l_2(Z^\nu \times Z^\nu)$ as*

$$\begin{aligned}
H = J \sum_{\tau} \{ & [(2s^2 - 2s)\delta_{p,q+\tau} + (2s^2 - 2s)\delta_{p+\tau,q} + 2s^2 + s^2\delta_{p+2\tau,q} + s^2\delta_{p,q+2\tau} + \\
& + s^2\delta_{p,q}]f(p, q) + [(\frac{1}{2}s - s^2)\delta_{p,q+\tau} - s^2\delta_{p,q+2\tau} - s^2\delta_{p+\tau,q} - s^2\delta_{p,q}]f(p - \tau, q) + \\
& + [(\frac{1}{2}s - s^2)\delta_{p+\tau,q} - s^2\delta_{p+2\tau,q} - s^2\delta_{p,q} - s^2\delta_{p,q+\tau}]f(p, q - \tau) + [(\frac{3}{2}s - \frac{3}{2}s^2)\delta_{p+\tau,q} + \\
& + (s - s^2)\delta_{p,q+\tau} - 2s^2 - s^2\delta_{p,q} + (s - s^2)\delta_{p+2\tau,q}]f(p + \tau, q) + [(\frac{3}{2}s - \frac{3}{2}s^2)\delta_{p,q+\tau} + \\
& + (s - s^2)\delta_{p+\tau,q} - 2s^2 - s^2\delta_{p,q} + (s - s^2)\delta_{p,q+2\tau}]f(p, q + \tau) + [s^2\delta_{p,q+\tau} + s^2\delta_{p+\tau,q}] \times \\
& \times f(p - \tau, q - \tau) + [2s^2\delta_{p+2\tau,q} + s^2\delta_{p,q}]f(p + \tau, q - \tau) + [2s^2\delta_{p,q+2\tau} + s^2\delta_{p,q}] \times \\
& \times f(p - \tau, q + \tau) + [-\frac{1}{2}s\delta_{p,q+2\tau} - s\delta_{p,q+\tau} + s^2]f(p, q + 2\tau) + [-\frac{1}{2}s\delta_{p+2\tau,q} - \\
& - s\delta_{p+\tau,q} + s^2]f(p + 2\tau, q) + [s^2\delta_{p+\tau,q} + s^2\delta_{p,q+\tau}]f(p + \tau, q + \tau), \quad (2)
\end{aligned}$$

where $\delta_{k,j}$ is the Kronecker symbol. The operator H_2 itself acts on a vector $\psi \in \mathcal{H}_2$ as

$$H_2 = \sum_{p,q,\tau} (\bar{H}_2 f)(p, q) S_p^- S_q^- \varphi_0.$$

In the quasimomentum representation the operator H_2 acts according to the formul:

$$\begin{aligned}
(\tilde{H}_2 f)(\lambda, \mu) = & [4s^2 - 8s^2 \cos \frac{\lambda + \mu}{2} \cos \frac{\lambda - \mu}{2} + 4s^2 \cos(\lambda + \mu) \cos(\lambda - \mu)]f(\lambda, \mu) + \\
& + \int_{T^\nu} \{ [8s^2 - 8s] \cos \frac{\lambda - \mu}{2} + (8s - 18s^2) \cos \frac{\lambda + \mu}{2} \} \cos(\frac{\lambda + \mu}{2} - t) + [4s^2 \cos(\lambda - \mu) - \\
& - 2s \cos(\lambda + \mu)] \cos(\lambda + \mu - 2t) + 2s^2 + 4s^2 \cos(\lambda - \mu) + (4s - 8s^2) \cos \frac{\lambda - \mu}{2} \times \\
& \times \cos(\frac{\lambda + \mu}{2} - 2t) + (4s - 8s^2) \cos(\lambda - \mu) \cos(\lambda + \mu - t) + \\
& + (8s^2 - 4s) \cos \frac{\lambda - \mu}{2} \cos(\frac{3\lambda + 3\mu}{2} - t) \} f(t, \lambda + \mu - t) dt. \quad (3)
\end{aligned}$$

Let the total quasimomentum of the two magnon system $\lambda + \mu = \Lambda$ be fixed. We let $L_2(\Gamma_\Lambda)$ denote the space of functions that are square integrable on the manifold $\Gamma_\Lambda = \{(\lambda, \mu) : \lambda + \mu = \Lambda\}$. It is known that the operator $\tilde{H}_2$ and the space $\mathcal{H}_2 \equiv L_2((T^\nu)^2)$ can be decomposed into a direct integral

of operators $\tilde{H}_{2\Lambda}$ and spaces $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda} = L_2(\Gamma_\Lambda)$, $\tilde{H}_2 = \bigoplus \int_{T^\nu} \tilde{H}_{2\Lambda} d\Lambda$, $\tilde{\mathcal{H}}_2 = \bigoplus \int_{T^\nu} \tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda} d\Lambda$, such that the spaces $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ are invariant with respect to the operators $\tilde{H}_{2\Lambda}$ and each operator $\tilde{H}_{2\Lambda}$ acts in space $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ according to the formula

$$(\tilde{H}_{2\Lambda} f_\Lambda)(\lambda) = h_\Lambda(\lambda) f_\Lambda(\lambda) + \int_{T^\nu} h_{1\Lambda}(\lambda, t) f_\Lambda(t) dt,$$

where $h_\Lambda(\lambda) = 4s^2 - 8s^2 \cos \frac{\Lambda}{2} \cos(\frac{\Lambda}{2} - \lambda) + 4s^2 \cos \Lambda \cos(\Lambda - 2\lambda)$, $h_{1\Lambda}(\lambda, t) = [(8s^2 - 8s) \cos(\frac{\Lambda}{2} - \lambda) + (8s - 18s^2) \cos \frac{\Lambda}{2}] \cos(\frac{\Lambda}{2} - t) + [4s^2 \cos(\Lambda - 2\lambda) - 2s \cos \Lambda] \cos(\Lambda - 2t) + 2s^2 + 4s^2 \cos(\Lambda - \lambda) + (4s - 8s^2) \cos(\frac{\Lambda}{2} - \lambda) \cos(\frac{\Lambda}{2} - 2t) + (4s - 8s^2) \cos(\Lambda - 2\lambda) \cos(\Lambda - t) + (8s^2 - 4s) \cos(\frac{\Lambda}{2} - \lambda) \cos(\frac{3\Lambda}{2} - t)$, here $f_\Lambda(\lambda) = f(\lambda, \Lambda - \lambda)$.

It is known that the continuous spectrum of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda}$ is independent of $h_{1\Lambda}(\lambda, t)$ and coincides with the segment $[m'_\Lambda, M'_\Lambda]$, where $m'_\Lambda = \inf_{x \in T^\nu} h_\Lambda(x)$, $M'_\Lambda = \sup_{x \in T^\nu} h_\Lambda(x)$.

Definition 1. The eigenfunction $\varphi_\Lambda \in L_2(T^\nu \times T^\nu)$ of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda}$ corresponding to an eigenvalue $z_\Lambda \notin [m'_\Lambda, M'_\Lambda]$ is called a bound state (BS) of operator $\tilde{H}_{2\Lambda}$ with the quasimomentum Λ , and z_Λ is called the energy of this state.

Theorem 2. If total quasimomentum of the two-magnon subsystem $\Lambda = 0$, then the discrete spectrum of operator $\tilde{H}_{2\Lambda}$ is consists of no more that three eigenvalue, and this eigenvalues lying the outside the continuous spectrum of operator $\tilde{H}_2$.

Theorem 3. If total quasimomentum of the two-magnon subsystem $\Lambda = \frac{\pi}{2}$, then the discrete spectrum of operator $\tilde{H}_{2\Lambda}$ is consists of no more that five eigenvalue, and this eigenvalues lying the outside the continuous spectrum of operator $\tilde{H}_2$.

Theorem 4. If total quasimomentum of the two-magnon subsystem $\Lambda = \pi$, then the continuous spectrum of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda}$ is consists of segment $\sigma_{cont}(\tilde{H}_2) = [0, 8s^2\nu]$, and discrete spectrum of operator $\tilde{H}_{2\Lambda}$ is consists of no more that five eigenvalue, and this eigenvalues lying the outside the continuous spectrum of operator $\tilde{H}_2$.

Theorem 5. If total quasimomentum of the two-magnon subsystem $0 < \Lambda < 2\pi$, then the continuous spectrum of the operator $\tilde{H}_{2\Lambda}$ is consists of segment $\sigma_{cont}(\tilde{H}_2) = [m'_\Lambda, M'_\Lambda]$, where $m'_\Lambda = \inf_{x \in T^\nu} h_\Lambda(x)$, $M'_\Lambda = \sup_{x \in T^\nu} h_\Lambda(x)$ and discrete spectrum of operator $\tilde{H}_{2\Lambda}$ is consists of no more that five eigenvalue, and this eigenvalues lying the outside the continuous spectrum of operator $\tilde{H}_2$.

Литература

1. Nagaev E.L. Anomalous magnetic structures and phase transitions in non-Heisenberg magnets// Advances in physical sciences, **132**:1 (1982), 61-103

О НЕОБХОДИМОМ И ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ В ТЕОРИИ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ

З.Ю. Фазуллин
fazullinzu@mail.ru

УДК 517.984.4, 517.547

Настоящая работа посвящена изучению формул регуляризованных следов симметрических L_0 -компактных возмущений дискретного самосопряженного полуограниченного снизу оператора L_0 в сепарабельном гильбертовом пространстве. Мы исследуем необходимое и достаточное условие для двух случаев: равенства нулю и равенства конечному числу — суммы регуляризованного следа со скобками с вычетом первой поправки теории возмущений. При этом рассматривается конкретная скобка суммирования, которая, как правило, возникает при исследовании формул регуляризованных следов возмущений дифференциальных операторов в частных производных.

Ключевые слова: след оператора, резольвента, формула следов, теория возмущений, дискретный спектр.

On the necessary and sufficient condition in the theory of regularized traces

We study the regularized trace formulae for symmetric L_0 -compact perturbations of a self-adjoint lower semi-bounded operator L_0 with a discrete spectrum in a separable Hilbert space. We explore a necessary and sufficient condition for two cases, namely, as the regularized trace with brackets and deduction of the first corrector of the perturbation theory vanishes or is equal to a finite number. We consider a certain summation bracket, which usually arises in the theory of regularized traces of the perturbations of partial differential operators.

Keywords: operator trace, resolvent function, trace formula, perturbation theory, discrete spectrum.

Пусть L_0 — дискретный самосопряженный полуограниченный снизу оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H , $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — спектр оператора L_0 , точки λ_k пронумерованы без учета их кратностей: $(\lambda_k < \lambda_{k+1}, k = 1, 2, \dots)$ Обозначим через P_k ортогональный проектор на собственное подпространство оператора L_0 , соответствующее собственному числу λ_k , и пусть $\nu_k = \dim \text{Ran } P_k$ — кратность собственного числа λ_k , так что

$$P_k(\cdot) = \sum_{i=1}^{\nu_k} (\cdot, f_{k_i}) f_{k_i},$$

Исследование выполнено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, согл. № 075-02-2023-950.

Фазуллин Зиганур Юсупович, д.ф.-м.н., зав. каф., УУНТ (Уфа, Россия); Ziganur Fazullin (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

где $\{f_{k_i}\}_{i=1}^{\nu_k}$ – базис из собственных функций оператора L_0 в подпространстве $P_k H$. Далее, пусть V симметрический L_0 – компактный оператор в H и $\mu_i^{(k)}$, $i = \overline{1, \nu_k}$, $k = 1, 2, \dots$, – группа собственных чисел оператора $L = L_0 + V$, на которые расщепляется собственное число λ_k оператора L_0 при возмущении оператором V , пронумерованные в порядке роста и с учетом кратностей. Предположим, что оператор $K_0(\lambda) = (R_0(-\lambda)V)^2 R_0(-\lambda)$ $\lambda > 0$ – ядерный.

Здесь мы приводим необходимое и достаточное условие равенства нулю и конечному числу отличного от нуля суммы ряда, в одном из способов расстановки скобок суммирования. А именно, рассматривается ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\nu_k} (\lambda_k - \mu_i^{(k)}) + \text{tr } P_k V \right]. \quad (1)$$

Как правило, такая расстановка скобок возникает при исследовании, например, формул следов возмущений модельных операторов в частных производных математической физики (см. [1]–[4]).

Введем функции:

$$\tau(s) = \sum_{\lambda_k < s} \sum_{\lambda_m \geq s} a_{mk} (\lambda_m - \lambda_k)^{-1},$$

где $a_{mk} = \text{tr } P_k V P_m V$,

$$\psi(t) = \sum_{\lambda_k < t} \left(a_{kk} - \sum_{i=1}^{\nu_k} (\lambda_k - \mu_i^{(k)})^2 \right),$$

$$f_1(\lambda) = 3 \int_0^{\infty} \frac{2 \int_0^t \tau(s) ds + \psi(t)}{(t + \lambda)^4} dt$$

Справедливы утверждения (см. [5]):

Теорема 1. Пусть ряд (1) сходится. Тогда для равенства нулю суммы ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы

$$f_1(\lambda) = o(\lambda^{-2}) \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Теорема 2. Пусть ряд (1) сходится. Тогда для справедливости соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = c_0 > 0$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$f_1(\lambda) \sim c_0 \lambda^{-2} \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Литература

1. Садовничий В.А., Дубровский В.В. Классическая формула регуляризованного следа для собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на сфере S^2 // Докл. АН СССР, **319**:1 (1991), 61-62.
2. Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю. Формула первого регуляризованного следа для возмущения оператора Лапласа-Бельтрами // Дифф. уравнения, **37**:3 (2001), 402-409.
3. Фазуллин З.Ю., Муртазин Х.Х. Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора // Матем. сборник, **192**:5 (2001), 87-124.
4. Фазуллин З.Ю., Нугаева И.Г. Спектр и формула следов финитного возмущения двумерного гармонического осциллятора в полосе // Дифф. уравнения, **55**:5 (2019), 691-701.
5. Фазуллин З.Ю., Абузярова Н.Ф. О необходимом и достаточном условии в теории регуляризованных следов // Уфимск. матем. журн., **12**:4 (2020), 92-100.

ЧИСЛЕННОЕ СРАВНЕНИЕ СПЕКТРОВ СИСТЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА И УРАВНЕНИЯ ОРРА-ЗОММЕРФЕЛЬДА

А.В. Шарова, Э.А. Бибердорф, a.sharova@g.nsu.ru,
e.biberdorf@g.nsu.ru

УДК 519.6

Для проведения численного сравнительного анализа спектров системы Навье-Стокса и уравнения Орра-Зоммерфельда в настоящей работе ставятся спектральные задачи для дифференциальных операторов Навье-Стокса, линеаризованного в окрестности плоскопараллельного течения Пуазейля, возмущенного модами, и Орра-Зоммерфельда. Данные задачи решаются численно с помощью пакетов прикладных программ. Для дискретизации используются коллокационные матричные производные.

Ключевые слова: уравнения Орра-Зоммерфельда, система Навье-Стокса, спектр, псевдоспектр.

Comparison of the spectra of the Navier-Stokes system and the Orr-Sommerfeld equation

In order to perform a numerical comparative analysis of the spectra of the Navier-Stokes system and the Orr-Sommerfeld equation, spectral problems for the Navier-Stokes differential operators linearized in the vicinity of the plane-parallel Poiseuille flow perturbed by modes and Orr-Sommerfeld are posed in this paper. These problems are solved numerically using application software packages, having previously discretized differential operators. Collocation matrix derivatives are used for discretization.

Keywords: Orr-Sommerfeld equations, Navier-Stokes system, spectrum, pseudospectrum.

Еще с 19 века остается важным изучение условий, при которых теряется устойчивость различных состояний и течений жидкости. С математической точки зрения, возникновение турбулентности в вязких несжимаемых жидкостях, движение которых описывается уравнениями Навье-Стокса, соответствует неустойчивости решения системы данных дифференциальных уравнений в частных производных. Из опыта известно, что эффективное решение задач устойчивости течений вязкой жидкости возможно только численно, при этом результат численного исследования спектра дифференциального оператора зависит от

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект No FWNF-2022-0008)

Шарова Алёна Витальевна, студентка, НГУ (Новосибирск, Россия); Alena Sharova (Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

Бибердорф Элина Арнольдовна, к.ф.-м.н., с.н.с, ИМ СО РАН (Новосибирск, Россия); Elina Biberdorf (Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia)

способа его дискретизации. Одним из распространенных для исследования гидродинамической устойчивости является спектральный метод, суть которого заключается в том, чтобы определить расположение спектра дифференциального оператора, линеаризованного в окрестности основного течения. Для плоско-параллельных течений вязкой несжимаемой жидкости спектральная задача для линеаризованной системы Навье-Стокса может быть сведена к задаче о спектре оператора четвертого порядка Орра-Зоммерфельда [1].

Целью работы является сравнение и анализ численно полученных спектров дифференциального оператора системы Навье-Стокса и полученного из нее оператора Орра-Зоммерфельда четвертого порядка.

Оператор Орра-Зоммерфельда для плоско-параллельного течения Пуазейля имеет вид

$$\{i(\alpha U - w)(\frac{d^2}{dy^2} - k^2) - i\alpha U'' - \frac{1}{Re}(\frac{d^2}{dy^2} - k^2)^2\}\hat{v} = 0,$$

где $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $Re = UL/\nu$ - число Рейнольдса, U, L - характерные скорость и длина рассматриваемого течения, ν - кинематический коэффициент вязкости среды, $U(y) = 1 - y^2$ - профиль скорости течения Пуазейля. Условия прилипания и непротекания влекут за собой краевые условия для $\hat{v}$:

$$\hat{v}|_{y=\pm 1} = 0, \quad \hat{v}'|_{y=\pm 1} = 0.$$

Оператор, соответствующий системе Навье-Стокса, линеаризованной относительно плоско-параллельного течения Пуазейля, выглядит следующим образом

$$A_{NS} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ p \end{pmatrix} = i\omega B_{NS} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ p \end{pmatrix},$$

$$u_1|_{y=1} = u_1|_{y=-1} = 0,$$

$$u_2|_{y=1} = u_2|_{y=-1} = 0,$$

$$u_3|_{y=1} = u_3|_{y=-1} = 0,$$

$$A_{NS} = -\frac{1}{Re} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d^2}{dy^2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dy} + \begin{pmatrix} C & \frac{\partial U}{\partial y} & 0 & i\alpha \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & i\beta \\ i\alpha & 0 & i\beta & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{NS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = U i \alpha + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{Re}.$$

Используемый численный метод основан на аппроксимации собственных функций полиномами Чебышева в точках Гаусса-Лобатто [2]. Для исследования спектров дискретизированных операторов использовались как спектральные портреты так и стандартные методы [3]. Метод спектральных портретов основан на визуализации так называемого псевдоспектра, то есть такого множества чисел λ , для которых матрица $A - \lambda I$ «почти вырождена»:

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \geq 1/\varepsilon,$$

где ε – малое положительное число.

В результате, в частности, было установлено значительное отличие критических собственных значений (т. е. тех, положением которых определяется устойчивость или неустойчивость). Собственное значение оператора Орра-Зоммерфельда пересекает границу области неустойчивости при $Re=5772$, а собственное число оператора Навье-Стокса пересекает границу области неустойчивости при $Re=5777$. Эта разница связана с различным накоплением погрешностей арифметических действий с машинными числами. При этом радиус спектральных пятен оператора Орра-Зоммерфельда значительно меньше, чем у оператора системы Навье-Стокса, следовательно, можно утверждать, что они вычисляются точнее.

Сведение системы уравнений к уравнению высокого порядка является распространенным подходом, который, однако, осуществим не всегда. На примере рассмотренных выше операторов мы показали, что для обоснованного вывода об устойчивости решений, необходимо рассматривать не только спектры, но и псевдоспектры соответствующих дифференциальных операторов.

Литература

1. А. В. Бойко, Г. Р. Грек, А. В. Довгаль, В. В. Козлов. Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях. Москва, 2006.
2. L. N. Trefethen. Spectral methods in Matlab.
3. Э. А. Бибердорф. Гарантированная точность в прикладных задачах линейной алгебры. Новосибирск, 2008.

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2023»

СЕКЦИЯ

«КОМПЛЕКСНЫЙ И

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

г. Уфа, 4 октября – 8 октября 2023 г.

О ЧИСТО МНИМЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ НУЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ, СОХРАНЯЮЩИХ ЗАДАННЫЙ КЛАСС ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Н.Ф. Абузярова, abnatf@gmail.com

УДК 517.53, 517.98

Рассматриваемая задача относится к проблеме описания нулевых (под)множеств целых функций. А именно, пусть P — некоторый класс целых функций. Какие преобразования над последовательностью нулей целой функции $\varphi \in P$, сохраняющие ее в P , можно совершать? Рассмотрены случаи, когда P — класс преобразований Фурье-Лапласа пробных ультрадифференцируемых функций или ультрараспределений с компактными носителями на интервале вещественной прямой, а возмущения нулей чисто мнимые.

Ключевые слова: целая функция, нулевое множество, ультрараспределение, преобразование Фурье-Лапласа.

On pure imaginary perturbations of zero sets preserving given class of entire functions

The problem under consideration concerns with the description of zero (sub)sets of entire functions. Namely, let P be a class of entire functions. What perturbations of zero set of entire function $\varphi \in P$ preserves it in P ? We consider the classes P equaled to the set of Fourier-Laplace transforms of test ultradifferentiable functions or the set of Fourier-Laplace transforms of ultradistributions with compact supports in an open interval of the real line. And the considered perturbations of zeros are only pure imaginary ones.

Keywords: entire function, zero set, ultradistribution, Fourier-Laplace transform.

Пусть $\omega : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — строгий канонический вес (определение см. в [1]).

Для $\varphi \in H(\mathbb{C})$, $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $c > 0$ положим

$$\|\varphi\|_{\kappa, c} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{e^{\kappa \omega(\operatorname{Re} z) + c |\operatorname{Im} z|}},$$

$$P_{\kappa, c} = \{\varphi \in H(\mathbb{C}) : \|\varphi\|_{\kappa, c} < \infty\}.$$

Определим пространства целых функций

$$\mathcal{P}_{\{n\omega\}, a} = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{n, c_n}, \quad 0 < c_n \nearrow a \leq \infty,$$

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Абузярова Наталья Фаирбаховна, д.ф.-м.н., ст. н.с., ИМ с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Natalia Abuzyarova (Institute of Mathematics with CC UFCC RAS, Ufa, Russia)

$$\mathcal{H}_{\{n\omega\},a} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} P_{-k,c_n}.$$

Ясно, что $\mathcal{H}_{\{r_n\omega\},a} \subsetneq \mathcal{P}_{\{r_n\omega\},a}$. Обозначим $M(\mathcal{P})$ и $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ множества всех мультипликаторов и делителей пространства $\mathcal{P}$, соответственно. Для заданного класса целых функций $\mathcal{P}$ символом $\mathcal{Z}_{\mathcal{P}}$ обозначена совокупность нулевых множеств функций из $\mathcal{P}$, а символом Z_{ψ} — нулевое множество целой функции ψ . Все рассматриваемые комплексные последовательности считаем не содержащими 0 и упорядоченными по возрастанию модулей вещественных частей их членов.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_j\}$, $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathcal{A} = \Lambda \setminus \mathcal{M}$, $\mathcal{B} = \mathcal{M} \setminus \Lambda$.

Будем говорить, что комплексные последовательности $\Lambda = \{\lambda_j\}$ и $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ связаны соотношением $(\mathbf{B}_{\omega})$, если для последовательностей $\mathcal{A} = \{a_j\}$ и $\mathcal{B} = \{b_j\}$ выполнены условия

$$\operatorname{Re} a_j = \operatorname{Re} b_j = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

при этом

$$\operatorname{Im} a_j = O(\omega(\alpha_j)), \quad \operatorname{Im} b_j = O(\omega(\alpha_j)), \quad j \rightarrow \infty.$$

Теорема 1. *Предположим, что строгий канонический вес ω удовлетворяет условию: $\omega(t) = O(|t|^{\rho})$, $t \rightarrow \infty$, при некотором $\rho \in (0; \frac{1}{2})$, и $0 < a \leq \infty$.*

Пусть $\mathcal{P}$ есть один из классов: $\mathcal{P}_{\{n\omega\},a}$, $\mathcal{H}_{\{n\omega\},a}$, $M(\mathcal{P}_{\{n\omega\},a})$ или $\mathcal{D}(P_{\{n\omega\},a})$.

Если комплексные последовательности $\Lambda = \{\lambda_j\}$ и $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ связаны соотношением $(\mathbf{B}_{\omega})$, то они одновременно (не) принадлежат множеству $\mathcal{Z}_{\mathcal{P}}$.

Литература

1. Абанин А.В. Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения — Москва: Наука, 2007.

СТЕПЕННЫЕ МОМЕНТЫ ОБЛАСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЕЕ ГРАНИЦЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Ф.Г. Авхадиев
Avkhadiev47@mail.ru

УДК 517.5

Рассмотрены функционалы, обобщающие функционал Сен-Венана. Получены оценки этих функционалов с использованием граничных моментов областей.

Ключевые слова: моменты области, жесткость кручения, функционал Сен-Венана.

Power moments of a domain about its boundary and their applications

We consider generalizations of the St. Venant functional and prove several estimates for the functionals using boundary moments of domains.

Keywords: domain moments, torsional rigidity, St. Venant's functional.

Пусть $n \geq 2$ — натуральное число, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область, такая, что $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Символом $C_0^1(\Omega)$ обозначим множество гладких функций $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих компактные носители в области Ω . Пусть ∇f — градиент функции f . Через $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ обозначим дифференциальный элемент объема, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с нормой $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$.

Рассмотрим следующие степенные моменты порядка $\nu \geq -1$ области Ω относительно ее границы $\partial\Omega$:

$$\int_{\Omega} \text{dist}^{\nu}(x, \partial\Omega) dx, \quad \text{где } \text{dist}(x, \partial\Omega) = \min_{y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega} |x - y|.$$

Моменты такого вида введены нами в работе [1], они оказались полезными при оценках ряда функционалов областей (см., например, [2] и [3]). Приведем три оценки, полученные в недавней статье [3] для обобщенного функционала Сен-Венана $P_q(\Omega)$, определяемого формулами:

$$P_q(\Omega) := \sup_{f \in C_0^1(\Omega), f \neq 0} P_q(f, \Omega), \quad P_q(f, \Omega) := \frac{(\int_{\Omega} |f(x)|^q dx)^{1+1/q}}{\int_{\Omega} |f(x)|^{q-1} |\nabla f(x)|^2 dx},$$

где $q \in [1, \infty)$ — фиксированное число.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-11-00066).
Авхадиев Фарит Габидинович, д.ф.-м.н., профессор, КФУ (Казань, Россия); Farit Avkhadiev (Kazan Federal University, Kazan, Russia)

1) Если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область гиперболического типа, в которой определена метрика Пуанкаре, то

$$P_q(\Omega) \geq \frac{q}{4n} \left(\int_{\Omega} \text{dist}^{2q}(x, \partial\Omega) dx \right)^{1/q}.$$

2) Если Ω – выпуклая область и $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, то

$$P_q(\Omega) \leq q^2 \left(\int_{\Omega} \text{dist}^{2q}(x, \partial\Omega) dx \right)^{1/q}.$$

3) Если Ω является λ -близкой к выпуклой с $\lambda = \lambda_0(\Omega) \in (0, \infty)$, то

$$P_q(\Omega) \leq (q+1)^2 \left(1 + \frac{\rho(\Omega)}{\lambda_0(\Omega)} \right)^{2n-2} \left(\int_{\Omega} \text{dist}^{2q}(x, \partial\Omega) dx \right)^{1/q}.$$

где $\rho(\Omega) := \sup_{x \in \Omega} \text{dist}(x, \partial\Omega)$ – внутренний радиус области Ω .

Лямбда близость области к выпуклой означает, что для любой граничной точки $y \in (\partial\Omega) \setminus \{\infty\}$ существует шар B_y радиуса λ и такой, что $y \in \partial B_y$ и $B_y \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

Будут рассмотрены также несколько других оценок из статьи [3], а также ранее неопубликованные результаты по оценкам функционала

$$\sup_{f \in C_0^2(\Omega), f \neq 0} \left(\int_{\Omega} |f(x)| dx \right)^2 \bigg/ \int_{\Omega} \text{dist}^2(x, \partial\Omega) |\Delta f(x)|^2 dx,$$

где Δ – оператор Лапласа.

Литература

1. Авхадиев Ф.Г. Геометрические характеристики областей, эквивалентные нормам некоторых операторов вложения // Материалы Межд. конф. и чебышёвских чтений, **1**, Изд-во мехмата МГУ, М. (1996), 12–14.
2. Авхадиев Ф.Г. Решение обобщенной задачи Сен-Венана // Матем. сб., **189**:12 (1998), 3–12.
3. Авхадиев Ф.Г. Теоремы вложения, связанные с жесткостью кручения и основной частотой // Изв. РАН. Серия Матем., **86**:1 (2022), 3–35.

**АСИМПТОТИКА ЦЕЛОГО РЯДА ДИРИХЛЕ НА
КРИВЫХ ОГРАНИЧЕННОГО НАКЛОНА**
Н.Н. Аиткужина, А.М. Гайсин, Р.А. Гайсин
YusupovaN@rambler.ru, Gaisinam@mail.ru,
Rashit.gajsin@mail.ru

УДК 517.53, 517.537.7

В докладе речь пойдет об асимптотическом поведении суммы целого ряда Дирихле $F(s) = \sum_n a_n e^{\lambda_n s}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, на кривых ограниченного наклона, естественным образом уходящих в бесконечность.

Ключевые слова: максимальный член ряда Дирихле, кривая ограниченного наклона, асимптотическое множество, равенство Поля.

Asymptotics of entire Dirichlet series on curves of bounded slope

We study an asymptotic behavior of the sum of an entire Dirichlet series $F(s) = \sum_n a_n e^{\lambda_n s}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, on curves of a bounded slope naturally going to infinity.

Keywords: maximal term of the Dirichlet series, curve of a bounded slope, asymptotic set, equality of Polya.

Получены необходимые и достаточные условия на показатели λ_n для того, чтобы логарифм модуля суммы любого целого ряда Дирихле из заданного класса, определяемого некоторой выпуклой мажорантой роста, на кривой γ ограниченного наклона был эквивалентен логарифму максимального члена этого ряда, когда $\sigma = \text{Res} \rightarrow +\infty$ по некоторому асимптотическому множеству, верхняя плотность которого равна единице.

Аиткужина Наркес Нурмухаметовна, к.ф.-м.н., УУНИТ (Уфа, Россия); Narkes Aitkuzhina (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Гайсин Ахтяр Магазович, д.ф.-м.н., профессор, ИМ с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Akhtyar Gaisin (Institute of Mathematics Ufa Federal Research Center RAS, Russia)

Гайсин Рашит Ахтярович, к.ф.-м.н., ИМ с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Rashit Gaisin (Institute of Mathematics Ufa Federal Research Center RAS, Russia)

АСИМПТОТИКА ЦЕЛОГО РЯДА ДИРИХЛЕ ИЗ ЗАДАННОГО КЛАССА НА КРИВЫХ ОГРАНИЧЕННОГО K - НАКЛОНА

Н.Н. Аиткужина, А.М. Гайсин, Р.А. Гайсин
YusupovaN@rambler.ru, Gaisinam@mail.ru,
Rashit.gajsin@mail.ru

УДК 517.53, 517.537.7

В докладе речь пойдет об асимптотическом поведении суммы целого ряда Дирихле $F(s) = \sum_n a_n e^{\lambda_n s}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, на кривых ограниченного наклона, естественным образом уходящих в бесконечность.

Ключевые слова: максимальный член ряда Дирихле, кривая ограниченного наклона, асимптотическое множество.

Asymptotics of entire Dirichlet series of a given class on curves of bounded K -slope

We study an asymptotic behavior of the sum of an entire Dirichlet series $F(s) = \sum_n a_n e^{\lambda_n s}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, on curves of a bounded slope naturally going to infinity.

Keywords: maximal term of the Dirichlet series, curve of a bounded slope, asymptotic set.

В данной работе получены необходимые и достаточные условия на показатели λ_n для того, чтобы логарифм модуля суммы любого целого ряда Дирихле из заданного класса, определяемого некоторой выпуклой мажорантой роста, на кривой γ ограниченного K - наклона был эквивалентен логарифму максимального члена этого ряда, когда $\sigma = \text{Res} \rightarrow +\infty$ по некоторому асимптотическому множеству, верхняя плотность не меньше $\frac{1}{\sqrt{K^2+1}}$.

Аиткужина Наркес Нурмухаметовна, к.ф.-м.н., УУНиТ (Уфа, Россия); Narkes Aitkuzhina (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Гайсин Ахтяр Магазович, д.ф.-м.н., профессор, ИМ с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Akhtyar Gaisin (Institute of Mathematics Ufa Federal Research Center RAS, Russia)

Гайсин Рашит Ахтярович, к.ф.-м.н., ИМ с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Rashit Gaisin (Institute of Mathematics Ufa Federal Research Center RAS, Russia)

СОПРИКОСНОВЕНИЕ ПЛОСКИХ КРИВЫХ: СОПРИКАСАЮЩАЯСЯ ОКРУЖНОСТЬ

А.А. Акманов
arslanakmanov@mail. ru

УДК 517.518

В данном исследовании рассматривается соприкосновение плоских кривых. Определяется порядок соприкосновения с помощью предела. В этой связи вводится понятие соприкасающейся окружности и доказывается теорема, гарантирующая существование данной окружности в точке определенной кривой посредством нахождения уравнения соприкасающейся окружности.

Ключевые слова: соприкосновение плоских кривых, порядок соприкосновения, соприкасающаяся окружность.

The contact of flat curves: a contiguous circle

In this study, the contact of plane curves is considered. The order of contact is determined using the limit. In this connection, the concept of a contiguous circle is introduced and a theorem is proved that guarantees the existence of this circle at a point of a certain curve by finding the equation of the contiguous circle.

Keywords: contact of plane curves, order of contact, touching circle.

Пусть две кривые L_1 и L_2 касаются друг друга в некоторой точке M_0 . Так, M - произвольная точка на общей касательной к кривым L_1 и L_2 , а M_1 и M_2 - точки пересечения с кривыми L_1 и L_2 соответственно перпендикуляра к указанной касательной, восстановленного в точке M . Будем говорить, что две кривые L_1 и L_2 имеют в точке M_0 порядок соприкосновения n , если существует отличный от нуля предел

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{|M_1 M_2|}{|M M_0|^{n+1}}, \quad (1)$$

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ точка кривой L , являющейся графиком функции $y = f(x)$, имеющей непрерывную третью производную в точке x_0 . Через точку M_0 можно провести бесконечно много окружностей, касающихся кривой L в этой точке. Часть каждой такой окружности, расположенная в некоторой окрестности точки M_0 , представляет собой график функции вида $y = y(x)$. Поэтому, представляется возможным определить порядок соприкосновения кривой L и любой из этих окружностей в их общей точке M_0 . Та из этих окружностей, которая имеет с кривой

L порядок соприкосновения не ниже двух, называется соприкасающейся окружностью для кривой L в точке M_0 . Следующее утверждение устанавливает достаточные условия для существования у кривой L в точке M_0 соприкасающейся окружности.

Теорема 1. Пусть кривая L является графиком функции $y = f(x)$, причем $f(x)$ имеет в точке x_0 не равную нулю вторую производную и непрерывную третью производную. Тогда для кривой L существует в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ соприкасающаяся окружность.

Доказательство. Будем искать уравнение соприкасающейся окружности в виде

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \rho^2, \quad (2)$$

где a, b и ρ - постоянные, подлежащие определению. Решим уравнение (2) относительно y и найденное значение $y = y(x)$ подставим в левую часть (2). Тогда мы можем рассматривать (2) как тождество относительно x (считая при этом, что $y = y(x)$). Продифференцируем тождество (2) два раза по x и потребуем, чтобы в полученных при этом соотношениях и в соотношении (2) значения y_0, y'_0, y''_0 функции $y = y(x)$ и ее первых двух производных в точке x_0 равнялись соответственно $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0)$:

$$y_0 = f(x_0), y'_0 = f'(x_0), y''_0 = f''(x_0).$$

Таким образом, мы получим следующую систему уравнений относительно a, b и ρ :

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = \rho^2,$$

$$(x_0 - a) + (y_0 - b) y'_0 = 0,$$

$$1 + (y'_0)^2 + (y_0 - b) y''_0 = 0.$$

При условии $y''_0 = f''(x_0) \neq 0, \rho > 0$ эта система имеет единственное решение:

$$a = x_0 - \frac{1 + y_0'^2}{y_0''} y'_0, \quad b = y_0 + \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}, \quad \rho = \frac{(1 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y_0''|} \quad (3)$$

Литература

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I: Учеб.: Для вузов. - 7-е изд. - М.: Физматлит, 2005. - 648 с.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КОМПЛЕКСНО-АНАЛИТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И.И. Бодренко
Bodrenkoi@mail.ru

УДК 514.76

В работе изучены свойства $2n$ -мерных комплексно-аналитических поверхностей в $(2n + 2)$ -мерных евклидовых пространствах.

Ключевые слова: комплексно-аналитическая поверхность, евклидово пространство, нормальное векторное поле, связность Ван дер Вардена—Бортолотти.

Some properties of complex-analytic surfaces in Euclidean spaces

The properties of $2n$ -dimensional complex-analytic surfaces on $(2n + 2)$ -dimensional Euclidean spaces are studied in this article.

Keywords: complex-analytic surface, Euclidean space, normal vector field, connection of Van der Waerden—Bortolotti.

Пусть E^{2n+2} — $(2n + 2)$ -мерное евклидово пространство, $n \geq 1$. Пусть F^{2n} — комплексно-аналитическая поверхность размерности $2n$ в E^{2n+2} . В работе [1] комплексно-аналитические поверхности $F^{2n} \subset E^{2n+2}$ кратко названы R -поверхностями. Преобразования R -поверхностей, сохраняющие их грассманов образ, исследованы в [1].

Пусть $x \in F^{2n}$ — произвольная точка. Обозначим через $T_x F^{2n}$ и $N_x F^{2n}$ касательное пространство и нормальную плоскость к поверхности $F^{2n} \subset E^{2n+2}$ в точке x , соответственно. Обозначим через $\gamma(x, t)$ геодезическую на F^{2n} , проходящую через точку x в направлении $t \in T_x F^{2n}$. Пусть $T_{(\gamma)}$ — единичное векторное поле, касательное к $\gamma(x, t)$. Обозначим через b вторую фундаментальную форму поверхности $F^{2n} \subset E^{2n+2}$. Рассмотрим вдоль геодезической $\gamma(x, t)$ нормальное векторное поле

$$\nu_{(\gamma)} = D_{T_{(\gamma)}} (b(T_{(\gamma)}, T_{(\gamma)})),$$

где D — нормальная связность поверхности $F^{2n} \subset E^{2n+2}$.

В работе [2] исследованы свойства подмногообразий в пространствах постоянной кривизны, у которых вдоль каждой геодезической $\gamma(x, t)$ нормальное векторное поле $\nu_{(\gamma)}$ параллельно в нормальной связности D .

Вектор $\nu_{(\gamma)}(x) \in N_x F^{2n}$ зависит от точки x и направления $t \in T_x F^{2n}$. Имеет место равенство [2]:

$$\nu_{(\gamma)}(x) = (\bar{\nabla} t b)(t, t), \quad \forall x \in F^{2n}, \quad \forall t \in T_x F^{2n},$$

где $\overline{\nabla}$ — связность Ван дер Вардена — Бортолотти.

Обозначим нормальный вектор $\nu_{(\gamma)}(x)$ через $\varkappa_{\overline{\nabla}}(x, t)$: $\nu_{(\gamma)}(x) \equiv \varkappa_{\overline{\nabla}}(x, t)$.

Определение 1. Вектор $\varkappa_{\overline{\nabla}}(x, t) \in N_x F^{2n}$ назовем вектором кручения Ван дер Вардена—Бортолотти поверхности $F^{2n} \subset E^{2n+2}$ в точке $x \in F^{2n}$ по направлению $t \in T_x F^{2n}$.

Обозначим через $k_N(x, t) \in N_x F^{2n}$ и $\varkappa_N(x, t) \in N_x F^{2n}$ векторы нормальной кривизны и нормального кручения поверхности $F^{2n} \subset E^{2n+2}$ в точке $x \in F^{2n}$ по направлению $t \in T_x F^{2n}$, соответственно.

Теорема 1. Пусть F^{2n} — комплексно-аналитическая поверхность в E^{2n+2} , не содержащая вырожденных точек. Тогда выполнено равенство

$$\varkappa_N(x, t) = \frac{\varkappa_{\overline{\nabla}}(x, t)}{f(x)} - \frac{\langle \varkappa_{\overline{\nabla}}(x, t), k_N(x, t) \rangle}{f^3(x)} k_N(x, t), \forall x \in F^{2n}, \forall t \in T_x F^{2n},$$

где f — некоторая функция на F^{2n} такая, что $f(x) > 0 \quad \forall x \in F^{2n}$; $\langle, \rangle$ — скалярное произведение в E^{2n+2} .

Определение 2. Инвариант $|\varkappa_{\overline{\nabla}}(x, t)|$ назовем кручением Ван дер Вардена—Бортолотти поверхности $F^{2n} \subset E^{2n+2}$ в точке $x \in F^{2n}$ по направлению $t \in T_x F^{2n}$.

Теорема 2. Пусть F^{2n} — комплексно-аналитическая поверхность в E^{2n+2} , не содержащая вырожденных точек. Тогда выполнено равенство

$$|\varkappa_{\overline{\nabla}}(x, t)| = g(x), \quad \forall x \in F^{2n}, \quad \forall t \in T_x F^{2n},$$

где g — некоторая функция на F^{2n} такая, что $g(x) > 0 \quad \forall x \in F^{2n}$.

Литература

1. Зубков А.Н., Фоменко В.Т. О преобразованиях R -поверхностей евклидова пространства с сохранением их грассманова образа // Матем. заметки. **45 (1)** (1989), 20-27.
2. Бодренко И.И. О подмногообразиях с параллельным нормальным векторным полем в пространствах постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. **169** (2019), 3-10.

О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ КЛАССОВ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Г.Г. Браичев
Braichev@mail.ru

УДК 517.547.2

Устанавливаются условия, при выполнении которых данная последовательность комплексных чисел является множеством единственности или неединственности для классов целых функций, рост которых характеризуется типом и индикатором относительно произвольного уточненного порядка.

Ключевые слова: целая функция, тип и индикатор, усредненная верхняя плотность, множество единственности.

On uniqueness sets for classes of entire functions

Conditions are established under which a given sequence of complex numbers is a set of uniqueness or non-uniqueness for classes of entire functions, the growth of which is characterized by the type and indicator of an arbitrary proximate order.

Keywords: entire function, type and indicator, averaged upper density, uniqueness set.

Совокупность всех целых функций $f = f(z)$ обозначим $H(\mathbb{C})$. Пусть $\varrho = \varrho(r)$ — уточненный порядок Валирона, $\varrho(r) \rightarrow \rho \in [0, +\infty]$, $r \rightarrow +\infty$. Тип и индикатор целой функции f относительно уточненного порядка $\varrho(r)$, коротко ϱ -тип и ϱ -индикатор, задаются равенствами

$$\sigma_e(f) = \varlimsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r\varrho(r)}, \quad h_e(\theta, f) = \varlimsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r\varrho(r)}.$$

Определим также усредненное значение ϱ -индикатора

$$I_e(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_e(\theta, f) d\theta.$$

Рассматриваются следующие классы функций:

- 1) $[\varrho, \sigma] = \{f \in H(\mathbb{C}) : \sigma_e(f) \leq \sigma\}$, $\sigma \geq 0$,
- 2) $[\varrho, \sigma] = \{f \in H(\mathbb{C}) : \sigma_e(f) < \sigma\}$, $\sigma > 0$.

Пусть $\rho \in (0, +\infty)$, $\varrho(r) \rightarrow \rho$, $r \rightarrow +\infty$, и $h(\theta)$ — 2π -периодическая ρ -тригонометрически выпуклая функция на $\mathbb{R}$. Тогда

- 3) $[\varrho, h(\theta)] = \{f \in H(\mathbb{C}) : h_e(\theta, f) \leq h(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$,

$$4) [\varrho, h(\theta)) = \{f \in H(\mathbb{C}) : h_\varrho(\theta, f) < h(\theta), \theta \in \mathbb{R}\},$$

$$5) E_{[\varrho, h(\theta))} = \{f \in H(\mathbb{C}) : h_\varrho(\theta, f) \leq h(\theta), \theta \in \mathbb{R}, \text{ и } \exists \theta_0 \in \mathbb{R} : h_\varrho(\theta_0, f) < h(\theta_0)\}.$$

Пусть число $I > 0$. Обозначим ещё

$$6) E_{[\varrho, I]} = \{f \in H(\mathbb{C}) : I_\varrho(f) \leq I\},$$

$$7) E_{[\varrho, \sigma]} = \{f \in H(\mathbb{C}) : I_\varrho(f) < I\}.$$

В случае $\rho = 0$ требуем, чтобы выполнялось условие $\ln r = o(r^{\varrho(r)})$, $r \rightarrow +\infty$, которое обеспечивает нетривиальность введенных классов. Классы функций типа 1)–4) широко используются в различных разделах комплексного анализа, а классы типа 5)–7) здесь введены, по видимому, впервые. Легко заметить, что если $h(\theta) \equiv \sigma$, то введенные классы функций сводятся к классам первых двух типов. Если же $h(\theta) \leq \sigma$, то справедливы вложения

$$[\varrho, h(\theta)) \subset E_{[\varrho, h(\theta))} \subset [\varrho, h(\theta)] \subset [\varrho, \sigma] \subset E_{[\varrho, \sigma]}.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность комплексных чисел, не имеющая конечных предельных точек. Эту последовательность назовем множеством единственности для некоторого класса, если в этом классе не существует не равной тождественно нулю функции, обращающейся в нуль на каждом элементе Λ с кратностью, не меньшей, чем число вхождений этого элемента в Λ .

Обозначим через Λ_f последовательность нулей целой функции f . Считаем, что ее члены выписаны в порядке возрастания модулей, причем кратный нуль записан столько раз, какова его кратность. Если $\Lambda_f = \Lambda$, то говорим, что f является порождающей функцией последовательности Λ .

Пусть $n_\Lambda(r) = \max\{n : |\lambda_n| \leq r, \lambda_n \in \Lambda\}$ — считающая функция последовательности Λ . Усредненная считающая функция этой последовательности определяется формулой

$$N_\Lambda(r) = \int_0^r \frac{n_\Lambda(t) - n_\Lambda(0)}{t} dt.$$

Величина, задаваемая равенством

$$\overline{\Delta}_\varrho^*(\Lambda) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^{\varrho(r)}},$$

называется усредненной верхней ϱ -плотностью Λ .

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. Пусть $\varrho = \varrho(r)$ — произвольный уточненный порядок, число $\sigma > 0$ и Λ — последовательность комплексных чисел, не имеющая конечных предельных точек. Если выполняется равенство

$$\overline{\Delta}_\varrho^*(\Lambda) = \sigma,$$

то Λ является множеством единственности для класса $[\varrho, \sigma]$ и не является таковым для чуть более широкого класса $[\varrho, \sigma]$, если Λ обладает порождающей функцией ϱ -типа σ . Если Λ не обладает такой порождающей функцией, то можно лишь утверждать, что Λ является классом неединственности для $[\varrho, \sigma']$ при любом $\sigma' > T(\Lambda, \sigma)$, где

$$T(\Lambda, \sigma) := \inf \left\{ \sigma_{\varrho}(f) : f \in [\varrho, \infty), \Lambda_f \supset \Lambda, \overline{\Delta}_{\varrho}^*(\Lambda_f) = \sigma \right\}.$$

Здесь $[\varrho, \infty) = \bigcup_{0 < \sigma < \infty} [\varrho, \sigma]$ — класс целых функций конечного ϱ -типа.

Таким образом, нулевые множества целых функций, у которых усредненная верхняя ϱ -плотность нулей совпадает с ϱ -типом и обе величины равны σ , являются множествами единственности для класса $[\varrho, \sigma]$ и не являются таковыми для класса $[\varrho, \sigma]$.

Множество функций, «экстремально порождающих» последовательность своих нулей и имеющих одинаковые значения ϱ -типов и усредненных верхних ϱ -плотностей нулей, довольно обширно. Как показано в [1], [2], сюда относятся все функции нулевого порядка, функции положительного порядка вполне регулярного роста с постоянным индикатором [3], и не только такие. Например, в работах [4], [5] построен пример целой функции L , не обладающей полной регулярностью роста, но удовлетворяющей условию $\sigma_{\varrho}(L) = \overline{\Delta}_{\varrho}^*(\Lambda_L) = \sigma$.

Аналогичные теореме 1 факты справедливы и для более широких классов целых функций, рост которых характеризуется ϱ -индикатором.

Теорема 2. Пусть $\varrho = \varrho(r)$ — произвольный положительный уточненный порядок, число $I > 0$ и Λ — последовательность комплексных чисел без конечных предельных точек, имеющая усредненную верхнюю ϱ -плотность $\overline{\Delta}_{\varrho}^*(\Lambda) = I$. Если Λ обладает такой порождающей функцией $L(\lambda)$, что $I_{\varrho}(L) = I$, то Λ является множеством единственности для класса $E_{[\varrho, I]}$ и не является таковым для чуть более широкого класса $E_{[\varrho, I]}$. Если $I_{\varrho}(L) = I' > I$, то можно лишь утверждать, что Λ есть множество неединственности для класса $E_{[\varrho, I']}$.

Теорема 3. Пусть $\rho > 0$, $h(\theta)$ — 2π -периодическая ρ -тригонометрически выпуклая функция, Λ — нулевое множество целой функции $L(\lambda)$ с ϱ -индикатором $h_{\varrho}(\theta, f) = h(\theta)$. Если выполняется равенство

$$\overline{\Delta}_{\varrho}^*(\Lambda) = I_{\varrho}(L),$$

то Λ является множеством единственности для классов $[\varrho, h(\theta))$ и $E_{[\varrho, h(\theta))}$ и не является таковым для $[\varrho, h(\theta)]$.

Литература

1. Брайчев Г.Г. Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. — М.: Прометей, 2005.

2. *Брайчев Г.Г.* Экстремальные задачи в теории относительного роста выпуклых и целых функций. Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. — М.: РУДН, 2018.

3. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.

4. *Попов А.Ю.* Развитие теоремы Валирона–Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ -плотностью корней // СМФН, **49** (2013), 132–164.

5. *Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б.* Точные оценки асимптотических характеристик роста целых функций с нулями на заданных множествах // Фундамент. и прикл. матем., **22**:1 (2018), 51–97.

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ L_N СВЕРХУ ЧЕРЕЗ M_N^c . ПРИМЕНЕНИЕ Р.А. Гайсин, rashit.gajsin@mail.ru

УДК 517.53

Для специальных чисел L_n , определяемых неявно через исходную последовательность $\{M_n\}$, получена оценка сверху через регуляризованную последовательность $\{M_n^c\}$ в предположении, что $\{M_n^c\}$ обладает свойством A .

Ключевые слова: класс Сиддики, проблема Сиддики, квазианалитические классы функций.

About upper estimation of special numbers L_n by M_n^c . Application.

Let special numbers L_n are defined implicitly by given sequence $\{M_n\}$. We have obtained for L_n upper estimation by sequence $\{M_n^c\}$ if for $\{M_n^c\}$ A -condition is fulfilled.

Keywords: Siddiqi class, Siddiqi problem, quasianalytic classes of functions.

Пусть $M_n^{\frac{1}{n}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, а

$$T(r) = \max_{n \geq 0} \frac{r^n}{M_n}, \quad r > 0,$$

— функция следа последовательности $\{M_n\}$.

Положим

$$L_n = \sup_{0 < t \leq 1} \frac{n!}{M(t)t^n}, \quad n \geq 0$$

где $\ln M(t) = T\left(\frac{1}{t}\right)$, $0 < t \leq 1$.

Классом Карлемана на спрямляемой дуге называется множество

$$C_\gamma(M_n) = \left\{ f \in C^\infty(\gamma) : \|f^{(n)}\|_\gamma = \max_{z \in \gamma} |f^{(n)}(z)| \leq K_f^n M_n, \quad n \geq 0 \right\}.$$

Известная проблема Дж. Сиддики заключается в следующем (см. [1], проблема 1): при каких условиях класс

$$C_{00}(M_{n-2}^c; \gamma) = \left\{ f \in C_\gamma(M_n^c) : f^{(n)}(a) = f^{(n)}(b) = 0, \quad n \geq 0 \right\}$$

не является тривиальным (т.е. содержит функцию, не равную тождественно нулю).

Здесь γ — спрямляемая дуга, a и b — концы этой дуги.

Гайсин Рашит Ахтярович, к.ф.-м.н., ИМБИЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Rashit Gaisin (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science, Ufa, Russia)

В работе [2] показано, что $C_{00}(L_{n-2}; \gamma) \neq \{0\}$, где γ — дуга ограниченного наклона. Но неизвестно, будет ли класс Сиддики $C_{00}(M_{n-2}^c; \gamma)$ не тривиальным. По этой причине нас будет интересовать вопрос о том, в каком случае числа L_n допускают оценки сверху через M_n^c .

Показывается, что

$$L_n \leq e\sqrt{2\pi}n^n e^{A_n}, \quad (1)$$

где

$$A_n = n \min_{0 < k < n} \left(\frac{\ln n}{k} + \frac{\ln M_k^c}{k} \right).$$

Предположим, что последовательность $\{M_k^c\}$ обладает *свойством* A: для любого $n > 1$ существует k , $0 < k < n$, такое, что при некотором $c_0 > 0$

$$\frac{\ln M_n^c}{n} - \frac{\ln M_k^c}{k} \geq \left(1 + \frac{1}{k}\right) \ln n - c_0. \quad (2)$$

Это условие равносильно *условию* B:

$$A_n \leq -n \ln n + \ln M_n^c + c_0 n.$$

Следовательно, если выполнено (2), то из (1) получим оценку

$$L_n \leq e\sqrt{2\pi}e^{c_0 n} M_n^c, \quad n \geq 1.$$

Литература

1. *Siddiqi J.A.* Non-spanning sequenses of exponentials on rectifiable plane arcs // Linear and complex analysis. Problem book, Lecture Notes in Math., **1043** — Berlin: Springer – Verlag, 1984. — 555-556.

2. *Гайсин А. М., Кинзябулатов И. Г.* Теорема типа Левинсона-Щёберга. Применения // Матем. сб., **199**:7 (2008), 41-62.

О ЛУЧЕВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ МОМЕНТОВ 2D ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

Е.Ю. Деревцов
dert@math.nsc.ru

УДК 517.44, 517.95

Рассматриваются смешанные лучевые преобразования моментов симметричных 2D тензорных полей произвольного ранга, возникающих в интегральной геометрии и тензорной томографии. Установлены геометрические и дифференциальные свойства таких операторов. Предложены алгоритмы восстановления тензорных полей малого ранга по известным смешанным лучевым преобразованиям его моментов.

Ключевые слова: тензорное поле, преобразование Радона, смешанное лучевое преобразование, геометрические и дифференциальные свойства, алгоритм реконструкции.

On momentum ray transforms over 2D tensor fields

The paper considers ray transforms over the moments of symmetric tensor fields of arbitrary rank arising in integral geometry and tensor tomography. Geometric and differential properties of such operators are established. The algorithms for reconstructing low-rank tensor fields from known mixed ray transforms of their moments are proposed.

Keywords: tensor field, the Radon transform, mixed ray transform, geometrical and differential properties, inversion algorithm.

Обобщения преобразования Радона [1] порождают целое семейство интегральных преобразований в рамках интегральной геометрии и тензорной томографии. В данной работе рассматриваются смешанные лучевые преобразования моментов (т.е. с весом t^k , k целое, $k \geq 0$) [2] планарных симметричных тензорных полей ранга m ,

$$\mathcal{P}_{km}^{(j)} w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k w_{i_1 \dots i_m} \xi^{i_1} \dots \xi^{i_j} \eta^{i_{j+1}} \dots \eta^{i_m} dt = g_{km}^{(j)}(\xi, \eta, s), \quad (1)$$

$j = 0, \dots, m$, переводящих их в функции $g_{km}^{(j)}(\xi(\theta), \eta(\theta), s)$. Здесь $x = s\xi + t\eta$, $\xi = (\xi^1, \xi^2) = (\cos \theta, \sin \theta)$ — нормальный, $\xi^\perp = \eta$ — направляющий векторы прямой $L_{\xi, s} \in \mathbb{R}^2$, вдоль которой производится интегрирование. Через B , ∂B обозначаем единичный круг и единичную окружность; $\mathbb{Z} = \{(\xi, s) \mid \xi \in \partial B, s \in [-1, 1]\}$; S^m — множество заданных в B симметричных тензорных полей ранга m .

Работа выполнена по программе государственного задания ИМ СО РАН, № FWNF-2022-0009(122041100003-2)

Деревцов Евгений Юрьевич, д.ф.-м.н., г.н.с., ИМ СО РАН (Новосибирск, Россия); Evgeny Derevtsov (Sobolev Institute of mathematics, Novosibirsk, Russia)

При $k = 0$ получаем смешанные лучевые преобразования $\mathcal{P}_m^{(j)}$ [3], которые послужили основой для обобщения до операторов $\mathcal{P}_{km}^{(j)}$ вида (1). Значения операторов $\mathcal{P}_m^{(j)}$ в рамках математической модели томографии 2D тензорных полей представляют собой исходные данные для задач тензорной томографии и поэтому детально исследовались.

В работах [4], [5] доказана единственность восстановления симметричного тензорного поле ранга m в $\mathbb{R}^n$ по первым $(m+1)$ -м продольным (в которых отсутствуют компоненты вектора ξ) лучевым преобразованиям его моментов, предложены алгоритмы восстановления.

Обозначения d , $d^\perp$ введены для операторов внутреннего дифференцирования и ортогонального внутреннего дифференцирования, переводящих симметричное m -тензорное поле $(w_{i_1 \dots i_m})$ в симметричные тензорные поля u , v ранга $m+1$, $d, d^\perp : H_0^l(S^m) \rightarrow H^{l-1}(S^{m+1})$, $l \geq 1$,

$$(dw)_{i_1 \dots i_m j} = \frac{1}{m+1} \left(\frac{\partial w_{i_1 \dots i_m}}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_m}}{\partial x^{i_k}} \right),$$

$$(d^\perp w)_{i_1 \dots i_m j} = \frac{1}{m+1} \left((-1)^j \frac{\partial w_{i_1 \dots i_m}}{\partial x^{3-j}} + \sum_{k=1}^m (-1)^{i_k} \frac{\partial w_{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_m}}{\partial x^{3-i_k}} \right),$$

Имеют место связи между смешанными лучевыми преобразованиями симметричных тензорных полей.

Теорема 1. Пусть дано поле $w \in H^{l-m}(S^m)$, $l \geq m$, и его лучевые преобразования $\mathcal{P}_m^{(j)} w$, $j = 0, \dots, m$.

1. Существуют потенциалы $\psi^{(0)}, \dots, \psi^{(m)} \in H_0^l$ такие, что справедливо разложение

$$w = \sum_{j=0}^m u^{(j)} \equiv \sum_{j=0}^m (d^\perp)^{m-j} d^j \psi^{(j)},$$

2. Для целых $j, l = 0, \dots, m$ справедливы соотношения $\mathcal{P}_m^{(j)} w = \mathcal{P}_m^{(j)} u^{(j)}$, $\mathcal{P}_m^{(j)} u^l = 0$ при $j \neq l$.

3. Для $\psi^{(j)} \in H_0^{l+m+1}(S^m)$, $j = 0, \dots, m$, $u^{(j)}(x) = (d^\perp)^{m-j} (d)^j \psi^{(j)}(x)$, $u^{(j+1)}(x) = (d^\perp)^{m-j} (d)^{j+1} \psi^{(j)}(x)$, $v^{(j)}(x) = (d^\perp)^{m+1-j} (d)^j \psi^{(j)}(x)$ выполняется

$$\mathcal{P}_{m+1}^{(j+1)} u^{(j+1)} = \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{P}_m^{(j)} u^{(j)}, \quad \mathcal{P}_{m+1}^{(j)} v^{(j)} = \frac{\partial}{\partial s} \mathcal{P}_m^{(j)} u^{(j)}.$$

4. Для поля $u^{(j)}(x) = (d^\perp)^{m-j} (d)^j \psi^{(j)}(x)$, где $u^{(j)} \in H^l(S^m)$, $\psi^{(j)} \in H_0^{l+m}$, $j = 0, \dots, m$ выполняется

$$\mathcal{P}_m^{(j)} u^{(j)} = \frac{j!(m-j)!}{m!} \frac{\partial^m}{\partial s^m} \mathcal{R} \psi^{(j)},$$

где $\mathcal{R} \psi^{(j)}$ — преобразование Радона потенциала $\psi^{(j)}$. В частности, если $\psi^{(j)} = \varphi \in H_0^l$ для всех j , то

$$\frac{m!}{j!(m-j)!} \mathcal{P}_m^{(j)} u^{(j)} = \frac{\partial^m}{\partial s^m} \mathcal{R} \varphi.$$

Основные свойства преобразования Радона: линейность, четность, геометрические свойства — распространяются на лучевые преобразования моментов симметричных m -тензорных полей.

Теорема 2. Пусть дано поле $w \in H^{l-m}(S^m)$, $l \geq m$, и его лучевые преобразования $\mathcal{P}_m^{(j)} w$, $k = 0$, заданные (1).

1. Лучевые преобразования $\mathcal{P}_m^{(j)}$ симметричного m -тензорного поля $w(x)$ линейны относительно преобразований Радона его компонент,

$$\mathcal{P}_m^{(j)} w(x) = \xi^{i_1} \dots \xi^{i_j} \eta^{i_{j+1}} \dots \eta^{i_m} \mathcal{R} w_{i_1 \dots i_m}(x),$$

2. Лучевые преобразования $\mathcal{P}_m^{(j)} w(x)$ при четном m четны, при нечетном m нечетны, $g_{2l}^{(j)}(-\xi, -s) = g_{2l}^{(j)}(\xi, s)$, $g_{2l+1}^{(j)}(-\xi, -s) = -g_{2l+1}^{(j)}(\xi, s)$.

3. Пусть в $\mathbb{R}^2$ задана линейная замена $y = Ax$, $\det A \neq 0$. Тогда

$$\mathcal{P}_m^{(j)}(w(Ax)) = \tilde{\xi}^{i_1} \dots \tilde{\xi}^{i_j} \tilde{\eta}^{i_{j+1}} \dots \tilde{\eta}^{i_m} |\det A|^{-1} (\mathcal{R} w_{i_1 \dots i_m})(\tilde{\xi}, s),$$

A^{-1} , A^T обратная и транспонированная к A , $\tilde{\xi} = (A^{-1})^T \xi$, $\tilde{\eta} = (A^{-1})^T \eta$.

В частности, если $A = \lambda E$ для $\lambda \neq 0$, то $\mathcal{P}_m^{(j)}(w(\lambda x)) = \frac{1}{\lambda^2} g_m^{(j)}\left(\frac{\xi}{\lambda}, s\right)$; A ортогональна, $A^{-1} = A^T$, $|\det A| = 1$, то $\mathcal{P}_m^{(j)}(w(Ax)) = g_m^{(j)}(A\xi, s)$; перенос начала координат $y = x - a$: $\mathcal{P}_m^{(j)} w(x - a) = g_m^{(j)}(\xi, s - \langle \xi, a \rangle)$.

Установлено, что векторное поле однозначно восстанавливается по продольным или поперечным лучевым преобразованиям с весом t^k , $k = 0, 1$. Симметричное 2-тензорное поле однозначно восстанавливается по продольным, смешанным или поперечным лучевым преобразованиям с весом t^k , $k = 0, 1, 2$. Предложены алгоритмы восстановления тензорных полей малого ранга.

В частности, схема алгоритма реконструкции векторного поля по поперечным преобразованиям такова. Пусть известны поперечные

$$\mathcal{P}_{01}^{(1)} w = \int_{-\infty}^{\infty} w_j(x) \xi^j dt, \quad \mathcal{P}_{11}^{(1)} w = \int_{-\infty}^{\infty} t w_j(x) \xi^j dt \quad (2)$$

лучевые преобразования с весом t^k , $k = 0, 1$, векторного поля $w \in H^l(S)$, $l \geq 0$, $w = u + v$, $u = d\varphi$, $v = d^\perp \psi$ для $\varphi, \psi \in H_0^{l+1}$. Тогда поле w однозначно восстанавливается по этим данным. Действительно, всякое векторное поле $w \in H^l(S)$, $l \geq 0$, единственным образом разлагается в сумму $w = d\varphi + d^\perp \psi$ потенциального и соленоидального полей, генерируемых потенциалами $\varphi, \psi \in H_0^{l+1}$ [3]. Найдя эти поля, мы определим поле w .

Из теоремы 1 следует, что уравнения (2) приобретают вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{01}^{(1)} w &= \int_{-\infty}^{\infty} w_j(x) \xi^j dt = \int_{-\infty}^{\infty} (d\varphi)_j \xi^j dt, \\ \mathcal{P}_{11}^{(1)} w &= \int_{-\infty}^{\infty} t w_j(x) \xi^j dt = \int_{-\infty}^{\infty} t (d\varphi)_j \xi^j dt + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dt, \end{aligned}$$

Приведем шаги алгоритма восстановления векторного поля.

1. Обращая известное преобразование $\mathcal{P}_{01}^{(1)} w$ (совпадающее с $\mathcal{P}_{01}^{(1)} u$), получаем векторное поле $u = d\varphi$.
2. По найденному потенциальному полю $d\varphi$ вычисляется лучевое преобразование $\mathcal{P}_{11}^{(1)} u$ с весом t .
3. Из обеих частей второго уравнения системы (2) вычитается преобразование $\mathcal{P}_{11}^{(1)} u$.
4. Обращая левую часть полученного уравнения как преобразование Радона, получаем потенциал ψ поля $v = d^\perp \psi$.
5. Применяя к потенциалу ψ оператор $d^\perp$, получаем соленоидальное векторное поле $v = d^\perp \psi$ с компонентами

$$v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x^2}, \quad v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x^1}.$$

Потенциальное $u = d\varphi$ и соленоидальное $v = d^\perp \psi$ векторные поля найдены.

Литература

1. *Deans S.* The Radon Transform and Some of its Application. — New York: Wiley, 1983.
2. *Деревцов Е.Ю.* Лучевые преобразования моментов планарных тензорных полей // Сиб. журнал индустр. математики, **26:3** (2023), 24-68.
3. *Derevtsov E. Yu., Svetov I. E.* Tomography of tensor fields in the plane // Eurasian J. Math. Comp. Applications, **3:2** (2015), 26-41.
4. *Sharafutdinov V. A.* Integral Geometry of Tensor Fields. — Utrecht, The Netherlands: VSP, 1994.
5. *Krishnan V. P., Manna R., Sahoo S. K., Sharafutdinov V. A.* Momentum ray transforms // Inverse Probl. Imaging, **13:3** (2019), 679-701.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ АКЦЕССОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДВУСВЯЗНЫХ МНОГОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ

А.Ю. Дютин, С.Р. Насыров
anydyutin@kpfu.ru, snasyrov@kpfu.ru

УДК 517.54

Разработан приближенный метод нахождения неизвестных (акцессорных) параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля–Шварца, осуществляющих конформное отображение концентрического кольца на произвольную ограниченную двусвязную многоугольную область. Мы рассматриваем гладкие однопараметрические семейства конформных отображений $\mathcal{F}(z, t)$ концентрических колец на двусвязные области $\mathcal{D}(t)$, которые получаются из фиксированной двусвязной многоугольной области $\mathcal{D}$ проведением конечного числа прямолинейных разрезов переменной длины.

Ключевые слова: двусвязные многоугольные области, конформные отображения, параметрический метод, интеграл Кристоффеля–Шварца, акцессорные параметры.

Parametric method for finding accessory parameters for conformal mappings of doubly connected polygonal domains

An approximate method is developed for finding unknown (accessory) parameters in generalized Christoffel–Schwarz integrals that implement a conformal mapping of a concentric annulus onto an arbitrary bounded doubly connected polygonal domain. We consider smooth one-parameter families of conformal mappings $\mathcal{F}(z, t)$ of concentric annulus onto doubly connected domains $\mathcal{D}(t)$, which are obtained from a fixed doubly connected polygonal domain $\mathcal{D}$ by drawing a finite number of rectilinear cuts of variable length.

Keywords: doubly connected polygonal domains, conformal mappings, parametric method, Christoffel–Schwarz integral, accessory parameters.

Интегральное представление для функции, отображающей конформно концентрическое кольцо на двусвязную многоугольную область были получены ранее Н.И. Ахиезером (1928), Г.М. Голузиным

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00066, <https://rscf.ru/project/23-11-00066/>.

Дютин Андрей Юрьевич, аспирант, ассистент, К(П)ФУ (Казань, Россия); Andrey Dyutin (Kazan Federal University, Kazan, Russia)

Насыров Семен Рафаилович, д.ф.-м.н., профессор, К(П)ФУ (Казань, Россия); Semen Nasyrov (Kazan Federal University, Kazan, Russia)

(1937) и Ю. Комацу (1945). Мы в докладе будем исследовать гладкие однопараметрические семейства таких отображений.

Рассмотрим однопараметрическое семейство двусвязных областей $\mathcal{D}(t)$, получаемых из фиксированной двусвязной области $\mathcal{D}$, ограниченной двумя замкнутыми ломаными, проведением в ней нескольких прямолинейных попарно непересекающихся разрезов, исходящих из её границы. При этом, концы разрезов гладко зависят от вещественного параметра t . Для простоты будем считать, что точки, из которых исходят разрезы, не являются угловыми.

При проведении любого разреза образуются три новые угловые точки, одна из которых является концевой точкой разреза, а две другие соответствуют основанию разреза и лежат на разных его берегах. Пусть из попарно различных точек граничной компоненты Γ_1 выходят m_1 разрезов под углами $\varphi_{1,j_1}\pi$, $1 \leq j_1 \leq m_1$, а из Γ_2 — m_2 разрезов под углами $\varphi_{2,j_2}\pi$, $1 \leq j_2 \leq m_2$. Обозначим через $z_{1,j_1,0}(t) \in [0, \omega_1]$ — прообразы концов разрезов, выходящих из точек Γ_1 , а $z_{2,j_2,0}(t) = x_{2,j_2,0}(t) + \omega_2(t)/2 \in [\omega_2(t)/2, \omega_1 + \omega_2(t)/2]$ — прообразы концов разрезов, выходящих из точек Γ_2 . Через $z_{1,j_1,1}(t)$ и $z_{1,j_1,2}(t)$ обозначим прообразы новых угловых точек внешней граничной компоненты с внутренними углами $\varphi_{1,j_1}\pi$ и $(2 - \varphi_{1,j_1})\pi$ соответственно, а через $z_{2,j_2,1}(t)$ и $z_{2,j_2,2}(t)$ — прообразы новых угловых точек внутренней граничной компоненты с внутренними углами $\varphi_{2,j_2}\pi$ и $(2 - \varphi_{2,j_2})\pi$ соответственно. Пусть при фиксированном t функция

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z, t) = & C_1(t) \int_0^z \exp\{c(t)\xi\} \prod_{i_1=1}^{n_1} \sigma^{\alpha_{1,i_1}-1}(\xi - z_{1,i_1}(t)) \times \\ & \times \prod_{i_2=1}^{n_2} \sigma^{\alpha_{2,i_2}-1}(\xi - z_{2,i_2}(t)) \prod_{j_1=1}^{m_1} s_{1,j_1}(\xi, t) \prod_{j_2=1}^{m_2} s_{2,j_2}(\xi, t) d\xi + C_2, \end{aligned}$$

конформно отображает концентрическое кольцо $\mathcal{A}(t) = \{\tau : q(t) < |\tau| < 1\}$ на $\mathcal{D}(t)$, где $q(t) = \exp\{-2\pi m(t)\}$, $m(t)$ — конформный модуль области $\mathcal{D}(t)$. При этом, функции $s_{k,j}$ зависят от прообразов концов разрезов.

Отметим, что мы выпускаем одновременно сразу несколько разрезов, причём мы не требуем, чтобы семейство областей $\mathcal{D}(t)$ было монотонным; за счёт этого мы можем как увеличивать, так и уменьшать длины разрезов. Мы находим дифференциальное уравнение в частных производных для семейства таких конформных отображений, которое является некоторой модификацией известного уравнения Левнера–Комацу (см., напр. [1]) на случай нескольких разрезов. Используя это уравнение, мы выводим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющую динамику акцессорных параметров семейства конформных отображений, а также динамику конформного модуля двусвязных многоугольников, исходя из заданных законов изменения длин разрезов. Решая задачу Коши для этой системы, мы находим

все неизвестные параметры в приведенном выше интегральном представлении семейства $\mathcal{F}(z, t)$, причем сразу для всех значений параметра t .

Заметим также, что основываясь на теореме Каратеодори о сходимости к ядру, мы можем вырезать из заданной достаточно простой области $\mathcal{D}$ области более сложной геометрии. Также мы можем повторять процедуру вырезания области из заданной и получать более сложные многоугольные области за несколько этапов. В этом случае реализация метода будет состоять в последовательном решении нескольких задач Коши для систем ОДУ. При этом решения (акцессорные параметры), полученные на каждом из этапов, кроме последнего, определяют начальные условия для системы, решаемой на последующем этапе. Мы также приводим результаты численных расчетов, подтверждающих эффективность предложенного метода и его достаточно хорошую точность.

Литература

1. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. – М.: Наука, 1976. – 344 с.

О ДЕЛЕНИИ НА МНОГОЧЛЕНЫ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

О.А. Иванова, С.Н. Мелихов

neo_ivolga@mail.ru, snmelihov@yandex.ru

УДК 517.982.274, 517.983.22

Исследована проблема деления на многочлены линейных непрерывных функционалов на весовом пространстве целых функций, реализующем сопряженное к пространству ультрадифференцируемых или бесконечно дифференцируемых функций.

Ключевые слова: весовое пространство целых функций, ультрадифференцируемая функция, аналитический функционал.

On the division by polynomials in spaces of analytic functionals

We investigate the problem of division by polynomials of continuous linear functionals on a weighted space of entire functions, realizing the dual to the space of ultradifferentiable or infinitely differentiable functions.

Keywords: weighted space of entire functions, ultradifferentiable function, analytic functional.

Непрерывную неубывающую функцию $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ будем называть *весовой функцией*, если

$$\omega(2t) = O(\omega(t)), \quad \omega(t) = O(t), \quad \log t = o(\omega(t)), \quad t \rightarrow +\infty,$$

и функция $\varphi = \omega \circ \exp$ выпукла на $\mathbb{R}$.

Пусть ω - весовая функция, φ^* - функция, сопряженная по Юнгу к φ ; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Введем пространства ультрадифференцируемых функций типа Берлинга, задаваемые с помощью ω . Для отрезка $K \subset \mathbb{R}$ с непустой внутренней частью введем пространство Фреше

$$\mathcal{E}_\omega(K) := \left\{ f \in C^\infty(K) \mid \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0} \sup_{x \in K} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{\exp(m\varphi^*(\alpha/m))} < +\infty \forall m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Пусть Ω - интервал в $\mathbb{R}$. Зафиксируем последовательность отрезков K_n , $n \in \mathbb{N}$, таких, что $K_n \subset \text{int } K_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\text{int } K_1 \neq \emptyset$ и $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Определим пространство Фреше

$$\mathcal{E}_\omega(\Omega) := \left\{ f \in C^\infty(\Omega) \mid \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0} \sup_{x \in K_n} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{\exp(m\varphi^*(\alpha/m))} < +\infty \forall m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Иванова Ольга Александровна, к.ф.-м.н., доцент, ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия); Olga Ivanova (Southern Federal University, Rostov on Don, Russia)

Мелихов Сергей Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия); ведущий научный сотрудник, ЮМИ ВНИЦ РАН (Владикавказ, Россия); Sergey Melikhov (Southern Federal University, Rostov on Don); Southern Mathematical Institute of RAS (Vladikavkaz, Russia)

Для $\omega(t) = \log(1+t)$, $t \in [0, +\infty)$, для отрезка $K \subset \mathbb{R}$ с непустой внутренностью и для интервала $\Omega \subset \mathbb{R}$ считаем, что $\mathcal{E}_\omega(K) := C^\infty(K)$, $\mathcal{E}_\omega(\Omega) := C^\infty(\Omega)$.

Для ограниченного множества $Q \subset \mathbb{R}$ символ H_Q обозначает опорную функцию Q , т.е. $H_Q(y) := \sup_{x \in Q} (xy)$, $y \in \mathbb{R}$. Для локально выпуклого пространства H через H' обозначаем топологическое сопряженное к H . Будем H' снабжать сильной топологией.

Продолжим функцию ω на $\mathbb{C}$, полагая $\omega(z) := \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Через $H(\mathbb{C})$ обозначим пространство всех целых в $\mathbb{C}$ функций. Для отрезка $K \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ определим банахово пространство целых функций

$$A_{\omega,n}(K) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \mid \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(H_K(\operatorname{Im} z) + n\omega(z))} < +\infty \right\}$$

и положим $A_\omega(K) := \operatorname{ind}_{n \rightarrow} A_{\omega,n}(K)$. Если Ω — интервал в $\mathbb{R}$, то $A_\omega(\Omega) := \operatorname{ind}_{n \rightarrow} A_{\omega,n}(K_n)$. Для весовой функции ω и для $\omega(t) := \log(1+t)$ преобразование Фурье-Лапласа $\mathcal{F}$ является топологическим изоморфизмом $\mathcal{E}_\omega(K)'$ на $A_\omega(K)$ и $\mathcal{E}_\omega(\Omega)'$ на $A_\omega(\Omega)$.

Далее Δ — отрезок в $\mathbb{R}$, отличный от точки, или интервал в $\mathbb{R}$, $0 \in \Delta$; ω — весовая функция или $\omega(t) = \log(1+t)$, $t \in [0, +\infty)$. Следуя [1], введем операцию $\otimes$:

$$(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z \left(\psi_t \left(\frac{tf(t) - zf(z)}{t - z} \right) \right), \quad \varphi, \psi \in A_\omega(\Delta)', f \in A_\omega(\Delta).$$

(Следуя В.А. Ткаченко, пространство $A_\omega(\Delta)'$ мы называем пространством аналитических функционалов.) Она является ассоциативной и коммутативной бинарной операцией в $A_\omega(\Delta)'$, и алгебра $(A_\omega(\Delta)', \otimes)$ является топологической.

Для многочлена $q \in \mathbb{C}[z]$, $\varphi \in A_\omega(\Delta)'$ положим

$$(q\varphi)(f) := \varphi(qf), \quad f \in A_\omega(\Delta).$$

Поскольку оператор $f \mapsto qf$ умножения на q линеен и непрерывен в $A_\omega(\Delta)$, то $q\varphi \in A_\omega(\Delta)'$ для любого функционала $\varphi \in A_\omega(\Delta)'$. Далее $m_j(z) := z^j$, $z \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}_0$; $\delta_0(f) := f(0)$.

Теорема 1. Пусть $q \in \mathbb{C}[z]$ — многочлен степени $n \in \mathbb{N}$.

(i) Для любого $\psi \in A_\omega(\Delta)'$ уравнение $q\varphi = \psi$ имеет решение $\varphi \in A_\omega(\Delta)'$. Это уравнение имеет единственное решение $\varphi_0 \in A_\omega(\Delta)'$, удовлетворяющее условиям $\varphi(m_j) = 0$, $0 \leq j \leq n-1$.

(ii) Пусть $\frac{\delta_0}{q} \in A_\omega(\Delta)'$ — решение уравнения $q\varphi = \delta_0$ такое, что $\frac{\delta_0}{q}(m_j) = 0$, $0 \leq j \leq n-1$. Тогда для любого $\psi \in A_\omega(\Delta)'$ функционал $\varphi_0 := \psi \otimes \frac{\delta_0}{q}$ — решение уравнения $q\varphi = \psi$, удовлетворяющее условиям $\varphi_0(m_j) = 0$, $0 \leq j \leq n-1$.

Теорема 1 применяется (с помощью преобразования $\mathcal{F}$) к доказательству формулы Дюамеля, выражающей решение $f \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$ дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $\sum_{j=0}^n a_j f^{(j)} =$

$g, g \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, удовлетворяющего нулевым начальным условиям $f^{(j)}(0) = 0$, $0 \leq j \leq n - 1$, через такое решение для правой части, тождественно равной 1.

Литература

1. *Иванова О.А., Мелихов С.Н.* Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ, **28:2** (2016), 114–137.

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ВЕКТОР-СИГНАЛА С ПОМОЩЬЮ КОНЕЧНЫХ ФРЕЙМОВ

И.М. Избяков

izbyakov.im@ssau.ru

В некоторых прикладных исследованиях возникает задача восстановления неизвестного сигнала, представленного в виде вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^D$ ($\mathbb{H}^D$ обозначает D -мерное евклидово или унитарное пространство) при помощи набора измерительных векторов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$. При этом доступны лишь результаты измерений этого сигнала в виде модулей скалярных произведений $|\langle \mathbf{x}, \varphi_k \rangle|$.

Набор векторов $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N$ восстанавливает исходный вектор-сигнал по модулям измерений (ВМИ), если для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}^D$, таких что $|\langle \mathbf{x}, \varphi_k \rangle| = |\langle \mathbf{y}, \varphi_k \rangle|$ для всех $k = 1, \dots, N$, имеем $\mathbf{x} = c\mathbf{y}$, где $|c| = 1$. Это определение также может быть сформулировано в виде свойства инъективности (с точностью до унимодулярного множителя) нелинейного оператора $(A(\mathbf{x}))(k) := |\langle \mathbf{x}, \varphi_k \rangle|^2$, $k = 1, \dots, N$.

подавляющее большинство научных работ, посвященных проблеме восстановления сигнала по модулям измерений, акцентируют внимание на проблеме возможности восстановить вектор-сигнал при заданном наборе измерительных векторов, образующих так называемый фрейм. Проводимое исследование посвящено проблеме поиска оптимального восстановления вектора при помощи заданного фрейма, обладающего свойством ВМИ. Если взять исходный набор векторов, который обладает требуемым свойством, то не по любому случайно взятому вектору модулей из мерений оказывается возможным восстановить исходный вектор-сигнал.

Проведена работа, описывающая в простейших случаях множество векторов модулей измерений, по которым восстановление оказывается возможным. Также сформулировано несколько проблем, решение которых может позволить создавать оптимальные алгоритмы восстановления.

Литература

1. *P. Casazza*. Phase retrieval and norm retrieval by vectors and projections [Электронный ресурс] / P. Casazza, J.C. Treiman - URL: <https://framerc.missouri.edu/sites/default/files/pub-pdf/234.phase.pdf>
2. *A.S. Bandeira*. Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval [Электронный ресурс] / A.S. Bandeira, J. Cahill, D.G. Mixon, A.A. Nelson. - URL: <https://arxiv.org/pdf/1302.4618>.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-878).

Избяков И.М., Самарский университет (Самара, Россия)

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ НОРМИРОВАННЫХ ВОСПРОИЗВОДЯЩИХ ЯДЕР В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

К.П. Исаев, А.В. Луценко, Р.С. Юлмухаметов
orbit81@list.ru, lutsenko.av@ya.ru, yulmukhametov@mail.ru

УДК 517.5

Получено некоторое достаточное условие существования базисов Рисса из нормированных воспроизводящих ядер в пространствах типа Фока $\mathcal{F}_\varphi$ целых функций f , таких что $fe^{-\varphi} \in L_2(\mathbb{C})$, где φ некоторая субгармоническая функция, которая может быть нерадиальной.

Ключевые слова: Гильбертовы пространства, целые функции, воспроизводящие ядра, базисы Рисса.

On Riesz bases of normalized reproducing kernels in Hilbert spaces of entire functions

We describe some Fock type spaces which possess unconditional bases of reproducing kernels, the spaces $\mathcal{F}_\varphi$ of entire functions f such that $fe^{-\varphi} \in L_2(\mathbb{C})$, where φ is a subharmonic function, which may be nonradial.

Keywords: Hilbert spaces, entire functions, reproducing kernels, Riesz bases.

Рассматриваются гильбертовы пространства целых функций типа Фока

$$\mathcal{F}_\varphi = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} dm(z) < \infty \right\},$$

где $dm(z)$ — плоская мера Лебега, $\varphi(z)$ — некоторая субгармоническая функция. Через $k_\lambda(z) = k(z, \lambda)$ будем обозначать воспроизводящее ядро этого пространства, то есть

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} f(z) \overline{k(z, \lambda)} e^{-2\varphi(z)} dm(z) = f(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Исследование первого и второго авторов выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00168, <https://rscf.ru/project/21-11-00168/>. Исследование третьего автора выполнено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-888).

Исаев Константин петрович, д.ф.-м.н., УУНиТ (Уфа, Россия); Konstantin Isaev (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Луценко Анастасия Владимировна, УУНиТ (Уфа, Россия); Anastasiya Lutsenko (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Юлмухаметов Ринад Салаватович, д.ф.-м.н., профессор, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Rinad Yulmukhametov (Institute of Mathematics with Computing Centre UFRS RAS, Ufa, Russia)

Положим

$$K(\lambda) := k(\lambda, \lambda) = \|k_\lambda\|^2, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Система $\{k(z, \lambda_j)\}_{j=1}^\infty$ называется безусловным базисом в этом пространстве если она является базисом и для некоторой константы $C > 1$

$$\frac{1}{C} \sum_j |a_j|^2 K(\lambda_j) \leq \left\| \sum_j a_j k(z, \lambda_j) \right\|^2 \leq C \sum_j |a_j|^2 K(\lambda_j),$$

где $\{a_j\}$ — произвольный конечный набор комплексных чисел. Безусловный базис $\{e_j, j = 1, 2, \dots\}$ является базисом Рисса тогда и только тогда, когда $0 < \inf_k \|e_k\| \leq \sup_k \|e_k\| < \infty$.

Проблема существования базисов Рисса из нормированных воспроизводящих ядер активно обсуждается, в частности, из-за того, что этот вопрос тесно связан с такими классическими проблемами комплексного анализа как представление функций посредством рядов экспонент и интерполяция целыми функциями.

Положительную функцию u будем называть регулярной, если существуют число $q > 1$ и функция $\gamma(x) \uparrow +\infty$, такие что для $x, y \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{1}{q} \leq \frac{u(x)}{u(y)} \leq q \quad \text{при} \quad |x - y| \leq \gamma(x) \sqrt{\frac{1}{u(x)}}. \quad (1)$$

В работе [1] доказано, что если вторая производная функции $\psi(x) = \varphi(e^x)$ регулярна и ограничена, то в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существуют безусловные базисы из воспроизводящих ядер. В работе [2] получен критерий существования безусловных базисов из воспроизводящих ядер в пространствах с регулярным радиальным весом:

Теорема А. *Если для функции $\psi(x) = \varphi(e^x)$ ее вторая производная $\psi''(x)$ регулярна, то для существования базисов Рисса из нормированных воспроизводящих ядер в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\sup_{x>0} \psi''(x) < \infty.$$

Для дальнейшего нам будет удобно перейти на формулировки в терминах мер, ассоциированных по Риссу. Через $\mu(z, t)$ будем обозначать μ -меру круга $B(z, t)$, $\mu(t) := \mu(0, t)$.

Для пространств с нерадиальным весом получено следующее достаточное условие существования базисов Рисса из нормированных воспроизводящих ядер:

Теорема 1. *Пусть функции $\varphi \in C^2$. Если при этом функция $\mu'(e^x)e^x$ регулярна в смысле (1) и ограничена, то пространство Фока $\mathcal{F}_\varphi$ допускает базис Рисса из нормированных воспроизводящих ядер.*

Литература

1. *Isaev K.P., Yulmukhametov R.S.* Riesz bases of normalized reproducing kernels in Fock type spaces // Analysis and Mathematical Physics, **12**:1 (2022), 12 pp.
2. *Isaev K.P., Yulmukhametov R.S.* On a criterion for the existence of unconditional bases of reproducing kernels in Fock spaces with radial regular weight // Journal of Mathematical Analysis and Applications, **519**:2 (2023), 17 pp.

КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ВЕСОВЫХ КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Ю.В. Кораблина
anaconda210150@mail.ru

УДК 517.518

Получены критерии компактности произвольного линейного оператора на абстрактном квазибанаховом пространстве в терминах норм дельта-функций и их конкретные реализации в весовых пространствах целых функций.

Ключевые слова: весовые квазибанаховы пространства, оператор Вольтерра, оператор весовой композиции, пространства Фока.

Compact operators in weighted quasi-Banach spaces of holomorphic functions

It is obtained abstract criteria for the compactness of a linear operator on an arbitrary quasi-Banach space which are stated in terms of delta-functions and formulate their realizations for weighted spaces of entire functions.

Keywords: weighted quasi-Banach spaces, Volterra operator, weighted composition operator, Fock spaces.

Рассматривается задача о компактности классических операторов, действующих в весовых квазибанаховых пространствах голоморфных функций в области комплексной плоскости. Ранее она изучалась в основном для линейных операторов, действующих на банаховых пространствах голоморфных функций в единичном круге [1]. При этом, в статье [2] результаты из [1] относительно компактности произвольного линейного оператора были распространены на случай квазибанаховых пространств. Отметим, что в качестве пространств, в которые действует оператор, рассматривались пространства вида

$$H_v(G) = \{f \in H(G), \|f\|_{H_v(G)} = \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty\},$$

$$H_{v,0}(G) := \left\{f \in H(G) : \lim_{|z| \rightarrow \delta G} \frac{|f(z)|}{v(z)} = 0\right\},$$

задаваемые весом v на произвольной области G комплексной плоскости $\mathbb{C}$, где $H(G)$ — пространство всех функций, голоморфных в G , с топологией равномерной сходимости на компактах из G .

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых-кандидатов наук (проект МК-160.2022.1.1.).

Кораблина Юлия Викторовна, аспирант, ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия); Yulia Korablina (Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia)

Пусть X — квазибанахово пространство с квазинормой $\|\cdot\|$, непрерывно вложенное в $H(G)$, содержащее полиномы, такое что замкнутый единичный шар B_X в X является компактным подмножеством X с топологией равномерной сходимости на компактах. X^* — сопряженное с X пространство линейных непрерывных функционалов на X с сопряженной нормой $\|\cdot\|^*$, а $\delta_z : f \mapsto f(z)$ — дельта-функция Дирака для фиксированной точки $z \in G$.

Приведем один из основных результатов общего характера, установленных в работе

Теорема 1. Пусть v — произвольный вес на G , $T : X \rightarrow H_{v,0}(G)$ — линейный оператор. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $T : X \rightarrow H_{v,0}(G)$ компактен.
- (ii) $\delta_z \circ T \in X^*$ при любом $z \in G$ и $\lim_{|z| \rightarrow \delta G} \frac{\|\delta_z \circ T\|^*}{v(z)} = 0$.

Данный результат был применен к оператору весовой композиции $(W_{u,\varphi}f)(z) = u(z) \cdot f(\varphi(z))$, $u \in H(G)$, $f, \varphi \in H(G)$, $z \in G$, а также интегральному оператору Вольтерра $T_g : f \mapsto \int_0^z f(w)g'(w)dw$ и его союзному $S_g : f \mapsto \int_0^z f'(w)g(w)dw$, где g — фиксированная функция. В частности, для случая всей комплексной плоскости установлен следующий результат.

Теорема 2. Пусть v — радиальный $\log$ -выпуклый вес на $\mathbb{C}$, удовлетворяющий условию

$$0 < \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{v'(r)}{v(r)} < \infty.$$

(a) Следующие условия эквивалентны:

- (i) $T_g : X \rightarrow H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен.
- (ii) $g'(z) \cdot \delta_z \in X^*$ при любом $z \in \mathbb{C}$ и $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|g'(z)| \cdot \|\delta_z\|^*}{v(z)} = 0$.

(b) Следующие условия эквивалентны:

- (i) $S_g : X \rightarrow H_{v,0}(\mathbb{C})$ компактен.
- (ii) $g(z) \cdot \delta'_z \in X^*$ при любом $z \in \mathbb{C}$ и $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta'_z\|^*}{v(z)} = 0$.

Наконец, показано, что результаты, полученные в данном направлении, применимы к ранее не исследовавшемуся пространствам Фока

$$F_p^\psi := \{f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_{p,\psi} := (\lambda_\psi \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p e^{-p\psi(z)} dA(z))^\frac{1}{p} < \infty\},$$

где $dA(z)$ — мера Лебега в $\mathbb{C}$, а вес ψ — субгармоническая функция, удовлетворяющая условиям из [2, с.14].

Теорема 3. Пусть v — произвольный вес на $\mathbb{C}$, $p \in (0, \infty)$. Если

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|u(z)| \cdot e^{\frac{\psi(\varphi(z))}{p}}}{v(z)} = 0,$$

то оператор весовой композиции $W_{u,\varphi} : F_p^\psi \rightarrow H_v^0(\mathbb{C})$ является компактным.

Литература

1. *Zorboska N.* Intrinsic operators from holomorphic function spaces to growth spaces // Integr. Equ. Oper. Theory., **87**:4 (2017), 581-600.
2. *Абанин А.В., Кораблина Ю.В.* Компактность линейных операторов на квазибанаховых пространствах голоморфных функций // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Естеств. науки, **4-1** (2022), 83-89.

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА $B_{2,\mu}$

М.Р. Лангаршоев
mukhtor77@mail.ru

УДК 517.5

В работе получены точные неравенства между наилучшими приближениями аналитических в единичном круге функций алгебраическими комплексными полиномами и обобщенными модулями непрерывности производных функций в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\mu}$.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение, обобщенный модуль непрерывности, весовое пространство Бергмана.
The best approximation of analytic in unit disc functions in the weighted Bergman space $B_{2,\mu}$

The best approximation of analytic in unit disc functions in the weighted Bergman space $B_{2,\mu}$.

Keywords: best polynomial approximation, generalized modulus of continuity, Bergman weighted space.

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг в этой плоскости и $U(D)$ – множество функций аналитических в D .

Через $B_{2,\mu}$, $\mu > -1$, обозначим банахово пространство Бергмана, состоящее из функций $f \in U(D)$, для которых

$$\|f\|_{2,\mu} \stackrel{def}{=} \|f\|_{B_{2,\mu}} = \left(\int_D |f(z)|^2 dA_\mu(z) \right)^{1/2} < \infty,$$

где

$$dA_\mu(z) = (\mu + 1)(1 - |z|^2)^\mu dA(z),$$

$dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy$ – элемент площади и интеграл понимается в смысле Лебега.

Множество всех комплексных алгебраических полиномов степени $\leq n - 1$ обозначим

$$\mathcal{P}_{n-1} = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f) z^k, a_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Лангаршоев Мухтор Рамазонович, к.ф.-м.н., преподаватель математики, Подмосковский колледж «Энергия» (г. Старая Купавна, Россия); Mukhtor Langarshoev (College near Moscow «Energia», Staraya Kupavna, Russia)

Символ

$$(u)_n = u(u+1)(u+2) \cdots (u+n-1)$$

называется символ Похгаммера [1].

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} = \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\mu} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \}$$

– наилучшее приближение аналитических функций в пространстве $B_{2,\mu}$.

Введем следующую усредненную характеристику гладкости

$$\Omega_m(f, t)_2 = \left\{ \frac{1}{t^m} \int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_h^m f(\rho e^{i\theta})\|^2 dh_1 \dots dh_m \right\}^{1/2}, \quad t > 0,$$

где

$$\bar{h} = (h_1, h_2, \dots, h_m), \quad \Delta_{\bar{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1, \quad \Delta_{h_j}^1 f(\rho e^{i\theta}) = f(\rho e^{i(\theta+h_j)}) - f(\rho e^{i\theta}).$$

Через $\mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ обозначим множество функций $f \in U(\mathbb{D})$, у которых $z^r f^{(r)} \in B_{2,\mu}$.

Лемма 1. *Величина наилучшего приближения аналитических в единичном круге функций в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\mu}$ равно*

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \frac{k!}{(\mu+2)_k} \right\}^{1/2}.$$

Теорема 1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $0 < h \leq \pi/n$, $\varphi(t)$ – весовая на $(0, h)$ функция. Тогда для любого $0 < p \leq \infty$ справедливо точное неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}}{2^{m/2} \alpha_{n,r} \left\{ \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{mp/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}}. \quad (1)$$

Неравенство (1) является точным в том смысле, что существует функция $f_0(z) = z^n \in \mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$ для которой оно обращается в равенство.

Литература

1. Абрамовица М., Стигана И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. – Москва: Наука. Главная редакция физико – математической литературы, 1979. – 832с.

7-МЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ И НЕВЫРОЖДЕННЫЕ ГОЛОМОРФНО ОДНОРОДНЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В $\mathbb{C}^4$

А.В. Лобода Р.С. Акопян
lobvgasu@yandex.ru, akrim111@yandex.ru

УДК 517.518

Продолжается изучение влияния особенностей структуры 7-мерных алгебр Ли (наличие и размерности нильпотентных и абелевых идеалов и подалгебр) на свойства орбит этих алгебр в пространстве $\mathbb{C}^4$. 7-мерные орбиты уже изученных больших семейств 7-мерных алгебр Ли часто оказываются либо вырожденными по Леви, либо сводящимися к трубкам вещественными гиперповерхностями $\mathbb{C}^4$. Описаны орбиты алгебр Ли, имеющих 6-мерный нильрадикал и трехмерное пересечение двух 4-мерных абелевых подалгебр. (3-10 строк).

Ключевые слова: комплексное пространство, вещественная гиперповерхность, алгебра Ли, нильпотентная алгебра, абелева подалгебра, орбита алгебры.

7-dimensional Lie algebras and non-degenerate holomorphically homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^4$

The study is continued of the influence of the structural features of 7-dimensional Lie algebras (the presence and dimensions of nilpotent and Abelian ideals and subalgebras) on the properties of orbits of these algebras in the space $\mathbb{C}^4$. 7-dimensional orbits of already studied large families of 7-dimensional Lie algebras often turn out to be either Levi degenerate or reducible to tubes real hypersurfaces of $\mathbb{C}^4$. Orbits of Lie algebras having a 6-dimensional nil-radical and a 3-dimensional intersection of two 4-dimensional Abelian subalgebras are described. (3-10 lines).

Keywords: complex space, real hypersurface, Lie algebra, nilpotent algebra, Abelian subalgebra, orbit of algebra.

В задаче описания и классификации голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$ важную роль играет изучение орбит вещественных 7-мерных алгебр Ли, реализуемых в виде алгебр голоморфных векторных полей. При этом значительная часть

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант 23-21-00109) и Московского центра фундаментальной и прикладной математики МГУ им. М.В.Ломоносова.

Лобода Александр Васильевич, д.ф.-м.н., вед. научный сотрудник, ВГТУ (Воронеж, Россия); Alexander Loboda (Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia)

Акопян Рипсима Сергеевна, к.ф.-м.н., доцент, МИРЭА, Российский технологический университет, (Москва, Россия)

известных 7-мерных алгебр Ли (см., например, [1], [2]) допускает лишь орбиты, являющиеся Леви-вырожденными ([3]) или сводящиеся к трубчатых поверхностям (трубкам) ([4]).

Получение орбит конкретной алгебры естественно разбить на два этапа:

- 1) описание реализаций абстрактной алгебры Ли в виде алгебр голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$,
- 2) интегрирование полученных алгебр Ли векторных полей.

При этом свойство вырожденности или трубчатости всех орбит часто (но не всегда) удается установить на первом из этих двух этапов. В то же время проверка сводимости (или несводимости) к трубкам для конкретных поверхностей представляет собой достаточно трудный вопрос.

Теорема 1. Из 49 типов 7-мерных алгебр Ли, имеющих 6-мерный ниль-радикал и трехмерное пересечение двух 4-мерных абелевых подалгебр, не более 11 типов имеют реализации в $\mathbb{C}^4$, допускающие Леви-невырожденные не сводящиеся к трубкам орбиты.

Уточним, что у обсуждаемых в этой теореме алгебр Ли имеется всего 7 видов различных 6-мерных нильпотентных подалгебр Ли со следующими кодами в [1] и наборами коммутационных соотношений:

$$\begin{aligned}
[6, 1] &: [e_3, e_6] = e_2, \quad [e_4, e_5] = e_2, \quad [e_4, e_6] = e_3, \quad [e_5, e_6] = e_4; \\
[6, 13] &: [e_4, e_5] = e_1, \quad [e_2, e_6] = e_1, \quad [e_3, e_6] = e_2, \quad [e_4, e_6] = e_3, \quad [e_5, e_6] = e_4; \\
[6, 18] &: [e_2, e_5] = e_1, \quad [e_3, e_6] = e_1, \quad [e_4, e_6] = e_3, \quad [e_5, e_6] = e_4; \\
[6, 22] &: [e_4, e_5] = e_1, \quad [e_3, e_6] = e_2, \quad [e_4, e_6] = e_3, \quad [e_5, e_6] = e_4; \\
[6, 23] &: [e_3, e_5] = e_2, \quad [e_3, e_6] = e_1, \quad [e_4, e_6] = e_2, \quad [e_5, e_6] = e_4; \\
[6, 24] &: [e_3, e_5] = e_1, \quad [e_4, e_5] = e_1, \quad [e_4, e_6] = e_2, \quad [e_5, e_6] = e_4; \\
[6, 26] &: [e_3, e_5] = e_2, \quad [e_4, e_5] = e_1, \quad [e_4, e_6] = e_2, \quad [e_5, e_6] = e_4.
\end{aligned}$$

Это наблюдение, а также наличие в рассматриваемых алгебрах двух 4-мерных абелевых подалгебр Ли, имеющих трехмерное пересечение, позволяют существенно упростить необходимые обсуждения. Для 38 (из 49 упомянутых в теореме 1) типов алгебр Ли любая 7-мерная орбита в $\mathbb{C}^4$ либо вырождена по Леви, либо сводится к трубчатой гиперповерхности.

Перечислим остальные 11 типов алгебр Ли, реализуемых в $\mathbb{C}^4$ без очевидных признаков вырожденности и трубчатости орбит таких реализаций:

$$\begin{aligned}
&[7, [6, 1], 1, 1], \quad [7, [6, 13], 1, 1], \quad [7, [6, 18], 1, k] \quad (k = 1, 5, 7), \\
&[7, [6, 22], 1, 1], \quad [7, [6, 23], 1, 1], \quad [7, [6, 24], 1, k] \quad (k = 2, 4, 5), \quad [7, [6, 26], 1, 1].
\end{aligned}$$

Пример 1 (семейство $[7, [6, 18], 1, 1]$).

Это семейство алгебр Ли из работы [6] зависит от одного вещественного параметра m , имеет ниль-радикалом 6-мерную алгебру [6,18] с четырьмя нетривиальными коммутационными соотношениями (приведенными выше) и шесть дополнительных соотношений:

$$\begin{aligned}[e_1, e_7] &= (m+3)e_1, \quad [e_2, e_7] = 3e_2, \quad [e_3, e_7] = (m+2)e_3, \\ [e_4, e_7] &= (m+1)e_4, \quad [e_5, e_7] = me_5, \quad [e_6, e_7] = e_6.\end{aligned}$$

Набор голоморфных векторных полей в пространстве $\mathbb{C}^4$

$$\begin{aligned}e_1 &= (0, 0, 0, 1), \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0), \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0), \\ e_4 &= (0, 0, -z_1, -\tfrac{1}{2}z_1^2), \\ e_5 &= (0, iB, \tfrac{1}{2}z_1^2, z_2 + \tfrac{1}{3}z_1^3), \\ e_6 &= (1, 0, 0, z_3); \\ e_7 &= (z_1, 3z_2, 5z_3, 6z_4).\end{aligned}\tag{1}$$

образует при любом $B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ базис алгебры Ли с таблицей коммутационных соотношений, удовлетворяющих при $m = 3$ описанию алгебры [7,[6,18],1,1]. Вид первых шести полей этого набора соответствует приведенному выше описанию нильпотентной алгебры [6,18] из [1]. В точках пространства $\mathbb{C}^4$, удовлетворяющих условию $y_1 \neq 0$, ранг алгебры с базисом (1) равен 7, а ее интегрирование приводит к уравнению орбит ($x_1 = \operatorname{Re} z_1$, $y_k = \operatorname{Im} z_k$ при $k = 1, 2, 3, 4$)

$$y_4 = x_1 y_3 + (y_2 - y_1^3)^2 + C y_1^6, \quad C \in \mathbb{R}.\tag{2}$$

В своих общих точках такие гиперповерхности являются Леви-невыврожденными. Вопрос о возможной сводимости поверхностей (2) к трубкам пока остается открытым.

Литература

1. *Parry A.* A Classification of Real Indecomposable Solvable Lie Algebras of Small Dimension with Codimension One Nilradicals //arXiv:1311.6069.
2. *Vu A. Le, Tuan A. Nguyen, Tu T. C. Nguyen, Tuyen T. M. Nguyen, Thieu N. Vo* Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals //arXiv:2107.03990.
3. *Лобода А.В., Аюпян Р. С., Крутских В. В.* О 7-мерных алгебрах голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$, имеющих 5-мерный абелев идеал // Дальневост. матем. журн. 2023. Т. 23, № 1. С. 55—80.
4. *Loboda, A.V.* On the Tubular Structure of Holomorphically Homogeneous Real Hypersurfaces in $\mathbb{C}^4$ // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44. P. 1373—1382.

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В.Б. Малютин, Б.О. Нуржанов
malyutin@im.bas-net.by, nurjanov@list.ru

УДК 519.6

Работа посвящена методу квазиклассической аппроксимации функциональных интегралов. Для вычисления функционального интеграла из всех возможных траекторий выделяется классическая траектория для которой действие принимает экстремальное значение. Классическая траектория дает наибольший вклад в интеграл и находится как решение уравнения Эйлера-Лагранжа. Для аппроксимации функциональных интегралов в разложении действия относительно классической траектории используются слагаемые с переменными в нулевой и во второй степени.

Ключевые слова: квазиклассическая аппроксимация, функциональный интеграл, классическая траектория, уравнение Эйлера-Лагранжа.

Semiclassical approximation of functional integrals

The work is devoted to the method of semiclassical approximation of functional integrals. To calculate the functional integral, a classical trajectory is selected from all possible trajectories for which the action takes on an extremal value. The classical trajectory makes the greatest contribution to the integral and is found as a solution to the Euler-Lagrange equation. To approximate the functional integrals in the expansion of the action with respect to the classical trajectory, terms with variables in the zero and second powers are used.

Keywords: semiclassical approximation, functional integral, classical trajectory, Euler-Lagrange equation

В математике, физике и химии широко применяются математические модели, учитывающие случайные воздействия или шумы [1]. Для анализа этих моделей используются методы стохастических дифференциальных уравнений и методы функционального интегрирования. Активное использование функциональных интегралов стимулирует развитие методов для их вычисления. Методы для приближенного вычисления функциональных интегралов рассматривались в [2]. В данной работе рассматривается метод квазиклассической аппроксимации функциональных интегралов.

Малютин Виктор Борисович, д.ф.-м.н., Институт математики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Республика Беларусь); Victor Malyutin (Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus)

Нуржанов Бердах Орынбаевич, к.ф.-м.н., Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Республика Узбекистан); Berdakh Nurjanov (Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan)

Функциональный интеграл записывается в виде

$$I = \int \exp \left\{ -\frac{S}{\hbar} \right\} D[x],$$

где $S = \int_s^t L(\dot{x}, x, \tau) d\tau$ – действие, $L(\dot{x}, x, \tau)$ – Лагранжиан, $\hbar$ – параметр, принимающий положительные вещественные значения,

$$D[x] = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi\hbar(t_i - t_{i-1})}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar(t_n - t_{n-1})}}, s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t.$$

Интеграл можно интерпретировать как суммирование по всем траекториям, соединяющим начальные и конечные точки. Для вычисления функционального интеграла можно из всех возможных траекторий выделить классическую траекторию $x_{\text{кл}}$, для которой действие принимает экстремальное значение. Классическая траектория дает наибольший вклад в интеграл и находится как решение уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Если не удастся получить точное решение этого уравнения, то можно находить приближенное решение этого уравнения.

В квазиклассической аппроксимации функциональных интегралов используется разложение действия S относительно классической траектории $x_{\text{кл}}$:

$$S[x(\tau)] \approx S[x_{\text{кл}}(\tau)] + \frac{1}{2} \delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)].$$

Квазиклассическая аппроксимация может интерпретироваться как разложение по степеням постоянной Планка.

Вариацию второго порядка $\delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)]$ можно записать в виде

$$\delta^2 S[x_{\text{кл}}(\tau)] = \int_s^t y \Lambda y d\tau,$$

где $x = x_{\text{кл}} + y$,

$$\Lambda = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \Big|_{x=x_{\text{кл}}} + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \Big|_{x=x_{\text{кл}}} \frac{d}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x} \partial x} \Big|_{x=x_{\text{кл}}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \Big|_{x=x_{\text{кл}}} \frac{d}{dt}.$$

Таким образом, интеграл I запишется в виде

$$I = \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} S[x_{\text{кл}}(\tau)] \right\} \int D[y] \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \int_s^t y \Lambda y d\tau \right\}. \quad (1)$$

В интеграле в формуле (1) показатель экспоненты содержит переменные в степени два. Такие интегралы называются гауссовыми и вычисляются. Таким образом, из равенства (1) получаем квазиклассическую аппроксимацию исходного функционального интеграла.

Численный эксперимент показывает, что квазиклассическая аппроксимация хорошо приближает функциональный интеграл и не только при малых значениях $\hbar$.

Литература

1. *Kleinert H.* Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics Polymer Physics, and Financial Markets. Singapore, World Scientific Publishing, 2004.
2. *Egorov A.D., Zhidkov E.P., Lobanov Yu.Yu.* Introduction to the theory and applications of functional integration. М.: Fizmatlit. 2006.

УТОЧНЕННЫЙ ПОРЯДОК ОТНОСИТЕЛЬНО МОДЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РОСТА

К.Г. Малютин, М.В. Кабанко

malyutinkg@gmail.com, kabankom@mail.ru.

УДК 517.53

Вводится понятие уточненного порядка относительно модельной функции роста. Наше определение обобщает понятие уточненного порядка в смысле Валирона. Для случая тождественной модельной функции роста эти определения совпадают. Доказываются некоторые свойства уточненного порядка относительно модельной функции роста, которые аналогичны свойствам уточненного порядка в смысле Валирона.

Ключевые слова: модельная функция роста, уточненный порядок
Proximate order relative to the model growth function

The concept of refined order relative to the model growth function is introduced. Our definition generalizes the concept of refined order in the sense of Valiron. For the occasion identical model growth function, these definitions coincide. Some properties of the refined order with respect to the model growth function, which are similar to the properties of the refined order in the sense of Valiron, are proved.

Keywords: model growth function, proximate order

В настоящей работе мы рассматриваем классы эталонных функций, введенных в статье Б.Н. Хабибуллина [1] (см. также [2]). Введенное здесь понятие модельной функции роста, охватывает большой класс функций. Функции f конечного порядка относительно модельной функции, могут иметь порядок роста в классическом его понимании равный бесконечности или нулю.

Определение 1. *Строго положительная возрастающая неограниченная функция M на $(0, +\infty)$ при выпуклости суперпозиции $M \circ \exp$ на $(-\infty, +\infty)$ называется модельной функцией роста.*

В [2] введено понятие уточненного порядка относительно модельной функции роста, которое зависит от уточненной функции роста. Введем определение уточненного порядка относительно модельной функции роста, которое не зависит от уточненной функции роста. Наоборот, уточненная функция роста будет определена исходя из заданных модельной функции роста и уточненного порядка.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00012, <https://rscf.ru/project/22-21-00012/>.

Малютин Константин Геннадьевич, д.ф.-м.н., профессор, КГУ (Курск, Россия); Konstantin Malyutin (Kursk State University, Kursk, Russia)

Кабанко Михаил Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, КГУ (Курск, Россия); Michael Kabanko (Kursk State University, Kursk, Russia)

Определение 2. Абсолютно непрерывная функция ρ_M называется уточнённым порядком относительно модельной функции роста M , если одновременно существуют два предела

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho_M(r) = \varrho \in \mathbb{R}, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M(r)}{M'(r)} \rho'_M(r) \ln M(r) = 0.$$

Далее, поскольку модельная функция роста M у нас фиксированная, то индекс M в обозначении уточненного порядка мы будем опускать

Определение 3. Пусть ρ — уточнённый порядок относительно модельной функции роста M . Функция $M^{\rho(r)}(r)$ называется уточнённой функцией роста относительно модельной функции роста M .

Функцию $M^{\rho(r)}(r)$ мы будем обозначать через $V(r)$.

Доказываются некоторые свойства уточненного порядка.

Лемма 1. Если сегмент $[a, b]$ таков, что $b \geq a > 0$, то равномерно относительно $t \in [a, b]$ выполняется соотношение

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{(tM(r))^{\rho(M^{-1}(tM(r)))}}{V(r)} = t^e.$$

Лемма 2. При $\lambda < \varrho + 1$

$$\int_{r_0}^r (M(u))^{\rho(u)-\lambda} M'(u) du = \frac{1}{\varrho + 1 - \lambda} (M(u))^{\rho(u)+1-\lambda} + o((M(u))^{\rho(u)+1-\lambda}) \quad (r \rightarrow +\infty).$$

При $\lambda > \varrho + 1$

$$\int_r^\infty (M(u))^{\rho(u)-\lambda} M'(u) du = \frac{1}{\lambda - \varrho - 1} (M(u))^{\rho(u)+1-\lambda} + o((M(u))^{\rho(u)+1-\lambda}) \quad (r \rightarrow +\infty).$$

Рассмотрим важный для приложений случай мультипликативной модельной функции $M(r)$, т.е. функции вида $M(tr) = M(t)M(r)$. Например, к таким функциям относятся степенные функции $M(r) = r^\beta$, $\beta > 0$. В этом случае любые требования на гладкость уточненного порядка обычно не влияют на общность результатов, как это следует из следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок относительно мультипликативной модельной функции M , $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \varrho$, а уточненный порядок $\rho_1(r)$ определяется равенством: $M^{\rho_1(r)-\varrho}(r) =$

$$\frac{2r}{\pi} \int_0^\infty \frac{M^{\rho(t)-\varrho}(t)}{t^2 + r^2} dt.$$

1) $\rho_1(r)$ — бесконечно дифференцируемая функция и $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V_1(r)}{V(r)} = 1$,
где $V_1(r) = r^{\rho_1(r)}$. 2) Пусть $L = \frac{M}{M'} \frac{d}{dr}$, $\mathcal{V}_1(r) = M^{\rho_1(r)-e}(r)$. Тогда
 $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L^k(\mathcal{V}_1(r))}{\mathcal{V}_1(r)} = 0$, 3) $\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{M(r)}{M'(r)} \right)^k \ln M(r) \rho_1^{(k)}(r) = 0$, $k = 1, 2, \dots$.

Литература

1. Хабибуллин Б.Н. Обобщение уточненного порядка // Докл. Башкирского университета, **5**:1 (2020), 1-5.
2. Кабанко М.В., Малютин К.Г., Хабибуллин Б.Н. Уточнённый порядок для модельной функции роста // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сборник материалов Международной научной конференции (оз. Банное, 13 - 17 марта 2023 г.), 56-58.

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРЕПЯТСТВИЯХ К СУЩЕСТВОВАНИЮ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ БАЗИСОВ ВАННЬЕ

В.М. Мануйлов

manuilov@mech.math.msu.su

УДК 517.986

Недавно Людевиг и Тянь продемонстрировали важность вопроса о тривиальности проектора на линейную оболочку базиса Ванны в K -теории алгебры Роу. Мы заметили, что эта тривиальность эквивалентна тривиальности единицы равномерной алгебры Роу в K -теории алгебры Роу и приводим геометрическую характеристику этой тривиальности.

Ключевые слова: алгебра Роу, K -теория, базис Ванны

On topological obstructions to the existence of non-periodic Wannier bases

Ludewig and Thiang recently showed importance of the question of triviality of the projection onto the span of a Wannier basis in the K -theory of Roe algebras. We show that its triviality is equivalent to triviality of the unit of the uniform Roe algebra in the K -theory of the Roe algebra, and provide a geometric criterion for that.

Keywords: Roe algebra, K -theory, Wannier basis

Базисы Ванны являются важным инструментом в физических задачах. Для оператора Шредингера с периодическим потенциалом на $L^2(\mathbb{R}^d)$ функции Ванны составляют базис спектрального подпространства, заданного конечным набором функций и их целочисленными сдвигами. Недавно Людевиг и Тянь начали исследование базисов Ванны на произвольных многообразиях, а в работе [1] они ввели общее понятие равномерно локализованного базиса Ванны, центры локализации которого образуют равномерно дискретное подмножество D в данном многообразии X и задали вопрос о том, что может быть препятствием для существования такого базиса для заданного подпространства $H \subset L^2(X)$. Таким препятствием оказалась возможная нетривиальность класса проектора на H в K -теории алгебры Роу многообразия X [1].

Мы показываем, что тривиальность проектора Ванны в алгебре Роу многообразия X равносильна тривиальности образа единицы при вложении равномерной алгебры Роу пространства D в его алгебру Роу,

Мануйлов Владимир Маркович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В.Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir Manuilov (Moscow State University, Moscow, Russia)

т.е. зависит лишь от дискретизации D и связана со сложной задачей о взаимоотношении между алгеброй Роу и равномерной алгеброй Роу .

Это позволяет дать геометрическую характеристику тривиальности указанного класса в K -теории. Для дискретного метрического пространства D обозначим через $D(\alpha)$ граф, вершинами которого служат точки D , и две вершины $x, y \in D$ соединены ребром, если $d(x, y) \leq \alpha$.

Теорема. Пусть D — равномерно дискретное метрическое пространство ограниченной геометрии. Если существует α , для которого граф $D(\alpha)$ не имеет конечных компонент связности, то класс проектора Ваннье в K -теории алгебры Роу равен нулю.

Следствие. Пусть X — связное собственное пространство ограниченной геометрии с мерой. Тогда класс проектора Ваннье в K -теории алгебры Роу пространства X равен нулю.

Литература

1. M. Ludewig, G. C. Thiang. Large-scale geometry obstructs localization. // J. Math. Phys., **63** (2022), No. 091902.
2. Yu. Kordyukov, V. Manuilov. On topological obstructions to the existence of non-periodic Wannier bases. // arXiv.org 2304.00125.

О ДЕЛЕНИИ НА МНОГОЧЛЕНЫ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

О.А. Иванова, С.Н. Мелихов
neo_ivolga@mail.ru, snmelihov@yandex.ru

УДК 517.982.274, 517.983.22

Исследована проблема деления на многочлены линейных непрерывных функционалов на весовом пространстве целых функций, реализующем сопряженное к пространству ультрадифференцируемых или бесконечно дифференцируемых функций.

Ключевые слова: весовое пространство целых функций, ультрадифференцируемая функция, аналитический функционал.

On the division by polynomials in spaces of analytic functionals

We investigate the problem of division by polynomials of continuous linear functionals on a weighted space of entire functions, realizing the dual to the space of ultradifferentiable or infinitely differentiable functions.

Keywords: weighted space of entire functions, ultradifferentiable function, analytic functional.

Непрерывную неубывающую функцию $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ будем называть *весовой функцией*, если

$$\omega(2t) = O(\omega(t)), \quad \omega(t) = O(t), \quad \log t = o(\omega(t)), \quad t \rightarrow +\infty,$$

и функция $\varphi = \omega \circ \exp$ выпукла на $\mathbb{R}$.

Пусть ω - весовая функция, φ^* - функция, сопряженная по Юнгу к φ ; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Введем пространства ультрадифференцируемых функций типа Берлинга, задаваемые с помощью ω . Для отрезка $K \subset \mathbb{R}$ с непустой внутренней частью введем пространство Фреше

$$\mathcal{E}_\omega(K) := \left\{ f \in C^\infty(K) \mid \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0} \sup_{x \in K} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{\exp(m\varphi^*(\alpha/m))} < +\infty \forall m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Пусть Ω — интервал в $\mathbb{R}$. Зафиксируем последовательность отрезков K_n , $n \in \mathbb{N}$, таких, что $K_n \subset \text{int } K_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\text{int } K_1 \neq \emptyset$ и $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Определим пространство Фреше

$$\mathcal{E}_\omega(\Omega) := \left\{ f \in C^\infty(\Omega) \mid \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0} \sup_{x \in K_n} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{\exp(m\varphi^*(\alpha/m))} < +\infty \forall m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Иванова Ольга Александровна, к.ф.-м.н., доцент, ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия); Olga Ivanova (Southern Federal University, Rostov on Don, Russia)

Мелихов Сергей Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия); ведущий научный сотрудник, ЮМИ ВНИЦ РАН (Владикавказ, Россия); Sergey Melikhov (Southern Federal University, Rostov on Don); Southern Mathematical Institute of RAS (Vladikavkaz, Russia)

Для $\omega(t) = \log(1+t)$, $t \in [0, +\infty)$, для отрезка $K \subset \mathbb{R}$ с непустой внутренностью и для интервала $\Omega \subset \mathbb{R}$ считаем, что $\mathcal{E}_\omega(K) := C^\infty(K)$, $\mathcal{E}_\omega(\Omega) := C^\infty(\Omega)$.

Для ограниченного множества $Q \subset \mathbb{R}$ символ H_Q обозначает опорную функцию Q , т.е. $H_Q(y) := \sup_{x \in Q} (xy)$, $y \in \mathbb{R}$. Для локально выпуклого пространства H через H' обозначаем топологическое сопряженное к H . Будем H' снабжать сильной топологией.

Продолжим функцию ω на $\mathbb{C}$, полагая $\omega(z) := \omega(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Через $H(\mathbb{C})$ обозначим пространство всех целых в $\mathbb{C}$ функций. Для отрезка $K \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ определим банахово пространство целых функций

$$A_{\omega,n}(K) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \mid \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(H_K(\operatorname{Im} z) + n\omega(z))} < +\infty \right\}$$

и положим $A_\omega(K) := \operatorname{ind}_{n \rightarrow} A_{\omega,n}(K)$. Если Ω — интервал в $\mathbb{R}$, то $A_\omega(\Omega) := \operatorname{ind}_{n \rightarrow} A_{\omega,n}(K_n)$. Для весовой функции ω и для $\omega(t) := \log(1+t)$ преобразование Фурье-Лапласа $\mathcal{F}$ является топологическим изоморфизмом $\mathcal{E}_\omega(K)'$ на $A_\omega(K)$ и $\mathcal{E}_\omega(\Omega)'$ на $A_\omega(\Omega)$.

Далее Δ — отрезок в $\mathbb{R}$, отличный от точки, или интервал в $\mathbb{R}$, $0 \in \Delta$; ω — весовая функция или $\omega(t) = \log(1+t)$, $t \in [0, +\infty)$. Следуя [1], введем операцию $\circledast$:

$$(\varphi \circledast \psi)(f) := \varphi_z \left(\psi_t \left(\frac{tf(t) - zf(z)}{t - z} \right) \right), \quad \varphi, \psi \in A_\omega(\Delta)', f \in A_\omega(\Delta).$$

(Следуя В.А. Ткаченко, пространство $A_\omega(\Delta)'$ мы называем пространством аналитических функционалов.) Она является ассоциативной и коммутативной бинарной операцией в $A_\omega(\Delta)'$, и алгебра $(A_\omega(\Delta)', \circledast)$ является топологической.

Для многочлена $q \in \mathbb{C}[z]$, $\varphi \in A_\omega(\Delta)'$ положим

$$(q\varphi)(f) := \varphi(qf), \quad f \in A_\omega(\Delta).$$

Поскольку оператор $f \mapsto qf$ умножения на q линеен и непрерывен в $A_\omega(\Delta)$, то $q\varphi \in A_\omega(\Delta)'$ для любого функционала $\varphi \in A_\omega(\Delta)'$. Далее $m_j(z) := z^j$, $z \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}_0$; $\delta_0(f) := f(0)$.

Теорема 1. Пусть $q \in \mathbb{C}[z]$ — многочлен степени $n \in \mathbb{N}$.

(i) Для любого $\psi \in A_\omega(\Delta)'$ уравнение $q\varphi = \psi$ имеет решение $\varphi \in A_\omega(\Delta)'$. Это уравнение имеет единственное решение $\varphi_0 \in A_\omega(\Delta)'$, удовлетворяющее условиям $\varphi(m_j) = 0$, $0 \leq j \leq n-1$.

(ii) Пусть $\frac{\delta_0}{q} \in A_\omega(\Delta)'$ — решение уравнения $q\varphi = \delta_0$ такое, что $\frac{\delta_0}{q}(m_j) = 0$, $0 \leq j \leq n-1$. Тогда для любого $\psi \in A_\omega(\Delta)'$ функционал $\varphi_0 := \psi \circledast \frac{\delta_0}{q}$ — решение уравнения $q\varphi = \psi$, удовлетворяющее условиям $\varphi_0(m_j) = 0$, $0 \leq j \leq n-1$.

Теорема 1 применяется (с помощью преобразования $\mathcal{F}$) к доказательству формулы Дюамеля, выражающей решение $f \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$ дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $\sum_{j=0}^n a_j f^{(j)} =$

$g, g \in \mathcal{E}_\omega(\Delta)$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, удовлетворяющего нулевым начальным условиям $f^{(j)}(0) = 0$, $0 \leq j \leq n - 1$, через такое решение для правой части, тождественно равной 1.

Литература

1. Иванова О.А., Мелихов С.Н. Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ, **28:2** (2016), 114–137.

ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ПРООБРАЗЕ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ

В.В. Напалков, А.А. Нуятов
vnap@mail.ru, nuyatov1aa@rambler.ru

УДК 517.518

В работе решена задача интерполяции в прообразе оператора свертки. В случае, когда в качестве прообраза берется ядро оператора, будет иметь место единственность решения указанной задачи при условии, что множество узлов интерполяции будет множеством единственности в ядре оператора свертки.

Ключевые слова: целые функции, оператор свертки, интерполяция.

The interpolation problem in the preimage of the convolution operator

The work solves the problem of interpolation in the preimage convolution operator. In the case when the kernel of the operator is taken as the preimage, there will be a unique solution to the specified problem, provided that the set of interpolation nodes will be the set of uniqueness in the kernel of the convolution operator.

Keywords: entire functions, convolution operator, interpolation.

Пусть $H(\mathbb{C})$ - пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах; сопряженное к пространству $H(\mathbb{C})$ обозначим через $H^*(\mathbb{C})$, кроме того, введем обозначение $P_{\mathbb{C}} = \{f(z) \in H(\mathbb{C}) : \exists c_1, c_2 > 0, |f(z)| \leq c_1 e^{c_2 |z|}\}$. Функции $\varphi(z) \in P_{\mathbb{C}}$ поставим в соответствие функционал $F \in H^*(\mathbb{C})$ такой, что $\hat{F}(z) = \varphi(z)$, где $\hat{F}(z) = \langle F, e^{\lambda z} \rangle$ - преобразование Лапласа функционала F .

Оператор свертки, действующий из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$, с характеристической функцией $\varphi(z) \in P_{\mathbb{C}}$ запишем в виде

$$M_{\varphi}[f](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z+t)\gamma(t)dt,$$

где C - замкнутый контур, $\gamma(t)$ - функция аналитическая на C и вне C , $\gamma(\infty) = 0$.

Напалков Валерий Валентинович, д.ф.-м.н., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Valery Napalkov (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the UFRC of RAS, Ufa, Russia)

Нуятов Андрей Александрович, к.ф.-м.н., доцент, НГТУ им. Р.Е. Алексеева (Нижний Новгород, Россия); Andrey Nuyatov (Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Russia)

Возьмем произвольно и зафиксируем функцию $g_0(z) \in H(\mathbb{C})$. Рассмотрим сверточное уравнение

$$M_\varphi[f](z) = g_0(z),$$

обозначим $Im^{-1}M_\varphi[f]$ - прообраз оператора свертки. В случае, когда $g_0(z) \equiv 0$, прообраз оператора свертки становится ядром $Ker M_\varphi[f]$.

Для произвольной функции $\psi(z) \in H(\mathbb{C})$ построим в $H(\mathbb{C})$ идеал: $(\psi) = \{\psi(z) \cdot R(z) : R(z) \in H(\mathbb{C})\}$.

Определение 1. *Равенства*

$$H(\mathbb{C}) = (\psi) + Im^{-1}M_\varphi, \quad (1)$$

$$H(\mathbb{C}) = (\psi) \oplus Im^{-1}M_\varphi, \quad (2)$$

будем называть представлением и разложение Фишера для прообраза M_φ в $H(\mathbb{C})$ соответственно.

Если имеет место (1), то любую целую функцию можно представить, вообще говоря, не единственным образом в виде: $f(z) = h(z) + g(z)$, $g(z) \in Im^{-1}M_\varphi$, $h(z) \in (\psi)$. Если же имеет место (2), то такое представление целой функции будет единственным.

Равенство (1) позволяет решать задачу интерполяции в прообразе оператора свертки (см. [1]).

Наряду с оператором $M_\varphi[f](z)$ введем линейный и непрерывный в топологии пространства $H(\mathbb{C})$ оператор

$$M_\varphi[\psi(z) \cdot y(z)] + g_0(z) : H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{C}), \quad (3)$$

как и выше, $g_0(z)$ - функция из образа оператора $M_\varphi[f](z)$.

Теорема 1. *Имеет место представление Фишера в $H(\mathbb{C}) \Leftrightarrow$ оператор (3) сюръективен.*

Обозначим через N_φ и N_ψ - нулевые множества функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Сформулируем условия инъективности оператора $M_\varphi[\psi(z) \cdot] + g_0(z)$.

Теорема 2. *Если выполнены два условия:*

1. $\exists h_0(z) \in H(\mathbb{C}) : h_0(z) \in (\psi) \cap \{f \in H(\mathbb{C}) : M_\varphi[f] = g_0\}$;
 2. N_ψ - множество единственности в $Ker M_\varphi$,
- то оператор $M_\varphi[\psi \cdot] + g_0(z)$ будет инъективным.

Следствие 1. *Если N_ψ - множество единственности в $Ker M_\varphi$, то оператор $M_\varphi[\psi \cdot]$ будет инъективным.*

По теореме 1 сюръективность оператора $M_\varphi[\psi \cdot] + g_0(z)$ эквивалентна представлению Фишера $H(\mathbb{C}) = (\psi) + Im^{-1}M_\varphi$. Очевидно, что для существования разложения Фишера должна быть еще инъективность оператора $M_\varphi[\psi \cdot] + g_0(z)$, при этом инъективность этого оператора эквивалентна тому, что $(\psi) \cap \{f \in H(\mathbb{C}) : M_\varphi[f] = g_0\} = \{0\}$, поэтому по теореме 2, вообще говоря, разложение Фишера не существует, но будет существовать представление Фишера, т.е. задача интерполяции в прообразе оператора свертки разрешима, но не единственным

образом. Заметим, что по следствию из теоремы 2 в случае, когда N_ψ - множество единственности в $\text{Ker } M_\varphi$, существует разложение: $H(\mathbb{C}) = (\psi) \oplus \text{Ker } M_\varphi$.

Согласно результату статьи [2] функция $\psi \in H(\mathbb{C})$ порождает в пространстве $P_\mathbb{C}$ сюръективный оператор свертки $M_\psi : P_\mathbb{C} \rightarrow P_\mathbb{C}$

$$M_\psi[f](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \psi(t) \gamma(t) e^{zt} dt, \quad (4)$$

где $\gamma(t)$ - функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$, C - замкнутый контур, охватывающий все особые точки $\gamma(t)$.

Выберем произвольно и зафиксируем функцию $G_0 \in P_\mathbb{C}$, и рассмотрим уравнение: $M_\psi[f] = G_0(z)$.

Пусть $(\varphi) = \{\varphi(z) \cdot G(z) : G(z) \in P_\mathbb{C}\}$ - идеал в пространстве $P_\mathbb{C}$, $Im^{-1}M_\psi[f]$ - прообраз оператора (4).

Определение 2. *Равенства $P_\mathbb{C} = (\varphi) + Im^{-1}M_\psi$ и $P_\mathbb{C} = (\varphi) \oplus Im^{-1}M_\psi$ будем называть представлением и разложением Фишера для прообраза M_ψ в $P_\mathbb{C}$ соответственно.*

Введем в рассмотрение линейный и непрерывный оператор: $M_\psi[\varphi(z) \cdot y(z)] + G_0(z) : P_\mathbb{C} \rightarrow P_\mathbb{C}$.

Теорема 3. *Имеет место представление Фишера в $P_\mathbb{C} \Leftrightarrow$ оператор $M_\psi[\varphi(z) \cdot y(z)] + G_0(z)$ сюръективен.*

Теорема 4. *Если выполнены два условия:*

1. $\exists h_0(z) \in P_\mathbb{C} : h_0(z) \in (\varphi) \cap \{f \in P_\mathbb{C} : M_\psi[f] = G_0\}$;
2. N_φ - множество единственности в $\text{Ker } M_\psi$,
то оператор $M_\psi[\varphi \cdot] + G_0(z)$ будет инъективным.

Следствие 2. *Если N_φ - множество единственности в $\text{Ker } M_\psi$, то оператор $M_\psi[\varphi \cdot]$ будет инъективным.* По аналогии с пространством $H(\mathbb{C})$, вообще говоря, единственности в задаче интерполяции в прообразе оператора M_ψ не будет, но при определенных условиях будет существовать разложение: $P_\mathbb{C} = (\varphi) \oplus \text{Ker } M_\psi$.

Перепишем оператор (3) в виде: $M_\varphi[\psi \cdot f + f_0]$, здесь ψ и f_0 - фиксированные целые функции, а f "пробегает" все пространство $H(\mathbb{C})$. Поскольку оператор $M_\varphi[\psi \cdot f + f_0]$ линейно и непрерывно отображает $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$, тогда сопряженный оператор $M_\varphi^*[\psi \cdot f + f_0]$ линейно и непрерывно отображает пространство $H^*(\mathbb{C})$ в $H^*(\mathbb{C})$. Так как пространства $H^*(\mathbb{C})$ и $P_\mathbb{C}$ топологически изоморфны, то оператор $M_\varphi^*[\psi \cdot f + f_0]$ порождает линейный и непрерывный оператор, действующий из $P_\mathbb{C}$ в $P_\mathbb{C}$ по правилу: если $G(z) \in P_\mathbb{C}$, то $\bar{M}_\varphi^*[G] = M_\psi[\varphi \cdot G]$, где M_ψ - оператор вида (4). Поскольку пространство $H(\mathbb{C})$ является пространством Фреше, применяя результат работы [3], получаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Справедливы утверждения:*

1. $im(M_\varphi[\psi \cdot] + g_0)$ замкнут в $H(\mathbb{C}) \Leftrightarrow im M_\psi[\varphi \cdot]$ замкнут в $P_\mathbb{C}$;
2. $im(M_\varphi[\psi \cdot] + g_0)$ всюду плотный в $H(\mathbb{C}) \Leftrightarrow M_\psi[\varphi \cdot]$ инъективный;
3. $M_\varphi[\psi \cdot] + g_0$ инъективный $\Leftrightarrow im M_\psi[\varphi \cdot]$ всюду плотный в $P_\mathbb{C}$.

Из теорем 1, 3 и 5 получаем

Следствие 3. $H(\mathbb{C}) = (\psi) \oplus \text{Ker } M_\varphi \Leftrightarrow P_{\mathbb{C}} = (\varphi) \oplus \text{Ker } M_\psi$.

Определение 3. Будем говорить, что S - секвенциально достаточное множество на U , если из условий

1. для любой последовательности функций $q_k(z) \in U$ найдутся числа $\sigma > 0$ и $M > 0$ такие, что $|q_k(z)| \leq M e^{\sigma|z|} \forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in S$;
2. для любого компакта $K_S \subset S : |q_k(z)| \Rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty, z \in K_S$ следует сходимость этой последовательности на U .

Теорема 6. Пусть $\varphi(z) \in P_{\mathbb{C}}, \psi(z) \in H(\mathbb{C})$. Если N_φ - секвенциально достаточное множество в $\text{Ker } M_\psi$, то имеет место представление Фишера: $H(\mathbb{C}) = (\psi) + \text{Im}^{-1} M_\varphi$. Кроме того, если N_ψ - множество единственности в $\text{Ker } M_\varphi$, то существует разложение Фишера: $H(\mathbb{C}) = (\psi) \oplus \text{Ker } M_\varphi$.

Литература

1. Напалков В.В., Нуятов А.А. Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки // Мат. сборник, **203**:2 (2012), 224-233
2. Muggli H. Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten // Comment. Math. Helv., **11** (1938), 151-179
3. Браудер Ф. Функциональный анализ и уравнения в частных производных // Математика, **4**:3 (1960), 79-106

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВЛОЖЕНИЯ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ВОСПРОИЗВОДЯЩИМ ЯДРОМ

В.В. Напалков, А.А. Нуятов
vnap@mail.ru, nuyatov1aa@rambler.ru

УДК 517.518

В докладе приводится критерий вложенности гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром. Важную роль при этом играет понятие согласованности двух систем функций, введенное авторами ранее. Полученные результаты применяются к задаче о пространствах последовательностей комплексных чисел, образованных следами функций из пространства Баргмана–Фока на решетках фон Неймана.

Ключевые слова: Гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, ортоподобная система, пространство Баргмана – Фока, решетка фон Неймана

Necessary and sufficient conditions for embedding Hilbert spaces with a reproducing kernel

The report provides a criterion for the embedding of Hilbert spaces with a reproducing kernel. An important role in this is played by the concept of consistency of two systems of functions, introduced by the authors earlier. The results obtained are applied to the problem of spaces of sequences of complex numbers formed by traces of functions from the Bargmann-Fock space on von Neumann lattices.

Keywords: reproducing kernel Hilbert space, orthosimilar system, Bargmann – Fock space, von Neumann lattice.

В работах [1], [2] рассматривалась задача о совпадении или эквивалентности двух гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром (RKHS). В работе [3] результаты работ [1], [2] применяются для изучения специальных гильбертовых пространств последовательностей комплексных чисел. Здесь мы изучаем следующую задачу о вложении гильбертовых пространств RKHS. Пусть дано некоторое RKHS пространство H_1 состоящее из функций, заданных на некотором множестве точек $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Далее, имеется некоторое RKHS пространство H_2 , также состоящее из функций, заданных на множестве точек

Напалков Валерий Валентинович, д.ф.-м.н., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Valery Napalkov (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the UFRС of RAS, Ufa, Russia)

Нуятов Андрей Александрович, к.ф.-м.н., доцент, НГТУ им. Р.Е. Алексеева (Нижний Новгород, Россия); Andrey Nuyatov (Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Russia)

Ω_1 . Вопрос: при каких условиях будет выполняться $H_1 \subset H_2$? Мы рассмотрим эту задачу в несколько другой эквивалентной постановке. Пусть H – некоторое гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций, заданных на множестве $\Omega \subset \mathbb{C}^m$, $m \in \mathbb{N}$, т.е. для произвольной точки $\xi \in \Omega$ функционал δ_ξ , ставящий в соответствие любой функции $f \in H$ значение функции f в точке $\xi \in \Omega$, является линейным и непрерывным функционалом над H . Предположим, что $\{e_1(\cdot, \xi)\}_{\xi \in \Omega_1}$, $\{e_2(\cdot, \xi)\}_{\xi \in \Omega_1}$ – некоторые полные системы функций в H , $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$. Обозначим

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z) &\stackrel{\text{def}}{=} (e_1(\cdot, z), f)_H \quad \forall z \in \Omega_1, \quad \tilde{H} = \{\tilde{f}, f \in H\}, \\ (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)_{\tilde{H}} &\stackrel{\text{def}}{=} (f_2, f_1)_H, \quad \|\tilde{f}_1\|_{\tilde{H}} = \|f_1\|_H \quad \forall \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \tilde{H}, \\ \hat{f}(z) &\stackrel{\text{def}}{=} (e_2(\cdot, z), f)_H \quad \forall z \in \Omega_1, \quad \hat{H} = \{\hat{f}, f \in H\}, \\ (\hat{f}_1, \hat{f}_2)_{\hat{H}} &\stackrel{\text{def}}{=} (f_2, f_1)_H, \quad \|\hat{f}_1\|_{\hat{H}} = \|f_1\|_H \quad \forall \hat{f}_1, \hat{f}_2 \in \hat{H}.\end{aligned}$$

Необходимо найти условие, при выполнении которого пространства $\hat{H}$ и $\tilde{H}$ обладают свойством $\hat{H} \subset \tilde{H}$, т.е. $\hat{H}$ как множество функций содержится в $\tilde{H}$, и найдется постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|f\|_{\tilde{H}} \leq C \|f\|_{\hat{H}} \quad \forall f \in \hat{H}.$$

Теорема 1. *Для того чтобы $\hat{H} \subset \tilde{H}$ необходимо и достаточно, чтобы нашелся линейный непрерывный оператор $A: H \rightarrow H$ такой, что*

$$A: e_1(\cdot, z) \mapsto e_2(\cdot, z) \quad \forall z \in \Omega_1.$$

Также справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнено включение $\hat{H} \subset \tilde{H}$. Тогда найдется линейный непрерывный оператор $\mathcal{T}: H \rightarrow H$ такой, что выполнено условие*

$$(e_1(\cdot, z_1), e_2(\cdot, z_2))_H = \overline{(e_1(\cdot, z_2), \mathcal{T}e_2(\cdot, z_1))_H} \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega_1. \quad (1)$$

Условие (1) означает, что системы функций $\{e_j(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_1}$, $j = 1, 2$ согласованы с оператором $\mathcal{T}$. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно (см. [1]). Однако, при дополнительных предположениях (см. [1], [2]), верно утверждение обратное утверждению теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть системы функций $\{e_j(\cdot, z)\}_{z \in \Omega_1}$, $j = 1, 2$ суть ортоподобные системы в H и меры этих ортоподобных систем равны или, более общо, H – равны, при этом выполнено условие согласования*

$$(e_1(\cdot, z_1), e_2(\cdot, z_2))_H = \overline{(e_1(\cdot, z_2), \mathcal{T}e_2(\cdot, z_1))_H} \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega_1,$$

где $\mathcal{T}: H \rightarrow H$ некоторый линейный ограниченный оператор. Тогда справедливо включение $\widehat{H} \subset \widehat{\tilde{H}}$.

Следует заметить, что, в отличие от аналогичных утверждений статьи [1], оператор $\mathcal{T}$ не предполагается взаимно однозначным, поэтому в ходе доказательства теоремы 2 и теоремы 3 приходится применять несколько иные рассуждения.

Полученные результаты применяются к следующей задаче. Рассмотрим пространство Баргмана – Фока, состоящее из целых функций, квадрат модуля которых суммируем на плоскости $\mathbb{C}$ с мерой $d\sigma(z) := (1/\pi)e^{-|z|^2} dv(z)$, $dv(z)$ – элемент площади:

$$\|f\|_F^2 = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 d\sigma(z) < \infty \quad \forall f \in F$$

и $\Omega_0 := \{z \in \mathbb{C}: z = an + \pi ibm, m, n \in \mathbb{Z}\}$ – дискретное множество точек в $\mathbb{C}$, a, b – вещественные числа, $a \cdot b = \pi$. Пусть k – некоторое вещественное число, $k > 1$. Определим дискретные множества

$$\begin{aligned} \Omega_0^k &= k \cdot \Omega_0 := \{z \in \mathbb{C}: z = kan + \pi ikbm, \quad m, n \in \mathbb{Z}\}; \\ \Omega_{0,k} &= \frac{1}{k} \cdot \Omega_0 := \{z \in \mathbb{C}: z = \frac{a}{k}n + \pi i \frac{b}{k}m, \quad m, n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Пусть $\Lambda_k = \Omega_0^k \cup \Omega_{0,k}$. Пусть $\theta_1(\lambda), \theta_2(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_k$ – некоторые комплекснозначные функции, определенные на Λ_k . Рассмотрим следующие системы функций из пространства Баргмана – Фока $\{e_j(\cdot, \xi)\}_{\xi \in \Omega_0^k}$, $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} e_1(z, \xi) &:= e^{\theta_1(\xi) \cdot \xi \cdot z}, \quad \xi \in \Omega_0^k, z \in \mathbb{C}; \\ e_2(z, \xi) &:= e^{\theta_2(\xi) \cdot \bar{\xi} \cdot z}, \quad \xi \in \Omega_0^k, z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Мы предполагаем, что (см. [3])

$$F_0^k \stackrel{def}{=} \overline{\text{span}\{e_1(\cdot, \xi)\}_{\xi \in \Omega_0^k}} = \overline{\text{span}\{e_2(\cdot, \xi)\}_{\xi \in \Omega_0^k}},$$

где черта над $\text{span}\{e_j(\cdot, \xi)\}_{\xi \in \Omega_0^k}$, $j = 1, 2$ обозначает замыкание линейной оболочки системы функций по норме пространства Баргмана – Фока. Рассмотрим следующие гильбертовы пространства последовательностей V_F^k, U_F^k , $k > 1$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &\stackrel{def}{=} (e_1(\cdot, z), f)_{F_0^k}, \quad \forall z \in \Omega_0^k \quad V_F^k = \{\tilde{f}, f \in F_0^k\}, \\ (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)_{V_F^k} &\stackrel{def}{=} (f_2, f_1)_{F_0^k} \quad \forall \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in V_F^k, \\ \hat{f}(z) &\stackrel{def}{=} (e_2(\cdot, z), f)_{F_0^k}, \quad \forall z \in \Omega_0^k \quad U_F^k = \{\hat{f}, f \in F_0^k\}, \\ (\hat{f}_1, \hat{f}_2)_{U_F^k} &\stackrel{def}{=} (f_2, f_1)_{F_0^k} \quad \forall \hat{f}_1, \hat{f}_2 \in U_F^k. \end{aligned}$$

Нами построены примеры функций θ_1 и θ_2 , для которых выполняются условия:

а) пространства V_F^k, U_F^k эквивалентны, т.е. пространства состоят из одних и тех же последовательностей комплексных чисел и нормы этих последовательностей эквивалентны;

б) выполнено условие $V_F^k \subset U_F^k$ или условие $U_F^k \subset V_F^k$;

с) пространства V_F^k, U_F^k состоят из различных последовательностей комплексных чисел.

Эти вопросы будут обсуждаться в докладе.

Литература

1. Напалков В.В. (мл.) Нуятов А.А. Об одном условии совпадения пространств преобразований функционалов гильбертова пространства// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2022, Т. 28, № 3, 142-154.

2. Напалков В.В. (мл.) Нуятов А.А. К вопросу о совпадении гильбертовых пространств интегрируемых с квадратом по мере функций// Труды МФТИ, 2023, № 3.

3. Напалков В.В. (мл.) Нуятов А.А. О гильбертовых пространствах последовательностей, образованных значениями функций из пространства Баргмана — Фока// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2023, Т. 29, № 2, 104-114

МИНИМАЛЬНАЯ НОРМА ПРОЕКТОРА ПРИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ЕВКЛИДОВОМ ШАРЕ

М.В. Невский
mnevsk55@yandex.ru

УДК 517.51, 514.17

При линейной интерполяции на n -мерном евклидовом шаре интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами правильного симплекса, вписанного в граничную сферу, имеет минимальную C -норму. Других минимальных проекторов в этой ситуации нет. Дается точное значение и асимптотика минимальной нормы проектора.

Ключевые слова: линейная интерполяция, n -мерный шар, проектор, норма, правильный симплекс

The minimum norm of a projector under linear interpolation on a Euclidean ball

Under linear interpolation on a Euclidean n -dimensional ball, an interpolation projector whose nodes coincide with the vertices of a regular simplex inscribed into the boundary sphere has the minimum C -norm. There are no other minimum projectors in this case. We give the exact value and the asymptotic behavior of the minimum norm.

Keywords: linear interpolation, n -dimensional ball, projector, norm, regular simplex.

Обозначим через B_n единичный евклидов шар в $\mathbb{R}^n$, задаваемый неравенством

$$\|x\| := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \leq 1.$$

Через $C(B_n)$ обозначим пространство непрерывных функций $f: B_n \rightarrow \mathbb{R}$ с равномерной нормой $\|f\|_{C(B_n)} := \max_{x \in B_n} |f(x)|$. Под $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ будем понимать совокупность многочленов от n переменных степени ≤ 1 , или линейных функций на $\mathbb{R}^n$.

Для невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ с вершинами $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$, $1 \leq j \leq n+1$, введём в рассмотрение матрицу

$$S := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Считаем $\mathbf{S}^{-1} = (l_{ij})$. Линейные многочлены

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$$

обладают свойствами $\lambda_j(x^{(k)}) = \delta_j^k$. Числа $\lambda_j(x)$ являются барицентрическими координатами точки $x \in \mathbb{R}^n$ (см., например, [1]). Мы называем λ_j базисными многочленами Лагранжа симплекса S .

Установлен следующий ключевой геометрический результат. Пусть E — эллипсоид минимального объёма, содержащий n -мерный симплекс S , m — натуральное, $1 \leq m \leq n$. Каждому набору из m вершин симплекса поставим в соответствие точку $y \in E$, определяемую следующим образом. Пусть g есть центр тяжести $(m-1)$ -мерной грани S , содержащей выделенные вершины, h — центр тяжести $(n-m)$ -мерной грани, содержащей остальные $n+1-m$ вершин. Тогда y есть точка пересечения прямой (gh) с границей эллипсоида в направлении от g к h .

Теорема 1. *Для любого невырожденного симплекса $S \subset B_n$ и для всякого $m \in \{1, \dots, n\}$ найдётся такой набор из m вершин симплекса, для которого $y \in B_n$.*

В качестве гипотезы теорема 1 была сформулирована в [3]. Там же было показано, что утверждение теоремы 1 верно для $m = 1$.

Будем говорить, что интерполяционный проектор $P : C(B_n) \rightarrow P_1(\mathbb{R}^n)$ соответствует симплексу $S \subset B_n$, если его узлы совпадают с вершинами этого симплекса. Проектор P определяется равенствами $Pf(x^{(j)}) = f(x^{(j)})$. Справедлив аналог интерполяционной формулы Лагранжа:

$$Pf(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f(x^{(j)}) \lambda_j(x). \quad (1)$$

Под $\|P\|_{B_n}$ будем понимать норму P как оператора из $C(B_n)$ в $C(B_n)$. Из (1) следует, что

$$\|P\|_{B_n} = \max_{x \in B_n} \sum_{j=1}^{n+1} |\lambda_j(x)|.$$

Через θ_n обозначим минимальную норму интерполяционного проектора, узлы которого принадлежат B_n .

Если S — правильный симплекс, вписанный в шар B_n , то для нормы соответствующего проектора выполняется равенство $\|P\|_{B_n} = \max\{\psi(a_n), \psi(a_n + 1)\}$ (см. [2]). Здесь

$$\psi(t) := \frac{2\sqrt{n}}{n+1} \left(t(n+1-t) \right)^{1/2} + \left| 1 - \frac{2t}{n+1} \right|, \quad 0 \leq t \leq n+1,$$

$$a_n := \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2} \right\rfloor.$$

Таблица 1: Числа a_n, k_n и $\theta_n(B_n) = \psi(k_n)$

n	a_n	$a_n + 1$	k_n	$\theta_n(B_n) = \psi(k_n)$
1	0	1	1	1
2	0	1	1	$\frac{5}{3} = 1.6666 \dots$
3	1	2	1	2
4	1	2	1	$\frac{11}{5} = 2.2$
5	1	2	2	$\frac{1+2\sqrt{10}}{3} = 2.4415 \dots$
6	2	3	2	$\frac{3+4\sqrt{15}}{7} = 2.6417 \dots$
7	2	3	3	$\frac{1+\sqrt{105}}{4} = 2.8117 \dots$
8	3	4	3	3
9	3	4	3	$\frac{2+3\sqrt{21}}{5} = 3.1495 \dots$
10	3	4	4	$\frac{3+4\sqrt{70}}{11} = 3.3151 \dots$
11	4	5	4	$\frac{1+2\sqrt{22}}{3} = 3.4602 \dots$
12	4	5	5	$\frac{3+8\sqrt{30}}{13} = 3.6013 \dots$
13	5	6	5	$\frac{2+3\sqrt{65}}{7} = 3.7409 \dots$
14	5	6	6	$\frac{1+4\sqrt{21}}{5} = 3.8660 \dots$
15	6	7	6	4
50	21	22	22	$\frac{7+20\sqrt{319}}{51} = 7.1414 \dots$
100	45	46	45	$\frac{11+120\sqrt{70}}{101} = 10.0494 \dots$
1000	484	485	485	$\frac{31+200\sqrt{25026}}{1001} = 31.6385 \dots$

Указанная величина и является минимальной нормой интерполяционного проектора на n -мерном шаре.

Теорема 2. При любом n

$$\theta_n = \max\{\psi(a_n), \psi(a_n + 1)\}.$$

Для проектора $P : C(B_n) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ равенство $\|P\|_{B_n} = \theta_n$ выполняется тогда и только тогда, когда узлы интерполяции совпадают с вершинами правильного симплекса, вписанного в граничную сферу.

Свойство правильного вписанного симплекса, выраженное теоремой 2, является новым.

Пусть k_n совпадает с тем из чисел a_n и $a_n + 1$, на котором $\psi(t)$ принимает большее значение. Равенство $\theta_n = \max\{\psi(a_n), \psi(a_n + 1)\} = \psi(k_n)$ выводится из предыдущих результатов автора путём применения утверждения теоремы 1 при $t = k_n$. Для $1 \leq n \leq 4$ теорема 2 другими способами была доказана в [2] и [3].

Числа k_n возрастают с ростом n , но не строго монотонно. Если $n \geq 2$, то $k_n \leq n/2$. Результаты вычислений a_n, k_n и $\theta_n(B_n) = \psi(k_n)$ даются в таблице 1; мы используем данные из статьи [2].

В заключение заметим, что оценки, доказанные в [2], приводят к простым неравенствам для θ_n , содержащим точную асимптотику этих величин по размерности n .

Теорема 3. Справедливы соотношения

$$\sqrt{n} \leq \theta_n \leq \sqrt{n+1}.$$

Более того, $\theta_n = \sqrt{n}$ лишь в случае $n = 1$, а равенство $\theta_n = \sqrt{n+1}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\sqrt{n+1}$ — целое число.

Литература

1. Невский М.В. Об одном свойстве n -мерного симплекса // Матем. заметки, **87**:4 (2010), 580-593.
2. Невский М.В., Ухалов А.Ю. Линейная интерполяция на евклидовом шаре в $\mathbb{R}^n$ // Модел. и анализ информ. систем, **26**:2 (2019), 279-296.
3. Невский М.В. О свойствах правильного симплекса, вписанного в шар // Модел. и анализ информ. систем, **28**:2 (2021), 186-197.

О ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С ФИКСИРОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Д.М. Одинабеков
jasur_79@inbox.ru

УДК 517.968

Основными в теории сингулярных интегральных операторов являются проблемы ограниченности, обратимости, нетеровости и вычисления индекса. В работе получены эффективные условия нетеровости некоторых двумерных сингулярных интегральных операторов с несколькими фиксированными особенностями по ограниченной области в лебеговом пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ и дана формула для вычисления индекса.

Ключевые слова: сингулярный интегральный оператор, индекс оператора, символ оператора, нетеровость оператора.

On two-dimensional singular integral operators with fixed features

The main ones in the theory of singular integral operators are problems of boundedness, reversibility, Noethericity property and calculation of the index. Effective conditions for the Noethericity of some two-dimensional singular integral operators with several fixed features over a bounded domain in the Lebesgue space $L^p_{\beta-2/p}(D)$ are obtained and a formula for calculating the index is given

Keywords: singular integral operator, operator index, operator symbol, operator Noethericity

Пусть D – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ и содержащая внутри точку $z = 0$ и точки $z_1, z_2, \dots, z_m$; $\overline{D} = D \cup \Gamma$; $a(z), b(z), c(z)$ – непрерывные в $\overline{D}$ функции; $Q_{ij}(z, \zeta)$ – измеримые ограниченные функции, имеющие пределы

$$\lim_{z, \zeta \rightarrow z_j} Q_{ij}(z, \zeta) = Q_{ij}(z_j, z_j), \quad i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, m;$$

$h_{ij}(\sigma)$ – измеримые на всей плоскости функции, причем

$$\iint_{|\sigma| < \infty} |h_{ij}(\sigma)| |\sigma|^{-\beta_j} d\sigma < \infty, \quad i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284

Одинабеков Джасур Музофирович, к.ф.-м.н., доцент, филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе (Таджикистан); Odinabekov Jasur Muzofirovich (Dushanbe Lomonosov Moscow State University, Tajikistan)

где β_j - некоторые числа из интервала $(0, 2)$. Через $L^p_{\beta-2/p}(D)$ обозначим лебегово пространство с весом

$$L^p_{\beta-2/p}(D) = \left\{ f(z) : \prod_{j=1}^m |z - z_j|^{\beta_j - 2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), \|f\|_{L^p_{\beta-2/p}} = \|F\|_{L^p} \right\},$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, β_j - числа из (1).

В пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ рассматривается оператор

$$A \equiv a(z)I + b(z) \prod_{j=1}^m \left(\frac{z - z_j}{|z - z_j|} \right)^{n_j} SK + c(z)B + \sum_{j=1}^m \left(\frac{z - z_j}{|z - z_j|} \right)^{-2+n_j} H_{1j}K + H_{2j}, \quad (2)$$

где $n_j, j = 1, 2, \dots, m$ - целые числа, а операторы K, S, H_{ij}, B , действуют по формулам

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad (Sf)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2},$$

$$(Bf)(z) = \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\omega'(z) \overline{\omega'(\zeta)}}{(1 - \omega(z) \overline{\omega'(\zeta)})} f(\zeta) d\zeta,$$

$$(H_{ij}f)(z) = \frac{1}{|z - z_j|^2} \iint_D Q_{ij}(z, \zeta) h_{ij} \left(\frac{\zeta - z_j}{z - z_j} \right) f(\zeta) d\zeta, \quad i = 1, 2; j = \overline{1, m},$$

$\omega(z)$ - однолиственное конформное отображение области D на единичный круг с центром в начале координат, причем $\omega(0) = 0, \omega'(0) > 0, d\zeta$ - элемент плоской меры Лебега.

Таким образом, коэффициенты при операторах SK имеют существенный разрыв в точках $z_1, z_2, \dots, z_m$, а операторы $H_{1j}K, H_{2j}, j = 1, 2, \dots, m$ имеют фиксированные особенности в точках $z = z_j$. Отметим, что ограниченность операторов $H_{1j}K, H_{2j}$ в пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D)$ ($1 < p < \infty, \beta$ - из условий (1)) следует из работы Л.Г. Михайлова [1].

Теорема 1. Пусть $a(z), b(z), c(z), Q_{ij}(z, \zeta), h_{ij}(\sigma), i = 1, 2; j = 1, 2, \dots, m$, удовлетворяют указанным выше условиям.

Тогда для того, чтобы оператор A был нетеровым в $L^p_{\beta-2/p}(D)$, ($1 < p < \infty, \beta$ - из (1)) необходимо и достаточно выполнение условий:

1) $|a(z)| \neq |b(z)|$ при $z \in \overline{D}$, $a(t) + c(t) \neq 0$ при $t \in \Gamma$,

2) $\mathcal{G}_{k_j}^j(x; \beta_j) \neq 0 - \infty < x < \infty, j = 1, 2, \dots, m, k_j = n_j^0, n_j^0 + 1, \dots,$

причем индекс оператора A

$$\kappa = - \left\{ 2 \text{Ind}_{\Gamma}(a(t) + c(t)) + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k_j=n_j^0+1}^{N_j} \mathcal{G}_{k_j}^j(x; \beta_j) + \mu_j \text{Ind}_{-\infty < x < \infty} \mathcal{G}_{n_j^0}^j(x; \beta_j) \right\},$$

где N_j - натуральные числа типа описанного в [2], $\mu_j = 1$, если n_j четно, и $\mu_j = 2$, если n_j нечетно.

Литература

1. *Михайлов Л.Г.* Об одном интегральном уравнении теории обобщенных аналитических функций в сингулярном случае // ДАН, 1970, т. 190, №3, с. 531 – 534.
2. *Бильман Б.М., Джангирбеков Г.* Об условиях нетеровости и индексе некоторых особых двумерных интегральных уравнений // ДАН, 1990, т. 312, № 1, с. 15 – 19.

ОЦЕНКА СНИЗУ МИНИМУМА МОДУЛЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ НУЛЕВОГО РОДА ЧЕРЕЗ ОТРИЦАТЕЛЬНУЮ СТЕПЕНЬ МАКСИМУМА МОДУЛЯ

А.Ю. Попов, В.Б. Шерстюков

ayropov.msu@yandex.ru, shervb73@gmail.com

УДК 517.547.2

Получены новые оценки минимума модуля канонического произведения рода нуль, все корни которого лежат на одном луче, через некоторую степень максимума модуля этого же произведения в точках, имеющих на любом отрезке с фиксированным отношением концов.

Ключевые слова: каноническое произведение, порядок целой функции, минимум модуля, максимум модуля.

A lower bound for the minimum modulus

of entire function of genus zero

in terms of the negative power of the maximum modulus

For the minimum modulus of a canonical product of genus zero with roots on one ray, new estimates are obtained in terms of some power of the maximum modulus. The estimates are valid at points located on any segment with a fixed ratio of ends.

Keywords: canonical product, order of entire function, minimum modulus, maximum modulus.

Каноническим произведением нулевого рода называется функция

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \quad \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} < +\infty. \quad (1)$$

Функции (1) являются целыми порядка ≤ 1 . Известно, что любая целая функция порядка $\rho \in [0, 1)$, отличная от полинома, есть произведение некоторой функции (1) на cz^m , где $c \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}_0$, причём последовательность λ_n удовлетворяет дополнительному условию $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-\rho-\varepsilon} < +\infty$ при любом $\varepsilon > 0$ (см. [1; гл. 1]). Для целой функции f положим

$$M(f; r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|, \quad m(f; r) = \min_{|z|=r} |f(z)|.$$

Попов Антон Юрьевич, д.ф.-м.н., в.н.с, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Anton Popov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Шерстюков Владимир Борисович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir Sherstyukov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Знаменитая $\cos(\pi\rho)$ -теорема (см., например, [2; гл. 6]) утверждает, что для любой непостоянной целой функции f порядка $\rho \in [0, 1]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая возрастающая последовательность положительных чисел $r_n \rightarrow +\infty$, что выполняется неравенство

$$m(f; r_n) > (M(f; r_n))^{\cos(\pi\rho) - \varepsilon}.$$

Последовательность r_n может иметь большие лакуны. Для любого $\rho \in (0, 1)$ и любой последовательности $R_n \uparrow +\infty$ такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (R_n / \ln R_{n+1}) = 0$, мы построили целую функцию φ порядка ρ , все корни которой положительны и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ m(\varphi; r) M(\varphi; r) \mid R_n^{1-\rho/2} \ln R_n \leq r \leq R_n \right\} = 0.$$

Тем самым на довольно длинных промежутках минимум модуля функции φ меньше -1 -й степени максимума её модуля. Будет ли иметь место степенная оценка снизу $m(f; r)$ через $M(f; r)$ с каким-либо показателем (пусть даже меньшим -1), если мы пожелаем, чтобы она выполнялась в какой-либо точке произвольного отрезка с постоянным отношением концов? В общем случае ответ нам не известен, но когда все корни функции находятся на одном луче (или, более общо, лежат все кроме, быть может, конечного числа в сколь угодно малом угле) нами получен утвердительный ответ. Вопрос о том, как зависит показатель степени $M(f; r)$ в упомянутой оценке от отношения концов отрезка, рассмотрен нами в работах [3], [4].

Литература

1. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. — М: Гостехиздат, 1956.
2. Hayman W.K. Subharmonic Functions. Vol. 2. — London, N.-Y.: Academic Press, 1989.
3. Попов А.Ю., Шерстюков В.Б. Оценка снизу минимума модуля целой функции рода нуль с положительными корнями через степень максимума модуля в частой последовательности точек // Уфимск. мат. журн., 14:4 (2022), 80-99.
4. Попов А.Ю., Шерстюков В.Б. Усиление леммы Гайсина о минимуме модуля чётных канонических произведений // Чебышёвск. сб., 24:1 (2023), 127-138.

РОСТ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВДОЛЬ ПРЯМОЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИХ МЕР РИССА

Б.Н. Хабибуллин, А.Е. Салимова
anegorova94@bk.ru, khabib-bulat@mail.ru

УДК 517.547.2

Пусть $u \not\equiv -\infty$ и $M \not\equiv -\infty$ — две субгармонические функции на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с мерами Рисса ν_u и μ_M , для которых $u(z) \leq O(|z|)$ и $M(z) \leq O(|z|)$ при $z \rightarrow \infty$. Если рост функции M в некотором смысле превышает рост функции u на некоторой прямой, то можно ожидать, что μ_M в каком-то смысле доминирует над мерой ν_u . Мы даём количественную форму такого доминирования. Основные результаты проиллюстрированы новой теоремой единственности для целых функций экспоненциального типа.

Ключевые слова: субгармоническая функция конечного типа, мера Рисса, целая функция экспоненциального типа, распределение нулей, теорема единственности.

Growth of subharmonic functions along a straight line and distribution of their Riesz measures

Let $u \not\equiv -\infty$ and $M \not\equiv -\infty$ are two subharmonic functions in the complex plane $\mathbb{C}$ with the Riesz measures ν_u and μ_M such that $u(z) \leq O(|z|)$ and $M(z) \leq O(|z|)$ as $z \rightarrow \infty$. If the growth of this function M in some sense exceeds the growth of the function u on some straight line, then we can expect the measure μ_M to dominate the measure ν_u in some sense. We give quantitative forms of such dominance. The main results are illustrated by a new uniqueness theorem for entire functions of exponential type.

Keywords: subharmonic function of finite type, Riesz measure, entire function of exponential type, distribution of zeros, uniqueness theorem

Пусть sbh — множество всех субгармонических функций на $\mathbb{C}$, $sbh_* := \{u \in sbh : u \not\equiv -\infty\}$. $Meas^+$ — класс всех положительных борелевских мер на $\mathbb{C}$, mes — линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Через $L^1_{loc}(X)$ для $\mathbb{R}$ обозначим класс всех локально mes — интегрируемых функций со значениями в расширенной вещественно оси $\mathbb{R}_{\pm\infty} := \{-\infty\} \cup$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-90074).

Хабибуллин Булат Нурмиевич доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Bulat Khabibullin (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science, Ufa, Russia)

Салимова Анна Евгениевна, аспирант УНИИТ, ассистент УГНТУ (Уфа, Россия); Salimova Anna (Ufa University of Science and Technology, Ufa State Petroleum Technological University (USPTU), Ufa, Russia)

$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$./, $D(z, r) := \{z' \in \mathbb{C} : |z' - z| < r\}$ – открытый, $\bar{D}(z, r) := \{z' \in \mathbb{C} : |z' - z| \leq r\}$ – замкнутый круги, $\partial\bar{D}(z, r) := \bar{D}(z, r) \setminus D(z, r)$ – окружность с центром $z \in \mathbb{C}$ радиуса $r \in \mathbb{R}^+$; $D(r) := D(0, r)$, $\bar{D}(r) := \bar{D}(0, r)$, $\partial\bar{D}(r) := \partial\bar{D}(0, r)$.

Определение 1. Для функции $v \in L^1_{\text{loc}}(i\mathbb{R})$ определим специальный интеграл по интервалам на мнимой оси

$$J_{i\mathbb{R}}(r, R; v) := \frac{1}{2\pi} \int_r^R \frac{v(-iy) + v(iy)}{y^2} dy, \quad 0 < r < R < +\infty.$$

Определение 2. Для меры $\mu \in \text{Meas}^+$

$$\ell_\mu^{\text{th}}(r, R) := \int_{\substack{r < |z| \leq R \\ \text{Re } z > 0}} \text{Re} \frac{1}{z} d\mu(z), \quad 0 < r < R < +\infty,$$

$$\ell_\mu^{\text{th}}(r, R) := \int_{\substack{r < |z| \leq R \\ \text{Re } z < 0}} \text{Re} \left(-\frac{1}{z} \right) d\mu(z), \quad 0 < r < R < +\infty,$$

правая и левая логарифмические меры интервалов $(r, R] \subset \mathbb{R}^+$ для меры μ соответственно. Они порождают логарифмическую субмеру интервалов

$$\ell_\mu(r, R) := \max \left\{ \ell_\mu^{\text{lh}}(r, R), \ell_\mu^{\text{rh}}(r, R) \right\}, \quad 0 < r < R < +\infty.$$

Теорема 1. Пусть u и M – функции, введённые выше, $\nu := \nu_u, \mu := \mu_M$, положительная, четная, непрерывно дифференцируемая функция $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\limsup_{y \rightarrow +\infty} \frac{q(y)}{y} < 1, \quad \limsup_{y \rightarrow +\infty} \frac{yq'(y)}{q(y)} < +\infty,$$

а для какого-то объединения интервалов $E \subset \mathbb{R}^+$

$$\text{mes}(E \cap [0, r]) \ln \frac{er}{\text{mes}(E \cap [0, r])} \leq q(r),$$

Если для некоторого числа $r_0 > 0$ имеет место соотношения

$$\sup_{r_0 \leq r < R < +\infty} J_{i\mathbb{R}}(r, R; q) < +\infty,$$

$$u(iy) + u(-iy) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(M \left(iy + q(y)e^{i\theta} \right) + M \left(-iy + q(-y)e^{i\theta} \right) \right) d\theta + q(y)$$

для каждого $y \in \mathbb{R}^+ \setminus E$.

Тогда для любых чисел $r_0 > 0$ найдётся число $C \in \mathbb{R}^+$,

$$\max \{ \ell_\nu(r, R), J_{i\mathbb{R}}(r, R; u) \} \leq \min \left\{ \ell_\mu^{\text{th}}(r, R), \ell_\mu^{\text{th}}(r, R), J_{i\mathbb{R}}(r, R; M) \right\} + C,$$

при всех $r_0 \leq r < R < +\infty$.

Литература

1. Салимова А.Е., Хабибуллин Б.Н. Рост субгармонических функций вдоль прямой и распределение их мер Рисса // Уфимск. матем. журн. **12**:2 (2020), 35–48.
2. А.Е. Салимова, Б. Н. Хабибуллин. Распределение нулей целых функций экспоненциального типа с ограничениями на рост вдоль прямой // Матем. заметки., **108**:4 (2020), 588-600.
3. Б.Н. Хабибуллин, А.В. Шмелева, З.Ф. Абдуллина. Выметание мер и субгармонических функций на систему лучей. II. Выметания конечного рода и регулярность роста на одном луче // Алгебра и анализ, **32**:1 (2020), 208-243.

О КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ ДЛЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА ПО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Ю.С. Солиев
su1951@mail.ru

УДК 519.644

Построены и исследованы квадратурные формулы с кратными узлами для гиперсингулярного интеграла по действительной оси.

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл, квадратурные формулы, кратные узлы.

On quadrature formulas with multiple nodes for hypersingular integral along the real axis

Quadrature formulas with multiple nodes for a hypersingular integral along the real axis are constructed and investigated.

Keywords: hypersingular integral, quadrature formulas, multiple nodes.

Рассмотрим особый интеграл

$$K_q f = K_q(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{q+1}} dt, \quad q = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши ($q=0$) или в смысле конечного значения по Адамару ($q>0$), где $f(x)$ - плотность интеграла, ограниченная на вещественной оси $\mathbb{R}$ функция.

Будем придерживаться обозначений работы [1]. В данной заметке результаты работы [2] переносятся на гиперсингулярный интеграл (1).

По аналогии с [3] для $f \in B_{p,\sigma}$ введем интерполяционный оператор $H_N f = H_N(f; x)$, удовлетворяющий условиям $H_N^{(v)}(f; \frac{k\pi}{\sigma}) = f^{(v)}(\frac{k\pi}{\sigma})$ ($v = 0, m-1$):

$$H_N f = H_N(f; x) = \sum_{k=-N}^N \text{sinc}^m \sigma \left(x - \frac{k\pi}{\sigma} \right) \sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{v!} \left(x - \frac{k\pi}{\sigma} \right)^v f^{(v)} \left(\frac{k\pi}{\sigma} \right). \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00000).

Солиев Юнус Солиевич, к.ф.-м.н., доцент, МАДИ (Москва, Россия); Yunus Soliev (MADI, Moscow, Russia).

Тогда аппроксимируя $f(x)$ выражением (2), получим

$$\begin{aligned}
K_q f &= K_q(H_N f; x) + R_{Nm q} f = \frac{1}{2^{2n-1} \sigma^{2n} q!} \sum_{k=-N}^N \sum_{v=0}^{2n-1} \frac{1}{v!} f^{(v)} \left(\frac{k\pi}{\sigma} \right) \\
&\quad \times \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n-s+1} C_{2n}^s \left(\sum_{w=0}^q (-1)^w C_q^w (2\sigma(n-s))^{q-w} \times \right. \\
&\quad \times \frac{\sin \left(2\sigma(n-s) \left(x - \frac{k\pi}{\sigma} \right) + (q-w) \frac{\pi}{2} \right) C(2n-v, w)}{\left(x - \frac{k\pi}{\sigma} \right)^{2n-v+w}} - \\
&\quad \left. - \sum_{\mu=1}^{2n-v} \frac{(-1)^w (2\sigma(n-s))^{\mu-1} C(2n-v-\mu+1, w) \cos \frac{\mu\pi}{2}}{(\mu-1)! \left(x - \frac{k\pi}{\sigma} \right)^{2n-v-\mu+1+w}} \right) + \\
&\quad + R_{Nm q} f, \quad m = 2n; \\
K_q f &= K_q(H_N f; x) + R_{Nm q} f = \frac{1}{2^{2n-2} \sigma^{2n-1} q!} \sum_{k=-N}^N \sum_{v=0}^{2n-2} \frac{1}{v!} f^{(v)} \left(\frac{k\pi}{\sigma} \right) \\
&\quad \times \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^{n-s+1} C_{2n-1}^s \left(\sum_{w=0}^q (-1)^w C_q^w (\sigma(2n-s-1))^{q-w} \times \right. \\
&\quad \times \frac{\cos \left(\sigma(2n-2s-1) \left(x - \frac{k\pi}{\sigma} \right) + (q-w) \frac{\pi}{2} \right) C(2n-v-1, w)}{\left(x - \frac{k\pi}{\sigma} \right)^{2n-v-1+w}} - \\
&\quad \left. - \sum_{\mu=1}^{2n-v-1} \frac{(-1)^w (\sigma(2n-2s-1))^{\mu-1} C(2n-v-\mu-1, w) \sin \frac{\mu\pi}{2}}{(\mu-1)! \left(x - \frac{k\pi}{\sigma} \right)^{2n-v-\mu+w}} \right) + \\
&\quad + R_{Nm q} f, \quad m = 2n-1,
\end{aligned} \tag{3}$$

где C_n^k - биномиальные коэффициенты, $C(m, w) = m(m+1) \cdot \dots \cdot (m+w-1)$, $w \geq 1$; $C(m, 0) = 1$, а $R_{Nm q} f = R_{Nm q}(f; x)$ - остаточный член.

Всюду ниже будем предполагать, что $f^{(v)}(x) = O((|x|+1)^{-d_v})$, $d_v p > 1$, $v = \overline{0, m-1}$, $x \in R(|x| \rightarrow \infty)$.

Теорема 1. Пусть $f \in L_p^r(R)$, $r = 0, 1, \dots$, $1 < p < \infty$, $\sigma > 1$. Тогда

$$\|R_{Nm q} f\|_p \leq C_{r,p,m,q} N^{-r+m+q-1} w_k \left(f^{(r)}, \frac{1}{N} \right)_p, \quad r - q > m - 1,$$

где $C_{r,p,m,q}$ - постоянная, зависящая только от r, p, m и q .

Следствие. Пусть в условиях теоремы 1 $w_k(f, \delta)_p = O(\delta^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$\|R_{Nm q} f\|_p = O(N^{-r-\alpha+q+m-1}), \quad r + \alpha > q + m - 1.$$

Теорема 2. Пусть $f \in L_\infty^r(R)$, $r = 1, 2, \dots$, $\sigma > 1$, $w_k(f, \delta)_p = O(\delta^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$. Тогда

$$\|R_{Nm q} f\|_\infty = \|R_{Nm q} f\|_C = O\left(\frac{\ln N}{N^{r+\alpha-q-m+1}}\right), \quad r + \alpha > q + m - 1. \tag{4}$$

Теорема 3. Если $f(x) \in H^{r+\alpha}(R)$, $r = 0, 1, \dots$, $0 < \alpha < 1$, то для остаточного члена квадратурной формулы (3) справедлива оценка (4).

Литература

1. Солиев Ю.С. О конечномерных аппроксимациях особого интеграла Гильберта по действительной оси // Материалы ВВМШ—2023. — Воронеж: ВГУ, 2023, 351-353.
2. Солиев Ю.С. О квадратурных формулах с кратными узлами для сингулярного интеграла Гильберта по действительной оси // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 66. — Казань: КФУ, 2023, 224-226.
3. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике — М.: Наука, 1971.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Ф.М. Талбаков
talbakov_90@mail.ru

В работе исследуются достаточные условия абсолютной сходимости двойных рядов Фурье равномерных почти-периодических функций в случае, когда показатели Фурье имеют единственную предельную точку в нуле. В качестве структурной характеристики рассматриваемой функции используется величина, построенная на базе преобразования Лапласа.

Ключевые слова: почти-периодические функции, двойные ряды Фурье, спектр функции, коэффициенты Фурье, предельная точка в нуле, преобразование Лапласа.

On the absolute convergence of double Fourier series

Sufficient conditions for the absolute convergence of double Fourier series of uniform almost periodic functions are investigated in the paper in the case when the Fourier exponents have a single limit point at zero. As a structural characteristic of the function under consideration, we use the value built on the basis of the Laplace transform.

Keywords: almost-periodic functions, double Fourier series, function spectrum, Fourier coefficients, limit point at zero, Laplace transform.

Напомним, что функция $f(x, y) (-\infty < x, y < \infty)$ называется равномерной почти-периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l найдется хотя бы одно число $\tau > 0$, для которого $|f(x + \tau, y) - f(x, y)| < \varepsilon$ равномерно по x , $|f(x, y + \tau) - f(x, y)| < \varepsilon$ равномерно по y .

Пусть B - класс равномерных почти-периодических функций $f(x, y)$ с нормой

$$\|f\|_B = \sup_{x, y \in R} |f(x, y)|$$

и рядом Фурье вида

$$f(x, y) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{k,l} e^{i(\lambda_k x + \mu_l y)},$$

где $A_{k,l} = M_{xy} \{f(x, y) e^{-i(\lambda_k x + \mu_l y)}\}$ - коэффициенты Фурье, а $\{\lambda_k\}, \{\mu_l\}$ показатели Фурье, для которых выполняется следующие условия

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 0 (k > 0), \lambda_{-k} = -\lambda_k, |\lambda_{k+1}| < |\lambda_k| (k = 1, 2, \dots), \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = 0, \\ \mu_l &> 0 (l > 0), \mu_{-l} = -\mu_l, |\mu_{l+1}| < |\mu_l| (l = 1, 2, \dots), \lim_{l \rightarrow \infty} |\mu_l| = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Устанавливаем некоторые достаточные условия сходимости ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |A_{k,l}|^{\beta} |k^{\gamma} l^{\gamma}| \quad (2)$$

где $\gamma > 0, \beta > 0$. В дальнейшем часто будут встречаться функции вида:

$$F(x, y) = \theta_1 \theta_2 e^{-(\theta_1 x + \theta_2 y)} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{(\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2)} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (3)$$

где $f(t_1, t_2)$ - равномерные почти-периодические функции. Такие функции $F(x, y)$ также являются равномерными почти-периодическими функциями. В этом нетрудно убедиться, преобразуя переменную интегрирования в интеграле (3):

$$F(x, y) = \theta_1 \theta_2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2)} f(x - t_1, y - t_2) dt_1 dt_2.$$

При θ_1, θ_2 введем в рассмотрение величину

$$\begin{aligned} \Omega(f; \theta_1, \theta_2) &= \theta_1 \theta_2 \left\{ M_{xy} \left\{ \left| \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2)} f(x - t_1, y - t_2) dt_1 dt_2 \right|^p \right\} \right\}^{1/p} = \\ &= \theta_1 \theta_2 \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \left| \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2)} f(x - t_1, y - t_2) dt_1 dt_2 \right|^p dx dy \right\}^{1/p}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть спектры $\Lambda_1 = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}, \Lambda_2 = \{\mu_l\}_{l=1}^{\infty}$ функции $f \in \mathbf{B}$ удовлетворяет условиям (1). Если при $1 < p \leq 2, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 0 < \beta < q, \gamma > 0$ выполнено условие

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{(\nu_1-1)(1+\gamma-\frac{\beta}{q})} 2^{(\nu_2-1)(1+\gamma-\frac{\beta}{q})} \Omega^{\beta}(f; \lambda_{2\nu_1}, \mu_{2\nu_2}) < \infty,$$

то ряд (2) сходится. Теорема 2. Пусть $f \in \mathbf{B}$ и ее спектры $\Lambda_1 = \{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}, \Lambda_2 = \{\mu_l\}_{l=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (1). Если при $1 < p \leq 2, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 0 < \beta < q, \gamma > 0$ выполнено условие

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [M_m^{\gamma} \{\chi(2^{-m-1}) - \chi(2^{-m})\}^{(1-\frac{\beta}{q})} \cdot \\ \cdot M_n^{\gamma} \{\chi(2^{-n-1}) - \chi(2^{-n})\}^{(1-\frac{\beta}{q})} \Omega^{\beta}\left(f; \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}\right) < \infty,] \end{aligned}$$

то ряд (2) сходится. Заметим, что признаки абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических в смысле Бора Функций $f \in \mathbf{B}$, в зависимости от поведения показателей Фурье, рассмотрены в работах [3]-[4].

Литература

1. Бор Г. Почти периодические функции. — Гос. техн.-теоретич. изд., М., 1934.

2. *Левитан Б.М.* Почти-периодические функции. — Гос. техн.-теоретич. изд., М., 1953.

3. *Талбаков Ф.М.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций в равномерной метрике // ДАН РТ, 61:(5-6) (2020), 289-293.

4. *Талбаков Ф.М.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти-периодических функций в равномерной метрике // ДАН РТ, 61:(5-6) (2020), 289-293.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ СУММАМИ ФУРЬЕ-ЧЕБЫШЕВА В ПРОСТРАНСТВЕ

$L_{2,\mu}[-1; 1]$

К. Тухлиев, Дж.Х. Бекназаров
beknazarov-jurabek@mail.ru

УДК 517.5

В гильбертовом пространстве получены точные неравенства типа Джексона-Стечкина, связывающие величину $E_{n-1}(f)$ – наилучшее приближение функции f алгебраическими полиномами степени $\leq n-1$, с обобщённым модулем непрерывности m -го порядка $\Omega_m(\mathcal{D}f, t)$, где $\mathcal{D}$ – некоторый дифференциальный оператор второго порядка.

Ключевые слова: наилучшее приближение, суммы Фурье-Чебышёва, обобщённый модуль непрерывности.

Optimal approximations of functions by Fourier-Chebyshev sums in hilbert space

In the Hilbert space the exact inequalities of Jackson-Stechkin were obtained and connecting $E_{n-1}(f)$ – the best approximation of f by algebraic polynomials of degree $\leq n-1$, were added due which are the generalized modulus of continuity m th order $\Omega_m(\mathcal{D}f, t)$, where $\mathcal{D}$ is some second order differential operator.

Keywords: the best approximation, sum Fourier-Chebyshev, generalized modulus of continuity.

В данной работе получено точное неравенство типа Джексона для наилучшего приближения действительных измеримых на отрезке $[-1, 1]$ функций $f(x)$ с весом $\mu(x) = (\sqrt{1-x^2})^{-1}$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$ в гильбертовом пространстве $L_{2,\mu}[-1, 1] := L_2\left((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1, 1]\right)$ с нормой

$$\|f\|_{2,\mu} := \|f\|_{L_{2,\mu}[-1;1]} = \left(\int_{-1}^1 \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Для произвольной функции $f \in L_{2,\mu}[-1, 1]$, имеющей обобщённые производные в смысле Леви [1-3], коэффициенты Фурье-Чебышёва

Тухлиев Камаридин, д.ф.-м.н., профессор, ХГУ имени академика Б.Гафурова (Худжанд, Таджикистан); Kamaridin Tuxhliev (Khujand State University by name academic B. Gafurov, Khujand, Tajikistan)

Бекназаров Джурабек Холмаматович, к.ф.-м.н., доцент, ХГУ имени академика Б.Гафурова (Худжанд, Таджикистан); Jurabek Beknazarov (Khujand State University named of academic B. Gafurov, Khujand, Tajikistan)

$c_k(f) = \int_{-1}^1 \mu(x)f(x)T_k(x)dx$ ряда $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)T_k(x)$ удовлетворяют соотношениям $c_k(f) = (-1)^r k^{-2r} c_k(\mathcal{D}^r f)$, $k = 1, 2, \dots$, $c_k(F_h f) = \cos kh \cdot c_k(f)$, $k = 1, 2, \dots$, где оператор $F_h f$ – определена равенством

$$F_h f(x) := \frac{1}{2} \left[f \left(x \cos h + \sqrt{1-x^2} \sin h \right) + f \left(x \cos h - \sqrt{1-x^2} \sin h \right) \right]$$

В работах [1-3] с помощью оператора $F_h f$ составляется обобщённый модуль непрерывности, для которых имеет место равенство

$$\Omega_m(\mathcal{D}^r f; t) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k^{4r} c_k^2(f) (1 - \cos kh)^{2m} : |h| \leq t \right\}.$$

Через $L_{2,\mu}^{(2r)}[-1, 1]$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $L_{2,\mu}^{(0)}[-1, 1] = L_{2,\mu}[-1, 1]$) обозначим множество функций $f \in L_{2,\mu}[-1, 1]$, у которых производная $\mathcal{D}^r f$ принадлежит пространству $L_{2,\mu}[-1, 1]$.

Пусть $\mathcal{P}_{n-1}$ – совокупность алгебраических многочленов степени $\leq n-1$, $E_{n-1}(f)_{2,\mu}$ – наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\mu}[-1, 1]$ элементами подпространства $\mathcal{P}_{n-1}$: $E_{n-1}(f)_{2,\mu} = \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\mu} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \}$. Хорошо известно, что $E_{n-1}(f)_{2,\mu} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\mu} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(f) \right)^{1/2}$, где $S_{n-1}(f, x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)T_k(x)$ – частичная сумма n -го порядка ряда $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)T_k(x)$.

Теорема 1. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $1/(2r) < p \leq 2$, $h \in (0, \pi/n]$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{2^m n^{2r} E_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\frac{2}{h^2} \int_0^h t \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} dt \right)^{1/p}} = \left(\frac{2}{h^2} \int_0^h t \left(\sin \frac{nt}{2} \right)^{2mp} dt \right)^{-1/p}.$$

где $\mathcal{D} = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - x \frac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор второго порядка Чебышева. Функция $f_0(t) = T_n(t) = (\sqrt{2/\pi}) \cos(n \arccos x) \in L_{2,\mu}^{(2r)}[-1, 1]$ реализует верхнюю грань в равенстве.

Теорема 2. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, $1/(2r) < p \leq 2$, $h \in (0, \pi/n]$. Тогда справедливо равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{2^{2m+1/p} n^{2r-1/p} E_{n-1}(f)_{2,\mu}}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \sin ntdt \right)^{1/p}} = \left\{ 2(mp+1) \right\}^{1/p} \left(\sin \frac{nh}{2} \right)^{-1/p}. \quad (2)$$

Верхнюю грань в (2) реализует функция $f_0(t) = T_n(t) \in L_{2,\mu}^{(2r)}[-1, 1]$.

В заключение отметим, что аналогичные задачи, когда в качестве аппарата приближения используется другие системы функций, рассмотрена в [4-5].

Литература

1. *Тухлиев К., Бекназаров Дж.Х.* О наилучшем приближении функций суммами Фурье-Чебышёва в $L_{2,\mu}[-1, 1]$ // ДАН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. №3, том 57, 2014, 177-183.
2. *Бекназаров Дж.Х.* Верхние грани отклонения некоторых классов функций от их частных сумм рядов Фурье-Чебышёва в пространстве L_2 // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. №1(158), 2015, 20-32.
3. *Бекназаров Дж.Х.* О наилучшем приближении функций суммами Фурье-Чебышёва и поперечники некоторых классов функций // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. №3(164), 2016, 15-25.
4. *Тухлиев К.* Наилучшие приближения и поперечники некоторых классов сверток в L_2 // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2016, Т.22, №4, 284-294.
5. *Тухлиев Д.К.* Об одновременном полиномиальном приближении функций и их производных в пространстве Бергмана // Изв. АН РТ., Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н., 2019, №2, 14-18.

ТОЧНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СУММ ФЕЙЕРА

Д.К.. Тухлиев
dtukhliev@mail.ru

УДК 517.5

В работе найдены точные константы в прямых и обратных теоремах теории приближения аналитических в единичном круге функций комплексными алгебраическими полиномами в пространстве Бергмана. А также найдены наилучшие приближения для скорости сходимости сумм Фейера в пространстве Бергмана.

Ключевые слова: точные константы, прямые и обратные теоремы, верхние грани, наилучшее приближение, комплексные алгебраические полиномы, сумм Фейера, пространство Бергмана.

Exact theorems for the rate of convergence of Fejer sums

The exact constants in the direct and inverse theorems of the approximation theory of analytic functions in the unit circle by complex algebraic polynomials in the Bergman space are found in the work. And also the best approximations for the convergence rate of Fejer sums in Bergman space are found.

Keywords: exact constants, direct and inverse theorems, upper bounds, best approximation, complex algebraic polynomials, Fejer sums, Bergman space.

Пусть функция $f \in B_2(U)$ имеет разложение в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k \quad (1)$$

и пусть

$$T_{n-1}(f, z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k -$$

частичная сумма $(n-1)$ -го порядка функции $f \in B_2$.

Сумму вида

$$\sigma_{n-1}(f, z) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} T_k(f, z)$$

называют суммой Фейера $(n-1)$ -го порядка ряда (1). Представим разности $f(z) - \sigma_{n-1}(f, z)$ в следующем виде

$$f(z) - \sigma_{n-1}(f, z) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (f(z) - T_k(f, z)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \cdot c_k z^k + \sum_{k=n}^{\infty} c_k z^k. \quad (2)$$

Тухлиев Дилшод Камаридинович, к.ф.-м.н., доцент, ХГУ (Худжанд, Таджикистан); Tukhliev Dilshod Kamaridinovich (Khujand State University, Khujand, Tajikistan)

Из равенства (2), пользуясь определением нормы в пространстве B_2 и утверждением леммы [1], при $r = 1$ будем иметь

$$\begin{aligned}
\|f(z) - \sigma_{n-1}(f, z)\|_{B_2}^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it}) - \sigma_{n-1}(f, \rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} \cdot c_k(f)(\rho e^{it})^k - \sum_{k=n}^{\infty} c_k(f)(\rho e^{it})^k \right|^2 \rho d\rho dt = \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k^2 \cdot \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} = \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n (2k-1) \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Если $f \neq \text{const}$, то, при любом $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n (2k-1) \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} < \frac{2}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2}. \tag{4}$$

Учитывая неравенство (4) и равенство (3), нами доказано следующее утверждение [2-5]

Теорема 1. Для любой функции $f \in B_2$ и любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место точные двусторонние оценки

$$E_{n-1}(f)_{B_2} \leq \|f - \sigma_{n-1}(f)\|_{B_2} \leq \frac{\sqrt{2}}{n} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n k \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} \right\}^{1/2}. \tag{5}$$

Константы 1 и $\sqrt{2}$, соответственно в левой и правой частях неравенства (5), не могут быть уменьшены.

Имеет место также следующая

Теорема 2. Для произвольной функции $f \in B_2$ при любом $n \in \mathbb{N}$ имеют место точные оценки

$$E_{2n}(f)_{B_2} \leq \|f - \sigma_{2n-1, n-1}(f)\|_{B_2} \leq E_n(f)_{B_2}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} (2k-1) \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} - 2 \cdot E_n^2(f)_{B_2} &\leq \|f - \sigma_{2n-1, n-1}(f)\|_{B_2}^2 \leq \\
&\leq \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} (2k-1) \cdot E_{k-1}^2(f)_{B_2} - 2 \cdot E_{2n}^2(f)_{B_2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Знак равенства в (6) и (7) достигается, в частности, для функции $f_0 = z^{2n+1} \in B_2$.

Литература

1. Шабозов М.Ш., Тухлиев Д.К. О совместном приближении функций и их последовательных производных в пространстве Бергмана // ДАН РТ. 2018. Т.61. №5. С.419-426.

2. *Тухлиев Д.К.* Модуль непрерывности высших порядков и наилучшие приближения функций в пространстве Бергмана // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова, Серия естественные и экономические науки. 2021. №1 (56). С.3-7.

3. *Тухлиев Д.К.* Точные константы в обратных теоремах в пространстве Бергмана B_2 // Учёные записки ХГУ им. Б.Гафурова, Серия естественные и экономические науки. 2021. №4 (59). С.24-28.

4. *Тухлиев К, Бекназаров Д.Х.* О наилучшем приближении функций суммами Фурье-Чебышёва в $L_{2,\mu}[-1, 1]$ // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2014. Т.57. №3. С. 177-183.

О СОВМЕСТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ ПОЛИНОМАМИ ЧЕБЫШЕВА

К. Тухлиев

kamaridin.t54@mail.ru

УДК 517.5

Найдены точные значения верхней грани наилучших полиномиальных совместных приближений функций и их промежуточных производных суммами Фурье-Чебышева.

Ключевые слова: модуль непрерывности m -го порядка, совместные приближения, ряд Фурье-Чебышева.

On the joint approximation of a function and its derivatives by Chebyshev polynomials

The exact values of the upper bound of the best polynomial joint approximations of functions and their intermediate derivatives by Fourier-Chebyshev sums are found.

Keywords: m -th order modulus of continuity, joint approximations, Fourier-Chebyshev series.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$; $L_2 := L_2\left((\sqrt{1-x^2})^{-1}; [-1; 1]\right)$ – пространства суммируемых с квадратом функций $f : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$ с весом Чебышёва $\mu(x) := 1/\sqrt{1-x^2}$ и конечной нормой $\|f\|_{L_2} = \left(\int_{-1}^1 \frac{f^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx\right)^{1/2}$.

Следуя работе [1], в пространстве L_2 с помощью оператора $F_h f(x) = \frac{1}{2} \left[f(x \cos h + \sqrt{1-x^2} \sin h) + f(x \cos h - \sqrt{1-x^2} \sin h) \right]$, определим модуль непрерывности m -го порядка равенством $\Omega_m(f; t) = \sup \left\{ \|\Delta_h^m(f; \cdot)\| : |h| \leq t \right\}$, где $\Delta_h^m(f; x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x)$.

Пусть далее $T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $T_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(k \arccos x)$, $k = 1, 2, \dots$ – ортонормированная система многочленов Чебышёва в пространстве L_2 . Тогда $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) T_k(x)$, $c_k(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} T_k(x) dx$ – есть

ряд Фурье-Чебышева функции $f \in L_2$, а $S_{n-1}(f; x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) T_k(x)$ – частичные суммы ряда Фурье-Чебышева. Известно [2-3], что $\|f\| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2(f)\right)^{1/2}$, $\|f - S_{n-1}(f)\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right)^{1/2}$.

Пусть теперь $\mathcal{D} = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - x \frac{d}{dx}$ – дифференциальный оператор второго порядка. Введём далее обозначение $\mathcal{E}_{n-1}(f) = \|f -$

Тухлиев Камаридин, д.ф.-м.н., профессор, ХГУ имени академика Б.Гафурова (Худжанд, Таджикистан); Kamaridin Tuxhliev (Khujand State University by name academic B. Gafurov, Khujand, Tajikistan)

$S_{n-1}(f)\|$, и если $\mathfrak{M}$ – некоторый класс функций, принадлежащий L_2 , то положим $\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M}) = \sup \left\{ \mathcal{E}_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M} \right\}$. Так как наряду с функцией f все операторные производные вида $\mathcal{D}^s f$ ($s = 0, 1, \dots, r$) также принадлежат пространству $L_{2,\mu}^{(2r)}$, то имеет смысл найти наилучшее приближение некоторого множества $\mathfrak{M}_{2,\mu}^{(r)}$, принадлежащего множеству $L_{2,\mu}^{(2r)}$, то есть требуется найти точное значение верхней грани

$$\mathcal{E}_{n-1}^{(s)}(\mathfrak{M}_{2,\mu}^{(r)}) := \sup \left\{ \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu} : f \in \mathfrak{M}_{2,\mu}^{(r)} \right\}.$$

Теорема. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$ $n \geq s$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{2} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; h)_{2,\mu} \cdot \sin nhdh \right)^m} = 1. \quad (1)$$

Из теоремы вытекают следующие следствия.

Следствие. В утверждении теоремы имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_{2,\mu}^{(2r)}} \frac{n^{2(r-s)} \mathcal{E}_{n-1}(\mathcal{D}^s f)_{2,\mu}}{\left(\frac{n}{\pi} \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f; t)_{2,\mu} \sin nt dt \right)^m} = \left(\frac{\pi}{2} \right)^m.$$

Литература

1. Шабозов М.Ш., Тухлиев К. Неравенства Джексона - Стечкина с обобщёнными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2015, т.21, №4, С. 292-308.
2. Тухлиев К., Бекназаров Дж.Х. О наилучшем приближении функций суммами Фурье – Чебышёва в $L_{2,\mu}[-1, 1]$ // ДАН РТ, 2014, Т.57, №3, С.177-183.
3. Тухлиев К. О верхних гранях отклонения некоторых классов функций от их частных сумм рядов Фурье – Чебышёва в пространстве L_2 // ДАН РТ. 2013, т.56, №8, С.606-611.

ПОЛУГРУППОВОЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ А.В. Уткин

Доклад посвящен выводу уравнения динамики квантовой системы в терминах стохастических дифференциальных уравнений на волновую функцию. Базовым примером является уравнение ШредингераБелавкина (УШБ) (1)

$$d|\psi\rangle = -iH|\psi\rangle dt - \frac{1}{2}L^2|\psi\rangle dt + L|\psi\rangle dW_t \quad (1)$$

возникающее в процессе непрерывного измерения наблюдаемой $L = L^*$, которая может иметь непрерывный спектр. Здесь $|\psi\rangle = |\psi_t(\omega)\rangle \in \mathcal{H}$ - волновая функция, как случайный векторный процесс на вероятностном пространстве Ω , H - гамильтониан, W_t - вещественный винеровский процесс.

Однократное измерение квантовой системы связывается с вполне положительным инструментом $\mathbf{M} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{T}(\mathcal{H})$, принимающим на вход состояние ρ и борелевское множество прямой B . При этом $\text{Tr } \mathbf{M}[B](\rho)$ является вероятностью того, что исход $q(\omega)$ измерения упадет в B , а состояние $\frac{\mathbf{M}[B](\rho)}{\text{Tr } \mathbf{M}[B](\rho)}$ выражает долю статистического ансамбля для данных исходов. Неточное измерение оператора L задается инструментом

$$\mathbf{M}[B](\rho) = \int_B \sqrt{p(qI - L)}\rho\sqrt{p(qI - L)}dq, \quad (2)$$

где $p(x)dx$ - некоторая вероятностная мера. Такой инструмент допускает работу со случайными ненормированными волновыми функциями, вместо состояний, изменяемыми по закону

$$(|\psi\rangle, \omega) \mapsto \sqrt{p(q(\omega)I - L)}|\psi\rangle$$

Под процессом непрерывного измерения на отрезке $[0, T]$ подразумевается предельная динамика $\rho_t(\omega)$, осуществляемая с помощью последовательно примененных измерений с инструментами $\mathbf{M}_{t_k}$ приведенного выше вида, если мелкость разбиения $\{t_k, \quad k = 1, \dots, N\}$ отрезка $[0, T]$ стремится к 0 при $N \rightarrow \infty$. Основная идея подхода, применяемого в исследовании, заключается в оперировании характеристическими функциями вида $\varphi(v) = \mathbb{E} \exp(i \text{Re}\langle v | \psi \rangle)$ в абстрактном случае $(|v\rangle \in \mathcal{H})$. Случайное изменение волновой функции индуцирует детерминированное изменение характеристической функции и описывается

Уткин Андрей, МФТИ, Математические методы квантовых технологий (Москва, Россия)

линейным оператором в банаховом пространстве $C_B(\mathcal{H})$. Таким образом, N -кратное измерение одинаковыми инструментами $\mathbf{M}_{T/N}$ вида (2) можно выразить композицией N одинаковых операторов на $C_B(\mathcal{H})$ с $\sup$ -нормой, и ключевым шагом становится применение теоремы типа Чернова для доказательства их сходимости в определенном смысле к некоторой полугруппе $e^{t\mathcal{L}}$. Для корректного применения теоремы необходимо ввести более сложное функциональное пространство.

Для случая, когда плотность $p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ — гауссовская, вычислен генератор полугруппы $e^{t\mathcal{L}}$, действующий на характеристическую функцию по правилу

$$\mathcal{L}e^{i\operatorname{Re}\langle v|k\rangle} = \frac{1}{4}(\operatorname{Re}\langle v|L^2|k\rangle - (\operatorname{Re}\langle v|L|k\rangle)^2)e^{i\operatorname{Re}\langle v|k\rangle}$$

Из этого показывается, что $|\psi\rangle$ удовлетворяет УШБ (1), в котором нужно положить $H = 0$. Автору кажется описанный полугрупповой подход интересным и перспективным. В частности, он позволяет описать динамику волновой функции при случайном управлении в следующей формулировке. Пусть в моменты $t_k = k\frac{T}{N}$ происходит действие унитарного оператора $U_k = e^{i\sqrt{t}\eta_k L}$, где $\eta_k \sim \mathcal{N}(0, 1)$ — независимые случайные величины. Вычисления показывают, что при стремлении $N \rightarrow \infty$ динамика может описываться стохастическим дифференциальным уравнением

$$d|\psi\rangle = \frac{1}{2}L^2|\psi\rangle dt + iL|\psi\rangle dW_t.$$

Пример с операторами $\{U_t\}$ допускает различные обобщения. Например, интересно изучать случайные схемы — квантовые схемы на $n_0 > n$ кубитах, составленные из n -частичных вентилях, примененных к 1 случайным поднаборам кубитов. Представляет интерес изучение связи возникающих в работе полугрупп с функциональными интегралами.

Литература

1. *О.Г. Смолянов, А. Трумен.* Уравнения Шредингера-Белавкина и ассоциированные с ними уравнения Колмогорова и Линдблада. УМН, 1999, 120, 2, 973–984
2. *Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов.* Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов. Труды МИАН, 2014, том 285, 232–243
3. *А.С. Холево.* Квантовая вероятность и квантовая статистика. Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направления. ВИНИТИ. т.83. С. 3–132, 1991.
3. *Engel, KJ., Nagel, R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations. Semigroup Forum, 2001, 6, 378–280

МИНОРАНТЫ ИЗ ВЫПУКЛЫХ ПОДМНОЖЕСТВ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ВЕКТОРНЫХ РЕШЁТОК

Б.Н. Хабибуллин
khabib-bulat@mail.ru

УДК 517.982, 517.574

Пусть X — векторная решётка с отношением порядка $\leq$ над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, H — выпуклое подмножество в X . Мы обсудим условия, при которых для заданного вектора x из X существует вектор h в H , для которого $h \leq x$. Результаты нацелены на применения к выпуклым подмножествам H конуса плюрисубгармонических функций на области в конечномерном векторном пространстве над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Ключевые слова: векторная решётка, проективный предел, выпуклый конус, плюрисубгармоническая функция.

Minorants from convex subsets for vectors of vector lattices

Let X be a vector lattice with a relation of order $\leq$ over the field $\mathbb{R}$ of real numbers, and H be a convex subset in X . We will discuss the conditions under which, for a given vector x from X , there exists a vector h in H such that $h \leq x$. The results are aimed at applying to convex subsets H of the convex cone of plurisubharmonic functions on a domain in a finite-dimensional vector space over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers.

Keywords: vector lattice, projective limit, convex cone, plurisubharmonic function.

Для множеств X и Y через Y^X обозначаем множество всех функций $f: X \rightarrow Y$. Если X и Y — векторные пространства над $\mathbb{R}$, то $\text{lin } Y^X$ — пространство всех линейных функций $l \in Y^X$. Если X и Y — упорядоченные векторные пространства над $\mathbb{R}$, то $\text{lin}^+ Y^X$ — пространство всех линейных положительных, или возрастающих, линейных функций.

Упорядоченное векторное пространство $(X, \leq)$ над $\mathbb{R}$ с отношением порядка $\leq$ — *векторная решётка*, если существует *точная верхняя грань* $X\text{-sup } F \in X$ для любого конечного $F \subset X$.

$\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ — множество всех *натуральных чисел*.

Пусть $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность *векторных решёток* $(X_n, \leq_n)$, $\prod X_n := \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ — их произведение, и для $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod X_n$ полагаем $\text{pr}_n x = x_n \in X_n$, а $x \leq x'$ в $\prod X_n$, если $\text{pr}_n x \leq_n \text{pr}_n x'$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $p_n \in \text{lin}^+ X_n^{X_{n+1}}$ и $X_n\text{-sup } p_n(F_{n+1}) =$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 22-21-00026).

Хабибуллин Булат Нурмиевич, д.ф.-м.н., профессор, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Российская Федерация); Bulat Khabibullin (Institute of Mathematics with CC of the Ufa Federal Research Centre of the RAS, Ufa, Russia)

$p_n(X_{n+1} - \sup F_{n+1})$ для каждого конечного $F_{n+1} \subset X_{n+1}$. Тогда подпространство

$$\text{proj lim } X_n p_n := \left\{ x \in \prod X_n \mid \text{pr}_n x = p_n(\text{pr}_{n+1} x) \text{ при всех } n \in \mathbb{N} \right\}$$

в X с тем же отношением порядка $\leq$ — векторная решётка, называемая *проективным пределом последовательности* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ по $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Подмножество $B \subset X$ ограничено снизу (сверху) в X , если существует $x \in X$, для которого $x \leq b$ (соответственно $b \leq x$) для всех $b \in B$, и B ограничено в X , если B ограничено и снизу, и сверху в X .

Основная теорема ([1; теорема 2.4.2]) Пусть $X = \text{proj lim } X_n p_n$ — проективный предел векторных решёток, где p_n сюръективны, $S \subset X$ — векторное подпространство в X , $H \subset S$ — выпуклое подмножество и $0 \in H$, $l_0 \in \text{lin}^+ \mathbb{R}^X$, а также выполнены три следующих условия:

- 1) для каждой $n \in \mathbb{N}$ и $s \in S$ найдётся $h \in H$ с $\text{pr}_n h \leq_n \text{pr}_n s$;
- 2) для любой ограниченной в X последовательности $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ из H верхний предел $\limsup_{k \rightarrow \infty} h_k := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} h_k$ принадлежит H ;
- 3) для любой убывающей последовательности $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ векторов h_k из H , удовлетворяющей условию $\inf_k l_0(h_k) \neq -\infty$ последовательность (h_k) ограничена, а также $l_0(\inf_k h_k) \geq \inf_k l_0(h_k)$ и $\inf_k h_k \in H$.

Тогда для любого $s \in S$ точная верхняя грань $\sup \{l_0(h) \mid s \geq h \in H\}$ со значениями в $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ равна точной нижней грани

$$\inf \{l(s) + c \mid l \in \text{lin}^+ \mathbb{R}^X, 0 \leq c \in \mathbb{R}, l_0(h) \leq l(h) + c \forall h \in H\}. \quad (1)$$

В частности, для существования миноранты $h \leq s$ из H необходимо и достаточно, чтобы величина (1) не равнялась $-\infty$.

Предполагается обсудить применения этой основной теоремы к выпуклым подконусам H конуса субгармонических функций на областях D конечномерного пространства в случае, когда X — векторная решётка всех локально суммируемых функций на D , с дальнейшими приложениями к различным задачам комплексного анализа и теории функций.

Литература

1. Хабибуллин Б.Н. Огибающие в теории функций. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2021. <https://matem.anrb.ru/sites/default/files/userfiles/u35721/envkhbn.pdf>

ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ПАР К ИССЛЕДОВАНИЮ НУЛЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ХАРДИ

Ш.А. Хайруллоев
shamsullo@rambler.ru

УДК 511.375

В работе задача о величине промежутка критической прямой, в которой содержится нуль нечётного порядка производной функции Харди, сведена к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальной тригонометрической суммы и применяя алгоритм оптимизации экспоненциальных пар, найдена нижняя грань величины $\delta_j(k, l)$ по множеству всех экспоненциальных пар
Ключевые слова: функция Харди, экспоненциальная пара, дзета-функция Римана, критическая прямая, тригонометрическая сумма

Application of the exponential pair optimization algorithm to the study of zeros of the derivative of the Hardy function

In this paper, the problem of the size of the interval of the critical line, which contains a zero of odd order of the derivative of the Hardy function, is reduced to the problem of finding exponential pairs for estimating a special trigonometric sum, and using the algorithm for optimizing exponential pairs, the infimum of the quantity $\delta_j(k, l)$ over the set of all exponential pairs

Keywords: Hardy function, exponential pair, the Riemann zeta function, critical line, trigonometric sum

Функция Харди $Z(t)$ задаётся равенством

$$Z(t) = e^{i\theta(t)} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right), \quad e^{i\theta(t)} = \pi^{-\frac{it}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \left| \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) \right|^{-1}$$

и принимает вещественные значения при вещественных значениях t , и вещественные нули $Z(t)$ являются нулями $\zeta(0.5 + it)$, то есть нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой. Одной из актуальных нерешенных проблем теории нулей дзета-функции Римана и её обобщения для более общих рядов Дирихле является оценка снизу величины промежутка критической прямой, на котором заведомо лежит нуль функции $Z(t)$. Существует гипотеза, что эта величина, а именно, длина H промежутка $(T, T + H)$, содержащего нуль функции

Хайруллоев Шамсулло Амруллоевич, д.ф.-м.н., доцент, Таджикский национальный университет (Душанбе, Таджикистан); Khayrulloev Shamsullo Amrulloevich (Tajik National University, Dushanbe, Tajikistan)

$Z(t)$, сверху ограничена величиной T^ε , где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое фиксированное число.

А.А. Карацуба [1], наряду с задачей о соседних нулях функции Харди, рассмотрел более общую задачу о соседних нулях функции $Z^{(j)}(t)$ и доказал следующее: *если j — натуральное число, $T \geq T_0(j) > 0$, тогда промежуток $(T, T + H)$ при $H \gg T^{\frac{1}{6j+6}} (\ln T)^{\frac{2}{j+1}}$, содержит нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$.*

Автор [2]–[5] доказал, что промежуток $(T, T + H)$ при

$$H \geq T^{\frac{5}{32} - \frac{\frac{5}{6} - R}{192(2R+1)}} \ln^2 T,$$

где $R = 0.8290213568591335924092397772831120 \dots$, постоянная Ранкина содержит нуль нечётного порядка $Z(t)$.

Основным результатом настоящей работы является сведение задачи о величине промежутка $(T, T + H)$ критической прямой, в которой заведомо лежит нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$ ($j \geq 1$), к проблеме отыскания экспоненциальных пар для оценки специальной тригонометрической суммы и нахождение нижняя гран длины этого промежутка.

Теорема 1. Пусть (k, l) — произвольная экспоненциальная пара, j — целое неотрицательное число, $c = c_0(j) > 0$ — постоянное число, $T \geq T_0(j) > 0$,

$$\theta_j(k; l) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2 - \delta_j^{-1}(k; l)} \right), \quad \delta_j(k; l) = \frac{l + j}{0.5 - k + j}.$$

Тогда при $H \geq cT^{\theta_j(k; l)} (\ln T)^{\frac{2}{j+1}}$ промежуток $(T, T + H)$ содержит нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$.

Минимизация $\theta_j(k, l)$ в теореме 1 равносильна минимизации $\delta_j(k, l)$. Применяя метод оптимизации экспоненциальных пар [4], в теореме 2 найдена нижняя грань величины $\delta_j(k, l)$ по множеству всех экспоненциальных пар.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{P}$ множество всех экспоненциальных пар (k, l) , $j > 2$ — натуральное число. Тогда справедливо соотношение

$$\inf_{(k, l) \in \mathcal{P}} \delta_j(k, l) = 1 + \frac{6}{7 + 18j}.$$

Следствие 1. Пусть $T \geq T_0 > 0$, $H \geq cT^{\mathfrak{A}_j} (\ln T)^{\frac{2}{j+1}}$,

$$\mathfrak{A}_j = \frac{3}{19 + 18j}, \quad c = c_0(j) > 0, \quad j > 2.$$

Тогда промежуток $(T, T + H)$ содержит нуль нечётного порядка функции $Z^{(j)}(t)$.

Полученный результат

$$\mathfrak{a}_j = \frac{3}{19 + 18j} = \frac{1}{6 + 6j} - \frac{1}{6(1 + j)(19 + 18j)}$$

является уточнением теоремы А.А.Карацубы при любом натуральном $j > 2$.

Литература

1. *Карацуба А.А.* О расстоянии между соседними нулями дзета-функции Римана, лежащими на критической прямой // Труды МИАН, **157** (1981), 49-63.
2. *Размонов З.Х., Хайруллоев Ш.А.* Соседние нули дзета-функции Римана, лежащие на критической прямой // Доклады НАН Таджикистана, **52**:5 (2009), 331-337.
3. *Хайруллоев Ш.А.* О нулях функции Харди и её производных, лежащих на критической прямой // Чебышевский сборник, **20**:4 (2019), 335-348.
4. *Хайруллоев Ш.А.* О вещественных нулях производной функции Харди // Чебышевский сборник, **22**:5 (2021), 235-342.
5. *Хайруллоев Ш.А.* Расстояние между соседними нулями производной j -го порядка функции Харди // Доклады НАН Таджикистана, **64**:3-4 (2021), 129-134.

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков, Э.Х. Сафарзода
talbakov_90@mail.ru

УДК 517.518

В работе исследуются достаточные условия абсолютной сходимости двойных рядов Фурье равномерных почти-периодических функций в случае, когда показатели Фурье имеют единственную предельную точку в нуле. В качестве структурной характеристики рассматриваемой функции используется величина, построенная на базе преобразование Лапласа.

Ключевые слова: почти-периодические функции, двойные ряды Фурье, спектр функции, коэффициенты Фурье, предельная точка в нуле, преобразование Лапласа.

On sufficient conditions for absolute convergence of double Fourier series

Sufficient conditions for the absolute convergence of double Fourier series of uniform almost periodic functions are investigated in the paper in the case when the Fourier exponents have a single limit point at zero. As a structural characteristic of the function under consideration, we use the value built on the basis of the Laplace transform.

Keywords: almost-periodic functions, double Fourier series, function spectrum, Fourier coefficients, limit point at zero, Laplace transform.

Напомним, что функция $f(x, y)$ ($-\infty < x, y < \infty$) называется равномерной почти-периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l найдется хотя бы одно число $\tau > 0$, для которого $|f(x+\tau, y) - f(x, y)| < \varepsilon$ равномерно по x , $|f(x, y+\tau) - f(x, y)| < \varepsilon$ равномерно по y .

Пусть $\mathbf{B}$ — класс равномерных почти-периодических функций $f(x, y)$ с нормой

$$\|f\|_{\mathbf{B}} = \sup_{x, y \in R} |f(x, y)|$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00000).

Хасанов Юсуфали Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, РТСУ (Душанбе, Таджикистан); Yusufali Khasanovich Khasanov (Russisn-Tajik Slavonic University, Dushanbe, Tajikistan)

Талбаков Фарходдзон Махмадшоевич, к.ф.-м.н., доцент, ТГПУ (Душанбе, Таджикистан); Farkhodzhon Makhmadsheevich Talbakov (Tajik State Pedagogical University named after S.Aenya, Dushanbe, Tajikistan)

Сафарзода Эшмати Хотам, к.ф.-м.н., ТГПУ (Душанбе, Таджикистан); Eshmati Hotam (Tajik State Pedagogical University named after S.Aenya, Dushanbe, Tajikistan)

и рядом Фурье вида

$$f(x, y) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_{k,l} e^{i(\lambda_k x + \mu_l y)},$$

где $A_{k,l} = M_{xy}\{f(x, y)e^{-i(\lambda_k x + \mu_l y)}\}$ — коэффициенты Фурье, а $\{\lambda_k\}$, $\{\mu_l\}$ — показатели Фурье, для которых выполняются следующие условия

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 0 (k > 0), \lambda_{-k} = -\lambda_k, |\lambda_{k+1}| < |\lambda_k| (k = 1, 2, \dots), \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k| = 0, \\ \mu_l &> 0 (l > 0), \mu_{-l} = -\mu_l, |\mu_{l+1}| < |\mu_l| (l = 1, 2, \dots), \lim_{l \rightarrow \infty} |\mu_l| = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Укажем некоторые достаточные условия абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |A_{k,l}|^{\beta} k^{\gamma} l^{\gamma}, \quad (2)$$

где $\gamma > 0$, $\beta > 0$.

В дальнейшем часто будут встречаться функции вида

$$F(x, y) = \theta_1 \theta_2 e^{-(\theta_1 x + \theta_2 y)} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y e^{(\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2)} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad (3)$$

где $f(t_1, t_2)$ — равномерная почти-периодическая функция. Функция $F(x, y)$ также является равномерной почти-периодической. В этом нетрудно убедиться, если преобразовать переменную интегрирования в интеграле (3)

$$F(x, y) = \theta_1 \theta_2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2)} f(x - t_1, y - t_2) dt_1 dt_2.$$

При θ_1, θ_2 введем в рассмотрение величину

$$\begin{aligned} \Omega(f; \theta_1, \theta_2) &= \theta_1 \theta_2 \{ [M_{xy}\{ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2)} f(x - t_1, y - t_2) dt_1 dt_2 |^p \}]^{1/p} = \\ &= \theta_1 \theta_2 \{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T | \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\theta_1 t_1 + \theta_2 t_2)} f(x - t_1, y - t_2) dt_1 dt_2 |^p dx dy \}^{1/p}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть спектры $\Lambda_1 = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\Lambda_2 = \{\mu_l\}_{l=1}^{\infty}$ функции $f \in B$ удовлетворяют условиям (1). Если при $1 < p \leq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $0 < \beta < q$, $\gamma > 0$ выполнено условие

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \sum_{\nu_2=0}^{\infty} 2^{(\nu_1-1)(1+\gamma-\frac{\beta}{q})} 2^{(\nu_2-1)(1+\gamma-\frac{\beta}{q})} \Omega^{\beta}(f; \lambda_2^{\nu_1}, \mu_2^{\nu_2}) < \infty,$$

то ряд (2) сходится.

Теорема 2. Пусть $f \in \mathbf{B}$ и ее спектры $\Lambda_1 = \{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $\Lambda_2 = \{\mu_l\}_{l=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяют условиям (1). Если при $1 < p \leq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $0 < \beta < q$, $\gamma > 0$ выполнено условие

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} M_m^{\gamma} \{\chi(2^{-m-1}) - \chi(2^{-m})\}^{(1-\frac{\beta}{q})} M_n^{\gamma} \{\chi(2^{-n-1}) - \chi(2^{-n})\}^{(1-\frac{\beta}{q})} \Omega^{\beta}(f; \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}) < \infty,$$

то ряд (2) сходится.

Заметим, что признаки абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций $f \in \mathbf{B}$, в зависимости от поведения показателей Фурье, рассмотрены в работах [3]-[4].

Литература

1. Бор Г. Почти периодические функции. — Гос. техн.-теоретич. изд., М., 1934.
2. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. — Гос. техн.-теоретич. изд., М., 1953.
3. Хасанов Ю.Х. Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье почти- периодических функций // Известия вузов. Северокавказский регион. Естественные науки, (2011), 71-73.
4. Талбаков Ф.М. Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти- периодических функций в равномерной метрике // Известия вузов. Математика, **67**:4 (2023), 65-75.

ОЦЕНКА ДВОЙНЫХ СУММ ЗНАЧЕНИЙ ХАРАКТЕРА ДИРИХЛЕ

Д.Дж. Хокиев,
khdj.91@mail.ru

УДК 511.314

При $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$ получены нетривиальные оценки коротких двойных сумм значений примитивного характера Дирихле по составному модулю q от сдвинутых произведений двух чисел, лежащих в арифметических прогрессиях, то есть сумм вида

$$W = \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{\substack{U < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (mn, q)=1, mn \equiv l \pmod{\nu}}} b_n \chi_q(mn - l) \quad (l\nu, q) = 1.$$

Ключевые слова: характер Дирихле, сдвинутые простые числа, короткая сумма характеров, тригонометрические суммы с простыми числами.

Estimation of double sums of values of character Dirichlet

For $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$, nontrivial estimates are obtained for short double sums of primitive Dirichlet character values modulo q of shifted products of two numbers lying in arithmetic progressions, i.e. sums of the form

$$W = \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{\substack{U < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (mn, q)=1, mn \equiv l \pmod{\nu}}} b_n \chi_q(mn - l) \quad (l\nu, q) = 1;$$

Keywords: Dirichlet character, shifted primes, short sums of characters, exponential sums over primes.

При изучении закона распределения значений производного характеров χ по составному модулю D на последовательностях сдвинутых простых чисел вида $p - l$, $(l, D) = 1$, возникает также задача о нетривиальной оценке двойных сумм вида

$$W_q(x, M, N, l, \nu) = \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ (m, q)=1}} a_m \sum_{\substack{U < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (n, q)=1, mn \equiv l \pmod{\nu}}} \chi_q(mn - l), \quad (\nu l, q) = 1,$$

где a_m и b_n функции натурального аргумента такие, что $|a_m| \leq \tau^c(m)$ и $|b_n| \leq \tau^c(n)$, c – положительное фиксированное число, не все время одно и то же, χ_q – примитивный характер по модулю q .

Хокиев Дониер Джалилович, к.ф.-м.н., доцент, ТНУ (Душанбе, Таджикистан);
Khokiev Donier Jalilovich (Tajik National University, Dushanbe, Tojikiston)

В сумме $W_q(x, M, N, l, \nu)$, не ограничивая общности, можно считать, что $N \leq M$. Отметим, что если в рассматриваемой задаче характер χ является примитивным, то есть если $\chi = \chi_q$, то вместо суммы $W_q(x, M, N, l, \nu)$ возникает более простая сумма $W_q(x, M, N, l, 1) = W_q(x, M, N, l)$ вида

$$W_q(x, M, N, l) = \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ (m, q) = 1}} a_m \sum_{\substack{U < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (n, q) = 1}} b_n \chi_q(mn - l), \quad (l, q) = 1,$$

Наилучшая нетривиальная оценка $W_q(x, M, N, l)$ для простого q при $x \geq q^{0,5+\varepsilon}$ найдена в работе А.А. Карацубы [2]. З.Х.Рахмонов [3, 4] для составного q и получил нетривиальную оценку при $x \geq q^{1+\varepsilon}$. Нетривиальную оценку короткой суммы $W_q(x, M, N, l)$ для составного q при $x \geq q^{\frac{8}{9}+\varepsilon}$ в 2010 году получили Дж.Б.Фридландер, К.Гонг, И.Е.Шпарлинский [5]. З.Х.Рахмонов и Хокиев Д. Дж. [6] для составного q доказал нетривиальную оценку $W_q(x, M, N, l)$ при $x \geq q^{\frac{5}{6}+\varepsilon}$.

Теорема 1. Пусть M, N, U — целые числа, $N \leq U < 2N \leq q^{\frac{1}{6}}$,

$$W_q(x, M, N, l, \nu) = \sum_{\substack{M < m \leq 2M \\ (m, q) = 1}} a_m \sum_{\substack{U < n \leq \min(xm^{-1}, 2N) \\ (n, q) = 1, mn \equiv l \pmod{\nu}}} b_n \chi_q(mn - l), \quad (\nu l, q) = 1,$$

a_m и b_n функции натурального аргумента. Тогда справедлива оценка

$$|W_q(x, M, N, l, \nu)| \ll BM^{\frac{5}{6}} N^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\delta} \ln c^{\frac{4c_1 + c_2 + 1}{6}}.$$

Литература

1. Карацуба А.А Суммы характеров с простыми числами. — Известия АН СССР. Серия математическая, 1970, т. 34, с. 299 – 321.
2. Рахмонов З.Х. Об оценке суммы характеров с простыми числами. — Доклады АН Таджикский ССР, 1986, т. 29, № 1, с. 16 – 20.
3. Рахмонов З.Х. О распределении значений характеров Дирихле и их приложения. — Труды Математического института им. В.А.Стеклова, 1994, т. 207, с. 286 – 296.
4. Фридландера Дж.Б., Гонг К., Шпарлинский И.Е. Суммы значений характеров на сдвинутых простых числах. — Математические заметки, 2010, т. 88, в. 4. с. 605 – 619.
5. Рахмонов З.Х., Хокиев Д.Дж Об оценке суммы характеров с простыми числами — Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018. Т.-61. №1. с. 5-11

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СО СВЕРХСИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ НА КОНТУРЕ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ

П.Л. Шабалин
pavel.shabalin@mail.ru

УДК 517.544.8

Работа посвящена исследованию краевой задачи Римана для решений обобщенного уравнения Коши–Римана с сильными особенностями коэффициента. Получена формула общего решения обобщенного уравнения Коши–Римана, которая затем применена к решению и исследованию разрешимости краевой задачи, изучена разрешимость задачи.

Ключевые слова: Краевая задача Римана, обобщенные аналитические функции, сверхсингулярная точка, бесконечный индекс.

The Riemann boundary value problem for generalized analytic functions with supersingular points on the contour of the boundary condition

The paper is devoted to the study of the Riemann boundary value problem for solutions of the generalized Cauchy–Riemann equation with strong coefficient singularities. The formula of the general solution of the generalized Cauchy–Riemann equation is obtained, which is then applied to the solution and investigation of the solvability of the boundary value problem, the solvability of the problem is studied.

Keywords: Riemann boundary value problem, generalized analytic functions, singular line, infinite index

В плоскости $\mathbb{C}$ комплексного переменного $z = x + iy = re^{i\theta}$ рассмотрим верхнюю полуплоскость $E^+ = \{z : \Im z > 0\}$, нижнюю полуплоскость $E^- = \{z : \Im z < 0\}$, и вещественную ось $\Gamma = \{z : \Im z = 0\}$. В областях E^+ или E^- рассмотрим обобщенную систему Коши–Римана

$$\partial_{\bar{z}}U - A^\pm(z)U = F^\pm(z), \quad A^\pm(z) = \frac{za^\pm(z)}{|z|^{\alpha+1}}, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Будем предполагать, что для $A^+(z)$ ($A^-(z)$) существует такая аналитическая в E^+ (E^-), ограниченная в $\bar{E}^+$ ($\bar{E}^-$) функция $b^\pm(z) \in C(\bar{E}^\pm \setminus \{0\})$, что

$$A_0^\pm(z) := \frac{z(a^\pm(z) - b^\pm(z))}{|z|^{\alpha+1}} \in L^p(E^\pm) \cap L^{p'}(E^\pm), \quad p > 2, \quad 1 < p' < 2.$$

Граничные значения функций $b_0^\pm(z)$, т.е. функции $b_0^+(t)$, $b_0^-(t)$ будем считать непрерывными по Гёльдеру на правой Γ^+ и левой Γ^- полуосях, включая концы. Кроме того, на функции $b_0^\pm(z)$ дополнительно налагаем следующие ограничения:

$$b^\pm(z) = O(|z|^{\alpha-1}), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad b^\pm(z) = O(|z|^\alpha), \quad |z| \rightarrow 0, \quad y \neq 0.$$

При выполнении этих условий выводим в классе ограниченных функций формулу общего решения обобщенного уравнения Коши–Римана с сильными особенностями коэффициента в области E^+ (E^-). Построение решения обобщенного уравнения Коши–Римана с сильными особенностями коэффициента базируется на методе из работы [1], в отличие от которой здесь не предполагается непрерывность функции $b_0^\pm(z)$. Для функций, удовлетворяющих уравнению в E^+ и E^- , рассмотрим задачу Римана с краевым условием

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma,$$

непрерывными по Гельдеру всюду на оси Γ , включая бесконечно удаленную точку, коэффициентом $G(t)$ и правой частью $g(t)$. Эта задача сводится к краевой задаче Римана для аналитических функций с бесконечным индексом и двумя точками завихрения в начале координат и в бесконечно удаленной точке. Подчеркнем, что задача Римана с такой паталогией коэффициента еще не исследовалась. Поэтому мы выводим формулу общего решения данной задачи с бесконечным индексом и изучаем картину разрешимости.

Литература

1. *Расулов А.Б., Солдатов А.П.* Краевая задача для обобщённого уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференциальные уравнения, 52 (5), С. 637-650 (2016).

РАДИУС БОРА ДЛЯ ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫХ СЕМЕЙСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ*

Е.С. Шмидт, esshmid@yandex.ru

УДК 517.518

В 1914 году Харальд Бор опубликовал статью, в которой содержалось доказательство того, что для функций $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ из класса $\mathcal{B}$ аналитических и ограниченных единиц в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ справедливо неравенство $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq 1$ в круге $\{z : |z| < \frac{1}{3}\}$, причем значение $1/3$ неулучшаемо. В докладе будут представлены оценки радиуса Бора в некоторых классах аналитических функций в Δ , ассоциированных с линейно-инвариантными семействами конечного порядка.

Ключевые слова: радиус Бора, линейно-инвариантное семейство.
The Bohr radius for linearly invariant families of analytic functions

In 1914, Harald Bohr published an article in which contained a proof that for functions $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ from the class $\mathcal{B}$ analytic and limited by one in the circle $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ the following inequality holds: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq 1$ in the circle $\{z : |z| < \frac{1}{3}\}$, and the value $1/3$ is unimprovable. The talk will present estimates of the Bohr radius in certain classes of analytic functions in Δ associated with linearly invariant families of finite order

Keywords: Bohr radius, linearly invariant family.

Обозначим $\mathcal{B}$ класс функций $f(z)$ аналитических в $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих условию $|f(z)| < 1$ для любого $z \in \Delta$.

Теорема А. (Х. Бор, 1914, [1]) Если $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{B}$, тогда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq 1$ для $|z| \leq \frac{1}{6}$; т.е. $\sum |a_n| 6^{-n} < 1$.

Позднее, независимо, этот результат был улучшен Рисом, Шуром и Винером, они доказали справедливость теоремы для $|z| \leq \frac{1}{3}$. Значение $\frac{1}{3}$ называют классическим радиусом Бора в классе $\mathcal{B}$.

Шмидт Елизавета Сергеевна, аспирант 2-го года обучения, ПетрГУ (Петрозаводск, Россия); Elizaveta.Shmidt@petrozavodsk.ru (Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russia)

Для произвольного класса M аналитических функций $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ в Δ с $|a_0| < 1$ радиусом Бора класса M стали называть

$$\rho(M) = \sup \left\{ \rho : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n < 1 \quad \forall z : |z| < \rho \text{ и } \forall \phi \in M \right\}$$

Лемма 1. Пусть B класс аналитических в Δ функций $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) z^n$, равномерно ограниченных на компактах из Δ .

$$A_n = \sup_{f \in B} |a_n(f)|, \quad R_* = \sup \left\{ r : \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \leq 1 \right\}.$$

Тогда $R_* \leq \rho(B)$. Если в B есть функция $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(F) z^n \neq 0$ у которой все коэффициенты $a_n(F) \geq 0$ и $r_F = \sup \left\{ r : \sum_{n=1}^{\infty} a_n(F) r^n \leq 1 \right\}$, то $\rho(B) \leq r_F$. Если при этом $\sup_{z \in \Delta} |F(z)| > 1$, то r_F единственный корень уравнения $F(r) = 1$ на $(0; 1)$.

Следствие 1. Если при выполнении условий Леммы, функция $F(z)$ с неотрицательными коэффициентами реализует максимум в задаче о $\max_{f \in B} |a_n(f)|$ для любого $n \in \mathbb{N}$, тогда $R_* = r_F$ и следовательно $\rho(B)$ единственный корень уравнения $F(r) = 1$.

Понятие линейно-инвариантного семейства дано Х. Поммеренке в 1964 году в [2].

Пусть U_α -универсальное линейно-инвариантное семейство порядка α и $LU_\alpha = \{\log f' : f \in U_\alpha\}$. Здесь $\log f'(0) = \log 1 = 0$.

Теорема 1. Для $\alpha \in (1; \infty]$ радиус Бора

$$\rho(U_\alpha) \leq \frac{(2\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} - 1}{(2\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} + 1}.$$

Теорема 2. Для $\alpha > 1$ радиус Бора

$$r(\alpha) \geq \rho(LU_\alpha) \geq R_+(\alpha),$$

где

$$R_+(\alpha) = \frac{4\alpha \left(-(1 + 2\alpha) + \sqrt{(1 - 2\alpha)^2 + e \left(4\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)} \right)}{2(4\alpha^2(e - 2) - e)}$$

$$r(\alpha) = \frac{(2\sqrt{e} - 1)^{\frac{2}{\alpha+1}} - 1}{(2\sqrt{e} - 1)^{\frac{2}{\alpha+1}} + 1}.$$

Литература

1. *Bohr H.* A theorem concerning power series // Proc. London Math. Soc., **13**:1 (1914), 1–5.

2. *Pommerenke Ch.* Linear-invariant Familien analytischer Funktionen I // Math. Ann., **155** (1964), 108-154.

* Ponnusamy S., Shmidt E.S., Starkov V.V. The Bohr radius and its modifications for linearly invariant families of analytic functions // J. Math. Anal. Appl. (in press)

ОПИСАНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ К ПОДПРОСТРАНСТВАМ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

А.В. Луценко, И.Х. Мусин, Р.С. Юлмухаметов
lutsenko.av@ya.ru, musin-ildar@mail.ru,
yulmukhametov@mail.ru

УДК 517.55

В работе, следуя схеме построения пространств Гельфанда-Шилова S_α и S^β , с помощью семейства $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ отдельно радиальных весовых функций $\mathcal{M}_\nu$ в $\mathbb{R}^n$ определены два пространства быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ и $\mathcal{S}^\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^n$. Показано, что при определённых естественных условиях на весовые функции преобразование Фурье устанавливает изоморфизм между пространствами $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ и $\mathcal{S}^\mathcal{M}$.

Ключевые слова: пространства Гельфанда-Шилова, преобразование Фурье, выпуклые функции.

Description of conjugate spaces to subspaces of infinitely differentiable functions

In this work we follow the scheme of constructing of Gelfand-Shilov spaces S_α and S^β by means of some family of separately radial weight functions in $\mathbb{R}^n$ and define two spaces of rapidly decreasing infinitely differentiable functions $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ and $\mathcal{S}^\mathcal{M}$ in $\mathbb{R}^n$. We show that under certain natural conditions on weight functions the Fourier transform establishes an isomorphism between spaces $\mathcal{S}_\mathcal{M}$ and $\mathcal{S}^\mathcal{M}$.

Keywords: Gelfand-Shilov spaces, Fourier transform, convex functions.

Исследование первого автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00168, <https://rscf.ru/project/21-11-00168/>. Исследование второго автора выполнено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-888). Работа третьего автора выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Луценко Анастасия Владимировна, УУНиТ (Уфа, Россия); Anastasiya Lutsenko (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Мусин Ильдар Хамитович, д.ф.-м.н., ИМБЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Ildar Musin (Institute of Mathematics with Computing Centre UFRS RAS, Ufa, Russia)

Юлмухаметов Ринад Салаватович, д.ф.-м.н., профессор, ИМБЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Rinad Yulmukhametov (Institute of Mathematics with Computing Centre UFRS RAS, Ufa, Russia)

Пусть $D \subset \mathbb{R}^p$ — ограниченная выпуклая область. По каждой логарифмически выпуклой последовательности положительных чисел $\mathcal{M} = \{M_k, k \in \mathbb{Z}_+^p\}$ определяется линейное нормированное пространство $C(D, \mathcal{M})$ функций $f \in C^\infty(D)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{C(D, \mathcal{M})} := \sup_{n \in \mathbb{Z}_+^p} \frac{1}{M_n} \|D^n f(x)\|_{C(\overline{D})}.$$

Для семейства логарифмически выпуклых последовательностей $\Sigma = \{\mathcal{M}^{(j)}, j \in \mathbb{N}\}$ через $\mathcal{C}(D, \Sigma)$ обозначается индуктивный предел пространств $C(D, \mathcal{M}^{(j)})$. При некоторых условиях на семейство Σ доказано, что преобразование Фурье - Лапласа устанавливает топологический изоморфизм сильно сопряженного пространства $\mathcal{C}^*(D, \Sigma)$ и проективного предела нормированных пространств

$$\{F \in H(\mathbb{C}^p) : \|F\| := \sup_{z \in \mathbb{C}^p} |F(z)| e^{-H_D(\operatorname{Re} z) - \ln A^{(j)}(|z_1|, \dots, |z_p|)} < \infty\},$$

$$\text{где } A^{(j)}(r) = \sum_k \frac{r^k}{M_k^{(j)}}.$$

Если X — некоторое линейно топологическое пространство, лежащее в $C^\infty(D)$, и в этом пространстве система экспонент $\operatorname{Exp} = \{e^{\langle x, z \rangle}, z \in \mathbb{C}^p\}$ полна, то преобразование Фурье - Лапласа линейного непрерывного функционала $S \in X^*$ по правилу $\hat{S}(z) = S(e^{\langle x, z \rangle})$ инъективно вкладывает сопряженное пространство в некоторое пространство функций на $\mathbb{C}^p$. Задача описания образа при этом преобразовании была объектом исследования многих авторов. Пусть $\Sigma = (\mathcal{M}^{(m)}), m \in \mathbb{N}$, — семейство последовательностей. В работе [2] при некоторых условиях на это семейство, обеспечивающих, в частности, непрерывное вложение $C(D, \mathcal{M}^{(m+1)})$ в $C(D, \mathcal{M}^{(m)})$, получено описание образа преобразования Фурье - Лапласа функционалов на проективном пределе пространств $C(D, \mathcal{M}^{(m)})$. В случае одной переменной указанное описание получено в работе [1].

Пусть $\varphi(z)$ — положительная функция на $\mathbb{C}^p$. Через $P(\varphi)$ обозначим линейное нормированное пространство целых функций $F(z)$ с нормой

$$\|F\| = \sup_{z \in \mathbb{C}^p} \frac{|F(z)|}{\varphi(z)}.$$

Для последовательности Φ положительных функций $\varphi_j, j \in \mathbb{N}$, в предположении, что $\sup_z \frac{\varphi_{j+1}(z)}{\varphi_j(z)} < \infty$, через $H(\Phi)$ обозначим проективный предел пространств $P(\varphi_j)$ относительно непрерывных вложений $P(\varphi_{j+1}) \longrightarrow P(\varphi_j), j \in \mathbb{N}$:

$$H(\Phi) = \bigcap_j P(\varphi_j).$$

Для семейства Σ последовательностей $\mathcal{M}_m = \{(M_k^{(m)}, k \in \mathbb{Z}_+^p), m \in \mathbb{N}$, в предположении непрерывности вложений $C(D, \mathcal{M}^{(m)}) \subset$

$C(D, \mathcal{M}^{(m+1)})$ через $\mathcal{C}(D, \Sigma)$ обозначим индуктивный предел пространств $C(D, \mathcal{M}_m)$ относительно вложений:

$$\mathcal{C}(D, \Sigma) = \bigcup_m C(D, \mathcal{M}_m).$$

Теорема 1. Пусть $\Sigma = \{\mathcal{M}_m = (M_k^{(m)}), k \in \mathbb{Z}_+^p, m \in \mathbb{N}\}$, — семейство логарифмически выпуклых последовательностей положительных чисел, причем $M_0^{(m)} = 1, m \in \mathbb{N}$. Пусть, далее, $h_m(x)$ — выпуклые функции на $\mathbb{R}^p$, такие, что $h_m(k) = \ln M_k^{(m)}, k \in \mathbb{Z}_+^p$. Предположим, что каждая последовательность удовлетворяет условию

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{h_m(x) - \|x\| \ln \|x\|}{\|x\|} > -\infty,$$

а все семейство удовлетворяет двум условиям:

1. Для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_k \frac{M_k^{(m)}}{M_k^{(m+1)}} < \infty.$$

2. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ найдется номер $m = m(j) \in \mathbb{N}$, такой, что

$$\sum_k \frac{\sup_{|s| \leq 1} M_{k+s}^{(j)}}{M_k^{(m)}} < \infty.$$

Через Φ обозначим последовательность функций

$$\varphi_m(z) = H_D(\operatorname{Re} z) + \ln A_m(z), \quad z \in \mathbb{C}^p, \quad m \in \mathbb{N}.$$

где

$$A_m(z) = \sum_k \frac{|z^k|}{M_k^{(m)}}, \quad z \in \mathbb{C}^p.$$

Тогда преобразование Фурье - Лапласа $S \rightarrow S_x(e^{<x,z>})$ устанавливает линейный топологический изоморфизм сильно сопряженного пространства $\mathcal{C}(D, \Sigma)^*$ на пространство $H(\Phi)$.

Литература

1. Taylor B.A. Analytically Uniform Spaces of Infinitely Differentiable Functions // Commun. Pure Appl. Math., **24**:1 (1971), 39-51

2. Musin I.Kh. On the Fourier - Laplace transform of functionals on a space of infinitely differentiable functions on a convex compact // J. Math. Anal. Appl., **505**:2 (2022), 15 pp.

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2023»

СЕКЦИЯ

«НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

г. Уфа, 4 октября – 8 октября 2023 г.

О НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ГОРЕНИЯ С ВОЗДЕЙСТВИЕМ ШУМА НА РАЗЛИЧНЫЕ СЛАГАЕМЫЕ В ПРАВОЙ ЧАСТИ

С.И. Абдрахманов, samatmath@yandex.ru

УДК 517.958,519.2

Исследовано нелинейное стохастическое уравнение теплопроводности и горения. Рассмотрены 4 случая воздействия шума на различные слагаемые в правой части уравнения. Получены теоремы, с помощью которых возможно строить точные решения нелинейного уравнения теплопроводности и горения с шумом, приведены частные случаи.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, уравнение теплопроводности, симметричный интеграл, стохастический интеграл Стратоновича.

On the nonlinear heat and combustion equation with the effect of noise on various terms in the right part

The nonlinear stochastic heat and combustion equation is investigated. 4 cases of noise impact on various terms in the right part of the equation are considered. Theorems have been obtained that allow us to construct exact solutions of the nonlinear heat and combustion equation with noise. Special cases are given.

Keywords: stochastic differential equations, nonlinear heat and combustion equation, symmetric integral, stochastic Stratonovich integral.

Пусть на вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$ задан случайный процесс $V(t)$, $t \in [0, T]$, с непрерывными реализациями. В работе исследуется задача Коши для стохастического уравнения теплопроводности и горения вида

$$u(s, x) - u(0, x) = \int_0^s \left((k(u) \cdot u_x)'_x + g(u) \right) dt + \int_0^s f(t, x, V(t)) * dV(t), \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Абдрахманов Самат Илдусович, УУНиТ (Уфа, Россия); Samat Abdrakhmanov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

где третий интеграл в правой части является симметричным интегралом по процессу $V(t)$, в случае, если $V(t)$ есть винеровский процесс, то этот интеграл совпадает со стохастическим интегралом Стратоновича. Здесь $u = u(t, x) \geq 0$ — температура сплошной среды, $k(u) \geq 0$ — нелинейный коэффициент температуропроводности, $g(u) \geq 0$ — нелинейный источник тепла, зависящие от температуры.

Теорема. Пусть $k(u) \geq 0, g(u) \geq 0$ — непрерывно дифференцируемые функции, $f(t, x, v)$ имеет непрерывные реализации п. н., тогда решение задачи (1) существует и определяется из соотношения

$$u = \Phi(t, x, V(t)) + C(t, x), \quad (2)$$

где $\Phi(t, x, V(t)) = \int_{V(0)}^{V(t)} f(t, x, v) dv$, а $C(t, x)$ удовлетворяет задаче Коши

$$C_t = (k(u) \cdot (\Phi'_x + C_x))_x + g(u) - \Phi'_t, \quad C(0, x) = u_0 - \Phi(0, x, V(0)),$$

где u определяется из соотношения (2), при условии, что решение последней задачи существует.

В работе исследованы другие случаи, например, когда шум воздействует на нелинейный коэффициент температуропроводности. Найдены частные решения рассмотренных уравнений.

Литература

1. Насыров Ф.С. Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 212 с.
2. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Локализация тепла в нелинейных средах. Диф.уравнения, 1981, т.17, №10, с.1826-1841.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Г.Э. Абдурагимов
gusen_e@mail.ru

УДК 517.927.4

Рассматривается двухточечная краевая задача для одного нелинейного функционально – дифференциального уравнения дробного порядка. С помощью специальных топологических средств нелинейного анализа в полуупорядоченных пространствах получены достаточные условия существования положительного решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: функционально – дифференциальное уравнение дробного порядка, положительное решение, краевая задача, функция Грина, конус, спектральный радиус.

On the existence of a positive solution to a boundary value problem for a non-linear functional differential equation of fractional order

A two-point boundary value problem for one non-linear functional differential equation of fractional order is considered. Sufficient conditions for the existence of a positive solution of the problem under consideration are obtained with the help of special topological tools for nonlinear analysis in semi-ordered spaces.

Keywords: functionally – differential equation of fractional order, positive solution, boundary value problem, Green’s function, cone, spectral radius

Рассмотрим краевую задачу

$$D_{0+}^{\alpha}x(t) + f(t, (Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

$$x(0) = x'(0) = 0, \quad (2)$$

$$x(1) = 0, \quad (3)$$

где $\alpha \in (2, 3]$ – некоторое действительное число, D_{0+}^{α} – дробная производная Римана-Лиувилля, $T: C \rightarrow \mathbb{L}_p$ ($1 < p < \infty$) – линейный положительный непрерывный оператор, функция $f(t, u)$ неотрицательна, непрерывна на $[0, 1] \times [0, \infty)$, монотонна по второму аргументу и удовлетворяет условию Каратеодори.

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, к.ф.-м.н., доцент, ДГУ (Махачкала, Россия);
Gusen Abduragimov (Dagestan State University, Russia)

При некоторых ограничениях степенного роста на f доказано существование по крайней мере одного положительного решения задачи (1)–(3). Полученные результаты дополняют исследования автора по данной тематике. Среди последних публикаций отметим [1,2].

Литература

1. Абдурагимов Г.Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **194** (2021), 3-7.

2. Абдурагимов Г.Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка // Вестник российских университетов. Математика, **27**:138 (2022), 129-135.

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ И СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

С.В. Акманова
svet.akm_74@mail.ru

УДК 517.938

В настоящей работе рассматриваются необходимые и достаточные условия управляемости нелинейных гибридных систем без обратной связи, а также достаточное условие стабилизируемости нелинейной гибридной системы управления

Ключевые слова: гибридная система, дискретная система, управляемая система, стабилизируемая система

On controllability and stabilizability of nonlinear hybrid systems

In this paper, the necessary and sufficient conditions for the controllability of nonlinear hybrid systems without feedback are considered, as well as the sufficient condition for the stabilization of a nonlinear hybrid control system.

Keywords: hybrid system, discrete system, controlled system, stabilized system

Рассматривается нелинейная гибридная (непрерывно-дискретная) система управления вида

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t_k)), & t \in [t_k, t_{k+1}), \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k), u(t_k)), & k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, u(t_0) = u_0,$$

где моменты времени t_k , задают на R^1 равномерную сетку с шагом $h > 0$:

$$0 = t_0 < t_1 = t_0 + h < t_2 = t_1 + h < \dots < t_{k+1} = t_k + h < \dots,$$

$x \in R^n, y \in R^m$ - векторы, характеризующие состояния системы (1), а также поведение непрерывной и дискретной частей данной системы соответственно; $u \in R^q$ - управление; $f(x, y), g(x, y, u)$ - непрерывно-дифференцируемые по совокупности переменных функции.

Будем полагать, что при $u = 0$ система (1) имеет точку равновесия $x = 0, y = 0$, т.е. выполняются соотношения $f(0, 0) = g(0, 0, 0) = 0$.

Акманова Светлана Владимировна, к.п.н., доцент, МГТУ им. Г.И.Носова (Магнитогорск, Россия); Svetlana Akmanova (Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia)

Тогда функции $f(x, y)$, $g(x, y, u)$ представимы в виде

$$f(x, y) = A_1 x + B_1 y + a(x, y), \quad g(x, y, u) = A_2 x + B_2 y + C u + b(x, y, u), \quad (2)$$

где $A_1 = f'_x(0, 0)$, $B_1 = f'_y(0, 0)$, $A_2 = g'_x(0, 0, 0)$, $B_2 = g'_y(0, 0, 0)$, $C = g'_u(0, 0, 0)$, нелинейности $a(x, y)$ и $b(x, y, u)$ удовлетворяют соотношениям

$$a(x, y) = o(\|x\| + \|y\|), \quad b(x, y, u) = o(\|x\| + \|y\| + \|u\|)$$

при $\|x\| + \|y\| \rightarrow 0$, $\|x\| + \|y\| + \|u\| \rightarrow 0$ соответственно,

Ставится задача поиска необходимых и достаточных условий управляемости и стабилизируемости системы (1).

Для решения этой задачи примем следующие определения (см. [2], [3]).

Гибридную систему (1) называют *управляемой*, если для любых z_0 , $z_l \in R^{n+m}$ существует управление $u = u(t_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots, l$ такое, что система (1) имеет решение $z(t) = (x(t), y(t))$, удовлетворяющее краевым условиям $z(t_0) = z_0$, $z(t_l) = z_l$.

Гибридную систему (1) называют *стабилизируемой*, если существует кусочно-непрерывная функция $\varphi(t)$ такая, что система (1) с управлением $u = \varphi(t)$ имеет асимптотически устойчивое решение $x = 0$, $y = 0$.

Можно показать, учитывая (2), что гибридная системв (1) равносильна дискретной системе вида

$$z_{k+1} = A(h)z_k + B u_k + \xi(z_k, u_k, h), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где

$$A(h) = \begin{bmatrix} e^{A_1 h} & A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 \\ A_2 e^{A_1 h} & A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 + B_2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix}, \quad z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad \xi(z_k, u_k, h) = \begin{bmatrix} \varepsilon(x_k, y_k; h) \\ \delta(x_k, y_k, u_k; h) \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon(x_k, y_k; h) = e^{(t_k+h)A_1} \int_{t_k}^{t_k+h} e^{-sA_1} a(x(s, x_k, y_k), y_k) ds,$$

здесь $x = x(t, x_k, y_k)$ – решение задачи Коши

$$x' = A_1 x + B_1 y_k + a(x, y_k), \quad x(t_k) = x_k;$$

нелинейность $\delta(x_k, y_k, u_k; h)$ определяется равенством

$$\delta(x_k, y_k, u_k; h) = A_2 \varepsilon(x_k, y_k; h) + b(x_{k+1}, y_k, u_k).$$

Руководствуясь работой [1], можно доказать, что функция $\xi(z_k, u_k, h)$ удовлетворяет соотношению

$$\xi(z_k, u_k, h) = o(\|z_k\| + \|u_k\|) \quad \text{при} \quad \|z_k\| + \|u_k\| \rightarrow 0.$$

Системой первого приближения нелинейной дискретной системы (3) служит линейная система вида

$$z_{k+1} = A(h)z_k + B u_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

Тогда, учитывая работы [4]-[6], можно доказать справедливость следующих утверждений.

Теорема 1. Система (1) управляема в том и только том случае, если управляема система (3).

Теорема 2. Система (5) управляема при $h = h_0 > 0$ в том и только том случае, если $\text{rank}[B, A(h_0)B, A^2(h_0)B, \dots, A^{n+m-1}(h_0)B] = n + m$.

Теорема 3. Если система первого приближения (5) нелинейной системы (3) управляема при некотором $h = h_0 > 0$ и $k = 0, 1, 2, \dots, l$ то гибридная система (1) управляема при $h = h_0 > 0$ и $k = 0, 1, 2, \dots, l$.

С учётом матрицы (4) и работы [1] справедлива

Теорема 4. Если существует ненулевая матрица D размера $q \times (n + m)$ такая, что при некотором $h = h_0 > 0$ все собственные значения матрицы $A(h_0) + BD$ меньше 1 по модулю, тогда гибридная система (1) с управлением $u = D \cdot \text{col}(x_1(t), \dots, x_n(y), y_1(t), \dots, y_m(t))$ стабилизируема при $h = h_0 > 0$.

Литература

1. Юмагулов М.Г., Акманова С.В. Об устойчивости точек равновесия нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем // Уф-пмский матем. журнал **15**:4 (2023), 85-100.
2. Ахундов А.А. Управляемость линейных гибридных систем // Управляемые системы **14** (1975), 4-10.
3. Марченко В.М., Борковская И.М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // Труды БГТУ **6** (2012), 7-10.
4. La Salle J.P. Stability and Control of Discrete Processes . — N.Y.: Springer-Verlag Inc., 1986.
5. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. — Минск: Институт математики АН Белоруссии, 2001.
6. Сазанова Л.А. Об управлении дискретными системами // Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. — Екатеринбург, 2002.

ПРОЕКТИВНЫЕ СИММЕТРИИ 5-МЕРНЫХ ЖЕСТКИХ H -ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА $\{32\}$

А.В. Аминова, Д.Р. Хакимов
asya.aminova@kpfu.ru, dzhamoliddink@mail.ru

УДК 514.763

Исследуются симметрии систем дифференциальных уравнений геодезических в форме алгебр Ли инфинитезимальных проективных преобразований (проективных движений) 5-мерных псевдоримановых многообразий (M^5, g) — жестких h -пространств типа $\{32\}$.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, псевдоримановы многообразия, проективно-геометрическая теория систем ОДУ.

Projective symmetries of 5-dimensional rigid H -spaces of type $\{32\}$

In this paper, we study the 5-dimensional pseudo-Riemannian manifolds (M^5, g) , namely, rigid h -spaces of type $\{32\}$ admitting non-homothetic infinitesimal projective transformations.

Keywords: differential geometry, pseudo-Riemannian manifolds, projective-geometric theory of ODE.

Векторное поле X называется инфинитезимальным проективным преобразованием, или проективным движением, если локальная однопараметрическая группа преобразований, порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $p \in M$, состоит из локальных проективных преобразований.

В развитой А. В. Аминовой и Н. А.-М. Аминовым проективно-геометрической теории систем дифференциальных уравнений [1—9] отмечается, что проективные преобразования систематически возникают при исследовании симметрий дифференциальных уравнений математической физики. В частности, алгебра Ли инфинитезимальных точечных симметрий уравнения Кортевега-де Фриза является подалгеброй проективной, точнее, аффинной алгебры Ли, а уравнение Риккати можно рассматривать как "своеобразную реализацию" группы проективных преобразований на прямой [10].

Доклад посвящен исследованию симметрий систем дифференциальных уравнений геодезических в форме алгебр Ли инфинитезимальных проективных преобразований (проективных движений) 5-мерных

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 0075-02-2023-944).

Аминова Ася Васильевна, д.ф.-м.н., профессор, КФУ (Казань, Россия); Asya Aminova (Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russia)

Хакимов Д.Р., к.ф.-м.н., старший преподаватель, КФУ (Казань, Россия); Dzhamoliddin Khakimov (Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russia)

псевдоримановых многообразий (M^5, g) — h -пространств $H_{32,3}$ типа $\{32\}$ [11], [12]. Определяются необходимые и достаточные условия, при которых $H_{32,3}$ является пространством постоянной (нулевой) кривизны. Находятся негомотетические проективные движения в $H_{32,3}$ непостоянной кривизны, исследуются гомотетии и изометрии указанных пространств, определяются размерности, базисные элементы и структурные уравнения действующих в них максимальных проективных алгебр Ли. В итоге получена классификация h -пространств $H_{32,3}$ типа $\{32\}$ по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований.

Литература

1. Аминова А. В. "Автоморфизмы геометрических структур как симметрии дифференциальных уравнений", Изв. вузов. Матем., 1994, №2, 3–10.
2. Аминова А. В. "Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий", УМН, 50:1 (1995), 69–142.
3. Аминова А. В. "Проективные преобразования и симметрии дифференциальных уравнений", Матем. сб., 186:12 (1995), 21–36.
4. A. V. Aminova, N. A.-M. Aminov, "Projective geometry of systems of differential equations: general conceptions", Tensor (N.S.), 62:1 (2000), 65–86.
5. Аминова А. В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий, Янус-К, М., 2003.
6. А. В. Аминова, Н. А.-М. Аминов, "Дифференциальные системы 4-го порядка с 4-мерной разрешимой группой симметрий, не содержащей абелевой подгруппы G_3 ", Изв. вузов. Матем., 2005, №6, 12–27.
7. А. В. Аминова, Н. А.-М. Аминов, "Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка", Матем. сб., 197:7 (2006), 3–28.
8. A. V. Aminova, N. A.-M. Aminov, "Geometric theory of differential systems: Linearization criterion for systems of second-order ordinary differential equations with a 4-dimensional solvable symmetry group of the Lie–Petrov type V II", J. Math. Sci., 158:2 (2009), 163–183.
9. А. В. Аминова, Н. А.-М. Аминов, "Пространства с проективной связностью Картана и групповой анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка", Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 123, ВИНТИ, М., 2009, 58–80.
10. Н. Х. Ибрагимов, "Азбука группового анализа — М.: Знание, 1989.
11. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. О проективных движениях 5-мерных пространств. I. h -пространства типа $\{32\}$ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. № 4. С. 21–31 (2018).
12. Aminova A. V., Khakimov D. R. On the properties of the projective Lie algebras of rigid h -spaces H_{32} of the type $\{32\}$, Uchenye Zapiski

Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, **162**, no. 2, Kazan University, Kazan, 2020, 111–119.

ЗАДАЧИ ВЕНТЦЕЛЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Д.Е. Апушкинская
apushkinskaya@gmail.com

УДК 517.95

В докладе обсуждаются результаты о сильной разрешимости в пространствах Соболева краевых задач Вентцеля для эллиптических и параболических уравнений второго порядка с разрывными старшими коэффициентами.

Ключевые слова: задача Вентцеля, класс VMO, априорные оценки, существование и единственность.

Venttsel problems with discontinuous coefficients

In this talk we discuss results on the strong solvability in Sobolev spaces of Venttsel boundary value problems for second order elliptic and parabolic equations with discontinuous leading coefficients.

Keywords: Venttsel problems, VMO class, a priori estimates, existence and uniqueness.

Задача Вентцеля представляет собой наиболее общую краевую задачу для эллиптического оператора второго порядка, которая порождает генератор марковского процесса. Эта задача, а также ее нестационарный аналог, возникает во множестве различных приложений (см., например, ссылки в [2] и [5]).

В данном докладе представлены новые результаты, касающиеся краевых задач Вентцеля для эллиптических и параболических уравнений второго порядка. Новизна связана с разрывностью старших коэффициентов дифференциальных операторов, действующих внутри и на границе области. А именно, главные коэффициенты принадлежат к классу VMO. Кроме того, на коэффициенты нижнего порядка накладываются оптимальные требования интегрируемости по Лебегу/Орличу.

Мы рассмотрим сильные решения, принадлежащие композитным пространствам Соболева с оптимальными диапазонами показателей, и обсудим теорию L^p -регулярности и разрешимости для таких задач.

Доклад основан на результатах работ [1]-[5], полученных совместно с А.И. Назаровым, Д.К. Палагачевым и Л.Г. Софтовой.

Литература

1. *Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I., Palagachev D.K., Softova L.G.* L^p theory of Venttsel BVPs with discontinuous data // Atti Accad.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 22-21-00027).

Апушкинская Дарья Евгеньевна, д.ф.-м.н., профессор, РУДН (Москва, Россия);
Darya Apushkinskaya (RUDN University, Moscow, Russia)

Peloritana dei Pericolanti Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, **98**:S2 (2020), A1

2. *Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I., Palagachev D.K., Softova L.G.* Venttsel boundary value problems with discontinuous data // SIAM J. Math. Analysis, **53**:1 (2021), 221-252

3. *Апушкинская Д.Е., Назаров А.И., Палагачев Д.К., Софтова Л.Г.* Нестационарная задача Вентцеля со старшими коэффициентами из класса VMO_x // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., **510** (2023), 13-17

4. *Апушкинская Д.Е., Назаров А.И., Палагачев Д.К., Софтова Л.Г.* Квазилинейная параболическая задача Вентцеля с разрывными старшими коэффициентами // Функци. анализ и его прил., **57**:2 (2023), 93-99

5. *Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I., Palagachev D.K., Softova L.G.* Nonstationary Venttsel problems with discontinuous data // J. Diff. Equations, **375** (2023), 538-566

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННЫМ СУММАРНЫМ ЯДРОМ И МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С.Н. Асхабов
askhabov@yandex.ru

УДК 517.968

Методом монотонных по Браудеру операторов доказаны глобальные теоремы об однозначной разрешимости в пространствах Лебега для трех различных классов нелинейных интегральных уравнений со степенным суммарным ядром. Получены также оценки нормы решения.

Ключевые слова: монотонный оператор, интегральные уравнения
Integral equations with power sum kernel and monotonic nonlinearity

Using the method of Browder monotone operators, global theorems on unique solvability in Lebesgue spaces are proved for three different classes of nonlinear integral equations with a power total kernel. Estimates for the solution norm are also obtained.

Keywords: monotone operator, integral equations

В вещественных пространствах Лебега $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, с обычной нормой $\|\cdot\|_p$, рассматриваются три различных класса нелинейных интегральных уравнений со степенным суммарным ядром. Предполагается, что функция $F(x, t)$, порождающая нелинейность в указанных уравнениях, определена при $x \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ и непрерывна по t почти для всех $x \in [0, 1]$. В зависимости от рассматриваемого класса уравнений, будем предполагать, что нелинейность $F(x, t)$ для почти всех $x \in [0, 1]$ и всех $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет либо условиям:

- 1) $|F(x, t)| \leq c(x) + d_1|t|^{p-1}$, где $c(x) \in L_p^+(0, 1)$, $d_1 > 0$;
- 2) $F(x, t_1) \leq F(x, t_2)$, если $t_1 < t_2$;
- 3) $F(x, t) \cdot t \geq d_2|t|^p - D(x)$, где $d_2 > 0$, $D(x) \in L_1^+(0, 1)$,

либо условиям:

- 4) $|F(x, t)| \leq g(x) + d_3|t|^{1/(p-1)}$, где $g(x) \in L_p^+(0, 1)$, $d_3 > 0$;
- 5) $F(x, t_1) < F(x, t_2)$, если $t_1 < t_2$;
- 6) $F(x, t) \cdot t \geq d_4|t|^{p/(p-1)} - D(x)$, где $d_4 > 0$, $D(x) \in L_1^+(0, 1)$,

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект FEES-2020-0001).

Асхабов Султан Нажмудинович, д.ф.-м.н., профессор, ЧГПУ, ЧГУ им. А.А. Кадыева (Грозный, Россия); Sultan Askhabov (Chechen State Pedagogical University, Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia)

где $p' = p/(p-1)$ и $L_p^+(0, 1)$ означает множество всех неотрицательных функций из $L_p(0, 1)$.

Используя результаты работ [1], [2] методом монотонных (по Браудеру-Минти) операторов доказываются следующие глобальные теоремы.

Теорема 1. Пусть $p \geq 2$ и $0 < \nu < 1$. Если выполнены условия 1)-3), то при любых $\lambda > 0$ и $f \in L_{p'}(0, 1)$ уравнение

$$\lambda \cdot F(x, u(x)) + \int_0^1 \frac{u(t) dt}{(x+t)^\nu} = f(x) \quad (1)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_p(0, 1)$. Кроме того, если условие 3) выполнено при $D(x) = 0$, то $\|u^*\|_p \leq (\lambda^{-1} d_2^{-1} \|f\|_{p'})^{1/(p-1)}$.

Следствие 1. Пусть $p \geq 2$ есть четное число и $0 < \nu < 1$. Тогда при любых $\lambda > 0$ и $f \in L_{p'}(0, 1)$ уравнение

$$\lambda \cdot u^{p-1}(x) + \int_0^1 \frac{u(t) dt}{(x+t)^\nu} = f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_p(0, 1)$ и $\|u^*\|_p \leq (\lambda^{-1} \|f\|_{p'})^{1/(p-1)}$.

Теорема 2. Пусть $1 < p \leq 2$ и $0 < \nu < 1$. Если выполнены условия 1)-3), то при любых $\lambda \geq 0$ и $f \in L_p(0, 1)$ уравнение

$$u(x) + \lambda \int_0^1 \frac{F(t, u(t)) dt}{(x+t)^\nu} = f(x) \quad (2)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_p(0, 1)$, причем $\|u^*\|_p \leq d_1 d_2^{-1} \|f\|_p$, если условия 1) и 3) выполняются при $c(x) = 0$ и $D(x) = 0$.

Теорема 3. Пусть $p \geq 2$ и $0 < \nu < 1$. Если выполнены условия 4)-6), то при любых $\lambda \geq 0$ и $f \in L_p(0, 1)$ уравнение

$$u(x) + \lambda \cdot F\left(x, \int_0^1 \frac{u(t) dt}{(x+t)^\nu}\right) = f(x) \quad (3)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_p(0, 1)$. Кроме того, если в 4) и 6) $g(x) = 0$ и $D(x) = 0$, то $\|u^* - f\|_p \leq 2^{2/p} \lambda (d_3^p d_4^{-1} \|f\|_p)^{1/(p-1)}$.

Аналоги следствия 1 имеют место также для уравнений (2) и (3).

Из теорем 1-3 следует, что уравнения (1)-(3) при $f(x) = 0$ имеют лишь тривиальное решение $u^*(x) = 0$.

Если функция $F(x, t)$ удовлетворяет условию 2) и условию Липшица по второму аргументу, то при $p = 2$ можно показать, что решения

уравнений (1)–(3) можно найти методом последовательных приближений пикаровского типа при любых $\lambda > 0$ и получить оценку скорости их сходимости.

В заключение отметим, что теоремы 1–3 допускают, в частности, обобщение на случай пространств Лебега $L_p(\varrho)$ (см. [3]) с общим (не обязательно степенным) весом $\varrho(x)$.

Литература

1. *Асхабов С.Н.* Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега // Матем. заметки, **97**:5 (2015), 643-654.
2. *Porter D., Stirling D.* Integral equations. A practical treatment, from spectral theory to applications. — Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1990.
3. *Askhabov S.N.* Nonlinear singular integral equations in Lebesgue spaces // Journal of Mathematical Sciences, **173**:2 (2011), 155-171.

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЭНТРОПИЙНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С МЕРОЗНАЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В.Ф. Вильданова, Ф.Х. Мукминов
gilvenera@mail.ru, mfk@rambler.ru

УДК 517.946.4

В неограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$ рассматривается задача Неймана для нелинейного эллиптического уравнения второго порядка с мерозначным потенциалом. Ограничения на структуру уравнения формулируются в терминах обобщенной N -функции. Доказано существование энтропийного решения задачи.

Ключевые слова: нелинейное эллиптическое уравнение, энтропийное решение, пространство Музилака-Орлича.

Existence of entropy solutions of the Neumann problem for equation with a measure-valued potential

In an unbounded domain of space $\mathbb{R}^n$, the Neumann problem for a nonlinear elliptic equation of the second order with a measure-valued potential is considered. Restrictions on the structure of the equation are imposed in terms of a generalized N -function. The existence of an entropy solution of the problem is proved.

Keywords: nonlinear elliptic equation, entropy solution, Musielak-Orlicz space.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ рассматривается задача Неймана для уравнения

$$-\operatorname{div}(a(x, u, \nabla u)) + b_0(x, u, \nabla u) + b_1(x, u)\mu = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad (1)$$

где μ - неотрицательная мера Радона. На границе $\partial\Omega$ ставится условие Неймана: $a(x, u, \nabla u) \cdot n = 0$.

Векторное поле $a(x, u, y)$ в (1) удовлетворяет при $x \in \Omega$ следующим условиям с возрастающей функцией $g(r)$:

$$\overline{M}(x, |a(x, r, y)|) \leq g(r) (G(x) + M(x, |y|)), \quad r \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^m,$$

$$a(x, r, y) \cdot y \geq c_0 M(x, |y|) - G(x), \quad r \in \mathbb{R}, \quad c_0 > 0,$$

$$(a(x, r, y) - a(x, r, z)) \cdot (y - z) > 0, \quad y \neq z, \quad y, z \in \mathbb{R}^m, \quad r \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega.$$

Вильданова Венера Фидарисовна, к.ф.-м.н., доцент ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Venera Vildanova (Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS, Ufa, Russia)

Мукминов Фарит Хамзаевич, д.ф.-м.н., профессор, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Farit Mukminov (Institute of Mathematics with Computing Centre UFRC RAS, Ufa, Russia)

Функция G является элементом пространства $L_1(\Omega)$, $M(x, s)$ – функция Музилака-Орлича, $\bar{M}(x, s)$ удовлетворяет Δ_2 условию, каратеодориевы функции b_i удовлетворяют неравенствам:

$$|b_0(x, s, y)| \leq g(r)(\tilde{G}_0(x) + M(x, |y|)), |s| \leq r, |x| \leq r;$$

$$|b_1(x, s)| \leq g(r)\tilde{G}_1(x), |s| \leq r, |x| \leq r,$$

где $\tilde{G}_0 \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$, $\tilde{G}_1 \in L_{1,\mu,\text{loc}}(\Omega)$;

$$b_0(x, r, y)r \geq 0. \quad (2)$$

Пусть существует возрастающая функция $\tilde{g}(r)$, $r > 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{g}(r) = \infty$, такая, что

$$|b_1(x, s)| > \tilde{g}(r), \quad s \geq r, \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Пространство $\mathcal{H}_M^1(\Omega)$ определим как замыкание множества $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ в *-слабой топологии пространства $L_M(\Omega)^m$. Требуем, чтобы пространство $\mathcal{H}_M^1(\Omega)$ не содержало констант.

Определение. Энтропийным решением задачи Неймана для уравнения (1) называется функция u такая, что $T_k(u) \in \mathcal{H}_M^1(\Omega)$ при всех $k > 0$ и при всех $\xi \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ корректно неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \xi) + (b_0(x, u, \nabla u) - f)T_k(u - \xi))dx + \\ & + \int_{\Omega} b_1(x, u)T_k(u - \xi)d\mu \leq 0. \end{aligned}$$

Теорема. Пусть выполнены условия на a , b_i , тогда существует энтропийное решение задачи Неймана для уравнения (1).

Литература

1. Vildanova V.F., Mukminov F.Kh. Perturbations of Nonlinear Elliptic Operators by Potentials in the Space of Multipliers // Journal of Mathematical sciences, **257**:5 (2021), 569–578

ANALYTICAL SOLUTIONS OF A STOCHASTIC FRACTIONAL EQUATION PERTURBED BY THE MULTIPLICATIVE WIENER PROCESS

Volkan Ala

volkanala@mersin.edu.tr

YDK 517.518

This study is dealth with analytical solutions of the stochastic- fractional Kundu-Mukherjee-Naskar equation perturbed by the multiplicative Wiener process. The unified solver tecnique is used to get optical solutions. The considered equation is important in magnetized plasma. As a result, the obtained solutions are essential in interpreting remarkable physical events.

Keywords: Unified solver technique, Stochastic-fractional Kundu-Mukherje-Naskar Equation, Wiener process

1 Introduction

In this study, we consider the following stochastic fractional-space Kundu–Mukherjee–Naskar equation perturbed by the multiplicative Wiener process:

$$i\psi_t + aD_x^\alpha\psi + ib\psi(\psi D_x^\alpha\psi^* - \psi^* D_x^\alpha\psi) + i\sigma\psi \circ W_t = 0, \quad (1)$$

where ψ denotes the optical soliton, D_x^α is conformable derivative operator [1], a and b are positive constants, σ is the noise strength, $\psi \circ W_t$ is the multiplicative Wiener process and $W(t)$ is the standart Wiener process.

Kundu and Mukherjee proposed the equation (1) in 2013 for $\alpha = 1$ and $\sigma = 0$ [2]. This model can be utilized to explain ion-acoustic waves, oceanic rogue waves and optical fiber wave propagation in a magnetized plasma [3-6].Our motivation in this article is to get the analytical stochastic fractional solutions using the unified solver technique.

2 Unified Solver Technique and its application

This section contains description of unified solver technique. Consider the nonlinear partial differential equation (NPDE) of the following form:

$$F(\phi, \phi_t, \phi_x, \phi_{tt}, \phi_{xx}, \dots). \quad (2)$$

Research Assistant Dr., (Mersin, Turkiye); Volkan ALA (Mersin University, Faculty of Science, Mathematics Department, Mersin, Turkiye)

Applying the wave transformation $\phi(x, y, t) = \phi(\xi)$, $\xi = k_1x + k_2y + k_3t$, (where $k_i = \overline{1, 3}$ are velocity of the wave) into (2) the following equation is obtained:

$$N(\phi, \phi^2, \phi', \phi'', \dots) = 0, \quad (3)$$

here N is a nonlinear ordinary differential equation (NODE) that has partial derivatives of ϕ dependent on ξ . Based on He's semi-inverse method [1], the variational model for (2) can be obtained by the semi-inverse method which reads:

$$I(\phi) = \int \mathcal{L} d\xi, \quad (4)$$

where $\mathcal{L}$ is Lagrangian function connected with the derivative of ϕ given in the form:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\phi')^2 - Q, \quad (5)$$

here Q is the potential function. We look for a solitary wave solution in the form

$$\phi(x, y, t) = \lambda \operatorname{sech}(\mu\xi), \phi(x, y, t) = \lambda \operatorname{sech}^2(\mu\xi), \phi(x, y, t) = \lambda \tanh(\mu\xi), \quad (6)$$

where λ and μ are constants determined later. Assume that systems of equations can be reduced to the form:

$$\Omega_1 \phi'' + \Omega_2 \phi^3 + \Omega_3 \phi = 0, \quad (7)$$

in which Ω_i , $i = \overline{1, 3}$ are real coefficients. Multiplying (2) by ϕ' and taking integral according to ξ :

$$\frac{1}{2} (\phi')^2 + \gamma_2 \frac{\Omega_2}{4\Omega_1} \phi^4 + \frac{\Omega_3}{2\Omega_1} \phi^2 + \Omega_0 = 0, \quad (8)$$

where Ω_0 is a constant of integration. Thus (2) can be written in the form:

$$\phi'' = -\frac{\partial Q}{\partial \phi}, \quad Q = -(\gamma_2 \phi^4 + \gamma_1 \phi^2 + \gamma_0), \quad (9)$$

where

$$\gamma_2 = -\frac{\Omega_2}{4\Omega_1}, \quad \gamma_1 = -\frac{\Omega_3}{2\Omega_1}, \quad \gamma_0 = -\Omega_0. \quad (10)$$

Implementing the semi-inverse method to solve (2) that constructs the following variational formulation from (2):

$$I = \int \left[\frac{1}{2} (\phi')^2 + \gamma_2 \phi^4 + \gamma_1 \phi^2 + \gamma_0 \right] d\xi. \quad (11)$$

Substituting (2) into (2) then making I stationary according to λ and μ :

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = 0; \quad \frac{\partial I}{\partial \mu} = 0. \quad (12)$$

Solving (2), we get λ and μ . Thus the solitary wave solution given by (2) is well determined.

2.1 The first family solution

The first family of solution is as follows:

$$\phi(\xi) = \lambda \operatorname{sech} \theta, \quad \theta = \mu \xi, \quad (13)$$

Substituting from (2.1) in (2), we get

$$I = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2} \lambda^2 \mu^2 \operatorname{sech}^2 \theta \tanh^2 \theta + \gamma_2 \lambda^4 \operatorname{sech}^4 \theta + \gamma_1 \lambda^2 \operatorname{sech}^2 \theta + \gamma_0 \right] d\theta.$$

Taking $\gamma_0 = 0$ as an integration constant, it is obtained:

$$I = \frac{\lambda}{12\mu} [2\lambda\mu^2 + 8\gamma_2\lambda^3 + 12\gamma_1\lambda]. \quad (14)$$

Making I stationary in relation to λ and μ results in

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda} = \frac{1}{12\mu} [32\gamma_2\lambda^3 + 24\gamma_1\lambda + 4\lambda\mu^2] = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \mu} = -\frac{\lambda}{12\mu^2} [8\gamma_2\lambda^3 + 12\gamma_1\lambda - 2\lambda\mu^2] = 0. \quad (16)$$

Solving these equations and using (2.1), the solution of (2) takes the form:

$$\phi(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-\gamma_1}{\gamma_2}} \operatorname{sech} \left(\pm \sqrt{2\gamma_1} \xi \right). \quad (17)$$

Using (2), the first family of solution can be written as:

$$\phi(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-2\Omega_3}{\Omega_2}} \operatorname{sech} \left(\pm \sqrt{\frac{-\Omega_3}{\Omega_1}} \xi \right). \quad (18)$$

Литература

1. *Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., Sababheh, M.* A new definition of fractional derivative. //J. Comput. Appl. Math., **264** (2014), 65-70
2. *Kundu, A., Mukherjee, A.* A new definition of fractional derivative //J. Comput. Appl. Math., (2013), arXiv:1305.4023v1.
3. *He, J.* Semi-inverse method of establishing generalized variational principles for fluid mechanics with emphasis on turbo machinery aerodynamics //International Journal of Turbo and Jet Engines, **14**(1997), 23-28
4. *Kundu, A., Mukherjee, A., Naskar, T.* Modelling rogue waves through exact dynamical lump soliton controlled by ocean currents.// Proc. R. Soc. A-Math. Phys. **470** (2014), 20130576.
5. *Wen, X.* Higher-order rational solutions for the (2+1)-dimensional KMN equation.// Proc. Rom. Acad. **A18** (2017), 191-198.
6. *Mukherjee, A.* Novel nonlinear wave equation: Regulated rogue waves and accelerated soliton solutions.// Phys. Lett. A **470** (2019), 985-990.

БИФУРКАЦИЯ АНДРОНОВА-ХОПФА В НЕГЛАДКИХ СИСТЕМАХ

Р.И. Габдрахманов

gabdrahmanov.robert@gmail.com

УДК 517.9

В настоящем докладе предлагается подход, позволяющий для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с модулем получить условия возникновения бифуркации Андронова-Хопфа.

Ключевые слова: Бифуркация Андронова-Хопфа, негладкие системы, теорема о центральном многообразии.

Andronov-Hopf bifurcation in non-smooth systems

Present work suggests an approach of finding conditions of Andronov-Hopf bifurcation occurrence in non-linear differential equations with modulus.

Keywords: Hopf bifurcation, non-smooth systems, central manifold theorem.

Многие задачи нелинейной динамики приводят к уравнениям, содержащим модуль. В этой связи актуальной является разработка аналогов теорем классической теории бифуркаций для уравнений с негладкими функциями и, в частности, содержащими модули. В настоящей работе предлагается подход, позволяющий для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с модулем получить условия возникновения бифуркации Андронова-Хопфа.

Рассмотрим следующую двумерную систему с модулем

$$x' = A(\mu)x + \delta \xi |(c, x)| + a(x, \mu), x \in R^2, \quad (1)$$

здесь $\delta \xi_0 |(c, x)|$ - негладкое нелинейное слагаемое, $\xi, c \in R^2$ - ненулевые векторы, а δ малый параметр. Пусть нелинейность $a(x, \mu)$ имеет вид

$$a(x, \mu) = a_2(x, \mu) + a_3(x, \mu) + \hat{a}_4(x, \mu), \quad (2)$$

где $a_2(x, \mu)$ содержит квадратичные по x слагаемые, $a_3(x, \mu)$ - слагаемые третьей степени, а $\hat{a}_4(x, \mu)$ является гладкой и удовлетворяет соотношению: $\|\hat{a}_4(x, \mu)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \rightarrow 0$ равномерно по μ .

Пусть в системе (1) матрица $A(\mu_0) = A_0$ имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm \omega_0 i$ ($\omega_0 > 0$) и не имеет других

собственных значений на мнимой оси. В соответствии с теорией возмущений линейных операторов при малых $|\mu - \mu_0|$ матрица $A(\mu)$ имеет пару простых собственных значений

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm \omega(\mu)i. \quad (3)$$

Найдено, что при условии $\alpha'(\mu_0) \neq 0$ μ_0 является точкой бифуркации Андронова-Хопфа системы (1) при малых δ . Были получены асимптотические формулы для бифуркационных решений системы (1). Получение основных результатов базируется на переходе в равносильным интегральным уравнениям (см. [1]).

Литература

1. Юмагулов М.Г., Матвеевко Н.И. Метод интегральных операторов в задаче о признаках и типе бифуркации Хопфа // Известия Российской академии наук, **МММИУ** 4:1-2 (2000)

ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

Т.А. Гаджимурадов, А.М. Агаларов

gta-1987@mail.ru, aglarow@gmail.com

УДК 530.182, 534.5

Рассмотрена динамика солитонов огибающих в системе связанных ангармонических цепочек. Система эквивалентна модели распространения векторных солитонов в одномодовом волокне со слабым двулучепреломлением при наличии когерентного и некогерентного взаимодействий. Численно и аналитически показывается, что элементы многокомпонентного солитона могут вести себя как свободные скалярные солитоны с произвольными скоростями и амплитудами. Они могут быть представлены как линейная интерференция ранее известных вырожденных векторных солитонов. Далее идея интерференции переносится на другие векторные интегрируемые системы включая модель Манакова.

Ключевые слова: солитоны, интегрируемые системы, интерференция.

Linear interference of nonlinear waves

The dynamics of envelope solitons in a system of coupled anharmonic chains are addressed. Mathematically, the system is equivalent to the vector soliton propagation model in a single-mode fiber with low birefringence in the presence of coherent and incoherent interactions. It is numerically and analytically shown that multicomponent soliton entries can behave as free scalar solitons with arbitrary velocities and amplitudes. They can be presented as a linear interference of degenerate vector solitons known before. Further, the interference idea is transferred to other vector integrable systems, including the Manakov model

Keywords: solitons, integrable systems, interference.

Среди большого разнообразия солитонов особо выделяются векторные, которые естественным образом возникают в многополевых моделях [1]. Примечательно, что для векторного класса солитонов требование упругого взаимодействия можно несколько ослабить [2]. Наиболее детально изучены векторные солитоны в нелинейной волоконной оптике [3].

Гаджимурадов Тельман Алимагомедович, н.с. сект. теор. физ., ДФИЦ РАН (Махачкала, Россия); Telman Gadzhimuradov (Institute of Physics DFRC of RAS, Makhachkala, Russia)

Агаларов Агалар Магомедзакиевич, к.ф.-м.н., доцент, ФГБОУ ВО ДГУ (Махачкала, Россия); Институт физики ДФИЦ РАН (Махачкала, Россия); Agalarov Agalar (Dagestan State University, Makhachkala, Russia; Institute of Physics DFRC of RAS, Makhachkala, Russia)

Даже в одномодовом волокне двулучепреломление приводит к необходимости рассмотрения двух ортогонально поляризованных компонент поля. Основным препятствием здесь к существованию устойчивых векторных солитонов является рассогласованность групповых скоростей для скалярных (парциальных) солитонов огибающих, что вызвано разницей постоянных распространения для линейно поляризованных мод. Фундаментальную роль в описании динамики векторных солитонов играет модель Манакова [4], которая представляет собой двухкомпонентное обобщение нелинейной модели Шрёдингера (НШ-модель) [5].

Недавно в рамках фокусирующей модели Манакова найден новый тип векторных солитонов – «невыврожденных» [6]. Невыврожденность характеризуется нетождественностью волновых чисел в многокомпонентном солитонном решении, т.е. применимо только к многопелевым солитонам. В списке предложенных есть «multispeed vector» солитоны (mss), которые в каждой компоненте содержат солитоны с абсолютно произвольными характеристиками (включая скорость). Существование таких солитонов в истинно векторных моделях является нетривиальным результатом и численно предсказывалось ранее. В данной же работе, мы численно и аналитически получаем подтверждение данного факта и даем разъяснение в рамках системы ангармонически связанных нелинейных цепочек, задаваемой гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\dot{u}_n^2 + \dot{v}_n^2 + W(u_n) + W(v_n) + \gamma u_n^2 v_n^2], \quad (1)$$

где $W(u_n) = \alpha(u_n - u_{n+1})^2 + \beta u_n^4/2$ и $u_n(t)$, $v_n(t)$ безразмерное смещение единичных масс относительно положения равновесия. Численный анализ этой системы цепочек показывает, что парциальные солитоны распространяются с постоянными и различными скоростями при параметрическом выборе $\gamma = 3\beta$. Примечательно, что при достижении одной пространственной области (где член перекрестного взаимодействия существенен) захват и каналирование одной солитонной компоненты другим не реализуется, а также отсутствуют эффекты более низшего порядка. Т.е. не происходит рождения векторного солитона и парциальные возмущения эволюционируют как скалярные солитоны. Данное поведение поддается аналитическому описанию.

Для описания этого явления с помощью преобразования Гарднера–Морикавы получены уравнения огибающих парциальных солитонов. Условие же $\gamma = 3\beta$ оказывается условием их интегрируемости. Учитывая это и вводя обозначение $\sigma = \gamma/2$, можно получить [7]:

$$iU_\tau + U_{\xi\xi} + 2\sigma(|U|^2 + 2|V|^2)U + 2\sigma U^* V^2 = 0, \quad (1a)$$

$$iV_\tau + V_{\xi\xi} + 2\sigma(|V|^2 + 2|U|^2)V + 2\sigma V^* U^2 = 0. \quad (1b)$$

Поиск аналитических решений системы (2) являлось целью многих исследований; оно описывает одномодовое волокно со слабым двулуче-

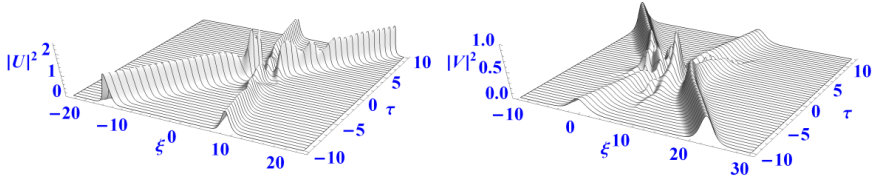


Рис. 1: [(a)-(b)] Двухсолитонное mss решение модели (2). Каждый парциальный солитон обладает уникальной скоростью и траекторией.

преломлением при наличии когерентных и некогерентных взаимодействий [3]. Для получения точных решений можно отметить, что линейное преобразование

$$U = (\Psi^{(1)} + \Psi^{(2)})/2, \quad V = (\Psi^{(1)} - \Psi^{(2)})/2, \quad (2)$$

приводит к системе несвязанных НШ-моделей:

$$i\Psi_\tau^{(\nu)} + \Psi_{\xi\xi}^{(\nu)} + 2\sigma|\Psi^{(\nu)}|^2\Psi^{(\nu)} = 0, \quad \nu = 1, 2. \quad (3)$$

Преобразование (3) обуславливает интерференцию солитонов системы (4). Взяв в рассмотрение классическое светлое двухсолитонное решение НШ-модели (при определенных условиях на параметры), можно получить, что в $(U; V)$ решении *первая компонента первого векторного солитона и вторая компоненты второго солитона подвергаются конструктивной интерференции, а остальные — деструктивной*. Для наглядности двух mss изображено на Рис. 1. Стоит также добавить, что такая интерференция приводит к появлению широкого класса неизвестных ранее решений для уравнений (2) и как следствие, для модели (1).

Таким образом, в моделях (1) и (2) структура mss ясна и понятна — она представляет собой интерференцию вырожденных солитонных решений уравнений (4). Однако такой механизм интерференции справедлив и для других многополевых систем. Для определенности, рассмотрим классические n -связанные НШ-модели (векторная n -компонентная модель Манакова):

$$i\Phi_\tau + \Phi_{\xi\xi} + 2\sigma\|\Phi\|_{\mathbf{Q}}^2\Phi = 0, \quad \Phi = \{\Phi^{(\nu)}\}^\top \quad (4)$$

где $\|\Phi\|_{\mathbf{Q}}^2 = \Phi^\dagger \mathbf{Q} \Phi$ псевдо-унитарная норма $\mathbf{Q} = \text{diag}\{\mathbf{I}_p, -\mathbf{I}_q\}$, $p + q = n$, $\sigma > 0$ и $\nu = \overline{1, n}$. Конечно, линейное преобразование, подобное (3), теперь не разбивает n -компонентную модель (5) на n независимых уравнений. В данном случае оно представляет собой отображение множества решений на себя, т.е. линейная интерференция любых состояний

также будет решением [7, 8]. Это возможно благодаря тому, что модель обладает $U(p+q)$ симметрией. Здесь также линейные преобразования порождают ранее неизвестную область точных решений, включая mss. Например, в случае дефокусирующей n -компонентной модели Манакова это позволяет строить темные солитоны на конденсате, с нетривиальной несущей фоновой волной [8].

Литература

1. *Ниязов В.И.* Многополевые солитоны. — Москва: ФизМатЛит, 2006.
2. *Агаларов А.М., Магомедмирзаев Р.М.* Нетривиальный класс смешанных $U(\sigma+\mu)$ -векторных солитонов // Письма в ЖЭТФ, **76**:7 (2002), 488-492
3. *Kivshar Y.S., Agrawal G.* Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. — San Diego: Academic press, 2003.
4. *Манаков С.В.* К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн // ЖЭТФ, **65**:2 (1973), 505-516
5. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде // ЖЭТФ, **61**:1 (1971), 118-134
6. *Stalin S., Ramakrishnan R., Senthilvelan M., Lakshmanan M.* Nondegenerate solitons in Manakov system // Phys. Rev. Lett., **122**:4 (2019), 043901
7. *Gadzhimuradov T.A.* Linear interference of nonlinear waves – multispeed vector solitons // Chaos, **33**:2 (2023), 023101
8. *Gadzhimuradov T.A.* Vector dark solitons with non-trivial periodic background – Multispeed vector solitons // Eur. Phys. J. Plus, **138** (2023), 279

О ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОЛУДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ВЫСШИХ СИММЕТРИЙ

Р.Н. Гарифуллин
grustem@gmail.com

УДК 517.518

В докладе обсуждается связь высшей симметрии полудискретного уравнения полученного в работе с известными интегрируемыми уравнениями эволюционного типа пятого порядка. Предъявлена явная замена, которая ее сводит к конкретному уравнению. При этом вид полудискретного уравнения в некотором смысле становится проще.

Ключевые слова: полудискретные уравнения, высшие симметрии, замены.

On the transformation of semi-discrete equations and their generalized symmetries

The talk discusses the relationship of the generalized symmetry of the semi-discrete equation obtained in [1] with the known integrable evolutionary type equations of the fifth order. An explicit transformation is presented, which reduces it to a specific equation. At the same time, the form of a semi-discrete equation becomes simpler in a sense.

Keywords: semi-discrete equations, higher symmetries, substitutions.

В работе [1] было найдено полудискретное гиперболическое уравнение

$$u_{n+1,x} - u_{n,x} = \lambda_1(e^{u_n} + e^{u_{n+1}}) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}e^{-u_n - u_{n+1}}. \quad (1)$$

Здесь неизвестная функция $u_n(x)$ зависит от одной целочисленной дискретной переменной n и одной непрерывной x . Было показано, что у этого уравнения высшая симметрия в непрерывном направлении является эволюционным уравнением пятого порядка

$$\begin{aligned} u_{n,t} = & u_{n,5} + 5(u_{n,2} - u_{n,1}^2 - \lambda_1^2 e^{2u_n} - \lambda_2^2 e^{-4u_n}) u_{n,3} - 5u_{n,1} u_{n,2}^2 \\ & + 15(-\lambda_1^2 e^{2u_n} + 4\lambda_2^2 e^{-4u_n}) u_{n,1} u_{n,2} \\ & + u_{n,1}^5 - 90\lambda_2^2 e^{-4u_n} u_{n,1}^3 - 5(\lambda_1^2 e^{2u_n} + \lambda_2^2 e^{-4u_n})^2 u_{n,1}, \end{aligned}$$

Гарифуллин Рустем Наилевича, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, ИМБИ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Rustem Garifullin (Ufa Institute of Mathematics, Ufa, Russia)

которое является уравнением [(3.8), 2]. В дискретном направлении зависит от пяти разных сдвигов:

$$\partial_\tau u_n = \left((v_n^2 - 1)^2 - 4v_{n-1}^2 T^{-1} \right) H_n$$

$$H_n = \frac{(v_{n+1}^2 + 1)(v_{n-1}^2 + 1)}{(v_n^2(v_{n-1} + 1)^2 + (v_{n-1} - 1)^2)(v_{n+1}(v_n + 1)^2 + (v_n - 1)^2)},$$

$$v_n = \sqrt{1 + e^{2(u_n - u_{n+1})}} + e^{u_n - u_{n+1}}.$$

Указанный пример является первым примером полудискретного уравнения типа Цицейки.

Для переменной v_n было выписано полудискретное уравнение

$$p(v_0, v_{0,x}) \frac{2v}{1 - v^2} = p(v_1, v_{1,x})$$

и его симметрия в дискретном направлении. Здесь функция $p(v_n, v_{n,x})$ решение кубического уравнения

$$\lambda_2 v_n p^3 + v_{n,x} p^2 + \lambda_1 \frac{v_n^2 - 1}{4v_n} = 0.$$

Однако, не было показано какое уравнение является высшей симметрией в непрерывном направлении.

Верен следующий результат, если сделать дополнительную точечную замену:

$$z(w_n) = v_n, \quad z(x) = \ln \left(\frac{2z_1(x)}{z_1(x)^2 - 1} \right) \quad z'_1(x) = \frac{3}{16^{1/3}} \lambda_1^{2/3} \lambda_2^{1/3} z_1^{1/3} (z_1^4 - 1)^{1/3},$$

то на функцию w_n получаем полудискретное уравнение

$$\frac{(f(w_{n+1,x}) + w_{n+1,x})(z_1(w_{n+1})^4 - 1)^{1/3}}{z_1(w_{n+1})^{2/3}} =$$

$$= -2 \frac{(f(w_{n,x}) + w_{n,x})(z_1(w_n)^2 + 1)^{2/3} z_1(w_n)^{1/3}}{(z_1(w_n)^2 - 1)^{2/3}},$$

у которого высшая симметрия в x направлении это уравнение [(3.14), 2]. Функция $f(x)$ удовлетворяет кубическому уравнению $(f + x)^2(2f - x) + 1 = 0$.

Литература

1. R. N. Garifullin and I. T. Habibullin Generalized symmetries and integrability conditions for hyperbolic type semi-discrete equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **54**:20 (2021), 205201, 19 pp.
2. А. Г. Мешков, В. В. Соколов Интегрируемые эволюционные уравнения с постоянной сепарантой // Уфимск. матем. журн., **4**:3 (2012), 104–154.

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ, ОПИСЫВАЕМОМ УРАВНЕНИЕМ ГУПКИНА-ПИПКИНА

Б.Е. Кангужин, Б.Н. Даулетбай
kanbalta@mail.ru, bekarysdaul@mail.ru

Ключевые слова: граничное управление, уравнение теплопроводности, скорость распространения, финальный режим.

В докладе исследуется уравнение Гуртина-Пипкина на отрезке:

$$\rho \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} = \int_0^t G(s) \frac{\partial^2 \vartheta(x, t-s)}{\partial x^2} ds, 0 < t < T, 0 < x < b$$

Изучается задача перехода из заданного начального состояния в требуемое финальное состояние за фиксированное время. При этом в качестве управлений выступают граничные режимы. Поскольку уравнение Гуртина-Пипкина обладает конечной скоростью распространения возмущений, то реализовать требуемый финальный режим можно только при определенных соотношениях между длиной стержня и промежуточном времени.

Литература

1. *M.E. Gurtin, A.C. Pipkin* A general theory of heat conduction with finite wave speeds, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 31, (1968), 113–126.
2. *A. Nerrain, D. Joseph* Linearized dynamics for step jumps of velocity and displacement of shearing flows of a simple fluid, *Rheologica Acta* 21, (1982), 228–250.
3. *M. Renardy* Some remarks on the propagation and non-propagation of discontinuities in linear viscoelastic liquids, *Rheologica Acta* 21, (1982), 250–254.

Кангужин Б.Е., Казахский национальный университет имени аль-Фараби (Алматы, Казахстан)

Даулетбай Б.Н., Казахский национальный университет имени аль-Фараби (Алматы, Казахстан)

ПОСТРОЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ S -ОБРАЗНОЙ БИФУРКАЦИОННОЙ КРИВОЙ РЕШЕНИЙ С КАТАСТРОФой ДУАЛЬНОЙ СБОРКИ

Я.Ш. Ильясов,
ilyasov02@gmail.com

УДК 517.518

Обсуждается применение метода нелинейно-обобщенных отношений Рэлея для построения S -образной бифуркационной кривой решений для уравнений вида $-\Delta u = f_{\lambda,\mu}(u)$, где $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, нелинейность $f_{\lambda,\mu}(s)$ нелипшицева, $f_{\lambda,\mu}(0) = 0$.

Ключевые слова: бифуркация, дифференциальные уравнения, отношение Рэлея.

A construction by variational methods of an S -shaped type bifurcation curve with dual cusp catastrophe

It is discussed the application of the method of nonlinear generalized Rayleigh quotients for the finding of an S -shaped bifurcation solution curve for equations of type $-\Delta u = f_{\lambda,\mu}(u)$, is discussed, where $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, the nonlinearity $f_{\lambda,\mu}(s)$ is non-Lipschitz, $f_{\lambda,\mu}(0) = 0$.

Keywords: bifurcation, differential equations, Rayleigh quotient.

Рассматривается задача о построении S -образной бифуркационной кривой решений для уравнений вида

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{\gamma-2}u + \mu|u|^{\alpha-2}u - \lambda|u|^{q-2}u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $1 < q < \alpha < 2 < \gamma < 2^*$ and $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

S -образные ветви решений возникают во многих задачах математической физики, например при решении уравнений Лиувилля-Брату-Гельфанда и Колмогорова-Петровского-Пискунова, как решения задачи о кривизне Минковского, в реакционно-диффузных моделях описывающих различные пространственно-временные явления в биологии, физике, химии и т.д.

Основная трудность в построении такой кривой заключается в том, что для её построения необходимо найти две бифуркационные точки, с последующим построением трех ветвей решений на интервалах между этими точками. В докладе обсуждается, как эти трудности преодолеваются с помощью метода нелинейно-обобщенных отношений Рэлея

Ильясов Явдат Шавкатович, д.ф.-м.н., ИМ ВЦ УФИЦ РАН, (Уфа, Россия);
Il'yasov Y.S. (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS,
Ufa, Russia)

[1]. В основном результате приводится построение S -образной бифуркационной кривой решений обладающей, так называемой катастрофой *дуальной сборки* (см. [2,3]).

Литература

1. *Y I'yasov* Rayleigh quotients of the level set manifolds related to the nonlinear PDE // Minimax Theory and its Applications **7** (No. 2), 2022, 277–302
2. *Carvalho, M.L., I'yasov, Y. and Santos, C.A.* Separating solutions of nonlinear problems using nonlinear generalized Rayleigh quotients // Topological Methods in Nonlinear Analysis, 2021, pp.453-480.
3. *Carvalho, M.L., I'yasov, Y. and Santos, C.A.* Existence of S-shaped type bifurcation curve with dual cusp catastrophe via variational methods// Journal of Differential Equations, **334**, 2023, pp.256-279.

ИЗУЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН УРАВНЕНИЙ КЛЕЙНА-ГОРДОНА В МОДЕЛИ С ПРИМЕСЯМИ

Д.К. Кабанов, М.И. Фахретдинов, К.Ю. Самсонов

С.В. Дмитриев, Е.Г. Екомасов,

danya.kabanov.95@mail.ru, fmi106tf@gmail.com,

k.y.samsonov@gmail.com, dmitriev.sergey.v@gmail.com,

ekomasoveg@gmail.com

УДК 530.182.1

Рассмотрены нелинейные уравнения Клейна-Гордона с точечными и протяженными пространственными неоднородностями потенциала (примесями), часто возникающие в физических приложениях. Получены численные решения таких уравнений в виде кинков и примесных волн. Рассмотрена и изучена зависимость динамики кинков и примесных волн от геометрических параметров примесей.

Ключевые слова: Уравнение Клейна-Гордона, кинк, примесь.

Nonlinear wave study of the Klein-Gordon equations in a model with impurities

Nonlinear Klein-Gordon equations with point and extended spatial inhomogeneities of the potential (impurities), which often arise in physical applications, are considered. Numerical solutions of such equations in the form of kinks and impurity waves are obtained. The dependence of the dynamics of kinks and impurity waves on the geometrical parameters of impurities is considered and studied.

Keywords: Klein-Gordon equation, kink, impurity.

Уравнения синус-Гордона (УСГ) и φ^4 одни из самых популярных модельных уравнений, которые имеют солитонные решения и описывают многочисленные нелинейные волновые процессы в теоретической и математической физике [1,2].

Для использования уравнений Клейна-Гордона в реальных физических приложениях, необходимо их модифицировать путём добавления в уравнения дополнительных слагаемых, которые могут описывать

Кабанов Даниил Константинович, студ. 4 к. ФТИ, УУНиТ (Уфа, Россия); Daniil Kabanov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Фахретдинов Марат Ирекович, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Marat Fakhretdinov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Самсонов Кирилл Юрьевич, асп., Тюменский государственный университет (Тюмень, Россия); Kirill Samsonov (Tyumen State University, Tyumen, Russia)

Дмитриев Сергей Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, ИФМК УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Sergey Dmitriev (Institute of Molecule and Crystal Physics, Ufa, Russia)

Екомасов Евгений Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор, УУНиТ (Уфа, Россия); Evgenii Ekomasov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

внешнюю силу, диссипацию, неоднородность параметров среды и т.п. Один из наиболее широко исследуемых случаев связан с введением неоднородности параметра, стоящего перед слагаемым, содержащим потенциал в УКГ. Такое модифицированное УКГ уже не имеет точных аналитических решений и его необходимо решать численными методами. Однако существует ряд широко применяемых аналитических методов, позволяющих получить, хоть и приближённо, аналитическое решение задачи.

В нашей работе для уравнения синус-Гордона и φ^4 в модели с одной или несколькими точечными и протяжёнными примесями была исследована возможная динамика кинков, получены различные типы локализованных на примесях волн. Для аналитических расчетов использовался метод коллективных переменных. Для численных расчетов были созданы программы с использованием явной схемы. В связи с особыми требованиями к точности проводимых расчетов, реализован и особый контроль погрешности результата. Найдено, что протяженная примесь качественно ведет себя как хорошо изученные точечные примеси, описываемые с помощью, дельта-функции [3].

Литература

1. *Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P., Williams F.* The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. — Springer Cham, 2014.
2. *Kevrekidis P., Cuevas-Maraver J.* A Dynamical Perspective on the φ^4 Model: Past, Present and Future. — Springer:Berlin, 2019.
3. *Fakhretdinov M.I., Samsonov K.Y., Dmitriev S.V., Ekomasov E.G.* Kink Dynamics in the φ^4 Model with Extended Impurity // Rus. J. Nonlin. Dyn., <https://doi.org/10.20537/nd230603> (2023).

НЕЛОКАЛЬНАЯ ДИНАМИКА КОЛЬЦА ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ СВЯЗИ МЕЖДУ ОСЦИЛЛЯТОРАМИ

А.А. Кащенко
a.kashchenko@uniyar.ac.ru

УДК 517.929

Изучалась нелокальная динамика двух моделей колец осцилляторов с запаздывающей обратной связью. Для каждой исходной бесконечномерной модели изучение динамики было сведено к анализу динамики построенных конечномерных отображений. Показано, что при положительном параметре связи наблюдается синхронизация.

Ключевые слова: запаздывание, полносвязная система, синхронизация

Nonlocal dynamics of the ring of coupled oscillators with different types of coupling

We studied the nonlocal dynamics of two models of the rings of coupled oscillators with delayed feedback. For each infinite-dimensional model we reduced the studying of the dynamics to studying dynamics of the constructed finite-dimensional mapping. We showed that for the positive values of the coupling parameter synchronization is observed.

Keywords: delay, fully connected system, synchronization

Рассмотрим модель простейшего осциллятора

$$\dot{u} + u = \lambda F(u(t - T)). \quad (1)$$

Здесь u — действительная скалярная функция, λ — положительный параметр, F — финитная функция (т. е. $F(x) \equiv 0$ вне некоторого отрезка $x \in [-p, p]$), $T > 0$ — величина запаздывания. Эта модель описывает динамику генератора с нелинейной запаздывающей обратной связью с RC-фильтром нижних частот первого порядка, а также описывает различные биологические процессы.

Теперь построим кольцо из $N > 2$ осцилляторов вида (1) с двумя различными видами связи:

$$\dot{u}_j + u_j = \lambda F(u_j(t - T)) + \gamma(u_{j+1} - u_j), \quad (2)$$

и

$$\dot{u}_j + u_j = \lambda F(u_j(t - T)) + \gamma\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1, i \neq j}^N u_i - u_j\right), \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке совета по грантам Президента РФ (проект № МК-2510.2022.1.1).

Кащенко Александра Андреевна, к.ф.-м.н., доцент, ЯрГУ (Ярославль, Россия);
Alexandra Kashchenko (P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

($j = 1, \dots, N$) с краевыми условиями $u_0 \equiv u_N$, $u_{N+1} \equiv u_1$.

Для каждого вида связи изучалось поведение решений модели на полуоси $t \in [0, +\infty)$ при условии $\lambda \gg 1$.

Найдена асимптотика решений моделей (2) и (3) по большому параметру λ на полуоси $t \in [0, +\infty)$ с начальными условиями из широкого подмножества фазового пространства $C_{[-T, 0]}(\mathbb{R}^N)$.

С помощью специального метода большого параметра изучение динамики исходных бесконечномерных систем было сведено к анализу динамики построенных конечномерных отображений.

В результате было показано, что при $\gamma > 0$ у каждой модели с некоторого момента времени наблюдается синхронизация (т. е. совпадение главной части асимптотики) всех осцилляторов. Если же $\gamma < 0$, то у модели (2) при четной размерности системы N наблюдается двухкластерная синхронизация, а у модели (3) при любой размерности системы динамику исходной бесконечномерной системы описывает специальное построенное $(N - 1)$ -мерное отображение.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С L_1 -ДАННЫМИ В ПРОСТРАНСТВАХ МУЗИЛАКА-ОРЛИЧА

Л.М. Кожевникова
kosul@mail.ru

УДК 517.956.25

В работе рассматривается квазилинейное эллиптическое уравнение второго порядка с суммируемой правой частью. Ограничения на структуру уравнения формулируются в терминах обобщенной N -функции. В нерефлексивных пространствах Музилака-Орлича-Соболева в произвольной неограниченной строго липшицевой области доказано существование энтропийного решения задачи Дирихле.

Ключевые слова: квазилинейное эллиптическое уравнение, задача Дирихле, пространство Музилака-Орлича-Соболева, энтропийное решение, неограниченная область

Existence of solutions to a nonlinear elliptic problem with L_1 -data in Muzilak-Orlicz spaces

The paper considers a quasilinear elliptic equation of the second order with summable right hand side. Restrictions on the structure of the equation are formulated in terms of a generalized N -function. In non-reflexive Muzilak-Orlicz-Sobolev spaces in an arbitrary unbounded strictly Lipschitz domain the existence of an entropy solution of the Dirichlet problem is proved.

Keywords: quasilinear elliptic equation, Dirichlet problem, Musilak-Orlicz-Sobolev space, entropy solution, unbounded domain

В неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$, для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка рассматривается задача Дирихле

$$-\operatorname{div} a(x, u, \nabla u) + \frac{M(x, u)}{u} + b(x, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Здесь функции $a(x, s_0, s) = (a_1(x, s_0, s), \dots, a_n(x, s_0, s))$, $b(x, s_0, s)$ имеют рост, определяемый функцией Музилака-Орлича $M(x, z)$. При

Кожевникова Лариса Михайловна, д.ф.-м.н., профессор, СФ УУНиТ (Стерлитамак, Россия); Larisa Kozhevnikova (Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia)

этом на функцию M и сопряженную к ней функцию $\overline{M}$ не требуется дополнительное ограничение по переменной z (обычно это Δ_2 -условие). Предполагается, что по переменной $x \in \Omega$ функция M подчиняется условию лог-гельдеровской непрерывности, что приводит к хорошим аппроксимационным свойствам нерефлексивного пространства Музилака-Орлича.

В ограниченных областях вопросы существования энтропийных и ренормализованных решений нелинейных эллиптических уравнений рассматривались в работах [1]-[3] и др. В настоящей работе впервые без ограничений на меру строго липшицевой области Ω доказано существование энтропийного решения задачи (1), (2) в нерефлексивных пространствах Музилака-Орлича-Соболева.

Предполагается, что функции

$$a(x, s_0, s) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad b(x, s_0, s) : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

входящие в уравнение (1), измеримы по $x \in \Omega$ для $s = (s_0, s) = (s_0, s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, непрерывны по $s \in \mathbb{R}^{n+1}$ для почти всех $x \in \Omega$ и выполнено

Условие (M). Существуют неотрицательные функции $\psi \in E_{\overline{M}}(\Omega)$, $\phi \in L_1(\Omega)$ и положительные константы $\widehat{a}, \overline{a}, \widetilde{a}, \widehat{d}$ такие, что для п.в. $x \in \Omega$ и для любых $s_0 \in \mathbb{R}$, $s, t \in \mathbb{R}^n$, $s \neq t$ справедливы неравенства:

$$a(x, s_0, s) \cdot s \geq \overline{a}M(x, \widetilde{d}|s|) - \phi(x);$$

$$|a(x, s_0, s)| \leq \psi(x) + \widehat{a}\overline{M}^{-1}(x, M(x, \widehat{d}|s|)) + \widehat{a}\overline{M}^{-1}(x, P(x, s_0));$$

$$(a(x, s_0, s) - a(x, s_0, t)) \cdot (s - t) > 0.$$

Функция Музилака-Орлича $P(x, z)$ такая, что $P \prec\prec M$ в окрестности 0 и ∞ , $s \cdot t = \sum_{i=1}^n s_i t_i$, $|s| = (\sum_{i=1}^n s_i^2)^{1/2}$.

Кроме того, пусть существует неотрицательная функция $\Phi_0 \in L_1(\Omega)$, непрерывная неубывающая функция $\widehat{b} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такие, что при п.в. $x \in \Omega$, для всех $s_0 \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства:

$$|b(x, s_0, s)| \leq \widehat{b}(|s_0|) \left(M(x, \widetilde{d}|s|) + \Phi_0(x) \right), \quad \widetilde{d} \leq \overline{d};$$

$$b(x, s_0, s)s_0 \geq 0.$$

Определим срезающую функцию $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$. Через $\dot{\mathcal{J}}_M^1(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $T_k(u) \in \dot{W}^1 L_M(\Omega)$ при любом $k > 0$.

Введем обозначение $\langle u \rangle = \int_{\Omega} u dx$.

Определение. Энтропийным решением задачи (1), (2) называется функция $u \in \dot{\mathcal{J}}_M^1(\Omega)$ такая, что при всех $k > 0$

1) $b(x, u, \nabla u) \in L_1(\Omega)$;

2) $\frac{M(x, u)}{u} T_k(u) \in L_1(\Omega)$;

3) $a(x, u, \nabla u) \chi_{\{\Omega: |u| < k\}} \in (L_{\bar{M}}(\Omega))^n$;
и для любой функции $\xi \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство:

$$\left\langle \left(b(x, u, \nabla u) + \frac{M(x, u)}{u} - f \right) T_k(u - \xi) \right\rangle + \langle a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \xi) \rangle \leq 0.$$

Основным результатом работы является

Теорема. Пусть область Ω строго липшицева и выполнены условия (M), тогда существует ренормализованное решение задачи (1), (2).

В работе [4] без ограничений на меру строго липшицевой области Ω при тех же требованиях на функцию M автором установлена эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений задачи (1), (2) ($a(x, s_0, s) = a(x, s)$, $b(x, s_0, s) = b(x, s_0)$) и доказана их единственность.

Литература

1. Chlebicka I., Gwiazda P., Świerczewska-Gwiazda A., Wróblewska-Kamińska A. Partial Differential Equations in Anisotropic Musielak-Orlicz Spaces. — Switzerland: Springer Monographs in Mathematics, Springer Nature Switzerland, 2021.
2. Ahmedatt T., Elemine Vall M.S.B., Benkirane A., Touzani A. Existence of renormalized solutions for a nonlinear elliptic equation in Musielak framework and L^1 data // Existence of renormalized solutions for a nonlinear elliptic equation in Musielak framework and L^1 data, **44:2** (2017), 190-213.
3. Elemine Vall M.S.B., Ahmed A., Touzani A., Benkirane A. Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1 -data // Bol. Soc. Paran. Mat., **36:1** (2018), 125-150.
4. Kozhevnikova L.M. On solutions of nonlinear elliptic equations with L_1 -data in unbounded domains // Lobachevskii Journal of Mathematics, **44:5** (2023), 1879-1901.

CAUCHY PROBLEM FOR A SEMILINEAR NONSTRICTLY HYPERBOLIC EQUATION ON A HALF-PLANE IN THE CASE OF A SINGLE CHARACTERISTIC

V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko

korzyuk@bsu.by, janycz@yahoo.com

УДК 517.956.35

In the upper half-plane, we consider a semilinear nonstrictly hyperbolic partial differential equation of n^{th} -order. The equation has a single characteristic with a multiplicity equal to n . The operator in the equation is a sum of linear and nonlinear parts. The linear part of this operator is a composition of a first-order differential operator with constant coefficients. The nonlinear part depends on the independent variables and the unknown function. The equation is equipped with the Cauchy conditions. We find the solution of this problem in the upper half-plane in an implicit analytical form in the case of two independent variables under some smoothness conditions on the initial data, the right-hand side, and the nonlinearity, and sign and growth conditions on the nonlinearity.

Keywords: Cauchy problem, classical solution, global solvability, non-strictly hyperbolic equation, semilinear equation, fixed point principle.

In the domain $Q = (0, \infty) \times \mathbb{R}$, consider the m^{th} -order nonlinear differential equation

$$(\partial_t - a\partial_x + b)^m u(t, x) - f(t, x, u(t, x)) = F(t, x), \quad (1)$$

where a and b are given real numbers, satisfying the condition $a \neq 0$ (it means that the line $t = 0$ is not the characteristic of Eq. (1)), F is a function given on the set $\overline{Q}$, and f is a function given on the set $\overline{Q} \times \mathbb{R}$.

Equation (1) is equipped with the initial condition

$$\partial_t^j u(0, x) = \varphi^{(j)}(x), \quad j = 0, \dots, m-1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

where $\varphi^{(j)}$ are functions given on the real axis.

We can formulate the existence and uniqueness theorem for the problem (1), (2) with Lipschitz nonlinearities as follows.

The work was published with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the program of the Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics under the agreement No. 075-15-2022-284.

Viktor I. Korzyuk, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Belarusian State University, (Minsk, Belarus); Senior Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Jan V. Rudzko, Junior Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Theorem 1. *Let the conditions $f \in C^{0,m,m}(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C^{0,m}(\overline{Q})$, $\varphi^{(j)} \in C^{2m-j-1}(\mathbb{R})$ ($j = 0, \dots, m-1$) be satisfied, and let the function f satisfy the Lipschitz condition with respect to the third variable, i.e., $|f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2)| \leq k(t, x)|z_1 - z_2|$, where $k \in C(\overline{Q})$. Then the Cauchy problem (1), (2) has a unique solution u in the class $C^m(\overline{Q})$.*

The **proof** of the Theorem 1 is carried out following the scheme outlined in [1]. We reduce the problem (1), (2) to an equivalent integral equation with a continuous compact operator using the results of the works [2, 3]. Then, using the Leray–Schauder fixed point theorem, we prove the uniqueness of the solution of the integral equation.

If the nonlinearity of Eq. (1) is smooth enough, we can establish the following uniqueness theorem.

Theorem 2. *Let the conditions $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $\frac{\partial f}{\partial u}(\bullet_1, \bullet_2, u = \bullet_3) \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $F \in C(\overline{Q})$, $\varphi^{(j)} \in C^{2m-j-1}(\mathbb{R})$ ($j = 0, \dots, m-1$) be satisfied. Then the Cauchy problem (1), (2) has at most one classical solution defined on the set $\overline{Q}$.*

The **proof** of the Theorem 2 is carried out by contradiction using the mean value theorem and the Grönwall inequality in a similar way as in [4].

If the order of Eq. (1) is equal to two, i.e., $m = 2$, then we can formulate existence and uniqueness theorems containing sign conditions for the problem (1), (2), using the results of the works [5, 6]. For example, we can state one of them as follows.

Theorem 3. *Assume $m = 2$ and $f(t, x, u) = -\alpha(x + at)g(u)$. Then the Cauchy problem (1), (2) has a unique solution in the class $C^2(\overline{Q})$, if the smoothness conditions $g \in C^2(\mathbb{R})$, $\alpha \in C^2(\mathbb{R})$, $F \in C^{0,2}(\overline{Q})$, $\varphi^{(0)} \in C^3(\mathbb{R})$, $\varphi^{(1)} \in C^2(\mathbb{R})$, and the sign conditions*

$$\begin{aligned} \forall(t, x) \in \overline{Q}: b > 0, \alpha(x + at) > 0, \\ \forall(t, x) \in \overline{Q}: \frac{b^2 z^2}{2} + \alpha(x + at) \int_0^z g(\eta) d\eta > 0 \text{ for } z \neq 0, \\ \forall(t, x) \in \overline{Q}: \frac{b^2 z^2}{2} + \alpha(x + at) \int_0^z g(\eta) d\eta \rightarrow \infty \text{ as } |z| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

hold.

The talk is based on a recent preprint [7].

References

1. Korzyuk V.I., Rudzko J.V. Classical Solution of the Initial-Value Problem for a One-Simensional Quasilinear Wave Equation // Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus, **61**:1 (2023), 14–19

2. *Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S., Kozlov A.I.* Cauchy Problem for a Nonstrictly Hyperbolic Equation on a Half-Plane with Constant Coefficients // *Differential Equations*, **51**:6 (2015), 726–737
3. *Brunner H.* Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications. — Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
4. *Korzyuk V.I., Rudzko J.V.* Classical and Mild Solution of the First Mixed Problem for the Telegraph Equation with a Nonlinear Potential // *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **43** (2023), 48–63.
5. *Erugin N.P.* A Book for Reading in the General Course of Differential Equations. — Minsk: Nauka i Tekhnika, 1979. (in Russian)
6. *Tiryaki A., Zafer A.* Global Existence and Boundedness for a Class of Second-Order Nonlinear Differential Equations // *Appl. Math. Lett.*, **26**:9 (2013), 939–944.
7. *Korzyuk V.I., Rudzko J.V.* Cauchy Problem for a Semilinear Nonstrictly Hyperbolic Equation on a Half-Plane in the Case of a Single Characteristic. — Berlin, 2023. — (Preprint / ResearchGate GmbH).

ПОСТРОЕНИЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ЦЕПОЧЕК С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

М.Н. Кузнецова, m.nik.kuznetsova@gmail.com

УДК 517.957

Одним из эффективных подходов исследования и классификации уравнений с тремя независимыми переменными является метод, основанный на использовании интегрируемых в смысле Дарбу редукций. В данной работе на основе интегрируемых в смысле Дарбу редукций строятся локализованные частные решения цепочек с тремя независимыми переменными.

Ключевые слова: трехмерные цепочки, характеристические алгебры, интегрируемость в смысле Дарбу, характеристические интегралы, интегрируемые редукции.

Construction of localized particular solutions of chains with three independent variables

One of the effective approaches to the study and classification of equations with three independent variables is a method based on the use of Darboux-integrable reductions. In this paper, localized partial solutions of chains with three independent variables are constructed on the basis of reductions integrable in the sense of Darboux.

Keywords: three-dimensional chains, characteristic algebras, integrability in the sense of Darboux, characteristic integrals, integrable reductions.

Данная работа посвящена построению локализованных частных решений для цепочек из класса

$$u_{n+1,x}^j = F(u_{n,x}^j, u_{n,x}^{j+1}, u_n^j, u_{n+1}^j, u_{n+1}^{j-1}) \quad (1)$$

при помощи редукций, интегрируемых в смысле Дарбу. Здесь искомая функция $u_n^j(x)$ зависит от одной непрерывной переменной x и двух дискретных переменных j, n .

В работе [1] было предложено в качестве признака интегрируемости трехмерной цепочки с одной дискретной и двумя непрерывными переменными рассматривать существование редукций в виде систем уравнений с двумя независимыми переменными, интегрируемых в смысле Дарбу. Ключевым моментом здесь является свойство конечномерности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-11-00006).

Кузнецова Мария Николаевна, к.ф.-м.н., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия)

характеристических алгебр по обоим направлениям. Применение характеристической алгебры для исследования редукций позволило эффективно решать задачу классификации цепочек с тремя независимыми переменными. Далее исследования были распространены на цепочки с одной непрерывной и двумя дискретными переменными.

В работе [2] был рассмотрен список интегрируемых трехмерных цепочек с одной непрерывной и двумя дискретными переменными, полученный в [3]. Было показано, что все модели из списка приводятся к виду (1) и удовлетворяют критерию интегрируемости, согласно которому трехмерная цепочка должна обладать сколько угодно большим количеством редукций, интегрируемых в смысле Дарбу.

В настоящей работе рассматриваются трехмерные редукции из списка работы [2]. Строятся редукции в виде одного уравнения и в виде системы двух дифференциально-разностных уравнений. Находятся n -интегралы. При помощи найденных n -интегралов строится общее решение соответствующей редукции, и затем локализованное частное решение трехмерной цепочки.

Литература

1. *Habibullin I.* Characteristic Lie rings, nitely-generated modules and integrability conditions for $(2 + 1)$ -dimensional lattices // *Physica Scripta*, **87**:6 (2013)
2. *Habibullin I.T., Khakimova A.R.* Characteristic Lie Algebras of Integrable Differential-Difference Equations in 3D // *J. Phys. A: Math. Theor.*, **54**:29 (2021)
3. *Ferapontov E.V., Novikov V.S., Roustemoglou I.* On the classification of discrete Hirota-type equations in 3D // *Int. Math. Res. Not. IMRN.*, **2015**:13 (2015), 4933–4974
4. *Кузнецова М.Н., Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р.* On a class of 2D integrable lattice equations // *J. Math. Phys.*, **61**:7 (2020)

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИ СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ ЧАСТЬЮ

А.Е. Кулагин, А.В. Шаповалов
aek8@tpu.ru, shpv@mail.tsu.ru

УДК 517.955.8

Предлагается метод построения квазиклассически сосредоточенных асимптотических решений нелокального нелинейного уравнения Шредингера с неконсервативной частью. Формализм метода проиллюстрирован на примере модельного уравнения для атомного лазера.

Ключевые слова: квазиклассическое приближение, нелинейное уравнение Шредингера, открытая система, нелокальная нелинейность

Semiclassically concentrated solutions to the nonlocal nonlinear Schrodinger equation with a nonconservative term

The method of constructing the semiclassical concentrated asymptotic solutions to the nonlocal nonlinear Schrodinger equation with a nonconservative term is proposed. The formalism of the method is illustrated with the example of a model equation for an atom laser.

Keywords: semiclassical approximation, nonlinear Schrodinger equation, open system, nonlocal nonlinearity

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) является одним из важнейших модельных уравнений в физике бозе-эйнштейновского конденсата и нелинейной оптики. Для анализа открытых систем к НУШ добавляют неконсервативную часть. Такое обобщение может быть феноменологическим (см., например [1] и ссылки там) или возникать из кинетической модели внешней среды [2]. Неконсервативная часть описывает диссипативные процессы в системе, а также процессы накачки. Хотя такие модели хорошо развиты, их использование ограничено математическими сложностями в поиске аналитических решений. Поэтому решение подобных задач обычно полагается на численные методы. Учет нелокального характера самодействия в системах еще больше усложняет рассматриваемую проблему.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01047, <https://rscf.ru/project/23-71-01047/>.

Кулагин Антон Евгеньевич, к.ф.-м.н., ТПУ (Томск, Россия), ИОА СО РАН (Томск, Россия); Anton Kulagin (Tomsk Polytechnic University; Institute of Atmospheric Optics SB RAS, Tomsk, Russia)

Шаповалов Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, ТГУ (Томск, Россия); Alexander Shapovalov (Tomsk State University, Tomsk, Russia)

В данной работе мы предлагаем метод построения асимптотических квазиклассических сосредоточенных решений НУШ с неконсервативной частью. Квазиклассическое приближение, основанное на идеях метода ВКБ-Маслова, является мощным инструментом исследований сред с квантовыми эффектами, в том числе нелинейных (см. [3] и ссылки там), поэтому его обобщение на случай неконсервативных систем представляет большой интерес с точки зрения моделирования открытых квантовых систем. Метод развит для n -мерного НУШ с неконсервативной частью общего вида:

$$\begin{aligned} & \left\{ -i\hbar\partial_t + H(\hat{z}, t)[\Psi] - i\hbar\Lambda\check{H}(\hat{z}, t)[\Psi] \right\} \Psi(\vec{x}, t) = 0, \\ & H(\hat{z}, t)[\Psi] = V(\hat{z}, t) + \kappa \int_{\mathbb{R}^n} d\vec{y} \Psi^*(\vec{y}, t) W(\hat{z}, \hat{w}, t) \Psi(\vec{y}, t), \\ & \check{H}(\hat{z}, t)[\Psi] = \check{V}(\hat{z}, t) + \kappa \int_{\mathbb{R}^n} d\vec{y} \Psi^*(\vec{y}, t) \check{W}(\hat{z}, \hat{w}, t) \Psi(\vec{y}, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{z} = (\hat{p}_x, \vec{x})$, $\hat{w} = (\hat{p}_y, \vec{y})$, $\hat{p}_x = -i\hbar\nabla_x$, а V , $\check{V}$, W и $\check{W}$ — псевдодифференциальные операторы.

Асимптотические решения построены в классе траекторно сосредоточенных функций [3], заданного анзацем:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\hbar^t(Z(t), S(t), \sigma(t)) &= \left\{ \Phi : \Phi(\vec{x}, t, \hbar) = \right. \\ &= \left. \sqrt{\frac{\sigma(t)}{\hbar^{n/2}}} \cdot \varphi\left(\frac{\Delta\vec{x}}{\sqrt{\hbar}}, t, \hbar\right) \cdot \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(S(t) + \langle \vec{P}(t), \Delta\vec{x} \rangle\right)\right] \right\}, \end{aligned}$$

где $\varphi(\vec{\xi}, t, \hbar)$ — функция, принадлежащая пространству Шварца по $\vec{\xi}$, и регулярно зависящая от t , $\hbar$, $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{X}(t)$, $Z(t) = (\vec{X}(t), \vec{P}(t))$ задает траекторию локализации в ассоциированном $2n$ -мерном пространстве. Функции $\sigma(t)$, $S(t)$, $Z(t)$ подлежат определению из "классических" уравнений.

В квазиклассическом приближении с любой заданной точностью задача Коши для уравнения (1) сводится к решению вспомогательной замкнутой системы ОДУ и решению вспомогательного ассоциированного линейного уравнения Шредингера, для которого известен точный оператор эволюции. На примере модельного уравнения для атомного лазера из [2] показано, что предложенный метод позволяет строить асимптотические решения в явном аналитическом виде. Материалы доклада основаны на статье [4].

Литература

1. Choi S., Morgan A., Burnett K. Phenomenological damping in trapped atomic Bose-Einstein condensates // Physical Review A, **57**:5 (1998), 4057-4060.

2. *Arecchi, Bragad J., Castellano L.* Dissipative dynamics of an open Bose-Einstein condensate // Optics Communications, **179**:1 (2000), 149-156.
3. *Kulagin A.E., Shapovalov A.V., Trifonov A.Yu.* Semiclassical spectral series localized on a curve for the Gross-Pitaevskii equation with a nonlocal interaction // Symmetry, **13** (2021), 1289.
4. *Kulagin A.E., Shapovalov A.V.* Semiclassical approach to the nonlocal nonlinear Schrödinger equation with a non-Hermitian term // arXiv:2308.08286 (2023).

ФАКТОРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ 2-ГО ПОРЯДКА

Л.В. Линчук

lidiya_linchuk@mail.ru

УДК 517.9

В работе используются методы группового анализа для построения факторсистем дифференциальных уравнений с частными производными 2-го порядка.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, групповой анализ, факторизация.

Factorization of partial differential equations.

We consider the application of group analysis to factorization of the 2nd order partial differential equations.

Keywords: differential equations, group analysis, factorization.

Одним из направлений группового анализа является инвариантный подход, в котором за основу берётся не группа с соответствующим оператором, а набор инвариантов, позволяющих факторизовать дифференциальное уравнение. Этот неклассический подход был применён для обыкновенных дифференциальных уравнений [1,2], а также для уравнений с частными производными 1-го порядка [3,4]. Цель этой работы – распространить указанную теорию на уравнения с частными производными 2-го порядка

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \quad (1)$$

Одной из факторизаций уравнения (1) может быть система вида

$$\begin{cases} t = t(x, y, u), \\ v = v(x, y, u), \quad v_u \neq 0, \\ G(t, v, v', v'') = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Построим обобщённый нелокальный оператор, определяющий факторизацию (2). Этот оператор имеет вид

$$X = \xi_1(x, y, u)\partial_x + \xi_2(x, y, u)\partial_y + \eta(x, y, u)\partial_u + \\ + \zeta_1\partial_{u_x} + \zeta_2\partial_{u_y} + \zeta_{11}\partial_{u_{xx}} + \zeta_{12}\partial_{u_{xy}} + \zeta_{22}\partial_{u_{yy}},$$

Линчук Лидия Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, СПбПУ, РГПУ (Санкт-Петербург, Россия); Lidiya Linchuk (Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University, Herzen State Pedagogical University of Russia, St.Petersburg, Russia)

$\zeta_i = \zeta_i(x, y, u, u_x, u_y)$, $\zeta_{ij} = \zeta_{ij}(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$ ($i, j = 1, 2$).
Требование, чтобы оператор X имел в качестве инвариантов выражения

$$t, v, v'_1 = \frac{D_x(v)}{D_x(t)}, v'_2 = \frac{D_y(v)}{D_y(t)}$$

$$v''_1 = \frac{D_x(v'_1)}{D_x(t)}, v''_2 = \frac{D_y(v'_1)}{D_y(t)}, v''_3 = \frac{D_x(v'_2)}{D_x(t)}, v''_4 = \frac{D_y(v'_2)}{D_y(t)},$$

приводит к формулам для его координат

$$\xi_1 = \xi_1(x), \quad \xi_2 = \xi_2(y), \quad \eta = \eta(x, y, u),$$

$$\zeta_1 = D_x\eta - u_x D_x\xi_1, \quad \zeta_2 = D_y\eta - u_y D_y\xi_2,$$

$$\zeta_{11} = D_x\zeta_1 - u_{xx} D_x\xi_1, \quad \zeta_{22} = D_y\zeta_2 - u_{yy} D_y\xi_2, \quad \zeta_{12} = D_x\zeta_2 - u_{xy}\xi_1.$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что если уравнение (1) допускает построенный оператор, т.е. $X(F)|_{F=0} = 0$, то оно имеет факторсистему (2).

Используя полученные результаты, можно построить примеры факторизаций. Например, в классе $u_{xx} = au_x + H(u_y)$ ($a \in \mathbb{R}$) выделяется подкласс $u_{xx} = au_y + bu_x^n + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$), допускающий оператор

$$X = x\partial_x + 2y\partial_y + \frac{a(n-2)u - cny}{a(n-1)}\partial_u, \quad A \in \mathbb{R}$$

и имеющий факторсистему

$$\left\{ \begin{array}{l} t = yx^{-2}, \quad v(t) = \left(u + \frac{c}{a}y\right)x^{\frac{2-n}{n-1}}, \\ v'' = \frac{b}{4t^2} \left(\frac{n-2}{n-1}v - 2tv'\right)^n + \frac{a}{4t^2}v' - \frac{n+1}{2(n-1)t}v' + \frac{n-2}{4(n-1)^2t^2}v. \end{array} \right.$$

Литература

1. *Линчук Л.В.* Альтернативные обобщенные симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. // Материалы научной конференции “Герценовские чтения - 2010”. — СПб.: Изд. РГПУ им. А.И.Герцена, 2010. — 46-53.

2. *Linchuk L.V.* The impact of alternative generalized operators subalgebra upon the factorization of ordinary differential equations. // Lobachevskii Journal of Mathematicsthis, 2022, **43**(3) — Pleiades Publishing, Ltd, 2022. — 530-641.

3. *Линчук Л.В.* Факторизация уравнений с частными производными. // Материалы международной научной конференции “Уфимская осенняя математическая школа - 2022”, том 2. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. — 54-56.

4. *Линчук Л.В.* Факторизация дифференциальных уравнений с частными производными как метод поиска инвариантных решений. // Материалы LXXIII Международной конференции “Герценовские чтения - 2020”. — СПб.: Изд. РГПУ им. А.И.Герцена, 2020. — 42-45.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНО НАПРАВЛЕННЫМИ СДВИГАМИ ПОТЕНЦИАЛОВ

А.Б. Муравник
amuravnik@yandex.ru

УДК 517.956

Исследуется гиперболическое уравнение с произвольным количеством потенциалов, на которые действуют операторы сдвига в произвольных направлениях. Мы находим условие на вектор коэффициентов при нелокальных членах уравнения и на векторы сдвигов потенциалов, обеспечивающее глобальную разрешимость рассматриваемого уравнения. Накладывая указанное условие на уравнение, мы строим в явном виде трехпараметрическое семейство гладких глобальных решений изучаемого уравнения.

Ключевые слова: гиперболические уравнения, дифференциально-разностные уравнения, гладкие решения.

**Differential-difference hyperbolic equations
with arbitrarily directed translations of potentials**

We investigate a hyperbolic equation with an arbitrary amount of potentials undergoing translations in arbitrary directions. We find a condition for the vector of coefficients at nonlocal terms of the investigated equation and the translation vectors, guaranteeing the global solvability of the investigated equation. Under this condition, we explicitly construct a three-parametric family of smooth global solutions of the investigated equation.

Keywords: hyperbolic equations, differential-difference equations, smooth solutions.

Пусть m и n — натуральные числа, $a_1, \dots, a_m$ — неотрицательные постоянные, $h_1, \dots, h_m$ — векторы из $\mathbb{R}^n$. Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - \sum_{k=1}^m a_k u(x - h_k, t). \quad (1)$$

Введем постоянные величины $a_0 := \sum_{k=1}^m a_k$ и $h_0 := \max_{k \in \overline{1, m}} |h_k|$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим функции

$$a(x) := \sum_{k=1}^m a_k \cos h_k \cdot x,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (номер проекта FSSF-2023-0016).

Муравник Андрей Борисович, д.ф.-м.н., РУДН (Москва, Россия); Andrey Muravnik (RUDN University, Moscow, Russia)

$$b(x) := \sum_{k=1}^m a_k \sin h_k \cdot x,$$

$$F(x, t; \xi) = e^{tG_1(\xi)} \sin \left[tG_2(\xi) + \varphi(\xi) + x \cdot \xi \right],$$

$$H(x, t; \xi) = e^{-tG_1(\xi)} \sin \left[tG_2(\xi) - \varphi(\xi) - x \cdot \xi \right],$$

где

$$G_{\{\frac{1}{2}\}}(\xi) = \rho(\xi) \left\{ \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right\} \varphi(\xi),$$

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2} \arctan \frac{b(\xi)}{|\xi|^2 + a(\xi)},$$

$$\rho(\xi) = \left([|\xi|^2 + a(\xi)]^2 + b^2(\xi) \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Если $a_0 h_0^2 < \frac{\pi^2}{4}$, то функция $\alpha F(x, t; \xi) + \beta H(x, t; \xi)$ является бесконечно гладким решением уравнения (1) для любых вещественных α и β и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$.

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.Н. Наимов
naimovan@vogu35.ru

УДК 517.927.4

Исследована периодическая задача для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с выделенной главной положительно однородной частью. Доказана инвариантность разрешимости периодической задачи при непрерывном изменении главной положительно однородной части и сохранении условий априорной оценки.

Ключевые слова: периодическая задача, главная положительно однородная часть, возмущение, априорная оценка, инвариантность разрешимости периодической задачи.

On the solvability of a periodic problem for a system of nonlinear ordinary differential equations of second order

A periodic problem for a system of nonlinear ordinary differential equations of second order with the main a positively homogeneous part is researched. The invariance of the solvability of the periodic problem is proven under continuous changes in the main positively homogeneous part and while preserving the conditions of the a priori estimate.

Keywords: periodic task, main positive homogeneous part, perturbation, a priori estimate, invariance of solvability of a periodic problem.

Рассмотрим периодическую задачу вида

$$x''(t) = P(t, x(t), x'(t)) + f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$x(t+1) \equiv x(t), \quad x'(t+1) \equiv x'(t). \quad (2)$$

Здесь $n \geq 2$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, отображения $P, f : \mathbb{R}^{2n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ заданы, непрерывны и удовлетворяют следующим условиям:

1) порядок роста $|f(t, y_1, y_2)|$ при больших значениях $|y_1| + |y_2|$ ограничен заданным числом $m > 1$

$$\lim_{|y_1| + |y_2| \rightarrow \infty} (|y_1| + |y_2|)^{-m} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t, y_1, y_2)| = 0;$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00032.

Наимов Алижон Набиджанович, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия);
Alizhon Naimov (Vologda State University, Russia)

2) отображение $P(t, y_1, y_2)$ по y_1, y_2 положительно однородно порядка m , т.е. $P(t, \lambda y_1, \lambda y_2) \equiv \lambda^m P(t, y_1, y_2) \forall \lambda > 0$;

3) отображения $P(t, y_1, y_2), f(t, y_1, y_2)$ периодичны по t с периодом 1, т.е. $P(t+1, y_1, y_2) \equiv P(t, y_1, y_2), f(t+1, y_1, y_2) \equiv f(t, y_1, y_2)$.

Учитывая условия 1 и 2, отображение P называем главной положительно однородной частью, а отображение f называем возмущением.

Априорной оценкой решений $x(t)$ задачи (1), (2) называем оценку вида

$$\max_{t \in \mathbb{R}} (|x(t)| + |x'(t)|) < M, \quad (3)$$

где положительное число M не зависит от $x(t)$. Наличие априорной оценки позволяет исследовать разрешимость периодической задачи, применяя методы вычисления вращения векторных полей [1].

Разрешимость периодической задачи (1) при $n = 1$ исследована в работе [2]. В данной работе при выводе априорной оценки существенно используется одномерность системы уравнений и общая идея качественного исследования сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящей работе, развивая методы работы [2], найдены условия, обеспечивающие априорную оценку (3) для решений периодической задачи (1), (2). В условиях априорной оценки доказана инвариантность разрешимости периодической задачи при непрерывном изменении главной положительно однородной части.

Условия априорной оценки сформулированы в терминах свойств главной положительно однородной части P . Для этого сначала исследованы условия, при которых для произвольного решения $x(t)$ задачи (1), (2) имеет место оценка

$$|x'(t)| \leq M_0 (1 + |x(t)|), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $M_0 > 0$ и не зависит от $x(t)$. Далее, для привлечения идеи качественного исследования сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений учитывается структура множества нулей отображения P . Предполагается, что данное множество состоит из одной поверхности. Случай многих поверхностей не рассматривается и требует дополнительного исследования.

Верна следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1 – 3 и условия

4) при каждом фиксированном $t_0 \in \mathbb{R}$ система уравнений

$$y'(t) = P(t_0, 0, y(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R}^n,$$

не имеет ненулевых решений, определенных и ограниченных на промежутке $(-\infty, +\infty)$;

5) множество нулей отображения P

$$\{(t, y_1, y_2) : P(t, y_1, y_2) = 0\}$$

состоит из одной поверхности

$$\{(t, y_1, y_2) : y_2 = B(t, y_1)\},$$

где отображение $B(t, y_1)$ непрерывно по совокупности переменных, по y_1 положительно однородно порядка 1 и периодически по t с периодом 1;

б) система уравнений

$$y'(t) = B(t, y(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R}^n,$$

не имеет ненулевых периодических решений периода 1;

7) при фиксированных $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ система уравнений

$$y'(t) = P(t_0, x_0, y(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R}^n,$$

не имеет решений, определенных и ограниченных на промежутке $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяющих условию $P(t_0, x_0, y(0)) \neq 0$.

Тогда для решений периодической задачи (1), (2) имеет место априорная оценка (3).

Условия 1 – 7 позволяют доказать инвариантность разрешимости периодической задачи (1), (2) при непрерывном изменении P и сохранении условий априорной оценки. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть семейство отображений $\tilde{P}(t, y_1, y_2, \lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$ непрерывно по совокупности переменных и при каждом $\lambda \in [0, 1]$ удовлетворяет условиям 2 – 7. Тогда периодическая задача (1), (2) разрешима при $P = \tilde{P}(\cdot, \cdot, \cdot, 0)$ и любом возмущении f тогда и только тогда, когда она разрешима при $P = \tilde{P}(\cdot, \cdot, \cdot, 1)$ и любом возмущении f .

Литература

1. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. — Москва: Наука, 1975.

2. Наимов А. Н., Кобилзода М. М. О разрешимости периодической задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // Изв. вузов. Матем., 8 (2021), 56 – 65.

СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА СО СЛАБОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

В.В. Наливкин, В.О. Лукашук
morfeezz.cs@gmail.com, voluks@gmail.com

УДК 517.957

В работе выполнена групповая классификация нелинейного уравнения Клейна-Гордона со слабой диссипацией по функции источника и функции диссипативного члена при малом параметре. Установлено, что исследуемое уравнение удовлетворяет условию нелинейной самосопряженности только в случае линейных функций. Для этого случая построены законы сохранения.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Клейна-Гордона, приближённая группа преобразований, приближенные законы сохранения.

Symmetric analysis of the nonlinear Klein-Gordon equation with weak dissipation

A group classification of the nonlinear Klein-Gordon equation with weak dissipation is performed by the source function and the function of the dissipative term with a small parameter. It is proved that the equation under consideration satisfies the condition of nonlinear self-adjointness only in the case of linear functions. Conservation laws are constructed for this case.

Keywords: nonlinear Klein-Gordon equation, approximate transformation group, approximate conservation laws.

В работе рассматривается обобщение уравнения Клейна-Гордона с малым параметром ε

$$u_{tt} + \varepsilon g(u_t) \approx u_{xx} + f(u), \quad (1)$$

где $f(u), g(u_t)$ – произвольные функции: $f'(u) \neq 0, g(u_t) \neq 0$. Это уравнение при $\varepsilon = 0$ является обобщением волнового уравнения, подходящего для описания безмассовых скалярных и векторных полей. Оно хорошо исследовано методами группового анализа. В частности найдены частные решения нелинейного уравнения Клейна-Гордона и построена группа Ли допускаемых симметрий [1]. Однако учет слабой диссипации в уравнении, приводит к введению в него малого параметра, что приводит к разрушению допускаемой группы преобразований.

Наливкин Виталий Викторович, студент, УУНиТ (Уфа, Россия); Vitaliy Nalivkin (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Лукашук Вероника Олеговна, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Veronika Lukashchuk (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

В работе выполнена групповая классификация уравнения (1) по функциям $f(u), g(u_t)$. Установлено, что в случае произвольных функций $f(u), g(u_t)$, допускается пятипараметрическая группа преобразований. В остальных случаях (степенных, экспоненциальных, линейных) допускаемая группа расширяется до шести-, семи-, восьмипараметрической и бесконечномерной.

В работе доказано, что уравнения (1) удовлетворяет условию нелинейной самосопряженности [2] только в случае линейных функций с линейной подстановкой. Для всех найденных операторов линейной функции источника, порождающих допускаемую группу преобразований, построены приближенные законы сохранения.

Литература

1. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Приближенные симметрии // Матем. сб., **136(178)**:4(8) (1988), 435-450.
2. Ibragimov, N. H. Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws // Archives of ALGA, Volume 7/8, 2010-2011, 2-18.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ АНАЛОГОВ ВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ОДНОЙ ИЗ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ КИМУРЫ

В.А. Павленко
mail@pavlenko.school

УДК 517.925

Настоящая работа посвящена построению решений аналогов временных уравнений Шредингера, соответствующих одной из гамильтоновых систем Кимуры. Эти решения в терминах некоторой системы линейных дифференциальных уравнений выписаны явно. Сами же аналоги временных уравнений Шредингера представляют собой два эволюционных уравнения с временами t_1 и t_2 , причем каждое из них зависит от двух пространственных переменных.

Ключевые слова: уравнения Пенлеве, аналоги временных уравнений Шредингера, гамильтоновы системы, метод изомонодромной деформации

Construction of solutions to analogues of Schrödinger's non-stationary equations corresponding to one of Kimura's Hamiltonian systems

This work is devoted to the construction of solutions to analogues of the non-stationary Schrödinger equations corresponding to one of Kimura's Hamiltonian systems. These solutions are written explicitly in terms of a certain system of linear differential equations. The analogues of Schrödinger's non-stationary equations themselves are two evolutionary equations with times t_1 and t_2 , and each of them depends on two spatial variables.

Keywords: Painlevé equations, analogs of non-stationary Schrödinger equations, Hamiltonian systems, isomonodromic deformation method

Строятся 2×2 матричные совместные решения скалярных линейных эволюционных уравнений $\Psi'_{s_k} = H_{s_k}^{2+2+1}(s_1, s_2, x_1, x_2, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})\Psi$ с временами s_1 и s_2 , которые являются аналогами временных уравнений Шредингера. Эти уравнения соответствуют гамильтоновой системе H^{2+2+1} , являющейся представителем иерархии вырождений изомонодромной системы Гарнье, описанной Х. Кимурой (см. [1]) в 1986 году. Построенные решения явным образом выражены через совместные

Павленко Виктор Александрович, к.ф.-м.н., младший научный сотрудник, ИМ ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Viktor Pavlenko (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science, Ufa, Russia)

решения матричных линейных пар ИДМ из статьи [2], условием совместности которых как раз являются гамильтоновы ОДУ, соответствующие гамильтонианам системы H^{2+2+1} . Приведена замена, связывающая матричные решения аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых двумя формами (рациональной и полиномиальной по координатам) системы H^{2+2+1} . Эта замена представляет собой квантовый аналог известного канонического преобразования, связывающего гамильтоновы уравнения системы H^{2+2+1} в двух данных формах.

Литература

1. *Kimura* The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure// Annali di Matematica pura et applicata IV. V. 155. No. 1. P. 25 - 74.
2. *H. Kawakami, A. Nakamura, H. Sakai* Degeneration scheme of 4-dimensional Painleve-type equations // arXiv:1209.3836 (2012).

О ТОПОЛОГИИ 3-МНОГООБРАЗИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ДИФФЕОМОРФИЗМЫ МОРСА-СМЕЙЛА С 4 НЕПОДВИЖНЫМИ ТОЧКАМИ ПОПАРНО РАЗЛИЧНЫХ ИНДЕКСОВ МОРСА О.В. Починка

УДК 517.988.6

В работе рассмотрен класс G сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на замкнутом 3-многообразии, неблуждающее множество которых состоит в точности из четырех точек попарно различных индексов Морса. Из результатов С. Смейла [1] и К. Мейера [2] следует, что все градиентно-подобные потоки с аналогичными свойствами имеют энергетическую функцию Морса в точности с четырьмя критическими точками попарно различных индексов. Откуда непосредственно следует, что несущее многообразие M^3 для таких потоков допускает разбиение Хегора рода 1 и, следовательно, гомеоморфно линзовому пространству $L_{p,q}$. Не смотря на простое устройство неблуждающего множества, в классе G существуют диффеоморфизмы с дико вложенными седловыми сепаратрисами. В силу результатов В. Гринеса, Ф. Лауденбаха, О. Починки [3], такие диффеоморфизмы не обладают энергетической функцией Морса и вопрос о топологии их несущего многообразия оставался открытым до сегодняшнего дня. Согласно работе В. Гринеса, Е. Жужомы и В. Медведева [4], в случае ручного вложения замыканий одномерных сепаратрис диффеоморфизма $f \in G$, несущее многообразие M^3 гомеоморфно линзовому пространству $L_{p,q}$, при этом блуждающее множество диффеоморфизма f содержит не менее p не компактных гетероклинических кривых. В настоящей работе аналогичный результат получен для произвольных диффеоморфизмов класса G . Кроме того, на каждом линзовом пространстве $L_{p,q}$ построен диффеоморфизм рассматриваемого класса с дико вложенными одномерными седловыми сепаратрисами, подобные примеры ранее были известны только на трехмерной сфере.

Литература

1. *S. Smale*. Morse inequalities for a dynamical systems. Bull. Am. math. Soc. 1960. V. 66, 43-49. [Русский перевод: сб. Математика, 11:4 (1967), 79-87.]
2. *K. Meyer*. Energy function for Morse-Smale systems. American Journal of Mathematics. Vol. 90, No 4. p. 1031-1040.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

Починка Ольга Витальевна, д.ф.-м.н., профессор, НИУ ВШЭ (Нижний Новгород, Россия); Olga Pochinka (HSE University, Nizhniy Novgorod, Russia)

3. *V. Grines, F. Laudenbach, O. Pochinka.* Self-indexing function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds. Moscow Math. Journal, 2009, No 4, 801-821.

4. *В.З. Гринес, Е.В. Жужوما, В.С. Медведев.* Новые соотношения для систем Морса-Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами. Мат. сборник. 2003. Т. 194, 979-1007.

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ И РЕПРЕЗЕНТАТИВНОЙ ФОРМУЛЕ ЕГО МИНИМАКСНОГО РЕШЕНИЯ

А.С. Родин

alexey.rodin.ekb@gmail.com

УДК 517.977

В работе рассматривается краевая задача Коши для уравнения Гамильтона-Якоби с гамильтонианом, зависящим от времени и импульсной переменной. Доказана репрезентативная формула для минимаксного решения данной задачи Коши. В работе результаты проиллюстрированы на примере.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона-Якоби, коэрцитивная функция, минимаксное решение.

On one case of the Hamilton-Jacobi equation and a representative formula for its minimax solution

The paper considers the Cauchy boundary value problem for the Hamilton-Jacobi equation with a Hamiltonian depending on time and impulse variable. A representative formula for the minimax solution of this Cauchy problem is proved. In the paper, the results are illustrated by an example.

Keywords: Hamilton-Jacobi equation, coercive function, minimax solution.

Рассмотрим краевую задачу Коши для уравнения Гамильтона-Якоби

$$D_t \varphi(t, x) + H(t, D_x \varphi(t, x)) = 0, \quad \varphi(T, x) = \sigma(x) \quad t \in [0; T], \quad x \in R^n.$$

$$D_x \varphi(t, x) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(t, x), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(t, x) \right).$$

Рассмотрим функцию $\Psi(t, s) = \sigma^*(s) - \int_t^T H(\tau, s) d\tau$, $\forall t \in [0; T]$, здесь

$$\sigma^*(s) = \sup_{x \in R^n} \langle x, s \rangle - \sigma(x),$$

и эффективное множество $dom(\sigma^*) = \{s : \sigma^*(s) < +\infty\}$.

Задача рассматривается при следующих предположениях:

A1) функция $\sigma(x)$ выпукла и непрерывна на R^n , $dom(\sigma^*)$ является неограниченным множеством;

Родин Алексей Семенович, м.н.с., ИММ УрО РАН (Екатеринбург, Россия);
Aleksei Rodin (N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (IMM UB RAS),
Yekaterinburg, Russia)

A2) функция $H(t, s)$ является непрерывной функцией по переменным t, s и выполнено условие Липшица

$$|H(t, s_1) - H(t, s_2)| \leq L \|s_1 - s_2\|, \quad L > 0;$$

A3) функция $\Psi(t, s)$ является коэрцитивной по переменной s , т.е

$$\forall t \in [0; T] \quad \lim_{\|s\| \rightarrow +\infty} \frac{\Psi(t, s)}{\|s\|} = +\infty.$$

Напомним определение минимаксного решения.

Определение. Непрерывная функция $u(t, x)$ является минимаксным решением краевой задачи Коши уравнения Гамильтона-Якоби, если выполнены следующие условия

$$\varphi(T, x) = \sigma(x),$$

$$\inf \{d^- u(t_0, x_0; (1, f)) - \langle s, f \rangle + H(t_0, s) : f \in R^n\} \leq 0,$$

$$\sup \{d^+ u(t_0, x_0; (1, f)) - \langle s, f \rangle + H(t_0, s) : f \in R^n\} \geq 0,$$

для всех $(t_0, x_0) \in [0, T] \times R^n, s \in R^n$.

Известно что, если выполнены условия A1)-A3), то минимаксное решение нашей задачи существует и единственно.

Рассмотрим функцию, которая задана следующим образом

$$\varphi(t, x) = \sup_{s \in \text{dom}(\sigma^*)} \langle x, s \rangle - \Psi(t, s).$$

В работе показывается справедливость следующей теоремы

Теорема. Если выполнены условия A1)-A3), то функция $\varphi(t, x)$ является минимаксным решением краевой задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби.

Литература

1. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.; Мир, 1973.
2. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. - М.: Наука, 1991. - 216 с. -ISBN 5-02-000139-2
3. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации / Ин-т компьютерных исследований. М.: Ижевск, 2003. 336 с.

ТОЧНОЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ ОГРАНИЧЕННОЕ И ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОДНОМЕРНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Д. Сафаров, С.К. Миратов

safarov-5252@mail.ru, safarkhonop@mail.ru

УДК 517.95

В работе для одной нелинейной одномерной псевдопараболической уравнение найдено точное положительное ограниченное и периодическое решение с помощью функция дельта-амплитуды $-dnu$ Якоби.

Ключевые слова: эллиптическая функция, двоякопериодическое решение, эллиптический интеграл, модуль функции.

In this work, for one nonlinear one-dimensional pseudoparabolic equation, an exact positive bounded and periodic solution is found using the Jacobi function of the delta amplitude $-dnu$.

Keywords: elliptic function, binary periodic solution, elliptic integral, modulus of the function.

На плоскости R^2 — переменных (x, t) рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных второго порядка вида

$$uu_{xt} + \alpha u_x u_t + \beta u_x u_x + \gamma uu_t + au^2 + bu^{4+2\alpha} = 0, \quad (1)$$

где α, β, a, b — постоянные числа.

Псевдопараболические уравнения встречаются например, в теории упругости, теории фильтрации, теории теплопроводности, моделирование различных биологических процессов и явлений. Нелокальные краевые задачи и задачи со смещением для одномерных псевдопараболических и гиперболических уравнении изучены в работах [1,2].

Методом волновых решений [3], находим решение уравнения (1) с помощью эллиптические функции Якоби [4].

В переменных бегущей волны [3]

$$u(x, t) = \varphi(\tau), \quad \tau = x - c_0 t, \quad (2)$$

где c_0 — волновое число, уравнение (1) примет вид

$$-\varphi c_0 \varphi''(\tau) - \alpha c_0 \varphi'^2(\tau) - (\beta - c_0 \gamma) \varphi'(\tau) + a \varphi^2(\tau) + b \varphi^{4+2\alpha}(\tau) = 0. \quad (3)$$

Сафаров Джумабой, д.ф.-м.н., профессор, БохГУ (Бохтар, Таджикистан); Safarov Dzhumaboy (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

С.К. Миратов, БохГУ (Бохтар, Таджикистан); Miratov Safarkhon (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

Если вещественные числа $\alpha \neq -1$ и $c_0 = \frac{\beta}{\gamma}$, то при замене

$$v(\tau) = \varphi^{1+\alpha}(\tau), \quad (4)$$

относительно функции $v(\tau)$ получим уравнение вида Дуффинга

$$v''(\tau) + a_1 v(\tau) + b_1 v^3(\tau) = 0, \quad (5)$$

где $a_1 = -\frac{\alpha\alpha}{\beta}$, $b_1 = -\frac{b\gamma}{\beta}$.

Известно, что уравнение (5) нельзя решать в замкнутой форме. Однако, показано, что оно имеет бесчисленное множество периодических решений. В монографии [4] построена его точное решение в эллиптических функциях, а с помощью метода Ляпунова найдено приближенное его решение в тригонометрических функциях. Уравнения Дуффинга, помимо периодических решений, допускает также аperiodические решения. Периодическое решение уравнения (5) при $a_1 b_1 < 0$ получается при помощи функции $dn\tau$ — дельта-амплитуды, а при $a_1 b_1 > 0$, находится с помощью функции $sn\tau$ — эллиптический синус.

Отыскиваем решение уравнения (5) в виде

$$v(\tau) = A dn\tau = A dn(k, \tau), \quad (6)$$

где параметр A и модуль функции k , $0 < a < 1$ являются неизвестными.

После подстановки (6) в (5) с учетом дифференциального уравнения для $dn\tau$

$$(dn\tau)'' - (2 - k^2)dn\tau + 2dn^3\tau = 0, \quad (7)$$

находим неизвестных A , k в виде

$$k^2 = 2 + a_1, \quad A^2 = \frac{2}{b_1}.$$

Подчиняя a_1 и b_1 условиями $0 < 2 + a_1 < 1$ и $b_1 > 0$ получим.

Теорема. Пусть в уравнение (1) $\alpha \neq -1$ и $\frac{1}{1+\alpha} = n$, $n > 0$ -целое. Тогда, если коэффициенты $a_1 = -\frac{\alpha\gamma}{\beta}$, $b_1 = -\frac{b\gamma}{\beta}$ удовлетворяют условиями $0 < 2 - \frac{\alpha\gamma}{\beta} < 1$ и $b_1 > 0$, то уравнение (1) имеет положительное решение вида

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{b_1}} dn^n \left[x - \frac{\beta}{\gamma} t; \sqrt{2 + a_1} \right].$$

Литература

1. Попов Н.С. О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для одномерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений // Вестник Сам.ГУ, 2015, №3(125).

2. Кожанов А.И., Попов Н.С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика.– 2010. - Т.10. - С. 63-75.

3. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. - Москва. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 360 с.

4. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы в нелинейной механике. - М., Наука, 1981.-379с.

ТОЧНОЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ ОГРАНИЧЕННОЕ И ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОДНОМЕРНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Д.С. Сафаров, С.К. Миратов

safarov-5252@mail.ru, safarkhonop@mail.ru

УДК 517.95

В работе для одной нелинейной одномерной псевдопараболической уравнение найдено точное положительное ограниченное и периодическое решение с помощью функция дельта-амплитуды $-dnu$ Якоби.

Ключевые слова: эллиптическая функция, двоякопериодическое решение, эллиптический интеграл, модуль функции.

In this work, for one nonlinear one-dimensional pseudoparabolic equation, an exact positive bounded and periodic solution is found using the Jacobi function of the delta amplitude $-dnu$.

Keywords: elliptic function, binary periodic solution, elliptic integral, modulus of the function.

На плоскости R^2 — переменных (x, t) рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных второго порядка вида

$$uu_{xt} + \alpha u_x u_t + \beta u_x u_x + \gamma u u_t + a u^2 + b u^{4+2\alpha} = 0, \quad (1)$$

где α, β, a, b — постоянные числа.

Псевдопараболические уравнения встречаются например, в теории упругости, теории фильтрации, теории теплопроводности, моделирование различных биологических процессов и явлений. Нелокальные краевые задачи и задачи со смещением для одномерных псевдопараболических и гиперболических уравнении изучены в работах [1,2].

Методом волновых решений [3], находим решение уравнения (1) с помощью эллиптические функции Якоби [4].

В переменных бегущей волны [3]

$$u(x, t) = \varphi(\tau), \quad \tau = x - c_0 t, \quad (2)$$

где c_0 — волновое число, уравнение (1) примет вид

$$-\varphi c_0 \varphi''(\tau) - \alpha c_0 \varphi'^2(\tau) - (\beta - c_0 \gamma) \varphi'(\tau) + a \varphi^2(\tau) + b \varphi^{4+2\alpha}(\tau) = 0. \quad (3)$$

Сафаров Джумабой, д.ф.-м.н., профессор, Бох.ГУ (Бохтар, Таджикистан); Safarov Dzhumaboy (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

С.К. Миратов, БохГУ (Бохтар, Таджикистан); Miratov Safarkhon (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

Если вещественные числа $\alpha \neq -1$ и $c_0 = \frac{\beta}{\gamma}$, то при замене

$$v(\tau) = \varphi^{1+\alpha}(\tau), \quad (4)$$

относительно функции $v(\tau)$ получим уравнение вида Дуффинга

$$v''(\tau) + a_1 v(\tau) + b_1 v^3(\tau) = 0, \quad (5)$$

где $a_1 = -\frac{\alpha\alpha}{\beta}$, $b_1 = -\frac{b\gamma}{\beta}$.

Известно, что уравнение (5) нельзя решать в замкнутой форме. Однако, показано, что оно имеет бесчисленное множество периодических решений. В монографии [4] построена его точное решение в эллиптических функциях, а с помощью метода Ляпунова найдено приближенное его решение в тригонометрических функциях. Уравнения Дуффинга, помимо периодических решений, допускает также аperiodические решения. Периодическое решение уравнения (5) при $a_1 b_1 < 0$ получается при помощи функции $dn\tau$ — дельта-амплитуды, а при $a_1 b_1 > 0$, находится с помощью функции $sn\tau$ — эллиптический синус.

Отыскиваем решение уравнения (5) в виде

$$v(\tau) = A dn\tau = A dn(k, \tau), \quad (6)$$

где параметр A и модуль функции k , $0 < a < 1$ являются неизвестными.

После подстановки (6) в (5) с учетом дифференциального уравнения для $dn\tau$

$$(dn\tau)'' - (2 - k^2)dn\tau + 2dn^3\tau = 0, \quad (7)$$

находим неизвестных A , k в виде

$$k^2 = 2 + a_1, \quad A^2 = \frac{2}{b_1}.$$

Подчиняя a_1 и b_1 условиями $0 < 2 + a_1 < 1$ и $b_1 > 0$ получим.

Теорема. Пусть в уравнение (1) $\alpha \neq -1$ и $\frac{1}{1+\alpha} = n$, $n > 0$ —целое. Тогда, если коэффициенты $a_1 = -\frac{\alpha\gamma}{\beta}$, $b_1 = -\frac{b\gamma}{\beta}$ удовлетворяют условиями $0 < 2 - \frac{\alpha\gamma}{\beta} < 1$ и $b_1 > 0$, то уравнение (1) имеет положительное решение вида

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{b_1}} dn^n \left[x - \frac{\beta}{\gamma} t; \sqrt{2 + a_1} \right].$$

Литература

1. Попов Н.С. О разрешимости пространственно нелокальных краевых задач для одномерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений // Вестник Сам.ГУ, 2015, №3(125).

2. Кожанов А.И., Попов Н.С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика.— 2010. - Т.10. - С. 63-75.

3. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. - Москва. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 360 с.

4. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы в нелинейной механике. - М., Наука, 1981.-379с.

ОЦЕНКИ ОТКЛОНЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОТ ТОЧНОГО В ЗАДАЧЕ С ТОНКИМ ПРЕПЯТСТВИЕМ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. Сιο

ahmedzead.sio.1996@gmail.com

УДК 517.95

В докладе обсуждаются апостериорные оценки функционального типа для задачи с тонким препятствием.

Ключевые слова: тонкое препятствие, задача со свободной границей, апостериорные оценки отклонения от точного решения.

Estimates of the deviation of an approximate solution from the exact one in a thin obstacle problem for a second-order elliptic operator

This talk is concerned with functional type a posteriori estimates for a problem with a thin obstacle.

Keywords: thin obstacle, free boundary problem, functional a posteriori error estimates.

В работе изучается эллиптическая задача с тонким препятствием, которая состоит в минимизации функционала

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A(x) \nabla v \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f v dx \quad (1)$$

на множестве $K = \{v \in H^1(\Omega) : v \geq \Psi \text{ на } \mathcal{M} \cap \Omega, v = \varphi \text{ на } \partial\Omega\}$. Здесь Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, $A(x) = (a^{ij}(x))$ - симметричная матрица, удовлетворяющая условию эллиптичности, $\mathcal{M}$ - гладкое $(n-1)$ -мерное многообразие в $\mathbb{R}^n$, делящее Ω на две подобласти $\Omega_{\pm}$. Далее, $f \in L^2(\Omega)$, $\Psi \in C^2(\mathcal{M})$, $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ - заданные функции и $\varphi \geq \Psi$ на $\mathcal{M} \cap \partial\Omega$.

Целью работы является получение оценок разности между точным решением u задачи (1) и произвольной функцией $v \in K$ в терминах энергетической нормы. Ранее аналогичная задача рассматривалась в работе [1] для модельного случая оператора Лапласа при $f = 0$.

Определим пространство

$$H(\Omega_{\pm}, \operatorname{div}) := \{q^* \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n) : \operatorname{div}(q^*|_{\Omega_{\pm}}) \in L^2(\Omega_{\pm}), [q^* \cdot n] \in L^2(\mathcal{M})\}$$

Сιο Ахмад, аспирант, РУДН (Москва, Россия); Ahmad Sio (RUDN University, Moscow, Russia)

и множество $\Lambda := \{\lambda \in L^2(\mathcal{M}) : \lambda(x) \geq 0 \text{ п.в. в } \mathcal{M}\}$, а также введем нормы

$$\|q\|_A^2 = \int_{\Omega} A(x)q \cdot q dx, \quad \|q^*\|_{A^{-1}}^2 = \int_{\Omega} A^{-1}(x)q^* \cdot q^* dx.$$

В докладе будут представлены следующие оценки отклонения произвольного приближенного решения $v \in K$ вариационной задачи (1) от точного решения u .

Теорема 1. Для любых $v \in K$, $\lambda \in \Lambda$, $q^* \in H(\Omega_{\pm}, \text{div})$ расстояние до минимайзера оценивается как

$$\|\nabla(v - u)\|_A \leq \mathfrak{M}(v, q^*, \lambda, \psi),$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(v, q^*, \lambda, \psi) := & \|A\nabla v - q^*\|_{A^{-1}} + \sqrt{2} \left(\int_{\mathcal{M}} \lambda(v - \Psi) d\mu \right)^{1/2} \\ & + C_1 \|f + \text{div } q^*\|_{\Omega_+} + C_2 \|f + \text{div } q^*\|_{\Omega_-} \\ & + C_3 \|\lambda - [q^* \cdot \mathbf{n}]\|_{\mathcal{M}}, \end{aligned}$$

$C_1 = \frac{C_{F\Omega_+}}{\sqrt{\nu}}$, $C_2 = \frac{C_{F\Omega_-}}{\sqrt{\nu}}$, $C_3 = \frac{C_{T\Gamma\mathcal{M}}}{\sqrt{\nu}}$, а $C_{F\Omega_{\pm}}$ и $C_{T\Gamma\mathcal{M}}$ - это константы, определенные неравенствами типа Фридрихса.

Литература

1. Arushkinskaya D.E., Repin S.I. Thin obstacle problem: estimates of the distance to the exact solution // Interfaces and Free Boundaries, **20**:4 (2018), 511-531.

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО

О.В. Солонуха,
solonukha@yandex.ru

УДК 517.9

Рассматривается разрешимость существенно нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе-Самарского. Сформулирована теорема о достаточных условиях существования обобщенного решения. При этом используется условие сильной эллиптичности вспомогательного дифференциально-разностного оператора.

Ключевые слова: нелокальная задача, дифференциально-разностный оператор, условие сильной эллиптичности, оператор с полуограниченной вариацией.

On the existence of solutions to essentially nonlinear elliptic differential equations with nonlocal boundary conditions of the Bitsadze–Samarskii type

We consider the solvability of essentially nonlinear elliptic differential equations with non-local boundary conditions of the Bitsadze–Samarskii type. The theorem on sufficient conditions for the existence of a generalized solution is formulated. In this case, the condition of strong ellipticity of the auxiliary differential-difference operator is used.

Keywords: non-local problem, differential-difference operator, strong ellipticity condition, operator of semi-bounded variation.

Как известно, при рассмотрении нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений с классическими краевыми условиями достаточными условиями существования решения являются условия роста, сильной эллиптичности и локальной липшицевости (локальной гёльдеровости) дифференциального оператора, гарантирующие деминепрерывность, коэрцитивность и свойство полуограниченной вариации дифференциального оператора. В случае нелокальных краевых условий типа Бицадзе–Самарского этим краевым условиям соответствует некоторый разностный оператор. В этом случае достаточными условиями существования решения являются условия роста и локальной липшицевости (локальной гёльдеровости) дифференциального оператора, а также условие сильной эллиптичности

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение N 075-15-2022-1115), РУДН.

Солонуха Олеся Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, ФИЦ ИУ РАН (Москва, Россия); Olesya Solonukha (FRC CSC RAS, Moscow, Russia)

дифференциально-разностного оператора, являющегося комбинацией дифференциального оператора из исходного уравнения и разностного оператора, соответствующего нелокальным условиям. В этом случае дифференциально-разностный оператор обладает свойствами деминепрерывности, коэрцитивности и полуограниченной вариации, что позволяет сделать вывод о существовании обобщенного решения.

Пример. Пусть $p \in (1, \infty)$, $n \geq 3$, $Q = (0, 3) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область с границей ∂G класса C^∞ , $1/p + 1/q = 1$, $f \in W_q^{-1}(Q)$. Обозначим $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Рассмотрим уравнение

$$Aw(x) = - \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i A_i(x, w, \nabla w) + A_0(x, w, \nabla w) = f \quad (x \in Q), \quad (1)$$

с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе-Самарского

$$\left. \begin{aligned} w(x_1, x') &= w(x_1, x') = 0 & (0 \leq x_1 \leq 3, x' \in \partial G), \\ w(0, x') &= -w(1, x') & (x' \in G), \\ w(3, x') &= 0 & (x' \in G). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$W_{p,\gamma}^1(Q)$ содержит функции из $W_p^1(Q)$, удовлетворяющие краевым условиям (2). Для любого $f \in W_q^{-1}(Q)$ задача (1)–(2) имеет обобщенное решение $w \in W_{p,\gamma}^1(Q)$, если справедливы условия:

A1) условие интегрируемости или условие роста: функции $A_i(x, \xi)$, $i = 0, 1, \dots, n$, измеримы по $x \in Q$ и непрерывны по остальным переменным для п.в. $x \in Q$, а также удовлетворяют оценкам роста

$$|A_i(x, \xi)| \leq g_0(x) + c_1 |\xi_0|^{p'-1} + c_1 \sum_{1 \leq j \leq n} |\xi_j|^{p'-1}, \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$|A_0(x, \xi)| \leq g_0(x) + c_1 \sum_{0 \leq j \leq n} |\xi_j|^{p'-1},$$

где $c_1 > 0$, $p' \in (1, p)$ и $g_0 \in L_q(Q)$;

A2) условие сильной эллиптичности: для всех s , п.в. $x_1 \in [0, 1]$, $x' \in \overline{G}$ и любых $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{3 \times (n+1)}$ таких, что $\eta_{i0} = \zeta_{i0} \neq 0$ и $\eta \neq \zeta$, существует $\hat{\Upsilon} > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{1 \leq l \leq 3} (A_i(x_1 + l - 1, x', \zeta_{l.}) - A_i(x_1 + l - 1, x', \eta_{l.})) (\zeta_{li} - \eta_{li}) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{1 \leq l \leq 2} (A_i(x_1 + l - 1, x', \zeta_{l.}) - A_i(x_1 + l - 1, x', \eta_{l.})) (\zeta_{l+1,i} - \eta_{l+1,i}) \right) \\ & \geq \hat{\Upsilon} \sum_{1 \leq l \leq 3} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li} - \eta_{li}|^p; \end{aligned}$$

A3) условие локальной липшицевости/гёльдеровости функций A_i ($i = 1, \dots, n$) по ξ_0 и функции A_0 по ξ_j ($j = 0, 1, \dots, n$): существуют ρ ($\rho = 1$

при $p \in [2, \infty)$, $\rho \in (1 - 1/p, p - 1]$ при $p \in (1, 2)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для п.в. $x \in Q$ и любых $\xi, \delta \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|\delta| = \sum_{0 \leq j \leq n} |\delta_j| = |\delta_k| < \varepsilon$,

$$|A_i(x, \xi + \delta) - A_i(x, \xi)| \leq \left(\Psi |\xi_k + \delta_k|^{p-1-\rho} + \Psi \sum_{0 \leq j \leq n} |\xi_j|^{p-1-\rho} + g_\Psi(x) \right) |\delta_k|^\rho,$$

где $\Psi > 0$, $g_\Psi \in L_{q'}(Q)$, $q' = p/(p - 1 - \rho)$, $k = 0$ при $i = 1, \dots, n$ и $k = 0, 1, \dots, n$ при $i = 0$.

(2+1)-МЕРНЫЕ СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

М.К. Сулейменов, К.Р. Есмаханова, З.А. Закариева
Suleimenov_km@enu.kz, yesmakhanova_kr@enu.kz,
zaruet.zakarieva@mail.ru

УДК 517.958:530.145.6

За последние годы наука нелинейных уравнений стала отличным решением для объяснения очень многих проблем и загадок в мире. В нелинейной науке взаимодействие между дисперсией и нелинейностью приводит возникновению важных явлений в оптических волнах, включая параметрическое усиление, преобразование длины волны, распространение солитонов и т.д.[1-10].

Ключевые слова: нелинейные уравнения Шредингера и система Максвелл-Блок, солитонные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных.

(2+1)-dimensional soliton solutions of nonlocal nonlinear Schrodinger equations

In recent years, the science of nonlinear equations has become an excellent solution to explain many problems and problems in the world. In nonlinear science, the interaction between dispersion and nonlinearity gives rise to important phenomena in optical waves, including parametric amplification, wavelength conversion, soliton propagation, etc.

Keywords: nonlinear Schrodinger equations and the Maxwell-Block system, soliton equations, partial differential equations.

Некоторые нелинейные волновые уравнения могут появляться в различных задачах физики. Например, такими являются хорошо известные уравнения Кортевега-де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера, sine - Гордона. Есть различные методы решения таких уравнений, как метод анализа Пенлеве, преобразование Дарбу, преобразование Бэклунда, метод Хироты и др. В данной работе рассматриваются

1Сулейменов Кенесары Машимович, к.ф.-м.н., ЕНУ имени Л.Н. Гумилева (Астана, Казахстан); Kenessary Suleimenov (ENU named after L.N.Gumilyov, Astana, Kazakhstan)

Есмаханова Куралай Ратбайкызы, к.ф.-м.н., ассоциированный профессор, ЕНУ имени Л.Н. Гумилева (Астана, Казахстан); Kuralay Yesmakhanova (ENU named after L.N.Gumilyov, Astana, Kazakhstan)

Закариева Заруэт Алмазовна, докторант ЕНУ имени Л.Н. Гумилева (Астана, Казахстан); Zaruyet Zakariyeva (ENU named after L.N.Gumilyov, Astana, Kazakhstan)

солитонные решения (2+1) мерных нелокальных нелинейных уравнений типа Шредингера методом преобразования Дарбу и методом Хироты.

Литература

1. Захаров В.Е., Манакон С.В., Новиков С.Н., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. — Москва: Наука, 1980. — 320.
2. Yesmakhanova K., Shaikhova G., Bekova G., Myrzakulova Zh. Soliton solutions of the Hirota–Maxwell–Bloch equation // submitted in Journal of Physics: Conference Series (IOP Science), 2015
3. Есмаханова К., Мырзакулова Ж., Топеева С., Тунгушибаева Д. Одно- солитонные решения для (1+1)-мерного нелинейного уравнения Шредингера и Максвелла – Блоха // Вестник ЕНУИМ. Л.Н. Гумилева, **107:4** (2015), 41-46.
4. Bekova G., Myrzakulova Zh, Yesmakhanova K. Rogue waves of the (1+1)- dimensional Schrodinger–Maxwell–Bloch Equation // 3rd International Conference on "Applied Mathematics and Approximation Theory–AMAT 2015 May 28–31, — Ankara – Turkey(2015), — 207.
5. Yesmakhanova K., Bekova G., Kemelbekova G., Myrzakulova Zh. Bright and Dark Positon solutions of the 1+1-dimensional Hirota–Maxwell–Bloch Equation //International Conference "Integrable Systems" June 23–27, — Czech Republic (2015).
6. He Jingsong, Yi Cheng, Li Yi-Shen. The Darboux transformation for NLS–MB equations // Communications in Theoretical Physics.**38:4** (2002), 493-496.
7. McCall S.L., Hahn E.L. Self-induced transparency by pulsed coherent light // Phys. Rev. Lett., No 18 (1967), — 908.
8. Ablowitz M.J., Prinari B., Trubatch A.D. Discrete and Continuous Nonlinear Schrodinger Systems // London Mathematical Society Lecture Note Series., (2004), — 302.
9. Li C.Z., He J.S., Porsezian K. Rogue waves of the Hirota and the Maxwell-Bloch equation. arXiv:1205.1191.
10. Priya N.V., Senthilvelan M., Rangarajan G., Lakshmanan M. On symmetry preserving and symmetry broken bright, dark and antidark soliton solutions of nonlocal nonlinear Schrodinger equation //Phys. Lett. A. **383** (2019), 15-26.

УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА С ШУМОМ В ДИСПЕРСИОННОМ ЧЛЕНЕ

Д.А. Сучкова
dil9ara@rambler.ru

УДК 519.21, 517.957, 517.955.2

Разработан аналитический метод решения стохастического дифференциального уравнения Кортевега – де Фриза (КдФ) с шумом в дисперсии, который сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения и линейного уравнения Кортевега – де Фриза. На основе разработанного метода проведено компьютерное моделирование процесса.

Ключевые слова: уравнение Кортевега – де Фриза (КдФ), стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ), уравнение длинной волны, стохастическое уравнение КдФ с шумом в дисперсии, дисперсия волн

Korteweg –de Vries equation with noise in the dispersion term

An analytical method for solving the stochastic Korteweg – de Vries (KdV) differential equation with noise in the dispersion is developed, which reduces to solving nonlinear partial differential equation and linear Korteweg – de Vries equation. On the basis of the developed method the computer simulation of the process was carried out.

Keywords: Korteweg – de Vries (KdV) equation, stochastic differential equation (SDE), long wave equation, stochastic equation KdV with noise in the dispersion, dispersion of waves

Введём уравнение Кортевега – де Фриза

$$u_t + uu_x + [1 + V'(t)]u_{xxx} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (1)$$

$(x, t) \in R \times [0, T]$, с шумом, который воздействует на дисперсионный член уравнения, определяющий случайную природу рассеивания волн. Под *шумом* $V(t)$, $V(0) = 0$ мы понимаем либо непрерывную функцию, либо произвольный случайный процесс с непрерывными реализациями.

Шаг 1. Так как в уравнении (1) производная $V(t)$ может не существовать, то с целью придать уравнению математический строгий вид, проведем следующие рассуждения. Решение уравнения (1) будем искать в

Сучкова Дилара Айратовна, аспирант по направлению подготовки "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ УУНиТ (Уфа, Россия); Dilara Suchkova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

виде $u(x, t) = u(x, t, V(t))$, поэтому уравнение следует переписать следующим образом:

$$d(u)_t + [uu_x + u_{xxx}]dt + u_{xxx} * dV(t) = 0, \quad u(x, 0, V(0)) = u_0(x),$$

которое с учетом формулы для дифференциала с симметричным интегралом [1] $(u)_t dt = u_t dt + u_v * dV(t)$ примет вид

$$[u_t + uu_x + u_{xxx}]dt + [u_v + u_{xxx}] * dV(t) = 0. \quad (2)$$

Пусть функция (траектория случайного процесса) $V(t)$ нигде не дифференцируема. Тогда в силу леммы о равенстве двух интегралов [1] уравнение (2) равносильно двум соотношениям:

$$u_t(x, t, v)|_{v=V(t)} + u(x, t, V(t))u_x(x, t, V(t)) + u_{xxx}(x, t, V(t)) = 0, \quad (3)$$

$$u_v(x, t, v)|_{v=V(t)} + u_{xxx}(x, t, V(t)) = 0. \quad (4)$$

Вычитая из уравнения (3) уравнение (4), получим следующие соотношения:

$$u_t - u_v + uu_x = 0, \quad (5)$$

$$u_v + u_{xxx} = 0, \quad (6)$$

От (5) и (6) перейдем к двум детерминированным уравнениям на функцию $u(t, x, v)$, положив $v = V(t)$ в (5) и (6).

Шаг 2. Теперь мы будем рассматривать только детерминированные варианты уравнений (5) и (6). Нам необходимо убедиться, что найдется функция $u(t, x, V(t))$, которая является решением одновременно двух уравнений.

Пусть $g(x, t)$ есть произвольное решение уравнения КдФ $g_t + gg_x + g_{xxx} = 0$. Известно, что решение задачи Коши $u^*(x, t, 0) = g(x, t)$ для линеаризованного уравнения КдФ (6) выражается через функции Эйри [2], воспользовавшись этим фактом, запишем решение уравнения (6)

$$u^*(x, t, V(t)) = \pi^{-1/2}(3V(t))^{-1/3} \int_{-\infty}^{+\infty} Ai\left(\frac{x-y}{(3V(t))^{1/3}}\right) g(y, t) dy,$$

где $Ai(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{y^3}{3} + yz\right) dy$ есть функция Эйри.

Шаг 3. Покажем, что функция

$$u(x, t, v) = \pi^{-1/2}(3v)^{-1/3} \int_{-\infty}^{+\infty} Ai\left(\frac{x-y}{(3v)^{1/3}}\right) g(y, t) dy, \quad (7)$$

удовлетворяет уравнению (5). Заметим, что ввиду (7)

$$u_t(x, t, v) = \pi^{-1/2}(3v)^{-1/3} \int_{-\infty}^{+\infty} Ai\left(\frac{x-y}{(3v)^{1/3}}\right) g_t(y, t) dy =$$

$$= \pi^{-1/2} (3v)^{-1/3} \int_{-\infty}^{+\infty} Ai \left(\frac{x-y}{(3v)^{1/3}} \right) \left[- \left(\frac{1}{2} g^2(y, t) \right)'_y - g_{yyy}(y, t) \right] dy.$$

В силу свойств преобразования Эйри правая часть равенства запишется в виде $-\left(\frac{1}{2}u^2(x, t, v)\right)'_x - u_{xxx}(x, t, v)$. С учетом (6), получим

$$u_t(x, t, v) + u(x, t, v)u_x(x, t, v) - u_v(x, t, v) = 0.$$

Значит решение КдФ с шумом дается формулой (7).

Теорема. Пусть $g(x, t)$ любое решение уравнения КдФ $g_t + gg_x + g_{xxx} = 0$. Тогда соотношение (7) при $v = V(t)$ определяет решение стохастического уравнения КдФ (2).

Литература

1. Насыров Ф.С. Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 212 с.
2. Olivier Vallee, Manuel Soares Airy functions and applications to physics. — World Scientific Publishing Co. Pte.Ltd, 2004. 3. Сучкова Д.А. О стохастическом уравнении Кортевега – де Фриза, Тезисы докладов, представленных на Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2022», Том 2, стр. 84-86, 2022.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА МИУРЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПОЧЕК В 3D

И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова

А.У. Сакиева

habibullinismagil@gmail.com, aigul.khakimova@mail.ru,
alfya.sakieva@yandex.ru

УДК 517.9

Предлагается метод поиска преобразований типа Миуры для интегрируемых полудискретных уравнений, основанный на понятии локального закона сохранения. Эффективность метода проиллюстрирована на нескольких известных уравнениях.

Ключевые слова: интегрируемость, дифференциально-разностные уравнения, локальные законы сохранения, преобразования типа Миуры.

Miura-Type Transformations for Integrable Lattices in 3D

A method of searching for Miura-type transformations for integrable semi-discrete equations based on the concept of a local conservation law is proposed. The effectiveness of the method is illustrated by several well-known equations.

Keywords: integrability, differential-difference lattices, local conservation laws, Miura transformations .

В докладе будет обсуждаться класс полудискретных уравнений с одной непрерывной и двумя дискретными переменными. В настоящее время в литературе известно девять интегрируемых уравнений вида

$$u_{n+1,x}^j = f(u_{n,x}^j, u_n^{j+1}, u_n^j, u_{n+1}^j, u_{n+1}^{j-1})$$

с точностью до точечных преобразований. Предложен эффективный метод поиска преобразований типа Миуры для полудискретных уравнений, основанный на некотором соотношении, обобщающем понятие локального закона сохранения. Эффективность метода проиллюстрирована на уравнениях из списка. Для одного из уравнений, которое мало изучено, вычислен непрерывный предел. Для этого уравнения обсуждается задача построения конечно-полевых редукций в виде систем

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00006, <https://rscf.ru/project/21-11-00006/>.

Хабибуллин Исмагил Талгатович, д.ф.-м.н., профессор, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Ismagil Habibullin (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of RAS, Ufa, Russia)

Хакимова Айгуль Ринатовна, к.ф.-м.н., н.с., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Aigul Khakimova (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of RAS, Ufa, Russia)

Сакиева Альфия Ураловна, к.ф.-м.н., м.н.с., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Alfya Sakieva (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of RAS, Ufa, Russia)

уравнений гиперболического типа, интегрируемых по Дарбу. Для редукций малых порядков, $N = 1$ и $N = 2$, представлены полные наборы характеристических интегралов. Заметим, что существование характеристических интегралов позволяет строить частные решения исходной цепочки. Для случая $N = 1$ в этой статье было найдено явное решение. Также найдено новое полудискретное уравнение, выходящее за рамки рассматриваемого класса. Для этого уравнения представлена пара Лакса.

Литература

1. *I.T. Habibullin, A.R.Khakimova, A.U.Sakieva* Miura-Type Transformations for Integrable Lattices in 3D // Mathematics, (2023), 2555778
2. *Levi D., Petrera M., Scimiterna C., Yamilov R.* On Miura transformations and Volterra-type equations associated with the Adler-Bobenko-Suris equations // SIGMA, (2008), 4,077
3. *Shabat A.B., Yamilov R.I.* To a transformation theory of two-dimensional integrable systems // Phys.Lett.A, (1997), 227, 15-23

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

И.Т. Хабибуллин, М.Н. Кузнецова

А.Р. Хакимова

habibullinismagil@gmail.com, mariya.n.kuznetsova@gmail.com,
aigul.khakimova@mail.ru

УДК 517.9

Обсуждается проблема классификации интегрируемых нелинейных дискретных уравнений с тремя независимыми переменными. Предлагается эффективный критерий интегрируемости, основанный на использовании редукций, интегрируемых по Дарбу.

Ключевые слова: интегрируемые уравнения, характеристические интегралы, алгебра Ли.

Integrable nonlinear discrete equations with three independent variables

The problem of classification of integrable nonlinear discrete equations with three independent variables is discussed. An effective criterion for integrability based on the use of Darboux-integrable reductions is proposed.

Keywords: integrable equations, characteristic integrals, Lie algebra.

В работе обсуждается метод классификации интегрируемых нелинейных цепочек с тремя независимыми переменными следующего вида

$$u_{n+1,x}^j = f(u_{n,x}^j, u_n^{j+1}, u_n^j, u_{n+1}^j, u_{n+1}^{j-1}),$$

развитый в работах [1-4], основанный на использовании редукций, имеющих вид систем дифференциально-разностных уравнений, интегрируемых в смысле Дарбу.

Основным объектом исследования является класс уравнений специального вида

$$u_{n+1,x}^j = u_{n,x}^j + f(u_n^{j+1}, u_n^j, u_{n+1}^j, u_{n+1}^{j-1}).$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00006, <https://rscf.ru/project/21-11-00006/>.

Хабибуллин Исмагил Талгатович, д.ф.-м.н., профессор, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Ismagil Habibullin (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of RAS, Ufa, Russia)

Кузнецова Мария Николаевна, к.ф.-м.н., с.н.с., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Mariya Kuznetsova (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of RAS, Ufa, Russia)

Хакимова Айгуль Ринатовна, к.ф.-м.н., н.с., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Aigul Khakimova (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of RAS, Ufa, Russia)

Решается задача о перечислении всех уравнений такого типа с точностью до точечных преобразований, допускающих иерархию конечно-полевых редукций в виде систем гиперболических уравнений, интегрируемых в смысле Дарбу. В качестве основного инструмента классификации используется характеристическая алгебра Ли-Райнхарта, т.е. алгебра Ли над кольцом локально-аналитических функций. Хорошо известно, что характеристические алгебры интегрируемых по Дарбу систем имеют конечную размерность. Структура характеристической алгебры определяется некоторым полиномом $P(\lambda)$. Для известных интегрируемых цепочек из рассматриваемого класса степень полинома равна двум или трем. В работе [4] проведена частичная классификация в случае, когда $\deg P(\lambda) = 2$.

Литература

1. *Habibullin I.* Characteristic Lie rings, finitely-generated modules and integrability conditions for (2+1)-dimensional lattices // *Physica Scripta*, **87**:6 (2013), 065005
2. *Попцова М.Н., Хабибуллин И.Т.* Алгебраические свойства квазилинейных двумеризованных цепочек, связанные с интегрируемостью // *Уфимск. матем. журн.*, **10**:3 (2018), 89–109
3. *Хабибуллин И.Т., Кузнецова М.Н.* О классификационном алгоритме интегрируемых двумеризованных цепочек на основе алгебр Ли–Райнхарта // *ТМФ*, **203**:1 (2020), 161–173
4. *Кузнецова М.Н., Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р.* К задаче о классификации интегрируемых цепочек с тремя независимыми переменными // *ТМФ*, **215**:2 (2023), 242–268

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕДУКЦИИ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ХИРОТЫ-МИВЫ

И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова

habibullinismagil@gmail.com, aigul.khakimova@mail.ru

УДК 517.9

Обсуждаются алгебраические редукции дискретных уравнений с тремя независимыми переменными, сводящие их к системам дискретных уравнений интегрируемым в смысле Дарбу. Такие редукции можно использовать для построения локализованных частных решений цепочек, а также наличие иерархии интегрируемых по Дарбу редукций может применяться в качестве классификационного критерия для описания интегрируемых трехмерных уравнений.

Ключевые слова: интегрируемость, решетчатое уравнение Тоды, характеристические интегралы, характеристическая алгебра.

Algebraic reductions of discrete equations of Hirota-Miwa type

Algebraic reductions of discrete equations with three independent variables are discussed, reducing them to systems of discrete equations integrable in the sense of Darboux. Such reductions can be used to construct localized partial solutions of chains, and the presence of a hierarchy of Darboux integrable reductions can be used as a classification criterion for describing integrable three-dimensional equations.

Keywords: integrability, lattice Toda equation, characteristic integrals, characteristic algebra.

Для нелинейных дискретных уравнений в размерности $1+1$ имеют ся легко проверяемые симметричные критерии интегрируемости, которые лежат в основе классификационных алгоритмов. Актуальная проблема создания эффективных методов классификации интегрируемых дискретных уравнений с тремя и более независимыми переменными остается открытой, поскольку в многомерье симметричный подход теряет свою эффективность из-за трудностей, связанных с нелокальностью.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00006, <https://rscf.ru/project/21-11-00006/>. А.Р. Хакимова является лауреатом премии «Молодая математика России» и хотела бы поблагодарить ее спонсоров и жюри.

Хабибуллин Исмагил Талгатович, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Ismagil Habibullin (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of RAS, Ufa, Russia)

Хакимова Айгуль Ринатовна, к.ф.-м.н., Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Aigul Khakimova (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of RAS, Ufa, Russia)

В наших недавних работах [1]-[4] мы обнаружили характерное свойство дискретных уравнений в 3D, которое, по-видимому, является эффективным критерием интегрируемости трехмерных уравнений. Выяснилось, что многие известные интегрируемые цепочки, включая уравнения типа двумеризованной цепочки Тоды, уравнения типа Тоды с одной непрерывной и двумя дискретными независимыми переменными, уравнения типа Хироты-Мивы, где все независимые переменные являются дискретными, характеризуются тем, что они допускают обрывы специального вида по одной из дискретных переменных, которые сводят цепочку к системе уравнений с двумя независимыми переменными, обладающей повышенной интегрируемостью, они имеют полные наборы интегралов по каждой из характеристик, т.е. являются интегрируемыми в смысле Дарбу.

В докладе планируется обсудить уравнения типа Хироты-Мивы, показать, что система дискретных уравнений допускает полный набор интегралов по рассматриваемому направлению тогда и только тогда, когда соответствующая этому направлению характеристическая алгебра имеет конечную размерность, а также привести примеры, подтверждающие гипотезу о том, что наличие иерархии интегрируемых в смысле Дарбу двумерных редукций присуще всем интегрируемым дискретным уравнениям типа Хироты-Мивы (более подробно, см. [3], [4]).

Литература

1. Попцова М.Н., Хабибуллин И.Т. Алгебраические свойства квазилинейных двумеризованных цепочек, связанные с интегрируемостью // Уфимск. матем. журн., **10:3** (2018), 89-109
2. Habibullin I.T., Khakimova A.R. Characteristic Lie algebras of integrable differential-difference equations in 3D // J. Phys. A: Math. Theor., **54:29** (2021), 295202, 34 pp.
3. Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Интегралы и характеристические алгебры систем дискретных уравнений на прямоугольном графе // ТМФ, **213:2** (2022), 320-346
4. Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. Алгебраические редукции дискретных уравнений типа Хироты-Мивы // Уфимск. матем. журн., **14:4** (2022), 117-130

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО
УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ
ФРИЗА-ЛИУВИЛЛЯ-СИНУС ГОРДОНА (МКДФ-Л-СГ) С
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ В КЛАССЕ
ПЕРИОДИЧЕСКИХ БЕСКОНЕЧНОЗОННЫХ ФУНКЦИЙ**

**А.Б. Хасанов, Х.Н. Нормуродов, Р.Х. Эшбеков
ahasanov2002@mail.ru, normurodov.96@bk.ru,
rayxonbek@mail.ru**

УДК 517.957

В данной работе метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования нелинейного уравнения МКДФ-Л-сГ с дополнительным членом в классе периодических бесконечнозонных функций.

Ключевые слова: Модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза-Лиувилля-синус Гордона (мКДФ-Л-сГ), оператор Дирака, спектральные данные, система уравнений Дубровина, формулы следов.

Integration of the modified Korteweg-de Vries-Liouville-sine-Gordon equation (mKdV-L-sG) with an additional term in the class of periodic infinite-gap functions

In this paper, the inverse spectral problem method is used to integrate the nonlinear mKdV-L-sG equation with an additional term in the class of periodic infinite-gap functions.

Keywords: Modified Korteweg-de Vries-Liouville-sine Gordon equation (mKdV-L-sG), Dirac operator, spectral data, Dubrovin's system of equations, trace formulas.

В настоящей работе рассматривается задача Коши для комбинация модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза, Лиувилля и синус Гордона (МКДФ-Л-сГ) с дополнительным членом вида

$$q_{xt} = a(t) \left\{ q_{xxxx} - \frac{3}{2} q_x^2 q_{xx} \right\} + b(t)e^q + c(t)e^{-q} - d(t)q_{xx}, \quad q = q(x, t), \quad x \in R, \quad t > 0 \quad (1)$$

с начальным условием

$$q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \quad q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^6(R) \quad (2)$$

Хасанов Акназар Бекдурдиевич, д.ф.-м.н., профессор, Самаркандский Государственный Университет (Самарканд, Узбекистан)

Нормуродов Ходжимурод Нормуминович, аспирант, Самаркандский Государственный Университет (Самарканд, Узбекистан)

Эшбеков Райхонбек Хубайдулло угли, аспирант, Самаркандский Государственный Университет (Самарканд, Узбекистан)

в классе действительных бесконечнозонных π -периодических по x функций:

$$q(x + \pi, t) = q(x, t), \quad q(x, t) \in C_{x,t}^{4,1}(t > 0) \cap C(t \geq 0). \quad (3)$$

Здесь $a(t), b(t), c(t), d(t) \in C([0, \infty))$ -заданные непрерывные ограниченные функции.

В этом тезисе предлагается алгоритм построения решения $q(x, t), x \in R, t > 0$, задачи (1)-(3) сведением её к обратной спектральной задаче для оператора Дирака:

$$L(\tau, t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}q'_x(x + \tau, t) \\ \frac{1}{2}q'_x(x + \tau, t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Обозначим через $c(x, \lambda, \tau, t) = (c_1(x, \lambda, \tau, t), c_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ и $s(x, \lambda, \tau, t) = (s_1(x, \lambda, \tau, t), s_2(x, \lambda, \tau, t))^T$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0, \lambda, \tau, t) = (1, 0)^T$ и $s(0, \lambda, \tau, t) = (0, 1)^T$. Функция $\Delta(\lambda, \tau, t) = c_1(\pi, \lambda, \tau, t) + s_2(\pi, \lambda, \tau, t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (4).

Спектр оператора Дирака $L(\tau, t)$ чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L) = \{\lambda \in R : |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = R \setminus \left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right).$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}), n \in Z \setminus \{0\}$, называются лакунами, где λ_n , корни уравнения $\Delta(\lambda) \mp 2 = 0$. Они совпадают с собственными значениями периодической или антипериодической $(y(0) = \pm y(\pi))$ задачи для уравнения (4).

Корни уравнения $s_1(\pi, \lambda, \tau, t) = 0$ обозначим через $\xi_n(\tau, t), n \in Z \setminus \{0\}$, при этом $\xi_n(\tau, t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}], n \in Z \setminus \{0\}$.

Числа $\xi_n(\tau, t), n \in Z \setminus \{0\}$, и знаки $\sigma_n(\tau, t) = \text{sign}\{s_2(\pi, \xi_n, \tau, t) - c_1(\pi, \xi_n, \tau, t)\}, n \in Z \setminus \{0\}$, называются спектральными параметрами оператора $L(\tau, t)$. Спектральные параметры $\xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1, n \in Z \setminus \{0\}$, и границы спектра $\lambda_n(\tau, t), n \in Z \setminus \{0\}$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau, t)$.

Задача восстановления коэффициента $q'_x(x, t)$ оператора $L(\tau, t)$ по спектральным данным называется обратной задачей.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $q(x, t), x \in R, t > 0$, решение задачи Коши (1)-(3). Тогда спектральные данные $\{\lambda_n(\tau, t), \xi_n(\tau, t), \sigma_n(\tau, t) = \pm 1\}, n \in Z \setminus \{0\}$, оператора $L(\tau, t)$, удовлетворяют аналогу системы дифференциальных уравнений Дубровина:

$$\frac{\partial \lambda_n(\tau, t)}{\partial t} = 0, \quad n \in Z \setminus \{0\};$$

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) g_n(\xi(\tau, t)), \quad n \in Z \setminus \{0\} \quad (5).$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in Z \setminus \{0\}$, меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau, t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$, с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in Z \setminus \{0\} \quad (6)$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1$, $n \in Z \setminus \{0\}$ - спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau, 0)$ вида

$$L(\tau, 0)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}q'_0(x+\tau) \\ \frac{1}{2}q'_0(x+\tau) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$x, \tau \in R$. Последовательность $h_n(\xi)$ и $g_n(\xi)$, $n \in Z \setminus \{0\}$, определяется по формулам:

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau, t))} \times f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{k=-\infty, k \neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau, t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau, t))}{(\xi_k(\tau, t) - \xi_n(\tau, t))^2}},$$

$$g_n(\xi) = a(t) \left\{ 4\xi_n^3(\tau, t) + \xi_n(\tau, t) \left[\frac{1}{2}q_\tau^2 + q_{\tau\tau} \right] \right\} + \frac{b(t)}{2\xi_n(\tau, t)} \exp \{q(\tau, t)\} + d(t)\xi_n(\tau, t).$$

Теорема 2. Если начальная функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию

$$q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^6(R),$$

то существует однозначно определяемое решение $q'_x(x, t)$, $x \in R$, $t > 0$ задачи (1)-(3), которое определяется по формуле

$$q'_\tau(\tau, t) = 2 \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)),$$

где координаты $\xi(\tau, t) = (\dots, \xi_{-n}(\tau, t), \dots, \xi_{-1}(\tau, t), \xi_1(\tau, t), \dots, \xi_n(\tau, t), \dots)$ и $\sigma(\tau, t) = (\dots, \sigma_{-n}(\tau, t), \dots, \sigma_{-1}(\tau, t), \sigma_1(\tau, t), \dots, \sigma_n(\tau, t), \dots)$ удовлетворяют системы дифференциальных уравнений Дубровина (5), (6).

Литература

1. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation. // J.Phys.Soc.Japn., **32**:6 (1972), 44-47.
2. Khasanov A. B., Normurodov Kh. N., Khudaerov U. O. Integrating the modified Korteweg-de Vries- sine-Gordon equation in the class of periodic infinite-gap functions. // Theoretical and Mathematical Physics, **214** (2023), 170-182.

О КАТАСТРОФАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В СЛУЧАЯХ ЧАПЛЫГИНА И БЕХЕРТА-СТАНЮКОВИЧА

А.М. Шавлуков
aza3727@yandex.ru

УДК 517.958

Описаны типичные с точки зрения математической теории катастроф особенности решений уравнений одномерной газовой динамики в важных частных случаях, не исследованных ранее: случае Чаплыгина (катастрофа «точечной» сборки и сечение гиперболической омбилики) и случае Бехерта-Станюковича (сечение гиперболической омбилики). Указано отличие от исследованного ранее более общего случая с достаточно гладкой функцией давления.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, уравнения газовой динамики, теория особенностей, теория катастроф.

On catastrophes of solutions to equations of one-dimensional gas flow in the Chaplygin and Bechert-Stanyukovich cases

Typical from the point of view of the catastrophe theory, singularities of solutions to the equations of one-dimensional gas flow are described in important special cases that have not been studied previously: the Chaplygin case («point» cusp and the section of the hyperbolic umbilic) and the Bechert-Stanyukovich case (the section of the hyperbolic umbilic). The difference from the previously studied more general case with a fairly smooth pressure function is indicated.

Keywords: differential equations, gas dynamics equations, singularity theory, catastrophe theory.

Рассматриваются типичные (с точки зрения математической теории катастроф) особенности решений гиперболической системы уравнений одномерной газовой динамики

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где функция $\alpha(\rho) = \frac{p}{\rho}$ раскладывается в ряд Тейлора в окрестности точки $\rho_* > 0$. Здесь $p(\rho)$ – уравнение состояния газа, $\rho > 0$.

Нами рассматриваются два варианта давления, отвечающие случаям Чаплыгина ($p = a^2 - k^2\rho^{-1}$) и Бехерта-Станюковича ($p = a^2\rho^3$), где a, k – произвольные вещественные постоянные.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00006, <https://rscf.ru/project/21-11-00006/>

Шавлуков Азамат Мавлетович, аспирант (Уфа, Россия); Azamat Shavlukov (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science, Ufa, Russia)

В обоих случаях асимптотику решения в окрестности конечной точки $(\rho_*, u_*; t_*, x_*)$, в которой стремятся к бесконечности все первые производные решения, задают критические точки построенной функции $F(\rho, u; t, x)$. Описана катастрофа типа сечения гиперболической омбилики (D_{4+} в классификации Арнольда):

$$F(r, l; t, x) = \frac{y_1^3 + y_2^3}{3} - k_3 y_1 y_2 - k_2 y_1 - k_1 y_2 + \gamma,$$

при этом в случае Бехерта-Станюковича $k_3 \equiv 0$.

Так же в случае Чаплыгина при других ограничениях описана катастрофа типа сборки (A_3):

$$S^3 + w_{12} Y^2 S + P = 0,$$

причем оказывается, что особенность локализована либо в единственной точке (при $w_{12} < 0$), либо на ветвях сдвоенной каустики (при $w_{12} > 0$).

Литература

1. *Богачевский И.А., Туницкий Д.В.* Особенности многозначных решений квазилинейных гиперболических систем // Дифференциальные уравнения и динамические системы, Сборник статей, Труды МИАН, **308** (2020), 76–87; Proc. Steklov Inst. Math., **308** (2020), 67–78
2. *Рахимов А.Х.* Особенности римановых инвариантов // Функциональный анализ и его приложения, **27**:1 (1993), 46–59; Funct. Anal. Appl., **27**:1 (1993), 39–50
3. *Dubrovin B.A., Grava T., Klein C.* On Universality of Critical Behaviour in the Critical Behaviour in the Focusing Nonlinear Schrödinger Equation. Elliptic Umbilic Catstrophe and the Tritonque to the Painleve-I Equation // Journal of Nonlinear Science, **19**:1 (2009), 57–94

УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ
Э.Р. Шайхиев, Р.Д. Муртазина, А.Д. Низамова,
Н.А. Васенина, Г.К. Галина,
erik08082002@mail.ru, reginaufa@yandex.ru, adeshka@yandex.ru,
zhiber.na@gmail.ru

УДК 517.518

В работе получены законы сохранения нулевого, первого и второго порядков и проведен симметричный анализ нелинейного уравнения Шредингера. Изучены случаи для правой части, когда уравнение обладает широким набором законов сохранения.

Ключевые слова: Нелинейное уравнение Шредингера, закон сохранения, преобразование, оператор полного дифференцирования, система дифференциальных уравнений.

Schrodinger equation and conservation laws

In this paper, the conservation laws of zero, first and second orders are obtained and a symmetric analysis of the nonlinear Schrodinger equation is carried out. Cases were studied in which conditions were obtained that the right-hand side of the equation of this type, which has a wide set of conservation laws, should satisfy.

Keywords: Nonlinear Schrodinger equation, conservation law, transformation, full differentiation operator, system of differential equations, symmetric analysis.

В работе сформулированы законы сохранения нулевого, первого и второго порядков и проведен симметричный анализ нелинейного уравнения Шредингера вида

$$\begin{cases} u_t = u_x + f(uv)u \\ v_t = -v_x + f(uv)v. \end{cases}$$

В результате мы получили закон сохранения нулевого порядка для рассматриваемого уравнения в следующей форме

$$D_t(uv) = D_x(vu_x - uv_x).$$

Шайхиев Эрик Радикович, студент, УУНиТ (Уфа, Россия); Erik Radikovich Shaihiyev (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Муртазина Регина Димовна, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Regina Dimovna Murtazina (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Низамова Аделина Димовна, к.ф.-м.н., с.н.с., Институт Механики УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Adelina Dimovna Nizamova (Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC of the RAS, Ufa, Russia)

Васенина Наталья Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Nataliya Anatol'evna Vasenina (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Галина Галия Кабировна, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Galiya Kabirovna Galina (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Мы также вывели закон сохранения первого порядка для данного уравнения в виде

$$D_t(b(u, v)v_x + c(u, v)u_x + \phi(uv)) = D_x(cu_{xx} - bv_{xx} + av_x + q(uv)),$$

И, наконец, в заключение мы приводим закон сохранения второго порядка изучаемого нами уравнения

$$\begin{aligned} D_t(au_{xx}v_{xx} + b(u, v, u_x, v_x)v_{xx}u_{xx} + c(u, v, u_x, v_x)vu_{xx} + d(u, v, u_x) = \\ = D_x((av_{xx} + b)u_{xxx} - (au_{xx} + b)v_{xxx} + (c_{u_x} - b_{v_x})v_{xx}u_{xx} + (d_{u_x} - b_u u_x - \\ - b_v v_x)u_{xx} - (d_{v_x} - c_u u_x - c_v v_x)v_{xx} + S(u, v, u_x, v_x)). \end{aligned}$$

Литература

1. Муртазина Р.Д., Садриева Р.Т., Сидельникова Н.А. Регулярность решения радиального уравнения // Вестник Башкирского университета, 2022. Т. 27, № 1. С. 18–24.
2. Галина Г.К., Муртазина Р.Д., Низамова А.Д., Садриева Р.Т., Сидельникова Н.А. Исследование решения одномерного стационарного уравнения Шредингера на бесконечности // Вестник Башкирского университета, 2022. Т. 27, № 2. С. 250–258.
3. Кудашева Е.Г., Муртазина Р.Д., Низамова А.Д., Сидельникова Н.А. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Устойчивость течения жидкостей в канале с линейным профилем температуры. М.: РУСАЙНС, 2021.
4. Сидельникова Н.А., Жибер А.В., Муртазина Р.Д. Дифференциальные уравнения гиперболического типа. Уфа: РИЦ БашГУ, 2021.
5. Сидельникова Н.А. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Уфа: РИЦ БашГУ, 2020.
6. Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42. No. 9. Pp. 2211–2215. DOI: 10.1134/S1995080221090249.
7. Сидельникова Н.А. Об индексах дефекта сингулярного дифференциального оператора, порожденного выражением $y^{IV} - 2a(x^{2\alpha}y')' + x^\beta y = \lambda y$ // Математические заметки. 2003. Т. 73, № 1. С. 148–151.
8. Муртазина Р.Д. Нелинейные гиперболические уравнения и характеристические алгебры Ли // Труды института математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13. № 4. С. 103–118.
9. Низамова А.Д., Черданцев И.Ю., Муртазина Р.Д., Сидельникова Н.А. Векторный и тензорный анализ. Москва: РУСАЙНС, 2023.
10. Низамова А.Д., Муртазина Р.Д., Сидельников А.В., Сидельникова Н.А., Шарипова Л.Д. Оценка относительной погрешности вычислений краевой задачи конечно-разностным и спектральным методами

и их перспективы применения в вольтамперометрических мультисенсорных системах // Вестник Башкирского университета. 2023. Т. 28, № 1. С. 29-35.

11. Шайхиев Э.Р., Сидельникова Н.А., Низамова А.Д. Законы сохранения системы двух эволюционных уравнений специального вида // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: спутник Международной научной конференции "Уфимская осенняя математическая школа-2022". С. 8.

12. Валиев А.А., Низамова А.Д. Комплексное исследование вытеснения нефти водой в плоском канале // Многофазные системы. 2020. Т 15, № 1–2. С. 25.

13. Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчиев С.Ф. Исследование собственных функций возмущения поперечной составляющей скорости потока термовязких жидкостей // Многофазные системы. 2019. Т 14, № 2. С. 132-137.

14. Шайхиев Э.Р., Муртазина Р.Д., Низамова А.Д., Сидельникова Н.А., Галина Г.К. Законы сохранения нелинейного уравнения Шредингера // Вестник Башкирского университета, 2023. Т. 28. № 1. С. 15–21.

15. Сидельникова Н.А., Муртазина Р.Д., Нусратуллин Э.М. Канонические формы дифференциальных уравнений в частных производных механики и физики. Москва: РУСАЙНС, 2022.

16. Сидельникова Н.А., Зеркина А.В., Черданцев И.Ю. Высшая алгебра. Часть 1. Уфа: РИЦ БашГУ, 2021.

17. Сидельникова Н.А., Зеркина А.В., Черданцев И.Ю. Высшая алгебра. Часть 2. Уфа: ФГБОУ ВО УУНиТ, 2022.

18. Низамова А.Д., Муртазина Р.Д., Киреев В.Н., Урманчиев С.Ф. Введение в тензорный анализ и кинематику сплошных сред. Москва: РУСАЙНС, 2022.

19. Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчиев С.Ф. Об устойчивости ламинарного режима течения термовязких жидкостей // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Т. 1, № 2. С. 104–111.

20. Низамова А.Д. Влияние температурной зависимости вязкости на устойчивость плоскопараллельного течения жидкости // Известия Уфимского научного центра РАН. 2014. № 4. С. 12–16.

21. Жибер А.В., Мухаметова Г.З., Сидельникова Н.А. Основные дифференциальные уравнения математической физики. Уфа: РИЦ БашГУ. 2020.

22. Zhiber A.V., Murtazina R.D. On the characteristic Lie algebras for equations $u_{xy} = f(u, u_x)$ // Journal of Mathematical Sciences. 2008. V. 151. № 4. С. 3112–3122.

ГЛАВНЫЕ АСИМПТОТИКИ ХАРАКТЕРИСТИК ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА-ХОПФА.

М.Г. Юмагулов, М.Ф. Фазлытдинов
yum_mg@mail.ru, fazlitdin_marat@mail.ru

УДК 517.15

В работе предложены формулы для определения главных асимптотик характеристик периодических решений в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа с использованием ляпуновских величин. Основное внимание уделено получению формул для таких характеристик как показатели транскритичности по бифуркационному параметру и периоду, а также направленности бифуркационных решений в фазовом пространстве системы.

Ключевые слова: бифуркация Андронова-Хопфа, ляпуновская величина, бифуркация, периодическое решение.

The main asymptotics of the characteristics of periodic solutions in the Andronov-Hopf bifurcation problem.

The paper proposes formulas for determining the main asymptotic characteristic of periodic solutions in the Andronov-Hopf bifurcation problem using Lyapunov quantities. The calculation of Lyapunov quantities can be carried out using various methods.

Keywords: Andronov-Hopf bifurcation, Lyapunov quantity, bifurcation, periodic solution.

В исследовании бифуркации Андронова-Хопфа одними из важных результатов являются формулы, которые позволяют вычислить бифурцирующее решение системы, определить их устойчивость, оценить значения периода (см., например, [1, 2]).

Рассмотрим непрерывную динамическую систему, зависящую от параметра μ :

$$x' = A(\mu)x + a_2(x, \mu) + a_3(x, \mu) + \hat{a}_4(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где $A(\mu)$ - квадратная матрица, $a_2(x, \mu)$, $a_3(x, \mu)$ - однородные вектор-полиномы второго и третьего порядка по x соответственно, а $\hat{a}_4(x, \mu)$ является C^m -гладкой в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ и удовлетворяющей соотношению: $\|\hat{a}_4(x, \mu)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \rightarrow 0$ равномерно по μ .

Юмагулов Марат Гаязович, д.ф.-м.н., профессор, УУНИТ (Уфа, Россия); Marat Yumagulov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Фазлытдинов Марат Флюрович, главный специалист, Газпромнефть НТЦ (Санкт-Петербург, Россия); Marat Fazlytdinov (Gazpromneft STC, Saint Petersburg, Russia)

Пусть при некотором значении параметра $\mu = \mu_0$ в системе (1) матрица $A_0 = A(\mu_0)$ имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_0$ ($\omega_0 > 0$). В этом случае основным сценарием бифуркации является бифуркация Андронова-Хопфа.

Согласно методам, основанным на теории нормальных форм, системе (1) при $\mu = \mu_0$ можно записать в виде (см., например, [2]):

$$\begin{cases} x'_1 = -\omega_0 x_2 + (L_1 x_1 - \Omega_1 x_2)(x_1^2 + x_2^2) + o(r^3) \\ x'_2 = \omega_0 x_1 + (\Omega_1 x_1 + L_1 x_2)(x_1^2 + x_2^2) + o(r^3) \end{cases},$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Числа L_1 и Ω_1 называют *ляпуновскими величинами* системы (1) в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа.

Найдутся ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in R^2$ такие, что выполняются равенства: $A_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig)$, $A_0^*(e^* + ig^*) = -i\omega_0(e^* + ig^*)$, где A_0^* – транспонированная матрица. Определим числа $\gamma_1 = (A'e, e^*) + (A'g, g^*)$ и $\gamma_2 = (A'e, g^*) - (A'g, e^*)$, где $A' = A'(\mu_0)$.

Формулы главных асимптотик характеристик периодических решений системы (1) можно записать в виде:

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0 + \varepsilon^2 \mu_2, \quad T(\varepsilon) = T_0 + \varepsilon^2 T_2, \quad x_0(\varepsilon) = \varepsilon e_1 + \varepsilon^3 e_3,$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} \mu_2 &= -\frac{2}{\gamma_1} L_1, \quad T_2 = -\frac{2\pi}{\omega_0^2} (\Omega_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} L_1), \\ e_1 &= e, \quad e_3 = -\frac{\omega_0}{\pi \gamma_1} L_1 e - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 \omega_0} L_1 g - \frac{1}{\omega_0} \Omega_1 g. \end{aligned}$$

Здесь $\mu(\varepsilon)$ – значение параметра при котором существует нестационарное периодическое решение, $T(\varepsilon)$ – его период, $x_0(\varepsilon)$ – точка на периодическом решении.

Литература

1. Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Имангулова Э.С. Главные асимптотики в задаче о бифуркации Андронова-Хопфа и их приложения // Дифференциальные уравнения, **53**:12 (2017), с. 1627-1642.
2. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.О. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2. — Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.

Index

- Ala Volkan, 177
- Dosmagulova K., 28
- Kanguzhin B., 28
- Korzyuk V.I., 198
- Rudzko J.V., 198
- Абдрахманов С.И., 160
- Абдурагимов Г.Э., 162
- Абузярова Н.Ф., 56
- Авхадиев Ф.Г., 58
- Агаларов А.М., 182
- Айткужина Н.Н., 60, 61
- Акманов А.А., 62
- Акманова С.В., 164
- Акопян Р.С., 91
- Аминова А.В., 167
- Апушкинская Д.Е., 170
- Асхабов С.Н., 172
- Бекназаров Дж.Х., 131
- Бибердорф Э.А., 5, 52
- Бодренко И.И., 64
- Бондаренко Н.П., 9
- Брайчев Г.Г., 66
- Валеев Н.Ф., 11, 44
- Валеева Л.Н., 13
- Ван Л., 5
- Васенина Н.А., 249
- Вильданова В.Ф., 175
- Габдрахманов Р.И., 180
- Гаджимурадов Т.А., 182
- Гайсин А.М., 60, 61
- Гайсин Р.А., 60, 61, 70
- Галина Г.К., 249
- Гарифуллин Р.Н., 186
- Давлетова Л.Г., 20
- Даулетбай Б.Н., 188
- Деревцов Е.Ю., 72
- Дмитриев С.В., 191
- Доброхотов С.Ю., 16
- Дютин А.Ю., 76
- Екомасов Е.Г., 191
- Есмаханова К.Р., 233
- Закариева З.А., 233
- Иванова О.А., 79, 102
- Избяков И.М., 82
- Ильясов Я.Ш., 189
- Исаев К.П., 83
- Ишкин Х.К., 17, 20
- Кабанко М.В., 97
- Кабанов Д.К., 191
- Кайырбек Ж.А., 29
- Какушкин С.Н., 25
- Кангужин Б.Е., 29, 188
- Кащенко А.А., 193
- Кожевникова Л.М., 195
- Конечная Н.Н., 30
- Кораблина Ю.В., 86
- Кузнецова М.А., 32
- Кузнецова М.Н., 201, 240
- Кулагин А.Е., 203
- Кучкарова А.Н., 34
- Лангаршоев М.Р., 89
- Линчук Л.В., 206
- Лобода А.В., 91
- Лукашук В.О., 214
- Луценко А.В., 83, 156
- Макин А.С., 36
- Малютин В.Б., 94
- Малютин К.Г., 97
- Мануйлов В.М., 100
- Мелихов С.Н., 79, 102

Миратов С.К., 225
Миратов С.К., 222
Мирзоев К.А., 22
Мукминов Ф.Х., 175
Муравник А.Б., 209
Муртазина Р.Д., 249
Мусин И.Х., 156
Мустафина М.О., 29

Назирова Э.А., 44
Наимов А.Н., 211
Наливкин В.В., 214
Напалков В.В., 105, 109
Насыров С.Р., 76
Невский М.В., 113
Низамова А.Д., 249
Нормуродов Х.Н., 244
Нуржанов Б.О., 94
Нуятов А.А., 105, 109

Одинабеков Д.М., 117

Павленко В.А., 216
Поляков Д.М., 39
Попов А.Ю., 120
Починка О.В., 218

Родин А.С., 220

Сакиева А.У., 238
Салимова А.Е., 122
Самсонов К.Ю., 191
Сафарзода Э.Х., 146
Сафаров Д., 222
Сафаров Д.С., 225
Сафонова Т.А., 22
Седов А.И., 42
Сио А., 228
Солиев Ю.С., 125
Солонуха О.В., 230
Сулейменов М.К., 233
Султанаев Я.Т., 44
Сучкова Д.А., 235

Талбаков Ф.М., 128, 146
Ташпулатов С.М., 46

Тухлиев Д.К., 134
Тухлиев К., 131, 137

Уткин А.В., 139

Фазлытдинов М.Ф., 252
Фазуллин З.Ю., 49
Фахретдинов М.И., 191

Хабибуллин Б.Н., 122, 141
Хабибуллин И.Т., 238, 240,
242

Хайруллоев Ш.А., 143
Хакимов Д.Р., 167
Хакимова А.Р., 238, 240, 242
Хасанов А.Б., 244
Хасанов Ю.Х., 146
Хокиев Д.Дж., 149

Шабалин П.Л., 151
Шавлуков А.М., 247
Шайхиев Э.Р., 249
Шаповалов А.В., 203
Шарова А.В., 52
Шерстюков В.Б., 120
Шмидт Е.С., 153

Эшбеков Р.Х., 244

Юлмухаметов Р.С., 83, 156
Юмагулов М.Г., 252

Научное издание

**Материалы международной
научной конференции
УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2023**

Том 1

В авторской редакции

Подписано в печать 02.10.2023 г. Формат 60х90/16.

Печать: цифровая. Гарнитура: СМУ

Усл. печ. л. 14,90. Тираж 500. Заказ 1890.



**Отпечатано в редакционно-издательском отделе
НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА «АЭТЕРНА»**

450076, г. Уфа, ул. Пушкина 120

<https://aeterna-ufa.ru>

info@aeterna-ufa.ru

+7 (347) 266 60 68