

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ УФИЦ РАН

**МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ
НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
«УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2024»**

Том 2

г. Уфа, 2 октября – 5 октября 2024 г.



СЕКЦИИ:

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ»

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

Уфа
Аэтерна
2024

УДК 517
ББК 22.1
У 88

Мероприятие проводится при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа.

Печатается по решению Ученого совета института информатики, математики и робототехники Уфимского университета науки и технологий.

Редакционная коллегия:

д.ф.-м.н. **З.Ю. Фазуллин** (отв. редактор);

д.ф.-м.н. **М.Г. Юмагулов**;

д.ф.-м.н. **Р.С. Юлмухаметов**;

д.ф.-м.н. **О.А. Кривошеева**;

А.С. Белова (отв. секретарь);

Р.И. Габдрахманов (отв. секретарь)

Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 2 октября – 5 октября 2024 г.). В 2 томах. Том 2 / отв. редактор З.Ю. Фазуллин. - Уфа: Аэтерна, 2024. - 344 с.

В предоставленных материалах конференции детально обсуждаются новейшие результаты и открытые проблемы в спектральной теории, нелинейном и комплексном анализе, в теории дифференциальных уравнений, математическом моделировании. Материалы сборника предназначены для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся указанными проблемами.

Организаторы конференции: Уфимский университет науки и технологий, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (г. Уфа), НОМЦ Приволжского федерального округа.

Благодарим компании, оказавшие поддержку проведению конференции.



ISBN 978-5-00249-059-2 т.2
ISBN 978-5-00249-060-8

© Коллектив авторов, 2024
© УУНИТ, 2024
© Аэтерна, 2024

Уфимский университет науки и технологий совместно с Институтом математики с ВЦ УФИЦ РАН ежегодно, начиная с 2012 г., проводит международные научные конференции, основные тематики которых связаны со спектральной теорией, с нелинейным и комплексным анализом, дифференциальными уравнениями и математическим моделированием. Выбор таких направлений определялся как активной работой в указанных областях многих математиков из Башкортостана, взаимопроникновением идей и методов спектральной теории, нелинейного и комплексного анализа при решении многих актуальных задач в указанных областях, так и сотрудничеством с коллегами из многих научных центров России и зарубежья.

В последние годы особенно активным стало сотрудничество в указанных областях математики с учеными из ряда научных и образовательных организаций Узбекистана, Казахстана и Таджикистана. Со многими организациями заключены соответствующие Договоры о научном сотрудничестве.

Начиная с 2019 г. конференция приобрела новый статус, преобразовавшись в "Уфимскую осеннюю математическую школу". Теперь, наряду с обсуждением новейших научных результатов и открытых проблем, важное место в работе конференции занимают обзорные лекции ведущих ученых для аспирантов и молодых ученых.

Научная программа конференции УОМШ-24 охватывает следующие направления:

- спектральная теория операторов;
- комплексный и функциональный анализ;
- нелинейные уравнения;
- дифференциальные уравнения и их приложения;
- математическое моделирование.

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2024»

СЕКЦИЯ

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»

г. Уфа, 2 октября – 5 октября 2024 г.

ЛОКАЛИЗОВАННЫЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ИНДЕКС И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

Х.Х Аббас, А.Ю. Савин

haydar-abbas@outlook.com, a.yu.savin@gmail.com

С действием группы на многообразии ассоциирован класс нелокальных операторов, порождённый псевдодифференциальными операторами и операторами сдвига вдоль орбит действия. В данной работе предъявляется формула индекса для неизометрического действия группы $\mathbb{Z} \times F$, где F — конечная группа. В частности, найдены вклады в индекс от элементов конечного порядка и соответствующих подмногообразий неподвижных точек.

Ключевые слова: характер Черна, класс Todd, неподвижные точки, теорема об индексе.

LOCALISED TOPOLOGICAL INDEX AND FIXED POINTS

The action of a group on a manifold is associated with a class of non-local operators generated by pseudo-differential operators and shift operators along the orbits of the action. In this paper, we present an index formula for a non-isometric action of the group $\mathbb{Z} \times F$, where F is a finite group. In particular, we find contributions to the index from elements of finite order and the corresponding submanifolds of fixed points.

Keywords: Chern character, Todd class, fixed points, index theorem.

В математической физике и некоммутативной геометрии возникают операторы вида линейной комбинации

$$D = \sum_{g \in G} D_g T_g : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M) \quad (1)$$

операторов сдвига $(T_g u)(x) = u(g^{-1}(x))$, отвечающих действию группы G на гладком многообразии M диффеоморфизмами, где коэффициенты D_g являются (псевдо)дифференциальными операторами на M .

Оператору (1) сопоставляется символ $\sigma(D) \in C^\infty(S^*M) \rtimes G$ как элемент (алгебраического) скрещенного произведения алгебры функций на косферическом расслоении многообразия и группы G , действующей на этой алгебре. При этом условии эллиптичности состоит

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-21-0033.

Аббас Хайдар Хамед, аспирант, РУДН (Москва, Россия); Haydar Abbas (Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia)

Савин Антон Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, РУДН (Москва, Россия); Anton Savin (Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia)

в требовании обратимости этого элемента (для простоты будем требовать обратимости в указанном скрещенном произведении). Это показывает, что символ эллиптического оператора определяет элемент $[\sigma(D)] \in K_1(C^\infty(S^*M) \rtimes G)$ в K -группе скрещенного произведения. Теперь топологический индекс оператора D , обозначаемый через $\text{ind}_t D$, можно строить как спаривание Черна–Конна

$$\text{ind}_t D = \langle [\sigma(D)], \text{Td} \rangle, \quad \text{Td} \in HP^{odd}(C^\infty(S^*M) \rtimes G) \quad (2)$$

класса в K -теории, определяемого символом оператора, и некоторого класса Td (аналога класса Тодда в топологии) в периодических циклических когомологиях скрещенного произведения.

Цель данной работы — построить локализованные на классе сопряженности $\langle f \rangle \subset G$ классы Тодда $\text{Td}^f \in HP^{odd}(C^\infty(S^*M) \rtimes G)_{\langle f \rangle}$ для всех эллиптических элементов f , т.е. для элементов конечного порядка. Наше построение основано на обобщении эквивариантного характера Черна из [1] на случай, когда рассматривается расслоение над множеством неподвижных точек элемента f , а также операциях в K -теории, позволяющих учесть поправки к классу Тодда, отвечающие нормальному расслоению к многообразию неподвижных точек (см.[2]).

Основным результатом работы является теорема об индексе для группы $G = \mathbb{Z} \times F$, где F — произвольная конечная группа.

Литература

1. *A. Gorokhovsky*. Characters of cycles, equivariant characteristic classes and Fredholm modules. *Comm. Math. Phys.*, 208(1):1–23, 1999
2. *M. F. Atiyah and I. M. Singer*. The index of elliptic operators III. *Ann. Math.*, 87:546–604, 1968.
3. *H. H. Abbas, A. Yu. Savin*, “Index of elliptic operators associated with discrete groups and fixed points”, *Math. Notes*, 116:2 (2024), 139–167

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМЫ С СИНГУЛЯРНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

Н. Авилтай,

avyltay.nauryzbay@gmail.com

УДК 517.9

В настоящей работе построено асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной начальной задачи с произвольной степенью точности по малому параметру. Сформулирована теорема об оценке остаточного члена асимптотического разложения, что показывает оценку разности между точным решением и его приближенным решением. Приведен пример с моделированием, подтверждающий теоретический результат.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, дифференциальные уравнения с сингулярными импульсами, малый параметр.

Asymptotic expansion of the solution for singular perturbed linear impulsive systems

In this study, an asymptotic expansion of the solution of a singularly perturbed initial problem with an arbitrary degree of accuracy for a small parameter is constructed. A theorem for estimating the residual term of the asymptotic expansion is formulated, which estimates the difference between the exact solution and its approximation. The theoretical results are confirmed by a modelling example.

Keywords: singular perturbation, differential equations with singular impulses, small parameter.

Рассмотрим сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений, в которой импульсы также являются сингулярно возмущенными. В центре нашего обсуждения находится следующая система

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dz}{dt} &= A_1(t)z + B_1(t)y + \varepsilon f_1(t), \\ \frac{dy}{dt} &= A_2(t)z + B_2(t)y + f_2(t),\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\varepsilon \Delta z|_{t=\theta_i} &= C_1(\theta_i)z + C_2(\theta_i)y + \varepsilon I_1(\theta_i), \\ \Delta y|_{t=\theta_i} &= C_3(\theta_i)y + I_2(\theta_i)\end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00000).
Авилтай Наурызбай, магистр, КазНУ (Алматы, Казахстан); Aviltay Nauryzbay (Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan)

с начальными условиями

$$z(0, \varepsilon) = z^0, \quad y(0, \varepsilon) = y^0,$$

где $\varepsilon > 0$ малый параметр, z^0 и y^0 некоторые константы, не зависящие от ε , $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_p < T$, $\theta_i, i = 1, 2, \dots, p$, являются различными моментами разрыва в $(0, T)$.

Во многих работах рассматривались импульсные системы с малым параметром только в дифференциальных уравнениях. Мы введем малый параметр и в уравнение импульса. Установим необходимое условие для того, чтобы предотвращать коллапс импульсной функции при уменьшении параметра до нуля. Построим асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной начальной задачи с произвольной степенью точности по малому параметру. Для построения искомого асимптотического решения используем метод граничных функций.

Теорема 1. *При условиях I-IV ряд (7) является асимптотическим рядом для решения задачи (1)-(3) при $\varepsilon \rightarrow 0$ на отрезке $0 \leq t \leq T$, т.е. справедлива оценка*

$$\begin{aligned} |z(t, \varepsilon) - Z_n(t, \varepsilon)| &= O(\varepsilon^{n+1}), \quad 0 \leq t \leq T, \\ |y(t, \varepsilon) - Y_n(t, \varepsilon)| &= O(\varepsilon^{n+1}), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Z_n(t, \varepsilon) &= Z_n^{(i)}(t, \varepsilon), Y_n(t, \varepsilon) = Y_n^{(i)}(t, \varepsilon), \theta_i < t \leq \theta_{i+1}, \\ Z_n^{(i)}(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \bar{z}_k(t) + \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \omega_k^{(i)}(\tau_i), \tau_i = \frac{t - \theta_i}{\varepsilon}, \\ Y_n^{(i)}(t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \bar{y}_k(t) + \varepsilon \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \nu_k^{(i)}(\tau_i), i = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Литература

1. Akhmet M., Çaç S. Tikhonov theorem for differential equations with singular impulses, Discontinuity, Nonlinearity and Complexity, 7(3) (2018), 291-303.

2. Akhmet M., Aviltay N., Davylbayev M.K. A case of impulsive singularity, KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series, 117(1) (2023), 3-14.

СИММЕТРИИ ПЯТИМЕРНЫХ ЖЕСТКИХ H -ПРОСТРАНСТВ $H_{32,2}$

А.В. Аминова, Д.Р. Хакимов

asya.aminova@kpfu.ru, dzhamoliddink@mail.ru

УДК 514.763

Исследуются пятимерные псевдоримановы многообразия в форме h -пространств H_{32} типа {32}. Дана классификация h -пространств $H_{32,2}$ по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований, найдены все проективно-подвижные метрики и указаны размерности, базисные элементы и структурные уравнения действующих в них максимальных негомотетических проективных алгебр Ли.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений с частными производными, дифференциальная геометрия, пятимерное псевдориманово многообразие, h -пространство H_{32} типа {32}, негомотетическое проективное движение, уравнения Киллинга, проективная алгебра Ли, проективно-геометрическая теория систем ОДУ.

SYMMETRIES OF FIVE-DIMENSIONAL RIGID H -SPACES $H_{32,2}$

Five-dimensional pseudo-Riemannian manifolds are investigated in the form of h -spaces H_{32} of type {32}. We classify h -spaces $H_{32,2}$ by (non-homothetic) Lie algebras of infinitesimal projective and affine transformations, find all projectively movable metrics, and indicate the dimensions, basis elements, and structure equations of the maximal non-homothetic projective Lie algebras acting in them.

Keywords: systems of partial differential equations, differential geometry, five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, h -space H_{32} of type {32}, non-homothetical projective motion, equations projective Lie algebra, projective-geometric theory of ODE.

Проективное преобразование псевдориманова многообразия M^n с проективной структурой Π сохраняет проективную структуру Π и переводит геодезические линии снова в геодезические.

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1438).

Аминова Ася Васильевна, д.ф.-м.н., профессор, КФУ (Казань, Россия); Asya Aminova (Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russia)

Хакимов Д.Р., к.ф.-м.н., доцент, КФУ (Казань, Россия); Dzhamoliddin Khakimov (Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russia)

В развитой А. В. Аминовой и Н. А.-М. Аминовым проективно-геометрической теории систем дифференциальных уравнений [1–9] отмечается, что проективные преобразования систематически возникают при исследовании симметрий дифференциальных уравнений математической физики. В частности, алгебра Ли инфинитезимальных точечных симметрий уравнения Кортевега-де Фриза является подалгеброй проективной, точнее, аффинной алгебры Ли, а уравнение Риккати можно рассматривать как "своеобразную реализацию" группы проективных преобразований на прямой [10].

Доклад посвящен исследованию симметрий систем дифференциальных уравнений геодезических в форме алгебр Ли инфинитезимальных проективных преобразований (проективных движений) 5-мерных псевдоримановых многообразий (M^5, g) — h -пространств $H_{32,2}$ типа {32} [11], [12], [13]. Определяются необходимые и достаточные условия, при которых $H_{32,2}$ является пространством постоянной (нулевой) кривизны. Находятся негомотетические проективные движения в $H_{32,2}$ непостоянной кривизны, исследуются гомотетии и изометрии указанных пространств, определяются размерности, базисные элементы и структурные уравнения действующих в них максимальных проективных алгебр Ли. В итоге получена классификация h -пространств $H_{32,2}$ типа {32} по (негомотетическим) алгебрам Ли инфинитезимальных проективных и аффинных преобразований.

Литература

1. Аминова А. В. "Аutomорфизмы геометрических структур как симметрии дифференциальных уравнений", Изв. вузов. Матем., 1994, №2, 3–10.
2. Аминова А. В. "Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий", УМН, 50:1 (1995), 69–142.
3. Аминова А. В. "Проективные преобразования и симметрии дифференциальных уравнений", Матем. сб., 186:12 (1995), 21–36.
4. A. V. Aminova, N. A.-M. Aminov, "Projective geometry of systems of differential equations: general conceptions", Tensor (N.S.), 62:1 (2000), 65–86.
5. Аминова А. В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий, Янус-К, М., 2003.
6. А. В. Аминова, Н. А.-М. Аминов, "Дифференциальные системы 4-го порядка с 4-мерной разрешимой группой симметрий, не содержащей абелевой подгруппы G_3 ", Изв. вузов. Матем., 2005, №6, 12–27.
7. А. В. Аминова, Н. А.-М. Аминов, "Проективная геометрия систем дифференциальных уравнений второго порядка", Матем. сб., 197:7 (2006), 3–28.
8. A. V. Aminova, N. A.-M. Aminov, "Geometric theory of differential systems: Linearization criterion for systems of second-order ordinary differential equations with a 4-dimensional solvable symmetry group of the Lie–Petrov type V II", J. Math. Sci., 158:2 (2009), 163–183.

9. А. В. Аминова, Н. А.-М. Аминов, "Пространства с проективной связностью Картана и групповой анализ систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка", Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 123, ВИНТИ, М., 2009, 58–80.

10. Н. Х. Ибрагимов, "Азбука группового анализа М.: Знание, 1989.

11. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. *О проективных движениях 5-мерных пространств. I. h-пространства типа {32}* // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. № 4. С. 21–31 (2018).

12. Aminova A. V., Khakimov D. R. *On the properties of the projective Lie algebras of rigid h-spaces H_{32} of the type {32}*, Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, **162**, no. 2, Kazan University, Kazan, 2020, 111–119.

13. Аминова А.В., Хакимов Д.Р. *Алгебры Ли проективных движений жестких h-пространств $H_{32,3}$ типа {32}* // Изв. вузов. Матем., 2024, № 7, 37–46.

ОБ УПРАВЛЕНИИ СЧЕТНЫМИ СПЕКТРАМИ ХАРАКТЕРИСТИК КОЛЕБЛЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Е. Артисевич
artisevichangela@gmail.com

УДК 517.926.4

Для любого счетного множества неотрицательных чисел, содержащего нуль, существует уравнение с наперед заданным порядком $n > 2$, у которого спектры характеристик колеблемости совпадают с этим множеством.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, число нулей, характеристическая частота, показатель колеблемости.

On the control of countable spectra of oscillation characteristics of linear homogeneous differential equations

For any countable set of non-negative numbers containing zero, there exists an equation with a predetermined order $n > 2$, whose spectra of oscillation characteristics coincide with this set.

Keywords: differential equation, number of zeros, characteristic frequency, oscillation exponent.

Для заданного натурального n рассмотрим множество $\tilde{\mathcal{E}}^n$ линейных однородных уравнений n -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0; +\infty),$$

задаваемых наборами *непрерывных* функций $a \equiv (a_1, \dots, a_n): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ обозначим через $S_*(a)$.

Определение 1[1,2]. *Верхняя (нижняя) характеристическая частота нулей функции* $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ зададим формулой

$$\hat{\omega}(y) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu(y, t) \quad \left(\check{\omega}(y) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu(y, t) \right),$$

где $\nu(y, t)$ – число нулей функции y на промежутке $(0, t]$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 075-03-2024-074 по проекту «Исследование асимптотических характеристик колеблемости дифференциальных уравнений и систем, а также оптимизационных методов».

Артисевич Анжела Евгеньевна, старший преподаватель АГУ (Майкоп, Россия);
Angela Artisevich (Adyge State University, Maykop, Russia)

Определение 2 [2,3]. *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости нулей любого решения $y \in \mathcal{S}_*(a)$ каждого уравнения $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$ зададим формулами*

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_\bullet(y) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu(y, m, t) & \left(\check{\nu}_\bullet(y) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu(y, m, t) \right), \\ \hat{\nu}_\circ(y) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t} \nu(y, m, t) & \left(\check{\nu}_\circ(y) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}^n} \frac{\pi}{t} \nu(y, m, t) \right), \end{aligned}$$

где $\nu(y, m, t)$ – число нулей скалярного произведения вектора m и вектор-функции $(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$ на промежутке $(0, t]$.

Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все характеристики колеблемости равны нулю, так как эти решения в силу теоремы существования и единственности не имеют нулей. Спектры (множества значений на ненулевых решениях) характеристик колеблемости любого уравнения второго порядка состоят из одного неотрицательного числа [2]. В [4] продемонстрирована возможность управления счетным спектром верхней характеристической частоты нулей уравнения третьего порядка. Оказалось, что этот результат можно обобщить и на остальные характеристики колеблемости дифференциальных уравнений порядка выше второго.

Теорема. *Для любых $n \geq 3$ и счетного множества S положительных чисел существует такое уравнение $a \in \tilde{\mathcal{E}}^n$, что справедливы равенства*

$$\check{\omega}(y) = \hat{\omega}(y) = \check{\nu}_\circ(y) = \hat{\nu}_\circ(y) = \check{\nu}_\bullet(y) = \hat{\nu}_\bullet(y), \quad y \in \mathcal{S}_*(a),$$

$$\check{\omega}(\mathcal{S}_*(a)) = S \cup \{0\}.$$

Литература

1. *Сергеев И.Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Труды сем. им. И. Г. Петровского, **25** (2006), 249-294.
2. *Сергеев И.Н.* Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Известия РАН. Серия математическая, **76:1** (2012), 149-172.
3. *Сергеев И.Н.* Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Известия Института математики и информатики УдГУ, **46:2** (2015), 171-183.
4. *Войделевич А.С.* Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Изв. НАН Беларуси. Сер. физико-матем. наук, **3** (2015), 17-23.

MULTI-POINT BOUNDARY PROBLEMS

Ж. Артыкбаева,
artykbaeva.zhanar@gmail.com

УДК 517.9

In this report questions of number and type of conditions requirements to some equation for it to have a unique solution in the designated space.

Keywords: Differential-algebraic equation, differential-boundary operator, boundary value problem, inverse operator, uniqueness of solutions.

We study a differential-boundary equation incorporating algebraic terms over the finite interval $0 < x < 1$

$$l(y) \equiv \frac{d}{dx} \left(\frac{dy(x)}{dx} + \sum_{i=1}^k h_i(x) U_i(y) + \sum_{j=1}^s \lambda_j q_j(x) \right) + r_1(x) \frac{dy(x)}{dx} + r_0(x) y(x) = f(x).$$

A key aspect of these equations is that, along with the function to be determined, a number of unknown values must also be found. This prompts the important question of unique solvability: What number and type of conditions need to be applied to equation (1) to ensure that the problem has a unique solution in the designated space?

Such equations fall under the classification of differential operator equations as noted in [1].

Reference

1. *Dezin A. A.* Differential Operator Equations: A Method of Model Operators in the Theory of Boundary Value Problems, Proc. Steklov Inst. Math., vol. 229, 1–161, 2000.

Артыкбаева Жанар Нурланкызы, магистр, КазНУ (Алматы, Казахстан);
Artykbaeva Zhanar Nurlankyzy (Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan)

BITSADZE-SAMARSKII PROBLEM FOR AN ELLIPTIC EQUATION IN AN INFINITE DOMAIN

R.R. Ashurov

N.Sh. Nuraliyeva

ashurovr@gmail.com, n.navbahor2197@gmail.com

УДК 517.518

Keywords: Fourier method, abstract operator, complete system, elliptic equation.

Let H be a separable Hilbert space with an inner product (\cdot, \cdot) and a norm $\|\cdot\|$. Let A be an unbounded, positive, self-adjoint operator on H with domain $D(A) \subset H$. Let $\{V_k\}$ be the orthonormal basis of H consisting of eigenfunctions of operator A , and we can assume that the positive, countable eigenvalues λ_k is nondecreasing and does not have a finite limit point: $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$. Let τ be an arbitrary real number. One can define the the power of operator A , acting in H as follows

$$A^\tau h = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau h_k V_k,$$

where h_k are the Fourier coefficients of element $h \in H$: $h_k = (h, V_k)$. It is evident that, the domain of this operator has the form

$$D(A^\tau) = \{h \in H : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\tau} |h_k|^2 < \infty\}.$$

For elements of $D(A^\tau)$ we introduce the norm

$$\|h\|_\tau^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\tau} |h_k|^2 = \|A^\tau h\|^2,$$

and together with this norm $D(A^\tau)$ turns into a Hilbert space. Consider the following nonlocal boundary value problem

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - Au(t) = fg(t), & t > 0; \\ u(0) = \alpha u(t_0) + \varphi, & t_0 > 0; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

The authors acknowledge financial support from the Ministry of Innovative Development of the Republic of Uzbekistan, Grant no. F-FA-2021-424.

Ravshan Radjabovich Ashurov (Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Student Town str., 100174, Tashkent, Uzbekistan.)

Navbahor Nuraliyeva (PhD student, Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Student Town str., 100174, Tashkent, Uzbekistan.)

where $g(t) \in C[0, \infty)$ is a given scalar function. $f, \varphi \in H$ are known elements of H , α is constant. This problem is called a *forward problem*.

To solve this problem, the method of dividing the main problem into auxiliary simple problems was used (see, for example, [1]). Let us note that if we take the Laplace operator as the operator $(-A)$, we obtain the classical Bitsadze-Samarskii problem in an infinite domain [2].

Definition 1. A function $u(t) \in C([0, \infty); H)$ with the properties $u_{tt}(t), Au(t) \in C((0, \infty); H)$ and satisfying conditions (1) is called of the nonlocal problem (1).

Theorem 1. Let $\alpha \leq 1$ or $\alpha > 1$ and $1 > \alpha e^{-\sqrt{\lambda_1} t_0}$. If for such $M > 0$, $|g(t)| \leq M$ and $g(t) \in C[0, \infty)$, $\varphi \in D(A^{\frac{1}{2}})$, $f \in H$, then there is the unique solution of problem (1) and it has the following form:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\varphi_k + \alpha v_k(t_0)}{1 - \alpha e^{-\sqrt{\lambda_k} t_0}} e^{-\sqrt{\lambda_k} t} + v_k(t) \right] V_k,$$

where

$$v_k(t) = \frac{f_k}{\sqrt{\lambda_k}} \left[sh \sqrt{\lambda_k} t \int_0^t e^{-\sqrt{\lambda_k} \eta} g(\eta) d\eta + e^{-\sqrt{\lambda_k} t} \int_t^{\infty} sh \sqrt{\lambda_k} \eta g(\eta) d\eta \right].$$

Moreover, there are the constants $C > 0$ and $C_M > 0$ ($C_M = \max\{5M^2, C\}$) such that the following coercive type inequality holds:

$$\|u_{tt}(t)\|^2 + \|u(t)\|_1^2 \leq C_M(1 + t^{-2})\|f\|^2 + Ct^{-2}\|\varphi\|_{\frac{1}{2}}^2, \quad t > 0.$$

References

1. Ashurov R.R., Fayziyev Yu.E On the Nonlocal Problems in Time for Time-Fractional Subdiffusion Equations., // Fractal Fract., **6**:41 (2022), <https://doi.org/10.3390/fractalfract6010041>.
2. Bitsadze A.V., Samarskii A.A. Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems, // Dokl. Akad.. — Nauk SSSR, Volume 185, Number 4, 1969. — 739–740.

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А.К. Баззаев, a.k.bazzaev@yandex.ru

УДК 519.633

В настоящей работе исследуется семейство разностных схем с весами для уравнения теплопроводности дробного порядка с неклассическими краевыми условиями. С помощью принципа максимума для разностной задачи получена априорная оценка, из которой следует устойчивость разностных схем и сходимость численного решения к точному в норме C .

Ключевые слова: дробная производная Капуто, уравнение дробного порядка, уравнение диффузии дробного порядка, краевая задача, нелокальная краевая задача, принцип максимума, априорная оценка, аппроксимация, устойчивость разностной схемы, сходимость разностной схемы.

On the convergence of difference schemes for nonlocal boundary value problems with a fractional derivative

This work is devoted to the study of the boundary value problem for the fractional order diffusion equation with nonlocal boundary conditions. For the problem under consideration, a family of difference schemes with weights σ , $0 \leq \sigma \leq 1$ has been studied. Using the maximum principle for the grid equation, an a priori estimate is obtained, from which it follows that the difference schemes are stable and the numerical solution converges to the exact one in the C norm.

Keywords: fractional differential equation, Caputo differential operator, maximum principal, an a priori estimate, the difference schemes, stability and convergence of the difference scheme.

1 Постановка задачи

В работе [1] исследуется семейство разностных схем с весами для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями. С помощью принципа максимума для разностной задачи получена априорная оценка, из которой следует устойчивость разностных схем и сходимость численного решения к точному в норме C . Также в данной

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 075-02-2024-1447

Баззаев Александр Казбекович, к.ф.-м.н., доцент, (Владикавказ, Россия); Alexander Bazzaev (1) North Ossetian State University, Vladikavkaz, Russia; (2) Vladikavkaz Institute of Management, Vladikavkaz, Russia)

работе предложена модификация метода прогонки для решения полу-
ченной СЛАУ. По аналогии с работой [1] мы строим разностные схемы
для уравнения диффузии дробного порядка с аналогичными некласси-
ческими краевыми условиями и показываем справедливость принципа
максимума для рассматриваемой задачи.

Итак, в прямоугольнике $Q_T = \{(x, t), 0 < x < \ell, 0 < t \leq T\}$
рассматривается задача

$$\partial_{0t}^\alpha u = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\ell, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (3)$$

где $\partial_{0t}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\eta(x, \eta) d\eta}{(t-\eta)^\alpha}$ — дробная производная Герасимова
— Капуто по времени порядка α , $0 < \alpha < 1$.

Будем предполагать, что функции $q(x, t)$, $f(x, t)$ непрерывны, $k(x, t)$
непрерывно дифференцируема, $u_0(x)$ удовлетворяет краевым условиям
(2), $0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2$, $0 \leq q(x, t) \leq c_3$, c_1 , c_2 , c_3 — положительные
постоянные.

2 Разностная схема

Введем на отрезке $[0, \ell]$ сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih : i = 0, 1, \dots, N\}$ с
шагом $h = \ell/N$ по переменной x и на отрезке $[0, T]$ сетку $\bar{\omega}_\tau = \{x_i =$
 $j\tau : j = 0, 1, \dots, j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$ по переменной t . На множестве
 \bar{Q}_T рассмотрим сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j), i = 0, 1, 2, \dots, N; j =$
 $0, 1, 2, \dots, j_0\}$.

В работе [2] получен дискретный аналог дробной производной по
времени

$$\partial_{0t_j}^\alpha u = \Delta_{0t_j}^\alpha u + O(\tau^{2-\alpha}), \quad (4)$$

$$\Delta_{0t_j}^\alpha u = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j (t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}) u_s^s, \quad u_s^s = \frac{u^{s+1} - u^s}{\tau}.$$

Дифференциальной задаче (1) — (3) поставим в соответствие одно-
параметрическое по σ , $0 \leq \sigma \leq 1$, семейство разностных схем [3]

$$\Delta_{0t_j}^\alpha y_i = \Lambda y_i^{(\sigma)} - d_i y_i^{(\sigma)} + f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (5)$$

$$(a_N y_{\bar{x}, N})^{(\sigma)} = -0.5h \left(\Delta_{0t_j}^\alpha y_N + (d_N y_N)^{(\sigma)} - f_N \right), \quad (6)$$

$$y_0^j = y_N^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0, \quad y_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

где $y_i^{(\sigma)} = \sigma \hat{y}_i + (1 - \sigma)y_i$, $\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x$, $a_i = 0.5(k_{i-1} + k_i)$, $k_i = k(x_i, \bar{t})$, $d_i = q(x_i, \bar{t})$, $f_i = f_i^j = f(x_i, \bar{t})$, $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $\bar{t} = t_j + 0.5\tau$, $\hat{y} = y_i^{j+1}$, $y = y_i^j$, $\check{y} = y_i^{j-1}$, $y_{\bar{x}, N} = \frac{y_N - y_{N-1}}{h}$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия

$$\tau^\alpha(1 - \sigma) \leq \frac{(2 - 2^{1-\alpha})h^2}{\Gamma(2 - \alpha)(2c_2 + c_3h^2)}, \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

Тогда

- а) разностная схема (5) – (7) равномерно устойчива по начальному условию и правой части уравнения;
 б) решение разностной задачи (5) – (7) равномерно сходится к решению задачи (1) – (3) и имеет точность, совпадающую с порядком погрешности аппроксимации.

Литература

1. Ионкин Н.И., Валикова Е.А. Принцип максимума для одной нелокальной несамосопряженной краевой задачи, Дифференц. уравнения, 31:7 (1995), 1232 – 1239; Differ. Equ., 31:7 (1995), 1180 – 1187.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука. 1989. – 616 с.
3. Таукенова Ф.И., Шхануков – Лафшиев М.Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. №10. С. 1871 – 1881.

О МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ КОШИ-РИМАНА СО СЛАБО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С. Байзаев, Р.Н. Баротов

sattor_bayzoev@rambler.ru, ruzmet.tj@mail.ru

УДК 517.9

Для обобщенной системы Коши-Римана с коэффициентом вида $e^{im\varphi}$ при сопряжении искомой функции построены регулярные, в том числе ограниченные во всей плоскости решения.

Ключевые слова: обобщенная система Коши-Римана, ограниченные коэффициенты, регулярные и ограниченные решения.

On the method of constructing regular solutions of a class of generalized Cauchy-Riemann systems with weakly oscillating coefficients

For the generalized Cauchy-Riemann system with a coefficient of the form $e^{im\varphi}$, regular solutions have been constructed upon conjugation of the sought function, including solutions that are bounded throughout the entire plane.

Keywords: generalized Cauchy-Riemann system, bounded coefficients, regular and bounded solutions.

Рассмотрим уравнение

$$L_m w \equiv w_{\bar{z}} + \varepsilon(z) e^{im\varphi} \bar{w} = 0, \quad (1)$$

здесь $m \in \mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $z = re^{i\varphi}$ и $\varepsilon(z) = \begin{cases} |z|, & \text{при } |z| \leq 1, \\ 1, & \text{при } |z| > 1. \end{cases}$ Из результатов работы [1] следует, что оператор $L_m : C^1_\alpha \rightarrow C^1_\alpha$ будет нётеровым, причем индекс этого оператора будет равен индексу Коши коэффициента $\varepsilon(z) e^{im\varphi}$ на бесконечности, т.е. $\text{ind} L_m = m$.

Доклад посвящен методу построения регулярных во всей плоскости решений, т.е. принадлежащих классу C^1 , в частности ограниченных во всей плоскости, решений уравнения (1).

Теорема 1. Пусть m – четное и $m > 0$. Тогда регулярные решения уравнения (1) определяются формулой

Байзаев Саттор, д.ф.м.н., профессор, ТГУПБП (Худжанд, Таджикистан); Sattor Baizaev (Tajik State University of Law, Business and Politics, Khujand, Tajikistan)

Баротов Рузибой Нумонжонович, преподаватель, ХГУ имени ак. Б. Гафурова (Худжанд, Таджикистан); Ruziboy Barotov (Khujand State University named after Academician B. Gafurov, Khujand, Tajikistan)

$$w(z) = r^{\frac{m+1}{2}} \left[\sum_{n=\frac{m}{2}}^{\infty} \left(A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(r^2) e^{in\varphi} - \bar{A}_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(r^2) e^{i(m-1-n)\varphi} \right) \right. \\ \left. + \sum_{n=\frac{m}{2}}^{m-1} \left(B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(r^2) e^{in\varphi} + \bar{B}_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(r^2) e^{i(m-1-n)\varphi} \right) \right] \text{ при } r \leq 1,$$

$$w(z) = r^{\frac{m}{2}} \left[\sum_{n=\frac{m}{2}}^{\infty} \left(C_n I_{n-\frac{m}{2}}(2r) + D_n K_{n-\frac{m}{2}}(2r) \right) e^{in\varphi} - \right. \\ \left. - \left(\bar{C}_n I_{n-\frac{m-2}{2}}(2r) - \bar{D}_n K_{n-\frac{m-2}{2}}(2r) \right) e^{i(m-1-n)\varphi} \right] \text{ при } r > 1,$$

здесь I_ν – функция Бесселя мнимого аргумента, K_ν – функция Макдональда порядка ν , A_n произвольная комплексная постоянная, а C_n и D_n однозначно выражаются через A_n и B_n .

Теорема 2. Пусть m – четное и $m > 0$. Тогда ограниченные во всей плоскости решения уравнения (1) определяются следующим образом:

$$w(z) = r^{\frac{m+1}{2}} \left[\sum_{n=\frac{m}{2}}^{m-1} \left(A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(r^2) + B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(r^2) \right) e^{in\varphi} + \right. \\ \left. \left(-\bar{A}_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(r^2) + \bar{B}_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(r^2) \right) e^{i(m-1-n)\varphi} \right] \text{ при } r \leq 1, \\ w(z) = r^{\frac{m}{2}} \left[\sum_{n=\frac{m}{2}}^{m-1} D_n K_{n-\frac{m}{2}}(2r) e^{in\varphi} + \bar{D}_n K_{n-\frac{m-2}{2}}(2r) e^{i(m-1-n)\varphi} \right] \text{ при } r > 1,$$

где D_n – произвольные, а A_n и B_n выражаются через D_n .

Из теоремы 2 следует, что размерность множества ограниченных во всей плоскости решений уравнения (1) как линейное пространство над полем вещественных чисел равна m .

Аналогичные утверждения имеют место и для случая нечетного $m > 0$. Для $m \leq 0$ уравнение (1) в C_α^1 имеет только нулевое решение.

Литература

1. Байзаев С., Мухамадиев Э. Об индексе эллиптических операторов первого порядка на плоскости // Дифференциальные уравнения, **28:5** (1992), 818-827

**О РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА
МНОГОМЕРНЫХ ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ
КОШИ-РИМАНА С СИНГУЛЯРНЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

С. Байзаев, М.М. Шокирова

sattor_bayzoev@rambler.ru, shokirova2002_1977@mail.ru

УДК 517.9

Построено общее решение многомерной обобщенной системы Коши-Римана с сингулярными коэффициентами вида $z^{-\alpha} \bar{z}^{-\beta} A$, α, β — вещественные числа, причем $\alpha + \beta > 0$, $\alpha - \beta$ — целое, A — матрица.

Ключевые слова: многомерная обобщенная система Коши-Римана, сингулярные коэффициенты, общее решение.

On regular solutions of a class of multi-dimensional generalized Koshi-Riman systems with singular coefficients

A general solution of a multi-dimensional generalized Cauchy-Riemann system with singular coefficients of the form $z^{-\alpha} \bar{z}^{-\beta} A$, where α, β are real numbers, $\alpha + \beta > 0$, $\alpha - \beta$ is an integer, and A is a matrix, has been constructed.

Keywords: multi-dimensional generalized Cauchy-Riemann system, singular coefficients, general solution.

В докладе излагается схема построения общего решения многомерной обобщенной системы Коши-Римана вида

$$w_z + \frac{1}{z^\alpha \bar{z}^\beta} A \bar{w} = 0, \quad (1)$$

где $w \in C^m$ — комплексное m -мерное пространство, α, β — вещественные числа, такие что $\alpha + \beta > 0$ и $\alpha - \beta$ — целое, A — комплексная матрица порядка m .

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть число $s = \beta - \alpha - 1$ нечетное и все собственные значения λ_j матрицы AA полупростые. Тогда общее решение системы (1) имеет вид

$$w = \sum_{n \geq p}^{\infty} \left\{ w_n(r) e^{in\varphi} + w_{p-n} e^{i(p-n)\varphi} \right\},$$

Байзаев Саттор, д.ф.м.н., профессор, ТГУПБП (Худжанд, Таджикистан); Sattor Baizaev (Tajik State University of Law, Business and Politics, Khujand, Tajikistan)

Шокирова Мухбира Мухторхонова, старший преподаватель, ТГУПБП (Худжанд, Таджикистан); Mukhbira Shokirova (Tajik State University of Law, Business and Politics, Khujand, Tajikistan)

здесь $p = \frac{s+1}{2}$, $w_n(r) = S[u_{1n}, \dots, u_{qn}]$, S – матрица, столбцы которой состоят из собственных векторов матрицы AA , отвечающих собственным значениям λ_j , координаты вектор-функций u_{jn} при $\gamma \neq 1$ и $\lambda_j \neq 0$ находятся по формуле

$$v(r) = r^{-\alpha} Z_\nu \left(\frac{2i\sqrt{\lambda_j}}{1-\gamma} r^{1-\gamma} \right),$$

где Z_ν – цилиндрическая функция порядка $\nu = \frac{|\alpha+n|}{1-\gamma}$, а при $\gamma = 1$ – по формуле

$$v(r) = \begin{cases} C_1 r^{-\alpha+\frac{\mu}{2}} + C_2 r^{-\alpha-\frac{\mu}{2}} & \text{при } \mu \neq 0, \\ r^{-\alpha} (C_1 + C_2 \ln r) & \text{при } \mu = 0, \end{cases}$$

здесь C_1, C_2 – произвольные комплексные постоянные, $\mu = 2\sqrt{(\alpha+n)^2 + 4\lambda_j}$, вектор-функции w_{p-n} определяются из системы

$$\bar{A}w_{p-n}(r) = \frac{r^\gamma}{2} \left[-\bar{w}'_n(r) + \frac{n}{r} \bar{w}_n(r) \right].$$

Аналогичное утверждение имеет место и для случая нечетного s .

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ
ИНТЕГРАЛЬНЫМ ДАННЫМ НА ЛЯМБДА-ЛИНИЯХ**
А.Х. Бегматов, akbar_begmatov@mail.ru

УДК 517.968

Рассмотрена задача интегральной геометрии для семейства лямбда-линий на плоскости с широким диапазоном углов и весовой функцией экспоненциального типа. Доказаны теоремы единственности и существования решения задачи. Получены оценки устойчивости в пространствах соболевского типа, а также явная формула обращения. Представлены результаты по единственности и устойчивости соответствующей задачи интегральной геометрии с возмущением для достаточно широкого класса весовых функций возмущения.

Ключевые слова: обратные задачи, интегральная геометрия, интегральные преобразования, формулы обращения, оценки устойчивости.

Reconstruction of the function from integral data on lambda lines

The problem of integral geometry for a family of lambda lines in the plane with a wide range of angles and a weight function of exponential type is considered. The theorems of uniqueness and existence of the solution of the problem are proved. Stability estimates in Sobolev-type spaces and an explicit inversion formula are obtained. Results on the uniqueness and stability of the corresponding problem of integral geometry with perturbation for a sufficiently wide class of weight functions of the perturbation are presented.

Keywords: inverse problems, integral geometry, integral transforms, inversion formulas, stability estimates.

Рассматривается задача восстановления функции по ее интегральным данным с заданным весом вдоль семейства плоских линий. Произвольная линия семейства образует ломаную с вершиной, опирающуюся на ось OX .

Получены новые результаты по указанной задаче интегральной геометрии [1,2] для весовой функции экспоненциального типа и широкого диапазона углов, которые образуют в вершине отрезки ломаных. Подобные задачи рассматривались ранее в статьях автора [3-5].

Бегматов Акбар Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, СибУПК (Новосибирск, Россия); Akbar Begmatov (Siberian State University of Consumer Cooperation, Novosibirsk, Russia)

В работе представлены теорема единственности и оценка устойчивости решения задачи в пространствах соболевского типа. На этой основе доказана теорема существования решения задачи. Получена явная формула обращения для исходного интегрального оператора задачи, представленного как обобщенный оператор Радона [6].

Изучается также соответствующая задача интегральной геометрии с возмущением, которое представляет собой интеграл от искомой функции с гладким весом по внутренней части ломаной. Здесь также получены теорема единственности и аналогичная оценка устойчивости.

Литература

1. *Лавернтьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. — Москва: Наука, 1980.
2. *Бегматов А.Х.* О единственности решения задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости // Докл. РАН, **427**:4 (2009), 439-441.
3. *Begmatov A.H., Pirimbetov A.O., Seidullaev A.K.* Reconstruction stability in some problems of X-ray and seismic tomography //7th International Forum on Strategic Technology, Conference proceedings, Vol. II. — IEEE, Piscataway, N.J., 2012. — 261-266.
4. *Begmatov A.H.* Inversion of X-ray transforms with incomplete data in n-dimensional space // 11th International Forum on Strategic Technology, IFOST 2016, Conference proceedings, Vol. 3, — 99-101
5. *Begmatov A.H., Djaikov G.M.* Numerical recovery of function in a strip from given integral data on linear manifolds // 11th International Forum on Strategic Technology, IFOST 2016, Conference proceedings, Vol. 2, — 478-482.
6. *Ehrenpreis L.* The Radon transform. — Oxford University Press, 2003.

ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА ПО СЕМЕЙСТВУ СФЕР В ПРОСТРАНСТВЕ

А.Х. Бегматов, А.С. Исмоилов
akrambegmatov@mail.ru, alisher_8778@mail.ru

УДК 517.946

В этой работе рассматривается задача восстановления функции по семействам сфер в пространстве. Доказывается единственность решения задачи путем сведения к интегральному уравнению Вольтерра первого, а затем второго рода.

Ключевые слова: Задача интегральной геометрии, семейство сфер, интегральное уравнение Вольтера, единственность решения.
Volterra-type integral geometry problem on families of spheres in space

This paper discusses considers the problem of recovering a function from families of spheres in space. The uniqueness of the solution of the problem is proved by reducing it to the Volterra integral equation of the first and then the second kind.

Keywords: Integral geometry problem, family of spheres, Volterra integral equation, uniqueness of solution.

Задачами интегральной геометрии вольтеровского типа называются задачи, которые могут быть сведены к исследованию операторных уравнений Вольтера в смысле определения, данного М.М. Лаврентьевым [1].

В работы М.М.Лаврентьева была предложена весьма плодотворная идея сведения широкого класса задач интегральной геометрии к исследованию уравнения эволюционного типа для некоторой вспомогательной функции. Это, в частности, позволило доказать теорему единственности решения исходной задачи. Следует отметить, что некоторые классы задачи интегральной геометрии Вольтерровского типа изучались также А.Л.Бухгеймом.

Новые классы задач интегральной геометрии получили свое развитие в работах Акр. Х. Бегматова [2 и др.]. В его работах изучались задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости и в пространстве. В работах [3,4] изучены новые классы задачи интегральной геометрии и введены новые подходы к исследованию задач

Бегматов Акрам Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, СБУМИПТК (Ташкент, Узбекистан); Akram Begmatov (Joint Belarusian-Uzbek intersectoral institute of applied technical qualifications, Tashkent, Uzbekistan)

Исмоилов Алишер Сидикович, к.ф.-м.н., Уз-ФинПИ (Самарканд, Узбекистан); Alisher Ismoilov (Uzbek-Finnish pedagogical institute, Samarkhand, Uzbekistan)

восстановления функции по весовым функциям с особенностью. В работе [5,6] изучена задача восстановления функции по семействам сфер в трехмерном пространстве.

В статье рассматривается задача восстановления функции по семействам сфер в пространстве. Доказывается единственность решения задачи путем сведения к интегральному уравнению Вольтерра первого, а затем второго рода. Применяются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными. Доказательство теоремы единственности основаны на изучении краевых задач для вспомогательных функций. Используется также метод преобразования Фурье. А также рассмотрена задача интегральной геометрии для семейства поверхностей второго порядка.

Задачи такого рода возникают в геофизике и компьютерной томографии. Практическая значимость статьи заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы при численном решении задач определения внутренней структуры объектов, возникающих в области медицины и геофизики.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу интегральной геометрии для семейства поверхностей в полупространств $z \geq 0$. Поверхность, по которой ведется интегрирование, представляет собой сферу

$$z^2 - \zeta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2. \quad (1)$$

Обозначим $L_D = (x, y, z) : x \in R, y \in R, 0 \leq z \leq D$.

Функция $u(\cdot)$ предполагается финитной по x, y , то есть $u(x, y, z) = 0$ при $(x, y) \in D$, где D - ограниченная область на плоскости $z = 0$.

Задача 1. В полупространств L_D восстановить функцию трёх переменных $u(x, y, z)$, если известны интегралы от нее по поверхностям семейства $\Upsilon(x, y, z)$:

$$f(x, y, z) = \int_{\Upsilon(x, y, z)} q(z, \zeta) u(\xi, \eta, \zeta) d\omega, \quad (2)$$

где произвольная поверхность семейства представлена выражением

$$\Upsilon(x, y, z) = (\xi, \eta, \zeta) : z^2 - \zeta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, 0 \leq \zeta \leq z \leq D.$$

Лемма 1. Пусть функция $f(x, y, z)$ известна для всех из полупространств L_D , весовая функция $q(z, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - \zeta^2}}$.

Тогда решение уравнения (2) в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций с носителем в полупространств L_D единственно.

Литература

1. Lavrentyev M.M. and Savelyev L.Y. Operator Theory and Ill-Posed Problems // Moscow: Publ House of the Inst Math (2010).

2. *Бегматов Акр. Х.* Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости // Сиб. мат. журн. **36**:2 (1995), 243-247

3. *Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S.* Weakly ill-posed problems of integral geometry on the Plane // Uzbek Mathematical Journal **66**:1 (2022), 64-75

4. *Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S., Khudayberdiev D.G.* Weakly ill-posed problems of integral geometry on the plane with perturbation // Journal of the Balkan Tribological Association **29**:3 (2023), 273-289

5. *Begmatov, A., Ismoilov, A., Dauletiyarov, A., Tasqinov, Y.* New classes of integral geometry problems of Volterra type in three-dimensional space // In AIP Conference Proceedings **3147**:1 (2024)

6. *Begmatov, A., Ismoilov, A.* Weekly Ill-posed integral geometry problems of Volterra type in three-dimensional space // Balikesir Universitesi Fen Bilimleri Enstitusu Dergisi **26**:2 (2024), 472-478

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПО СЕМЕЙСТВУ ПАРАБОЛ С ЗАДАННОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

А.Х. Бегматов, Н.У. Утеулиев, А.С. Исмоилов
akrambegmatov@mail.ru, utewlievn@mail.ru,
alisher_8778@mail.ru

УДК 517.946

В работе исследуется задача интегральной геометрии в полосе на семействе парабол с заданной весовой функцией общего вида. Доказана теорема единственности и теорема существования решения задачи, получено аналитическое представление решения в классе гладких конечных функций. Приведены численные и графические результаты применения этих алгоритмов для решения задачи.

Ключевые слова: задача интегральной геометрии, обратные задачи, некорректные задачи, численное решение, преобразование Фурье.

Volterra-type integral geometry problem on families of spheres in space

The article deals with the study of problems of integral geometry in a strip on a family of broken lines with a given weight function of a general form. The theorems of uniqueness and existence for the solution of the task are proved; an analytic representation of the solution in the class of smooth finite functions is obtained. The numerical and graphical results of applying these algorithms to the solution of the task are given.

Keywords: Problem of integral geometry, inverse tasks, ill-posed tasks, numerical solution, Fourier transformation.

Задачи интегральной геометрии - интенсивно развивающееся направление современной математики, которое является одним из крупнейших направлений в теории некорректных задач математической физики и анализа. Ее задачи тесно связаны с многочисленными приложениями - задачами интерпретации данных геофизических исследований, электро-разведки, акустики и компьютерной томографии.

Бегматов Акрам Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, СБУМИПТК (Ташкент, Узбекистан); Akram Begmatov (Joint Belarusian-Uzbek intersectoral institute of applied technical qualifications, Tashkent, Uzbekistan)

Утеулиев Ниятбай Утеулиевич, д.ф.-м.н., профессор, НФТУИТ (Нукус, Узбекистан); Niyatbay Uteuliev (Nukus branch of Tashkent university of information technologies, Nukus, Uzbekistan)

Исмоилов Алишер Сидикович, к.ф.-м.н., Уз-ФинПИ (Самарканд, Узбекистан); Alisher Ismoilov (Uzbek-Finnish pedagogical institute, Samarkhand, Uzbekistan)

Одной из центральных проблем интегральной геометрии является восстановление функции, если известны ее интегралы по заданным многообразиям.

Приведем определение задачи интегральной геометрии [1]. Пусть $u(x)$ - достаточно гладкая функция, определенная в n -мерном пространстве $x = (x_1, \dots, x_n)$, и $M(\lambda)$ - семейство гладких многообразий в этом пространстве, зависящих от параметра $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Пусть, далее, от функции $u(x)$ известны интегралы

$$\int_{M(\lambda)} u(x) d\sigma = v(\lambda). \quad (1)$$

где $d\sigma$ определяет элемент меры по $M(\lambda)$. Требуется по функции $v(\lambda)$ найти функцию $u(x)$.

В работы М.М.Лаврентьева была предложена весьма плодотворная идея сведения широкого класса задач интегральной геометрии к исследованию уравнения эволюционного типа для некоторой вспомогательной функции. Это, в частности, позволило доказать теорему единственности решения исходной задачи. Следует отметить, что некоторые классы задачи интегральной геометрии Вольтерровского типа изучались также А.Л.Бухгеймом.

Новые классы задач интегральной геометрии получили свое развитие в работах Акр. Х. Бегматова [2 и др.]. В его работах изучались задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости и в пространстве. В работах [3-6] изучены новые классы задачи интегральной геометрии и введены новые подходы к исследованию задач восстановления функции по весовым функциям с особенностью. В работах [7,8] изучены аналитическое представление решения задачи интегральной геометрии в классе гладких финитных функций. Учитывая, что при измерениях всегда присутствуют зашумленные интегральные данные, на основе идеи регуляризации Тихонова строится устойчивый алгоритм для численного решения задачи интегральной геометрии на семействе ломаных. Проведенный численный эксперимент показывает, что разработанный алгоритм эффективно восстанавливает изображение внутренней структуры исследуемых объектов с достаточной точностью.

В данной работе исследуется задача интегральной геометрии в плоскости на семействе парабол с заданной весовой функцией общего вида. Доказана теорема единственности и теорема существования решения задачи, получено аналитическое представление решения в классе гладких конечных функций. Представлена оценка решения задачи в пространствах Соболева, из которой вытекает её слабая некорректность. Полученные теоретические результаты исследуются по экспериментальным данным. Приведены численные и графические результаты применения этих алгоритмов для решения задачи. Такие задачи имеют многочисленные приложения в математическом изучении проблем

сейсморазведки, интерпретации геофизических и аэрокосмических наблюдений, в решении обратных задач астрофизики и гидроакустики.

Литература

1. *Lavrentyev M.M. and Savelyev L.Y.* Operator Theory and Ill-Posed Problems // Moscow: Publ House of the Inst Math (2010).

2. *Бегматов Акр. Х.* Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости // Сиб. мат. журн. **36**:2 (1995), 243-247

3. *Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S.* Weakly ill-posed problems of integral geometry on the Plane // Uzbek Mathematical Journal **66**:1 (2022), 64-75

4. *Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S., Khudayberdiev D.G.* Weakly ill-posed problems of integral geometry on the plane with perturbation // Journal of the Balkan Tribological Association **29**:3 (2023), 273-289

5. *Begmatov, A., Ismoilov, A., Dauletiyarov, A., Tasqinov, Y.* New classes of integral geometry problems of Volterra type in three-dimensional space // In AIP Conference Proceedings **3147**:1 (2024)

6. *Begmatov, A., Ismoilov, A.* Weekly Ill-posed integral geometry problems of Volterra type in three-dimensional space // Balikesir Universitesi Fen Bilimleri Enstitusu Dergisi **26**:2 (2024), 472-478

7. *Uteuliev N.U., Djaykov G.M., Pirimbetov A.O.* Modeling the problem of integral geometry on the family of broken lines based on Tikhonov regularization // Lecture Notes of Computer Science **13741** (2022), 417-428.

8. *Uteuliev, N., Djaykov, G., Yadgarov, S., Sagidullaev, N., Jarilkanov, B.* Modeling of circular radon transform using Tikhonov regularization // In AIP Conference Proceedings **3147**:1 (2024)

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ВЫСОКИХ
ПОРЯДКОВ ДЛЯ ВОЗМУЩЕНИЙ
МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ**

А.С. Белова
belovaas@uust.ru

УДК 517.518

В работе рассматривается вопрос о построении коэффициентов асимптотических разложений мультипликаторов гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра.

Ключевые слова: гамильтонова система, устойчивость, мультипликатор.

On the stability of motion of a dynamically symmetric satellite relative to the center of mass

The paper considers the issue of constructing coefficients of asymptotic expansions of multipliers of Hamiltonian systems depending on a small parameter.

Keywords: Hamiltonian system, stability, multiplier.

Рассматривается линейная периодическая гамильтонова система (ЛГПС), зависящая от малого параметра ε , вида

$$\frac{dx}{dt} = JA(t, \varepsilon)x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N}, \quad (1)$$

где $A(t, \varepsilon)$ – вещественная симметрическая $(2N \times 2N)$ матрица, а матрица J определена равенством: $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$; здесь I – единичная $(N \times N)$ матрица. Предполагается, что матрица $A(t, \varepsilon)$ является T -периодической и непрерывно зависящей по t , гладкой с порядком гладкости k ($k \geq 1$) по параметру ε .

При $\varepsilon = 0$ система (1) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = JA_0(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^{2N}, \quad (2)$$

где $A_0(t) = A(t, 0)$. Систему (2) будем называть невозмущенной, а систему (1) – возмущенной системой.

Важную роль при изучении динамики системы (1) играют асимптотические формулы для собственных значений $\mu(\varepsilon)$ матрицы монодромии $V(\varepsilon)$. Известные здесь работы (см., например, [1, 2]), как правило,

Исследование выполнено в рамках государственного задания (код научной темы FZWU-2023-0002)

Белова Анна Сергеевна, ассистент, УУНиТ (Уфа, Россия); Anna Belova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

ограничиваются построением только первого приближения собственного значения $\mu(\varepsilon)$. В то же время, известен ряд примеров, когда в задаче исследования системы (1) приходится учитывать и некоторые последующие коэффициенты асимптотических разложений.

В работе предлагается процедура построения асимптотических формул высоких порядков для возмущений мультипликаторов $\mu(\varepsilon)$ в ряде основных случаев. На основе полученных формул предлагаются новые критерии устойчивости гамильтоновых систем (1) при малых значениях $|\varepsilon|$.

Литература

1. *Майлыбаев А. А., Сейранян А.П.* Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике - М. : Физматлит, 2009. - 353 с.
2. *Yumagulov M. G., Ibragimova L. S. and Belova A. S.* Approximate research of problems on perturbation of periodic and autonomous Hamiltonian systems in critical cases. Lobachevskii J Math **41**, 1924–1931 (2020).

О РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ОПЕРАТОРАМИ ДЖРБАШЯНА–НЕРСЕСЯНА

Ф.Т. Богатырева
fatima_bogatyreva@bk.ru

УДК 517.95

Исследуется уравнение в частных производных с дробным дифференцированием по одной из двух независимых переменных, ассоциируемой со временем. Такие уравнения принято относить к классу уравнений дробной диффузии. Оператор дробного дифференцирования представляет собой линейную комбинацию двух операторов Джрбашяна–Нерсесяна.

Ключевые слова: уравнение дробной диффузии, операторы Джрбашяна–Нерсесяна, дробная производная.

On the solvability of the diffusion equation with Dzhrbashyan–Nersesyan operators

The paper investigates a parabolic partial differential equation with fractional differentiation with respect to one of two independent variables associated with time. Such equations are usually referred to the class of fractional diffusion equations. The fractional differentiation operator is a linear combination of two Dzhrbashyan–Nersesyan operators.

Keywords: fractional diffusion equation, Dzhrbashyan–Nersesyan operators, fractional derivative.

В области $D = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$aD_{0y}^{\{\alpha, \beta\}}u(x, y) + bD_{0y}^{\{\gamma, \delta\}}u(x, y) - u_{xx}(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

где $D_{0y}^{\{\alpha, \beta\}}, D_{0y}^{\{\gamma, \delta\}}$ – операторы дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсесяна порядков $\mu = \alpha + \beta - 1 > 0$, $\nu = \gamma + \delta - 1 > 0$, соответственно, $\mu > \nu$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in]0, 1]$, $a, b = \text{const}$, $f(x, y)$ – заданная действительная функция.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна–Нерсесяна ассоциированный с упорядоченной парой $\{\xi, \eta\}$, порядка $\sigma = \xi + \eta - 1$, определяется соотношением [1]

$$D_{0y}^{\{\xi, \eta\}} = D_{0y}^{\eta-1}D_{0y}^{\xi}, \quad (2)$$

где $D_{0y}^{\eta-1}$ и D_{0y}^{ξ} – дробный интеграл и дробная производная Римана–Лиувилля, соответственно [2].

Богатырева Фатима Тахировна, ИПМА КБНЦ РАН (Нальчик, Россия); Fatima Bogatyreva (Institute of Applied Mathematics and Automation, Nalchik, Russia)

Исследован вопрос разрешимости начальных задач для уравнения (1) в зависимости от распределения параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Литература

1. *Джрбашиян М.М., Нерсисян А.Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Математика, (1968), 3-28.

2. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. — Москва: Физматлит, 2003. 272 с.

ОБ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ ОПЕРАТОРОВ СО СКРУЧИВАНИЯМИ

А.В. Болтачев

boltachevandrew@gmail.com

УДК 515.168.5, 517.96

Рассматриваются нелокальные краевые задачи, в которых основной оператор и операторы граничных условий включают дифференциальные операторы и операторы скручивания. Дано определение траекторных символов для этого класса краевых задач. Показано, что эллиптические задачи определяют фредгольмовы операторы в соответствующих пространствах Соболева. Дано условие эллиптичности таких нелокальных краевых задач.

Ключевые слова: нелокальные задачи, функционально-дифференциальные операторы, фредгольмовость.

On Ellipticity of Operators with Shear Mappings

The nonlocal boundary value problems are considered, in which the main operator and the operators in the boundary conditions include the differential operators and shear operators. The definition of the trajectory symbols for this class of problems is given. We show that the elliptic problems define the Fredholm operators in the corresponding Sobolev spaces. The ellipticity condition of such nonlocal boundary value problem is given.

Keywords: nonlocal problems, functional differential equations, Fredholm property.

Рассматриваются нелокальные краевые задачи, в которых основной оператор и операторы в граничных условиях включают в себя операторы скручивания.

Фиксируем $\alpha > 0$, несоизмеримое с π . Рассмотрим бесконечный цилиндр $Y = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, на котором группа $\Gamma = \mathbb{Z}$ действует скручиваниями перпендикулярно образующей цилиндра

$$(x, t) \mapsto (x + k\alpha t, t), k \in \mathbb{Z}.$$

Определим оператор сдвига, отвечающий скручиваниям, формулой

$$(\Gamma u)(x, t) = u(x - \alpha t, t).$$

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115)

Болтачев Андрей Владимирович, РУДН (Москва, Россия); Andrei Boltachev (RUDN University, Moscow, Russia)

На конечном цилиндре $M = \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \subset Y$ рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\begin{pmatrix} D \\ i^*B \end{pmatrix} : H^s(M) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(M) \\ \oplus \\ H^{s-b-1/2}(\partial M, \mathbb{C}^N). \end{matrix} \quad (1)$$

Здесь D — дифференциальный оператор со сдвигами на цилиндре M , оператор $B = (B_0, B_1)$ — пара дифференциальных операторов со сдвигами на левом/правом основаниях цилиндра.

Определяются траекторные символы нелокальных краевых задач вида (1). Показано, что эллиптические задачи определяют фредгольмовые операторы в соответствующих пространствах Соболева. Дано условие эллиптичности таких задач.

Литература

1. *Nazaikinskii V.E., Savin A.Yu., Sternin B.Yu.* Elliptic theory and noncommutative geometry, volume 183 of *Operator Theory: Advances and Applications* Birkhäuser Verlag, Basel (2008)
2. *Boltachev A.V., Savin A.Yu.* Trajectory Symbols and the Fredholm Property of Boundary Value Problems for Differential Operators with Shifts // *Russ. J. Math. Phys.* **30**:2, (2023), 135–151.
3. *Болтачев А. В.* Об эллиптичности операторов со скручиваниями // *Соврем. матем. Фундам. Направл.* **69**:4, (2023), 565–577.

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ДВУМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ И ЧАСТОЙ СМЕНОЙ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Д.И. Борисов, Р.Р. Сулейманов
borisovdi@yandex.ru, radimsul@mail.ru

УДК 517.956

В работе рассматривается полулинейное эллиптическое уравнение второго порядка в произвольной двумерной области с быстро осциллирующей границей с малой амплитудой осцилляций. Осцилляции предполагаются произвольными, никакой периодичности или локальной периодичности не предполагается. На такой осциллирующей границе задается частая смена граничных условий Дирихле и Неймана. Рассматривается случай, когда при усреднении в пределе возникает задача Дирихле с тем же дифференциальным выражением. Основным полученный результат — W_2^1 - и L_2 -операторные оценки.

Ключевые слова: осциллирующая граница, операторная оценка, полулинейные эллиптические уравнения, частая смена краевых условий.

On operator estimates for elliptic equations in two-dimensional domains with frequently alternating boundary conditions on rapidly oscillating boundary

We consider a second-order semilinear elliptic equation in an arbitrary two-dimensional domain with a rapidly oscillating boundary with a small amplitude of oscillations. The structure of oscillations is arbitrary and we suppose no periodicity or local periodicity in any form. On the oscillating boundary we impose frequent alternation of the Dirichlet and Neumann conditions. We consider the case, when the homogenization leads to the Dirichlet problem for the same equation. The main result is W_2^1 - and L_2 - operator estimates.

Keywords: oscillating boundary, operator estimates, semilinear elliptic equations, frequently alternating boundary conditions.

Исследование выполнено за счёт Российского научного фонда (грант № 23-11-00009), <https://rscf.ru/project/23-11-00009/>.

Борисов Денис Иванович, д.ф.-м.н., профессор, ИМВЦ УНЦ РАН (Уфа, Россия); Denis Borisov (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Center, RAS, Ufa, Russia)
Сулейманов Радим Радикович, аспирант, УУНТ (Уфа, Россия); Radim Suleimanov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

ОБ УСПОКОЕНИИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ГЛОБАЛЬНЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ НА БЕСКОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ

С.А. Бутерин
buterinsa@sgu.ru

УДК 517.9

Исследуется задача об успокоении управляемой системы, заданной функционально-дифференциальными уравнениями первого порядка запаздывающего типа с глобальным запаздыванием на графе-звезде со счетным числом ребер. Установлена однозначная разрешимость вариационной задачи о минимуме соответствующего функционала энергии, а также ее эквивалентность некоторой краевой задаче на графе для уравнений второго порядка с двуправленными сдвигами аргумента и условием типа Кирхгофа во внутренней вершине.

Ключевые слова: бесконечный квантовый граф, глобальное запаздывание, оптимальное управление.

On damping a control system with global aftereffect on an infinite temporal star graph

We study the problem of damping a control system determined by functional-differential equations of the first order and retarded type with global aftereffect on a star graph with countably many edges. The unique solvability of the variational problem on minimizing the corresponding energy functional is established along with its equivalence to a certain boundary value problem on the graph for second-order equations with bi-directional shifts of the argument and a Kirchhoff-type condition at the internal vertex.

Keywords: infinite quantum graph, global delay, optimal control.

В [1] Красовским была поставлена и исследована задача об успокоении управляемой системы с последствием для уравнений первого порядка запаздывающего типа с постоянными вещественными коэффициентами. Позднее Скубачевский [2] рассмотрел более трудный случай уравнения нейтрального типа

$$y'(t) + ay'(t - \tau) + by(t) + cy(t - \tau) = u(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $\tau > 0$. Предыстория системы определяется условием $y(t) = \varphi(t)$, $t \in [-\tau, 0]$. Для некоторого фиксированного $T > 2\tau$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 24-71-10003).
Бутерин Сергей Александрович, к.ф.-м.н., доцент, СГУ (Саратов, Россия);
Sergey Buterin (Saratov State University, Saratov, Russia)

требуется подобрать управление $u(t)$, приводящее систему в состояние равновесия $y(t) = 0$ при $t \in [T - \tau, T]$ и минимизирующее норму $\|u\|_{L_2(0, T)}$. Таким образом, получается вариационная задача о минимуме соответствующего функционала энергии. В [2] установлена ее эквивалентность некоторой самосопряженной краевой задаче для уравнения второго порядка с разнонаправленными сдвигами аргумента и доказана однозначная разрешимость обеих задач. При этом решение краевой задачи понимается в обобщенном смысле. А именно, должно выполняться включение

$$(1 + a^2)y'(t) + ay'(t - \tau) + ay'(t + \tau) \in W_2^1[0, T - \tau].$$

Кроме того, в [2] получены необходимые и достаточные условия в терминах $\varphi(t) \in W_2^k[-\tau, 0]$ для того, чтобы такое обобщенное решение $y(t)$ принадлежало $W_2^k[-\tau, T]$ при $k \geq 2$ (см. также монографию [3]).

В работах [4, 5] данная задача была перенесена на так называемые квантовые графы с глобальным последствием, когда запаздывание проходит через внутренние вершины [6]. Это привело к концепции временного графа, когда переменная на ребрах отождествляется со временем. При этом каждая внутренняя вершина становится точкой разветвления процесса, дающей несколько различных сценариев дальнейшего протекания. Обе работы [4, 5] охватывают случай произвольного дерева, но в [5] была рассмотрена общая нестационарная управляемая система произвольного порядка нейтрального типа с негладкими комплексными коэффициентами, что также привело к интересному развитию идеи обобщенного решения соответствующей краевой задачи.

В [4] была дана так называемая стохастическая интерпретация управляемой системы на временном графе. Например, к системе на дереве приведет замена коэффициентов исходного уравнения (1) случайными процессами в дискретном времени и с конечным числом состояний в \mathbb{R} .

Счетное число состояний будет соответствовать случаю бесконечного дерева, которому посвящена настоящая работа.

Для краткости ограничимся здесь бесконечным графом-звездой Γ_∞ и стационарной системой первого порядка запаздывающего типа.

Предположим, что до момента времени $t = T_1$, ассоциированного с единственной внутренней вершиной v_1 графа Γ_∞ , наша управляемая система с запаздыванием $\tau < T_1$ описывается уравнением

$$\ell_1 y(t) := y_1'(t) + b_1 y_1(t) + c_1 y_1(t - \tau) = u_1(t), \quad 0 < t < T_1, \quad (2)$$

заданным на ребре e_1 графа Γ_∞ , и имеет предысторию

$$y_1(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \quad (3)$$

При $t = T_1$, т.е. в вершине v_1 , появляется бесконечное число возможных сценариев дальнейшего течения процесса, описываемых уравнениями

$$\ell_j y(t) := y_j'(t) + b_j y_j(t) + c_j y_j(t - \tau) = u_j(t), \quad t > 0, \quad j \geq 2, \quad (4)$$

с общей предысторией

$$y_j(t) = y_1(t + T_1), \quad t \in [-\tau, 0], \quad j \geq 2. \quad (5)$$

Соответственно, j -ое уравнение в (4) задано на ребре e_j графа Γ_∞ , представляющем собой, вообще говоря, бесконечный луч, выходящий из v_1 .

Вероятность того, что будет реализован именно j -й сценарий предполагается равной $p_j > 0$, причем $p_2 + p_3 + \dots = 1$. Также положим $p_1 := 1$.

Предположим для простоты, что коэффициенты $b_j, c_j, j \in \mathbb{N}$, вещественны и ограничены по модулю в совокупности, а функция $\varphi(t)$ вещественнозначна и принадлежит $W_2^1[-\tau, 0]$.

Зафиксируем $T > \tau$ и выберем произвольные $T_j \in (\tau, T], j \geq 2$. Также рассмотрим гильбертово пространство $W_{2,p}^k := \prod_{j=1}^\infty W_2^k[0, T_j], k \geq 0$, со скалярным произведением $\langle y, z \rangle = \sum_{j=1}^\infty p_j \langle y_j, z_j \rangle_j$, где $y = [y_j]$ и $z = [z_j]$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ – скалярное произведение в $W_2^k[0, T_j]$.

Нетрудно показать, что для всякого $u = [u_j] \in L_{2,p} := W_{2,p}^0$ задача Коши (2)–(5) имеет единственное решение $y = [y_j] \in W_{2,p}^1$, и, наоборот, последнее всегда влечет $\ell y := [\ell_j y] \in L_{2,p}$.

Допустим, что требуется подобрать управление $u \in L_{2,p}$, которое приведет систему (2)–(5) в состояние равновесия

$$y_j(t) = 0, \quad t \in [T_j - \tau, T_j], \quad j \geq 2. \quad (6)$$

Поскольку такое управление далеко не единственно, естественно попытаться минимизировать необходимые усилия $\|u\|_{L_{2,p}}$.

Таким образом, приходим к вариационной задаче о минимуме соответствующего функционала энергии:

$$\sum_{j=1}^\infty p_j \int_0^{T_j} (\ell_j y(t))^2 dt \rightarrow \min \quad (7)$$

при условиях (3), (5) и (6).

Теорема 1. Кортес $y = [y_j] \in W_{2,p}^1$ образует решение вариационной задачи (3), (5)–(7) тогда и только тогда, когда он принадлежит также пространству $\widetilde{W}_{2,p}^2$ и является решением самосопряженной краевой задачи В, состоящей из уравнений

$$(\ell_1 y)'(t) = b_1 \ell_1 y(t) + \begin{cases} c_1 \ell_1 y(t + \tau), & 0 < t < T_1 - \tau, \\ \sum_{\nu=2}^{\infty} p_\nu c_\nu \ell_\nu y(t + \tau - T_1), & T_1 - \tau < t < T_1, \end{cases}$$

$$(\ell_j y)'(t) = b_j \ell_j y(t) + c_j \ell_j y_j(t + \tau), \quad 0 < t < T_j - \tau, \quad j \geq 2,$$

с условиями (3), (5) и (6) вместе с условием типа Кирхгофа в v_1 :

$$y_1'(T_1) + \left(b_1 - \sum_{j=2}^{\infty} p_j b_j\right) y_1(T_1) + \left(c_1 - \sum_{j=2}^{\infty} p_j c_j\right) y_1(T_1 - \tau) = \sum_{j=2}^{\infty} p_j y_j'(0),$$

где $\widetilde{W}_{2,p}^2$ отличается от $W_{2,p}^2$ только заменой T_j на $T_j - \tau$ при $j \geq 2$.

Вместе с теоремой 1 следующая теорема дает однозначную разрешимость вариационной задачи (3), (5)–(7).

Теорема 2. Задача В имеет единственное решение $y \in W_{2,p}^1 \cap \widetilde{W}_{2,p}^2$. Кроме того, справедлива априорная оценка

$$\|y\|_{W_{2,p}^1} \leq C \|\varphi\|_{W_{2,p}^1[-\tau, 0]},$$

где C не зависит от $\varphi(t)$.

Аналогичные результаты можно получить и в случае произвольного дерева и более общей управляемой системы из [5].

Литература

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
2. Скубачевский А.Л. К задаче об успокоении системы управления с последствием // Докл. РАН, **335**:2 (1994), 157–160.
3. Skubachevskii A.L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel: Birkhäuser, 1997.
4. Buterin S. On damping a control system with global aftereffect on quantum graphs. Stochastic interpretation, arXiv:2308.00496 [math.OC], 2023.
5. Бутерин С.А. Об успокоении системы управления произвольного порядка с глобальным последствием на дереве // Матем. заметки, **115**:6 (2024), 825–848.
6. Buterin S. Functional-differential operators on geometrical graphs with global delay and inverse spectral problems // Results Math., **78** (2023), Art. No. 79.

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗОМ

В.Б. Васильев, Х.Ф. Гебресласи
vbv57@inbox.ru, rhadishfe@gmail.com

УДК 517.95

Рассматривается однородное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение в четырехмерном пространстве с вырезанным специальным конусом с двумя интегральными условиями. При наличии специальной волновой факторизации эллиптического символа доказывается однозначная разрешимость этой задачи в пространстве Соболева–Слободецкого и исследуется поведение решения, когда раствор конуса стремится к нулю.

Ключевые слова: псевдодифференциальные уравнения, многомерная область, разрешимость.

On an elliptic equation in multidimensional domain with a cut

A homogeneous elliptic pseudo-differential equation with two integral conditions in four dimensional space outside of a cone is considered. Under existence of special wave factorization of elliptic symbol the unique solvability for this problem is proved in the Sobolev–Slobodetskii space. and behavior of the solution is studied when parameters of cone tend to zero.

Keywords: pseudo-differential equations, multidimensional domain, solvability.

Мы исследуем уравнение

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^4 \setminus \overline{C_+^a \times C_+^b} \quad (1)$$

с интегральными условиями

$$\int_{\mathbb{R}} u(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_2 = f_1(x_1, x_3, x_4), \quad (2)$$

$$\int_{\mathbb{R}} u(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_4 = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad (3)$$

где: $C_+^a \subset \mathbb{R}^2$, $C_+^b \subset \mathbb{R}^2$ и

$$C_+^a \times C_+^b = \{x \in \mathbb{R}^4 | x = (x_1, x_2, x_3, x_4), x_2 > a|x_1|, x_4 > b|x_3|, a, b > 0\},$$

Васильев Владимир Борисович, д.ф.-м.н., профессор, НИУ "БелГУ" (Белгород, Россия); Vladimir Vasilyev (Belgorod State University, Belgorod, Russia)

Гебресласи Хадиш, аспирант, НИУ "БелГУ" (Белгород, Россия); Hadish Gebreslasie (Belgorod State University, Belgorod, Russia)

f_1, f_2 – заданные функции из $H^{s+1/2}(\mathbb{R}^3)$, A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1 \leq |A(\xi)|(1 + |\xi|)^{-\alpha} \leq c_2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

и допускающим волновую факторизацию [1] относительно $-(C_+^a \times C_+^b)$

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)\dot{A}_=(\xi),$$

с индексом \varkappa , таким, что $\varkappa - s = 1 + \varepsilon$, $|\varepsilon| < 1/2$. Решение уравнения (1) разыскивается в пространстве $H^s(\mathbb{R}^4 \setminus \overline{C_+^a \times C_+^b})$ [1].

Введем операторы

$$P_k = \frac{1}{2}(I + S_k), \quad Q = \frac{1}{2}(I - S_k), \quad k = 1, 3,$$

где I – единичный оператор, S_k – одномерные сингулярные интегральные операторы вида

$$(S_1\tilde{u})(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \frac{i}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(\eta, \xi_2, \xi_3, \xi_4) d\eta}{\xi_1 - \eta},$$

$$(S_3\tilde{u})(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \frac{i}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{u}(\xi_1, \xi_2, \eta, \xi_4) d\eta}{\xi_3 - \eta},$$

знак " \sim " над функцией обозначает ее преобразование Фурье.

Теорема. Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно $-(C_+^a \times (0, +\infty))$ с индексом \varkappa таким, что $\varkappa - s = 1 + \varepsilon$, $|\varepsilon| < 1/2$, и существуют пределы

$$\lim_{b \rightarrow 0} A_{\neq}(\xi) = B_1(\xi),$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} A_{\neq}(\xi) = B_2(\xi),$$

то задача (1), (2), (3) имеет единственное решение, определяемое формулой

$$\tilde{u}(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{g}(\xi), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= (P_1 P_3 \tilde{h})(\xi_1 + a\xi_2, \xi_2, \xi_3 + b\xi_4, \xi_4) + (P_1 Q_3 \tilde{h})(\xi_1 + a\xi_2, \xi_2, \xi_3 - b\xi_4, \xi_4) \\ &+ (Q_1 P_3 \tilde{h})(\xi_1 - a\xi_2, \xi_2, \xi_3 + b\xi_4, \xi_4) + (Q_1 Q_3 \tilde{h})(\xi_1 - a\xi_2, \xi_2, \xi_3 - b\xi_4, \xi_4), \end{aligned}$$

где функция $\tilde{h}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ задается формулой

$$\tilde{h}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \tilde{F}_1(\xi_1, \xi_3, \xi_4) + \tilde{F}_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - \tilde{F}_1(\xi_1, \xi_3, 0),$$

$$\tilde{F}_1(\xi_1, \xi_3, \xi_4) = B_1(\xi_1, 0, \xi_3, \xi_4)\tilde{f}_1(\xi_1, \xi_3, \xi_4),$$

$$\tilde{F}_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = B_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)\tilde{f}_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

С учетом этой теоремы исследуются ситуации, когда один из параметров или оба вместе стремятся к бесконечности. Показано, что решение (4) может иметь пределы при $a, b \rightarrow \infty$, если только функции f_1, f_2 удовлетворяют некоторому интегральному соотношению.

Некоторые аналогичные ситуации были рассмотрены ранее [2,3].

Литература

1. *Vasil'ev V.B.* Wave Factorization of Elliptic Symbols: Theory and Applications. — Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000.

2. *Vasilyev V., Kutaiba Sh.* Elliptic equations in domains with a cut: certain examples // Int. J. Appl. Math., **34**:2 (2021), 339-351

3. *Агаркова Н.Н., Васильев В.Б., Гебресласи Х.Ф.* О задаче Дирихле в плоской области с разрезом // ПМ&Ф, **55**:3 (2023), 258-264

СРАВНЕНИЕ ВРЕМЕНИ ПРОВЕДЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ КИНЕТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ.

О.А. Васильева
vasilievaoa@mgsu.ru

УДК 517.9

Для математического моделирования химических реакций с различным числом реагентов применяются дискретные кинетические системы уравнений. Рассмотрены математические модели, описываемые системами уравнений Карлемана, Годунова-Султагазина и Бродвелла. На основе их численного исследования проведено сравнение времени химических реакций с различным числом реагентов.

Ключевые слова: математическая модель, химическая реакция, кинетическая система уравнений.

On the rate of stabilization of solutions of the Cauchy problem for the two-dimensional kinetic Broadwell equation with periodic initial data (regular process)

Discrete kinetic systems of equations are used for mathematical modeling of chemical reactions with different numbers of reagents. Mathematical models described by the Carleman, Godunov-Sultagazin and Broadwell equation systems are considered. Based on their numerical study, a comparison of the times of chemical reactions with different numbers of reagents is made.

Keywords: mathematical model, chemical reaction, kinetic system of equations.

Исследуются процессы химических реакций, проводимых в бесконечном цилиндре для различного числа реагентов, а именно, для двух, трех и четырех реагентов. В качестве математических моделей указанных химических реакций рассматриваются задачи Коши для систем кинетических уравнений Карлемана, Годунова-Султагазина и Бродвелла для случая одной пространственной переменной [1-4]. На основе численного исследования математических моделей проведено сравнение времени проведения химических реакций с различным числом реагентов. Полученные численные результаты согласуются с имеющимися теоритическими результатами [5, 6].

Васильева Ольга Александровна, к.ф.-м.н., доцент, НИУ МГСУ (Москва, Россия); Российский химико-технологический университет имени Д. И. Менделеева, Высший химический колледж (Москва, Россия) Olga Vasilieva (Moscow State University Of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia; Russian University of Chemical Technology named after D.I. Mendeleev, Higher Chemical College, Moscow, Russia)

Литература

1. *С. К. Годунов, У. М. Султангазин.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // *Успехи МН*(1974), т. XXVI, в. 3(159), стр. 3-51.
2. *Султангазин У.М.* Дискретные нелинейные Модели уравнения Больцмана. Алма-Ата: Наука, 1985.
3. *Васильева О.А.* Численное исследование системы уравнений Годунова — Султангазина. Периодический случай // *Вестник МГСУ.* 2016. №4., стр. 27-35.
4. *Васильева О.А.* Васильева Ольга Александровна Численное исследование системы уравнений Карлемана // *Вестник МГСУ.* 2015. №6. стр. 7-15.
5. *E. V. Radkevich, O. A. Vasil'eva* Generation of Chaotic Dynamics and Local Equilibrium for the Carleman Equation // *Journal of Mathematical Sciences*, 224, 764–795 (2017).
6. *Радкевич. Е. В., Васильева О. А., Филиппов Г. А.* О скорости стабилизации решений задачи Коши для двумерного кинетического уравнения Бродвелла с периодическими начальными данными. // *Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам.* - Суздаль: ВлГУ Владимир Владимир, 2024. - С. 243-244.

**О БИФУРКАЦИЯХ ТЬЮРИНГА И АНДРОНОВА-ХОПФА
В ТРЕХКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМАХ ТИПА
“РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ”**

Н.А. Васенина
zhiber.na@gmail.com

УДК 517.938

Работа посвящена исследованию задач о бифуркациях Тьюринга и волновой бифуркации в трехкомпонентных системах типа “реакция-диффузия” с однородными краевыми условиями Неймана. Проводится обсуждение достаточных условий таких бифуркаций, а также изучаются свойства возникающих решений.

Ключевые слова: реакция-диффузия, бифуркация Тьюринга, волновая бифуркация.

On Turing and Andronov-Hopf bifurcations in ternary compounds of the “reaction-diffusion” type

The work is devoted to the study of problems of Turing bifurcations and wave instability in three-dimensional systems of the ‘reaction-diffusion’ type, namely, the problems of the occurrence (when the system parameters change) in the vicinity of the equilibrium positions of the system of new spatially inhomogeneous equilibrium positions or wave (periodic) solutions. The main goal is to develop new approaches to the qualitative and analytical study of these bifurcations in systems defined on a segment with homogeneous Neumann boundary conditions. The bifurcation conditions for these three-component reaction-diffusion systems are discussed

Keywords: bifurcation, equilibrium position, diffusion.

Рассматривается трехкомпонентная система “реакция-диффузия”, описываемая дифференциальным уравнением

$$w_t = f(w) + D \cdot w_{xx}, \quad w \in R^3, \quad (1)$$

в котором $f(w)$ – гладкая функция, D – матрица диффузии третьего порядка с положительными элементами. Уравнение (1) изучается на отрезке $\{x : 0 \leq x \leq \pi\}$. В качестве граничных условий рассматриваются условия Неймана

$$w_x(0) = w_x(\pi) = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что система (1)-(2) имеет стационарное однородное положение равновесия $w = w_0$.

Васенина Наталья Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия);
Natalia Vasenina (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Для исследования устойчивости положения равновесия $w = w_0$ системы (1)-(2) и бифуркаций в его окрестности обычно (см., например, [1]) переходят к линеаризованной системе, что приводит к необходимости изучения спектров матриц

$$B_k = A - k^2 D, \quad k = 0, 1, \dots,$$

в которой $A = f'(v_0)$. Особый интерес вызывают задачи, приводящие к бифуркации Тьюринга и волновой бифуркации. Бифуркация Тьюринга связана с наличием собственного значения $\lambda = 0$ у некоторой матрицы B_{k_0} при $k_0 \geq 1$, а волновая бифуркация возникает при условии, что некоторая матрица B_{k_1} при $k_1 \geq 1$ имеет собственные значения $\lambda = \pm i\omega_0$. При этом все остальные матрицы B_k должны быть устойчивыми.

В докладе приводятся новые результаты, связанные с изучением задачи о достаточных условиях для реализации бифуркации Тьюринга и волновой бифуркации, а также с вопросами о свойствах устойчивости возникающих при указанных бифуркаций решений системы (1)-(2). Работа продолжает исследования, начатые в [2, 3].

Литература

1. *Магничкий Н. А.* Теория динамического хаоса. —М.: ЛЕНАНД, 2011.
2. *Юмагулов М. Г., Васенина Н. А.* Спектральные свойства операторов системы "реакция-диффузия" и признаки бифуркаций // Вестник Пермского университета, (2024), 17-26
3. *Юмагулов М. Г., Сидельникова Н. А.* Системы типа "реакция-диффузия": признаки устойчивости и бифуркаций // Вестник Башкирского университета, (2023), 303-309

УНИВЕРСАЛЬНАЯ АППРОКСИМИРУЮЩАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

П.Г. Великанов, Ж. Хуан
pvelikanov@mail.ru, 17559434789@qq.com

УДК 531.39

Одним из наиболее успешных современных численных методов расчета сооружений является метод граничных элементов (МГЭ) в различных его модификациях, основанных на использовании предварительно вычисленных точных фундаментальных решений. В статье показано, как с помощью универсальной аппроксимирующей функции можно существенно быстрее и с наименьшими усилиями получать различные фундаментальные решения задач механики деформируемого твердого тела.

Ключевые слова: обобщенные функции, фундаментальные решения, метод граничных элементов.

A universal approximating function for obtaining fundamental solutions and systems of partial differential equations

One of the most successful modern numerical methods for calculating structures is the boundary element method (BEM) in its various modifications based on the use of precomputed exact fundamental solutions. The article shows how, with the help of a universal approximating function, it is possible to obtain various fundamental solutions to problems of deformable solid mechanics much faster and with the least effort.

Keywords: generalized functions, fundamental solutions, boundary element method.

В статье с помощью универсальной аппроксимирующей функции успешно реализована задача максимально упростить методику вычисления фундаментальных решений дифференциальных уравнений с частными производными с постоянными коэффициентами без необходимости предварительного глубокого изучения математической теории обобщенных функций, алгоритмов метода интегрального преобразования Фурье и др., теории вычетов из комплексного анализа и многих

Великанов Петр Геннадьевич, к.ф.-м.н., доцент, КНИТУ-КАИ(Казань, Россия); Peter Velikanov (Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev-KAI, Kazan, Russia)

Хуан Жуй, студентка, КНИТУ-КАИ (Казань, Россия); Huang Rui(Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev-KAI, Kazan , Russia)

других. Для систем дифференциальных уравнений в частных производных предложена аппроксимирующая функция успешно сочетается с предварительным использованием ассоциированного дифференциального оператора. Перечисленные теории, алгоритмы и методы часто воспринимаются инженерами-исследователями, как трудные для понимания, что порой ограничивает область применения МГЭ. Приведенная в статье методика позволяет значительно упростить отмеченные сложности МГЭ, чтобы, как и в других численных методах, основное внимание инженера-исследователя было уделено вопросам минимизации погрешностей аппроксимации, дискретизации и счета. С использованием найденных фундаментальных решений с помощью МГЭ были выполнены расчеты различных задач изгиба и плоско-напряженного состояния изо-, орто- и анизотропных пластин в линейной и нелинейной постановках.

Литература

1. *Великанов П.Г.* Метод граничных интегральных уравнений для решения задач изгиба изотропных пластин, лежащих на сложном двухпараметрическом упругом основании // Известия Саратовского университета. Т.8. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1 (2008), 36-42
2. *Великанов П.Г., Халитова Д.М.* Решение задач нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек методом граничных элементов // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, т. 27, № 2.(2021), 48-61
3. *Великанов П.Г., Куканов Н.И., Халитова Д.М.* Использование непрямого метода граничных элементов для расчета изотропных пластин на упругом основании Винклера и Пастернака-Власова // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, т. 27, № 2,(2021), 33-47

О ПОРОЖДЕНИИ РАЗРЕШАЮЩИХ СЕМЕЙСТВ
ОПЕРАТОРОВ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ
РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ

Д.А. Вершинина, В.Е. Федоров
vd2400@mail.ru, kar@csu.ru

УДК 517.95

Получены условия на оператор при искомой функции в линейном уравнении, разрешенном относительно дробной производной Римана — Лиувилля порядка от нуля до двух, необходимые и достаточные для существования сильно непрерывного разрешающего семейства этого уравнения.

Ключевые слова: дробная производная Римана — Лиувилля, разрешающее семейство операторов, преобразование Лапласа, резольвента оператора.

On the generation of resolving families of operators for equations with the Riemann–Liouville derivative

Conditions for an operator at the unknown function in a linear equation resolved with respect to the Riemann–Liouville fractional derivative of an order from zero to two are obtained, necessary and sufficient for the existence of a strongly continuous resolving family of this equation.

Keywords: Riemann–Liouville fractional derivative, resolving family of operators, Laplace transform, resolvent of an operator.

Рассмотрим задачу типа Коши

$$D^{\alpha-m+k}z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1)$$

для уравнения

$$D^\alpha z(t) = Az(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

где $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, D^β — дробная производная Римана — Лиувилля при $\beta > 0$ или дробный интеграл Римана — Лиувилля при $\beta \leq 0$, A — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области №24-11-20002.

Вершинина Дарья Александровна, лаборант-исследователь, Челябинский государственный университет (Челябинск, Россия); Darya Verшинina (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Федоров Владимир Евгеньевич, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой математического анализа, Челябинский государственный университет (Челябинск, Россия); Vladimir Fedorov (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

D_A в банаховом пространстве \mathcal{Z} . Решением задачи (1), (2) назовем такую функцию $z \in C(\mathbb{R}_+; D_A) \cap L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, что $J^{m-\alpha}z \in C^m(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, выполняются условия (1) и равенство (2) при $t \in \mathbb{R}_+$.

Семейство операторов $\{S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется разрешающим для уравнения (2), если выполняются следующие условия:

(i) существуют такие константы $K > 0$, $\omega \geq 0$, что $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq Ke^{\omega t}t^{\alpha-m}$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) для любого $z_0 \in \mathcal{Z}$ $S(t)z_0 \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, $s\text{-}\lim_{t \rightarrow 0+} J^{m-\alpha}S(t) = I$;

(iii) $S(t)[D_A] \subset D_A$, $S(t)Az_0 = AS(t)z_0$ при всех $z_0 \in D_A$, $t \in \mathbb{R}_+$;

(iv) для любого $z_0 \in D_A$ $S(t)z_0$ является решением задачи типа Коши $D^{\alpha-m}z(0) = z_0$, $D^{\alpha-m+k}z(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, для уравнения (2).

Будем писать $A \in C^{\alpha,R}(\omega)$, если существует разрешающее семейство операторов уравнения (2) с постоянной $\omega \geq 0$ в условии (i).

Линейный замкнутый плотно определенный в \mathcal{Z} оператор A называется оператором класса $\mathcal{C}_{\alpha,R}(\omega)$ при некоторой константе $\omega \geq 0$, если выполняются следующие условия:

(i) если $\text{Re}\lambda > \omega$, то $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})\}$;

(ii) существует $K \in \mathbb{R}_+$, такое, что при $\text{Re}\lambda > \omega$ для всех $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda^{m-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K\Gamma(\alpha - m + n + 1)}{(\text{Re}\lambda - \omega)^{\alpha - m + n + 1}}.$$

Теорема 1. Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \{1, 2\}$. Тогда $C^{\alpha,R}(\omega) = \mathcal{C}_{\alpha,R}(\omega)$.

Теорема является обобщением теоремы Хилле — Йосиды о порождении (C_0) -непрерывных полугрупп операторов [1, 2]. Для оператора $A \in \mathcal{C}_{\alpha,R}(\omega)$ построены аппроксимации типа Филлипса [1, Теорема 6.3.3] разрешающего семейства уравнения (2): при $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$

$$S_n(t) := e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n(n+\omega)t)^{k+1}}{k!(k+1)!} \frac{d^k}{d\lambda^k} (\lambda^{m-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}) \Big|_{\lambda=n+\omega}.$$

Отметим результаты А. В. Глушака для уравнения (2) при $\alpha \in (0, 1)$ [3].

Литература

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Иностран. лит., 1962.

2. Йосида К. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Мир, 1967.

3. Глушак А. В. О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной // Вестн. ВГУ. Сер. физика, математика, **2** (2001), 74–77.

О КРАТНЫХ БИФУРКАЦИЯХ В ОКРЕСТНОСТЯХ
ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ
“РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ”

Р.И. Габдрахманов,
gabdrahmanov.robert@gmail.com

УДК 517.518

В докладе обсуждаются вопросы устойчивости и бифуркаций положений равновесия системы “реакция-диффузия” в ситуации кратного вырождения линеаризованной системы. Определены условия кратного вырождения, предложены подходы исследования задач об устойчивости и бифуркациях в окрестностях положений равновесия.

Ключевые слова: система реакции диффузии, кратные собственные значения, бифуркация.

On multiple bifurcations in neighbourhood of fixed points of the reaction diffusion system

The report discusses problems of stability and bifurcations of stationary points of the diffusion reaction system in case of multiple degeneracy of the linearized system. Conditions of multiple degeneracy are defined and new approaches for studying problems of stability and bifurcations in neighborhood of fixed points.

Keywords: reaction diffusion system, multiple eigenvalues, bifurcation.

Рассматривается система

$$\frac{dw}{dt} = Aw + D\Delta w + h(w), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1)$$

в которой A, D – квадратные матрицы порядка n , причем элементы матрицы D являются неотрицательными, Δ – оператор Лапласа, а нелинейность $h(w)$ удовлетворяет соотношению: $\|h(w)\| = o(\|w\|)$ при $w \rightarrow 0$. Здесь Ω – это параллелепипед $\Omega = \{x : 0 \leq x_1 \leq \pi, 0 \leq x_2 \leq \pi\}$.

Система (1) имеет нулевую точку равновесия $w = 0$.

Доклад посвящен изучению некоторых вопросов устойчивости точки равновесия $w = 0$ и бифуркаций в ее окрестности в ситуациях кратного вырождения линейной задачи.

Важным вопросом по изучению системы (1) является возникновение бифуркаций в окрестности точки равновесия $w = 0$.

Габдрахманов Роберт Ильгизович, аспирант, УУНИТ (Уфа, Россия); Gabdrakhmanov Robert Il'gizovich (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Свойства устойчивости точки равновесия $w = 0$ связаны со свойствами спектра линейного оператора [1]

$$S_0 = A + D\Delta : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega) \quad (2)$$

Определим семейство матриц

$$B_k = A - (k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2)D; \quad (3)$$

здесь k - мультииндекс: $k = k_1, k_2, \dots, k_m$, а k_j - целые неотрицательные числа.

По матрицам (3) определим числа $\rho_k = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2$.

Обозначим через Z_0 - множество чисел вида ρ_k ; оно является подмножеством множества Z_+ всех целых неотрицательных чисел.

Замечание. При $m \geq 4$ имеет место равенство $Z_+ = Z_0$ (теорема Лагранжа о сумме четырех квадратов). При $m \geq 4$ множество собственных значений оператора (2) совпадает с множеством собственных значений всех матриц $B_j = A - jD, j \in Z_+$.

Определим также множество Z_1 , состоящее из тех $\rho \in Z_0$, для которых существует единственный мультииндекс $k = k_1, k_2, \dots, k_m$ такой, что $\rho = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2$. Через Z_2 обозначим множество тех $\rho \in Z_0$, для которых существуют два или более мультииндексов $k = k_1, k_2, \dots, k_m$ таких, что $\rho = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2$.

Кратные собственные значения оператора S_0 возникают при $\rho \in Z_2$. А именно, рассмотрены ситуации, когда при некоторых $\rho \in Z_2$ соответствующие матрицы B_{k_0} имеют собственное значение $\lambda = 0$ или пару собственных значений $\lambda = \pm i\omega_0$, при этом остальные матрицы B_k являются устойчивыми. В этом случае оператор S_0 имеет кратное собственное значение $\lambda = 0$ или кратные собственные значения $\lambda = \pm i\omega_0$.

Предлагаются новые подходы для изучения устойчивости и бифуркаций в системе (1) при указанных условиях.

Литература

1. Юмагулов М.Г., Васенина Н.А. Спектральные свойства оператора системы "реакция-диффузия" и признаки бифуркаций // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2(65). С. 17-25. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-17-25.

К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

И.В. Гребенникова
giv001@mail.ru

УДК 517.977

Рассматривается задача управления по минимаксному критерию для сингулярно возмущенной системы с запаздыванием при неопределенных начальных условиях и интегральных квадратичных ограничениях на ресурсы управления. Предлагается итерационная процедура построения управляющего воздействия, аппроксимирующего оптимальное решение с заданной степенью точности относительно малого положительного параметра.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная система с запаздыванием, оптимальное управление, дифференциальные уравнения.

To the problem of control for singularly perturbed system with delay with integral constraints

The control problem for the singularly perturbed system with delay with indeterminate initial conditions and integral quadratic constraints on the control resources according to the minimax criterion is considered. Iterative procedure of constructing control response that approximates the optimal solution with given accuracy with respect to a small positive parameter is proposed.

Keywords: singularly perturbed system with delay, optimal control, differential equations.

Рассматриваются управляемые сингулярно возмущенные системы (с малым параметром $\mu > 0$, запаздыванием $h > 0$) :

$$M(\mu)dz/dt = A(t)z(t) + G(t)z(t-h) + B(t)u(t),$$

где $t \in T = [t_0, t_1]$, матрица $M(\mu) = \text{diag}(E_n, \mu E_m)$, где E_k — единичная $k \times k$ матрица. Начальное состояние системы $z(t) = \psi(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $z_0 = z(t_0)$ точно неизвестно и заданы лишь ограничения $z_0 \in Z_0$, Z_0 — выпуклый компакт в R^{n+m} ; $\psi(t) \in \Psi(t)$, $t_0 - h \leq t < t_0$, $\Psi(t)$ — заданное многозначное отображение со значениями в виде выпуклых компактов, непрерывное по t в метрике Хаусдорфа. Реализации управления $u(t)$, $t \in T$ — измеримые по Лебегу функции, удовлетворяющие

Гребенникова Ирина Владимировна, старший преподаватель, УГГУ (Екатеринбург, Россия); Irina Grebennikova (Ural State Mining University, Ekaterinburg, Russia)

условию $u(\cdot) \in P$, P — слабо компактное выпуклое множество в $L_2^r(T)$.
В данном случае

$$P = \{u(\cdot) \mid \int_{t_0}^{t_1} u'(t)R(t)u(t)dt \leq \lambda^2\}, \lambda = \text{const} > 0,$$

$R(t)$ — симметричная, положительно определенная матрица с непрерывными элементами; штрих — знак транспонирования. Выполнено условие асимптотической устойчивости для линейных систем с запаздыванием.

Рассматривается минимаксная задача управления [1]: среди $u(\cdot) \in P$ найти $u^0 = u^0(\cdot)$, доставляющее

$$\varepsilon^0(t_1, \mu) = J(u^0) = \min_{u(\cdot) \in P} J(u(\cdot)),$$

$$J(u(\cdot)) = \max_{z_0 \in Z_0} \max_{\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)} \varphi(z(t_1; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))),$$

где $\varphi(\cdot)$ — заданная выпуклая функция; $z(t; u(\cdot), z_0, \psi(\cdot))$ — решение исходной системы, исходящее из Z_0 , при некотором $\psi(\cdot) \in \Psi(\cdot)$ и фиксированном $u(\cdot) \in P$.

Предлагаемая процедура [2] позволяет построить управляющее воздействие, доставляющее оптимальное значение с заданной степенью точности $o(\mu^k)$. Разрешимость исходной задачи управления, а также допустимость используемых аналитических конструкций определяется рядом требований.

Литература

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М: Наука, 1977.
2. Гребенникова И.В., Кремлев А.Г. Об итерационном методе построения оптимального управления сингулярно возмущенными системами с запаздыванием при квадратичных ограничениях // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика, **Т. 11**: Вып. 3, ч. 1 (2011), 8-15

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

А.Л. Джабраилов
ahmed_0065@mail.ru

УДК 517.95

В работе рассматривается проблема сведения одной обобщенной многоточечно-функциональной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения бесконечного порядка к краевой задаче для бесконечной системы дифференциальных уравнений путем использования теорий бесконечных определений и разрешимости бесконечных систем алгебраических уравнений, обоснованных в работах Коха и Пуанкаре.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, уравнение бесконечного порядка, обобщенная краевая задача.

Study of a generalized boundary value problem for a differential equation of infinite order

The paper considers the problem of reducing one generalized multipoint-functional boundary value problem for a nonlinear differential equation of infinite order to a boundary value problem for an infinite system of differential equations by using theories of infinite definitions and solvability of infinite systems of algebraic equations, substantiated in the works of Koch and Poincaré.

Keywords: differential equations, equation of infinite order, generalized boundary value problem.

Работа посвящена рассмотрению для общего дифференциального уравнения бесконечного порядка

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)y^{(j)} = f(x, y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots) \quad (1)$$

краевой задачи с многоточечно-функциональными условиями

$$y^{(k_i-1)}(x_{i,k_i}) = \Phi_{i,k_i}(y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots), \quad (2)$$

где $x_{i,k_i} \in [a, b]$, $k_i = \overline{1, n_i}$, $i = \overline{1, m}$, $m \in \{1, 2, \dots, n\}$, n — конечное натуральное число, $n_i \in \{0, 1, \dots, n\}$, причем $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$;

$$y^{(i-1)}(x_i) = \Phi_i(y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots), i = n+1, n+2, \dots \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (FEGS-2020-0001).

Джабраилов Ахмед Лечаевич, ЧГУ (Грозный, Россия); Akhmed Dzhabraïlov (Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia)

Краевая задача в такой постановке не встречалась.

Функции $a_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$, $f(x, y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots)$ считаются непрерывными по своим аргументам в области

$$D : \{|y^{(i)}| \leq d_i, i = 0, 1, \dots, x \in [a, b]\}$$

(см. [3]) и допускается выполнение неравенства

$$|f(x, y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots)| \leq M, \quad (4)$$

M – некоторое число, и условия Липшица

$$|f(x, u_1, u_2, \dots, u_\nu, \dots) - f(x, v_1, v_2, \dots, v_\nu, \dots)| \leq L(x) \sum_{i=1}^{\infty} |u_i - v_i|, \quad (5)$$

$$\left| \Phi_{i, k_i} \left(u, u', \dots, u^{(\nu-1)}, \dots \right) - \Phi_{i, k_i} \left(v, v', \dots, v^{(\nu-1)}, \dots \right) \right| \leq L_{i, k_i} \|u - v\|, \\ i = \overline{1, m},$$

$$\left| \Phi_i \left(u, u', \dots, u^{(\nu-1)}, \dots \right) - \Phi_i \left(v, v', \dots, v^{(\nu-1)}, \dots \right) \right| \leq \tilde{L}_i \|u - v\|, \quad (6)$$

$i = n + 1, n + 2, \dots$

Для любых $u = (u_i)_{i=1}^{\infty}$, $v = (v_i)_{i=1}^{\infty} \in D$, $L(x)$ – непрерывная на $[a, b]$ функция.

Решение задачи (1)–(3) будем искать в пространстве $C^{(\infty)}(a, b)$ бесконечно непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$ с нормой $\|y\| = \max_{a \leq x \leq b} \sum_{i=1}^{\infty} |y^{(i-1)}(x)|$ и соответствующей метрикой. Естественно, значения $y(x), y'(x), \dots, y^{(\nu-1)}(x), \dots$ при $x \in [a, b]$ не должны выходить из области $|y^{(i-1)}(x)| \leq d_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1) функция $f(x, y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots)$ и функционалы $\Phi_{i, k_i}(y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots)$, $\Phi_i(y, y', \dots, y^{(\nu-1)}, \dots)$ в области D удовлетворяют условиям Липшица (5) и (6);

2) функции $a_j(x)$, $j = 0, 1, \dots$ из уравнения (1), элементы $a_{i, j}(x)$, $i, j = 1, 2, \dots$, матрицы $A(x)$, функции $L(x)$ из (5) и числа L_{i, k_i}, \tilde{L}_i из (6) таковы, что числовые ряды $\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{L}_i^*$, $\sum_{i=1}^{\infty} \int_a^{x_i^*} \tilde{L}_i(t) dt$, $\sum_{i=1}^{\infty} \int_{x_i^*}^b \tilde{L}_i(t) dt$ сходятся;

3) выполняется неравенство

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} [\tilde{L}_i^* + 2 \int_a^{x_i^*} \tilde{L}_i(t) dt + \int_{x_i^*}^b \tilde{L}_i(t) dt] < 1.$$

Тогда в условиях теоремы задача (1)–(3) имеет только единственное решение.

Литература

1. *Коробейник Ю.Ф.* О бесконечно дифференцируемых решениях линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка // Сибирский матем. журнал, **6:3** (1965), 516-527.
2. *Коробейник Ю.Ф.* Дифференциальные уравнения бесконечного порядка и бесконечные системы дифференциальных уравнений // Известия АН СССР. Серия матем., **34:4** (1970), 881-922.
3. *Валеев К.Г., Жаутыков О.Л.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. — Алма-Ата: Наука, 1974. — 415.
4. *Исраилов С.В., Танжиев И.А., Гачаев А.М.* Решение линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка с аналитическими коэффициентами // Вестник Академии наук Чеченской Республики, **3 (28)** (2015), 5-8.

ОБ ОДНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ-ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ В ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

С.З. Джамалов А.А. Шакиров
siroj63@mail.ru, shokirov.abduvosiq96@gmail.com

УДК 517.956.6

Как нам известно, для уравнения смешанного типа как первого, так и второго рода второго порядка практические не исследовались коэффициентные обратные задачи (связанными с поиском решение, коэффициент уравнения и элемент правой части) в ограниченных и неограниченных областях.

С этой целью в данной работе с использованием результатов работ [1], изучаются однозначная разрешимость коэффициентной обратной задачи с нелокальными краевыми условиями для трехмерного уравнения Трикоми в параллелепипеде.

Ключевые слова: метод Фурье, ε -регуляризация, сжимающие отображения.

As we know, for equations of mixed type of both the first and second kind of the second order, coefficient inverse problems (related to finding a solution, coefficient of the equation and element of the right side) in bounded and unbounded domains have not been practically studied.

To this end, in this work, using the results of [1], we study the unique solvability of the coefficient inverse problem with nonlocal boundary conditions for the three-dimensional Tricomi equation in a parallelepiped.

Keywords: Fourier method, ε -regularization, contraction mapping.

В области

$$G = (-1, 1) \times (0, T) \times (0, \ell) = Q \times (0, \ell) = \\ = \{(x, t, y) \mid -1 < x < 1, 0 < t < T, 0 < y < \ell\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение Трикоми:

$$Lu = xu_{tt} - au_{xx} - u_{yy} + \alpha(x, t)u_t = c(x, t)u + \psi(x, t, y), \quad (1)$$

Джамалов Сирожиддин Зухриддинович, д.ф.-м.н., профессор, ИМ им. В.И. Романовского АН Р.Уз. (Ташкент, Узбекистан); Sirojiddin Dzhamalov (V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan)

Шакиров Абдувасик Абдурахмон угли, аспирант, ИМ им. В.И. Романовского АН Р.Уз. (Ташкент, Узбекистан); Abduvosik Shokirov (V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan)

где a – достаточно большое число, $\psi(x, t, y) = g(x, t, y) + h(x, t) \cdot f(x, t, y)$, $g(x, t, y)$ и $f(x, t, y)$ заданные функции, а функции $h(x, t)$ и $c(x, t)$ подлежат определению.

Коэффициентная обратная задача

Найти функции $(u(x, t, y), h(x, t), c(x, t))$, удовлетворяющие уравнению (1) почти всюду в области G , такие, что $u(x, t, y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. полунелокальные краевые условия

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \quad (2)$$

$$\rho D_x^p u|_{x=-1} = D_x^p u|_{x=1}, \quad p = 0, 1, 2, \quad (3)$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=\ell} = 0 \quad (4)$$

где γ, ρ - некоторое постоянное число, отличное от нуля;

2. дополнительные условия

$$u(x, t, \ell_0) = \varphi_0(x, t) \quad (5)$$

$$u(x, t, \ell_1) = \varphi_1(x, t), \quad (6)$$

$$0 < \ell_0 < \ell_1 < \ell < +\infty$$

и вместе с функциями $h(x, t), c(x, t)$ принадлежит классу

$$U = \left\{ (u, h, c) \mid u \in W_2^{2,3}(G), h \in W_2^2(Q), c \in W_2^2(Q), \|c\|_{(Q)}^2 \leq r \right\}$$

где r – положительное число точное значения, которое будет определено ниже. Здесь через $W_2^{2,3}(G)$ обозначено анизотропное пространство Соболева с нормой

$$\langle u \rangle_{l,s}^2 = \|u\|_{W_2^{l,s}(G)}^2 = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \lambda_k^2)^s \|u_k(x, t)\|_{W_2^l(Q)}^2, \quad (A)$$

где $W_2^l(Q)$ пространства Соболева, $u_k(x, t)$ означают коэффициентов Фурье функции $u(x, t, y)$, $\lambda_k = \frac{k\pi}{\ell}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Литература

1. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа // Монография. Ташкент, **176**: (2021)

**FORWARD AND INVERSE PROBLEMS FOR A MIXED
TYPE EQUATION WITH THE GERASIMOV–CAPUTO
FRACTIONAL DERIVATIVE**

**U.Kh. Dusanova
umidakhon8996@gmail.com**

УДК 517.95

In this paper the forward and inverse problems of determining the right-hand side in mixed-type equations are considered. In one part of the domain, the considered equation is the subdiffusion equation with a fractional derivative in the sense of Gerasimov–Caputo of the order $\rho \in (0, 1]$ and in the other part—a wave equation with a fractional derivative of the order $\tau \in (1, 2]$. The elliptic part of the equation is Laplace operator, considered in n -dimensional domain Ω . The right-hand side of the equations has the form $f(x)g(t)$. Three inverse problems are investigated: in the first problem the unknown is $g(t)$ for $t > 0$, in the second - for $t < 0$, and in the third problem $g(t)$ for all t .

Keywords: Gerasimov–Caputo fractional derivative; subdiffusion equation; Laplace operator; forward and inverse problems.

Let $0 < \rho \leq 1$ and $1 < \tau \leq 2$. In an arbitrary n dimensional domain Ω with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$, we consider the following mixed type equation:

$$Lu = F(x, t), \tag{1}$$

with the boundary

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \tag{2}$$

the initial

$$u(x, -\alpha) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{3}$$

and the gluing conditions in the form

$$u(x, +0) = u(x, -0), \quad \lim_{t \rightarrow +0} D_{0t}^\rho u(x, t) = u_t(x, -0), \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Here

$$Lu = \begin{cases} D_{0t}^\rho u - \Delta u, & 0 < t < \beta, \\ D_{t0}^\tau u - \Delta u, & -\alpha < t < 0, \end{cases} \quad F(x, t) = \begin{cases} f_1(x)g_1(t), & 0 < t < \beta, \\ f_2(x)g_2(t), & -\alpha < t < 0, \end{cases}$$

The authors acknowledge financial support from the Ministry of Innovative Development of the Republic of Uzbekistan, Grant no. F-FA-2021-424.

Umida Dusanova (PhD student, Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science, Student Town str., 100174, Tashkent, Uzbekistan.)

D_{0t}^ρ and D_{t0}^τ are the right-hand and left-hand fractional derivatives of Gerasimov-Caputo, Δ is the Laplace operator and $\alpha > 0$, $\beta > 0$ are given real numbers, $f_i, g_i, i = 1, 2$ and φ are known functions.

Next, it is convenient to introduce the following designations: $D_- = \overline{\Omega} \times (-\alpha, 0]$, $D_+ = \overline{\Omega} \times [0, \beta)$.

The initial-boundary value problem (1)-(4) is called the *the forward problem*.

Definition 1. A function $u(x, t)$ with the properties

1. $u(x, t) \in C(\Omega \times (-\alpha, 0) \cup (0, \beta))$,
2. $D_{0t}^\rho u(x, t) \in C(D^+)$,
3. $u_t(x, t) \in C(D^-)$,
4. $D_{t0}^\tau u(x, t) \in C(\overline{D} \times (-\alpha, 0))$,

and satisfying conditions (1)-(4) is called the (classical) solution of the forward problem .

Let

$$\Delta_\alpha(k) = E_{\tau,1}(-\lambda_k^2 \alpha^\tau) - \alpha \lambda_k^2 E_{\tau,2}(-\lambda_k^2 \alpha^\tau), \quad k \geq 1.$$

When solving the forward problem, the following statement occupies an important place.

Lemma 1. *There exists a constant $\alpha_0 = \alpha_0(\lambda_1, \tau)$ such that for $\alpha \geq \alpha_0$ the following estimate is true $\Delta_\alpha(k) > \delta_0 > 0$, $k \geq 1$, where the constant $\delta_0 = \delta_0(\alpha)$ does not depend on λ_k .*

Similar forward problems in the case of $\rho = 1$ and $\tau = 2$ were investigated in the work of K. Sabitov [1]. Note that in the work [1] the classical Fourier method is used to solve problems and the operator $u_{xx} + bu$ on the interval is taken as the elliptic part. The eigenfunctions of such an operator are trigonometric functions, which significantly simplifies the study of the uniform convergence of the corresponding Fourier series.

In our case, the elliptic part of the equation is the Laplace operator defined in an arbitrary multidimensional domain with the Dirichlet condition. The explicit form of the eigenfunctions in this case is not known, moreover, the eigenfunctions grow with increasing their number. To study the uniform convergence of Fourier series, we use the fundamental result of V.A. Ilyin [2].

Based on the result of V.A. Ilyin [2], some conditions for the smoothness of the functions $\varphi(x)$ and $F(x, t)$ are found, guaranteeing the existence and uniqueness of the solution to the forward problem. It is also shown that the solution has the form:

$$u^+(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\omega_k}{\Delta_\alpha(k)} E_{\rho,1}(-\lambda_k^2 t^\rho) \right) v_k(x) + \int_0^t ((t-s)^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-\lambda_k^2 (t-s)^\rho) f_{1k}(s) ds) v_k(x), \quad t > 0,$$

$$\begin{aligned}
u^-(x, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\omega_k}{\Delta_{\alpha}(k)} E_{\tau,1}(-\lambda_k^2 |t|^{\tau}) + |t| f_{1k}(+0) E_{\tau,2}(-\lambda_k^2 |t|^{\tau}) \right) v_k(x) \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \frac{\omega_k}{\Delta_{\alpha}(k)} E_{\tau,2}(-\lambda_k^2 |t|^{\tau}) v_k(x) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \int_t^0 ((t-s)^{\tau-1} E_{\tau,\tau}(-\lambda_k^2 (t-s)^{\tau}) f_{2k}(s) ds) v_k(x), \quad t < 0, \quad (5)
\end{aligned}$$

where

$$\omega_k = \varphi_k - \alpha f_{1k}(+0) E_{\tau,2}(-\lambda_k^2 \alpha^{\tau}) - \int_{-\alpha}^0 (-\alpha - s)^{\tau-1} E_{\tau,\tau}(-\lambda_k^2 (-\alpha - s)^{\tau}) f_{2k}(s) ds.$$

Following K. Sabitov [1] let us formulate three inverse problems.

Problem 1. Find functions $u(x, t)$ and $g_1(t)$ satisfying the conditions:

$$u(x, t) \in C(\Omega \times (-\alpha, 0) \cup (0, \beta)), \quad D_{0t}^{\rho} u(x, t) \in C(D^+), \quad (6)$$

$$u_t(x, t) \in C(D^-), \quad D_{i0}^{\tau} u(x, t) \in C(\overline{D} \times (-\alpha, 0)), \quad (7)$$

$$g_1(t) \in C[0, \beta], \quad (8)$$

$$Lu(x, t) \equiv F(x, t), \quad (x, t) \in D_+ \cup D_-, \quad (9)$$

$$u(0, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (10)$$

$$u(x, -\alpha) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (11)$$

$$u(x_0, t) = h_1(t), \quad x \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq \beta, \quad (12)$$

where $f_i(x), i = 1, 2, g_2(t), h_1(t)$ are given functions, x_0 is a given point from the domain Ω .

Problem 2. Find functions $u(x, t)$ and $g_2(t)$ satisfying the conditions (6)-(7), (9)-(11), and :

$$g_2(t) \in C[-\alpha, 0], \quad (13)$$

$$u(x_0, t) = h_2(t), \quad x \in \Omega, \quad -\alpha \leq t \leq 0, \quad (14)$$

where $f_i(x), i = 1, 2, g_1(t), h_2(t)$ are known functions.

Problem 3. Find functions $u(x, t), g_1(t), g_2(t)$ satisfying conditions (6)-(14); here $f_i(x), i = 1, 2, h_i(x), i = 1, 2,$ are given functions.

Based on the overdetermination conditions (12) and (14), natural conditions are imposed on the functions f_1 and f_2 :

$$f_1(x_0) \neq 0, \quad f_2(x_0) \neq 0.$$

When solving inverse problems using the classical Fourier method, to determine unknown functions $g_i(t)$ we obtain integral Volterra of the first kind. In order to reduce these equations to the Volterra equation of the second kind we apply fractional differentiation. In this connection, the

following conditions on the functions from the overdetermination conditions arise:

$$D_{0t}^{\rho} h_1(t) \in C[0, \beta], \quad D_{t_0}^{\tau} h_2(t) \in C[-\alpha, 0].$$

In each of the three inverse problems, by solving the Volterra integral equations of the second kind, the existence and uniqueness of solutions of all three inverse problems are proven.

References

1. *Sabitov K.B.* Initial Boundary and Inverse problems for the Inhomogeneous Equation of a Mixed Parabolic-Hyperbolic Equation., // Mathematical Notes, **3**:102 (2017), <https://doi.org/10.1134/S0001434617090085>.
2. *И'ин V.A.* The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations, // Russian Mathematical Surveys., Volume 15, Issue 2, 1960. — 85–142.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Д.С. Евтина, А.П. Жабко

diana.evtina@mail.ru, a.zhabko@spbu.ru

УДК 517.929.4

Данная работа посвящена устойчивости систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с несоизмеримыми запаздываниями. Основным результатом работы является теорема об устойчивости для скалярного уравнения, которая может быть обобщена для системы, матрицы в нейтральной части которой коммутируют. Полученные условия устойчивости могут быть применены на практике для оценки решений и построения стабилизирующего управления. В будущем результат планируется распространить на случай, когда матрицы в левой части системы не являются перестановочными.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, системы с запаздыванием, запаздывание нейтрального типа, несоизмеримые запаздывания.

Stability analysis of time-delay systems of neutral type

This work is devoted to the stability of systems of differential equations of neutral type with incommensurate delays. The main result of the paper is the stability theorem for a scalar equation, as well as for a system whose matrices in the neutral part commute. The obtained stability conditions can be applied in practice to evaluate solutions and construct a stabilizing control. In the future, the result is planned to be extended to the case when the matrices in the left part of the system are not commutative.

Keywords: differential equations, time-delay systems, neutral type delay, incommensurate delays.

Введение. Важным разделом теории управления является исследование устойчивости систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Особый интерес при этом представляют системы с нейтральной правой частью. Откуда берутся такие системы? В задачах стабилизации часто используются ПИД-регуляторы, состоящие из линейной, интегральной и дифференциальной части. При замыкании системы при помощи такого управления возникают нейтральные

Евтина Диана Сергеевна, аспирант, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия); Diana Evtina (Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia)

Жабко Алексей Петрович, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия); Alexey Zhabko (Saint Petersburg State University, Russia)

запаздывания. Что касается природы происхождения несоизмеримых запаздываний, то этот процесс можно рассмотреть на примере задачи стабилизации корабля. В такой задаче присутствует 2 типа регуляторов, запаздывания которых несоизмеримы. Впервые задача стабилизации системы с нейтральной правой частью была поставлена в работе [1].

Постановка задачи. Рассмотрим систему вида

$$\frac{d}{dt} [x(t) - D_1 x(t - \tau) - D_2 x(t - h)] = A_0 x(t) + A_1 x(t - h) + \int_{-\tau}^0 Q(\theta) x(t + \theta) d\theta, \quad (1)$$

где A_0, A_1 и $D_1, D_2 \neq 0_{n \times n}$ - заданные матрицы размерности $n \times n$, а компоненты матрицы $Q_{n \times n}(\theta)$ - ограниченные кусочно-постоянные функции. Будем полагать, что $\tau \geq h$, в противном случае $Q(\theta) = 0_{n \times n}$ при $\theta \in [-h, -\tau]$.

В случае, когда $\frac{\tau}{h} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, система стандартным образом сводится к системе с одним запаздыванием [2]. Поэтому рассмотрим случай, когда соотношение запаздываний $\frac{\tau}{h}$ является числом иррациональным, то есть запаздывания являются несоизмеримыми.

Наша задача - разработка критериев устойчивости таких систем и в перспективе решение задачи их стабилизации.

Предварительные сведения. Характеристической матрицей системы (1) является

$$G(s) = s [I - e^{-s\tau} D_1 - e^{-sh} D_2] - A_0 - e^{-sh} A_1 - \int_{-\tau}^0 e^{s\theta} Q(\theta) d\theta = sG_1(s) - A(s), \quad (2)$$

где

$$G_1(s) = I - e^{-s\tau} D_1 - e^{-sh} D_2,$$

$$A(s) = A_0 + e^{-sh} A_1 + \int_{-\tau}^0 e^{s\theta} Q(\theta) d\theta.$$

Корни характеристической функции системы $f(s) = \det[sG_1(s) - A(s)]$ называются собственными числами системы и образуют её спектр:

$$\Lambda = \{s | f(s) = 0\}.$$

Квадратная матрица $K(t)$ называется фундаментальной матрицей системы (1), если удовлетворяет следующим условиям:

1.

$$K(t) = \begin{cases} 0_{n \times n}, & t < 0 \\ I, & t = 0. \end{cases}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[K(t) - D_1K(t - \tau) - D_2K(t - h)] &= A_0K(t) + A_1K(t - h) + \\ &+ \int_{-\tau}^0 Q(\theta)K(t + \theta)d\theta, \quad t > 0, \quad t \neq m\tau, \quad t \neq kh. \end{aligned}$$

3. Матрица $K(t) - D_1K(t - \tau) - D_2K(t - h)$ непрерывна при $t \geq 0$, т.е. $K(t + 0) - D_1K(t - \tau + 0) - D_2K(t - h + 0) = K(t - 0) - D_1K(t - \tau - 0) - D_2K(t - h - 0)$.

Фундаментальная матрица претерпевает разрывы в точках $m\tau + kh$, $m, k > 0$, $m, k \in \mathbb{Z}$.

Основной результат. Рассмотрим скалярный случай системы (1).

$$\frac{d}{dt}[x(t) - d_1x(t - \tau) - d_2x(t - h)] = a_0x(t) + a_1x(t - h) + \int_{-\tau}^0 q(\theta)x(t + \theta)d\theta \quad (1')$$

Теорема. Если уравнение (1') экспоненциально устойчиво, то необходимо выполнение следующего условия:

$$|d_1| + |d_2| < 1.$$

Идея доказательства. Известно [1], что для экспоненциальной устойчивости уравнения (1') достаточно, чтобы характеристический полином уравнения был шуровским. Выпишем аналог характеристического полинома (2) для нашего уравнения:

$$g(s) = s[1 - e^{-s\tau}d_1 - e^{-sh}d_2] - a_0 - e^{-sh}a_1 - \int_{-\tau}^0 e^{s\theta}q(\theta)d\theta = sg_1(s) - a(s).$$

С точки зрения устойчивости нас интересует полином $g_1(s)$, относящийся к нейтральной части уравнения. Рассмотрим $s = i\omega$. Тогда

$$g_1(s) = 1 - e^{-i\omega\tau}d_1 - e^{-i\omega h}d_2,$$

откуда следует ограничение на коэффициенты d_1, d_2 : $|d_1| + |d_2| < 1$.

Следствие. Полученная теорема справедлива и для случая систем вида (1), когда матрицы D_1 и D_2 являются перестановочными.

Литература

1. *Kharitonov V.L.* Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. —Basel: Birkhauser, 2013.

2. *Kharitonov V.L.* Exponential estimate for a simple neutral time delay system // Курс лекций, прочитанный в СПбГУ, 2012.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.А. Евхута
evhuta@gmail.com

УДК 517.9

Рассмотрена общая схема построения периодических решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.

Ключевые слова: системы обыкновенных дифференциальных уравнений, периодические решения, метод А.М. Самойленко.

Periodic solutions of some equations

A general scheme for constructing periodic solutions of differential equations in Banach spaces is considered.

Keywords: systems of ordinary differential equations, periodic solutions, the method of A.M. Samoilenko.

В работах А.М. Самойленко, Н.И. Ронто [1,2] предложен метод отыскания периодических решений. В работах [3,4,5] предложена общая теоретико-функциональная схема построения периодических решений для квазилинейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Эта схема позволяет интерпретировать метод А.М. Самойленко как процедуру решения эквивалентной исходной задаче, состоящей из интегрального уравнения с параметром, решаемого методом последовательных приближений и некоторого нелинейного операторного уравнения для этого параметра. При этом исследование сходимости сводится к анализу позитивного спектра [6,7,8] линейного интегрального оператора с неотрицательным ядром.

Схема перехода от периодической задачи для дифференциальных уравнений к нелинейным интегральным уравнениям допускает формальное описание. И, таким образом, идею можно применить для краевых задач дифференциальных уравнений разных типов (дифференциальных уравнений с запаздыванием, интегральных уравнений, эволюционных уравнений).

Опишем эту схему.

Пусть X — банахово пространство, X_0 — его дополняющее подпространство, Π — проекция X на X_0 , L — неограниченный линейный оператор в X , F — нелинейный гладкий оператор в X , оставляющий подпространство X_0 инвариатным.

Евхута Николай Александрович, к.ф.-м.н., доцент, ЮРГПУ (НПИ) им. М.И. Платова (Новочеркасск, Россия); Nikolai Evkhuta (Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk, Russia)

Нас интересует решение уравнения

$$Lx = F(x), \quad (1)$$

лежащее в пространстве X_0 .

Пусть также заданы линейный оператор T , действующий из пространства Y параметров ξ в X и оператор K из X в X , для которых формула

$$x = T\xi + Kf \quad (2)$$

определяет решение линейного уравнения

$$Lx = f. \quad (3)$$

При этом каждое решение x этого уравнения, лежащее в X_0 , может быть представлено в виде (2). Это свойство эквивалентно соотношению

$$D(L) \cap X_0 \subset T\xi + K LX_0, \quad (4)$$

где $D(L)$ - область определения оператора L .

Таким образом, задача о решениях уравнения (1) из X_0 равносильна системе

$$x = \Pi T\xi + \Pi K F x, \quad (5)$$

$$(I - \Pi)T\xi + (I - \Pi)K F x = 0. \quad (6)$$

Если первое уравнение разрешимо относительно x и

$$x = W\xi \quad (7)$$

его решение, то система (5), (6) эквивалентна одному уравнению

$$H\xi = 0 \quad (8)$$

с действующим из Y в дополнительное к X_0 подпространство $Y_1 = (I - \Pi)x$ оператором

$$H = T + \Pi K F - W. \quad (8)$$

Задача о решениях уравнения (2) в X_0 сводится к последовательному решению двух уравнений. Уравнение с параметром (5) в пространстве X и уравнение для этого параметра (8) в пространстве Y . Оператор $\Pi K F$, как правило, оператор сжатия, поэтому оператор W находится как предел последовательных приближений.

Литература

1. Ронто Н.И., Ронто В.А. Численно-аналитические алгоритмы отыскания периодических решений. // Докл. АН СССР, colloquium on qualitative theory of differential equations (Szeged, 1979). Budapest: Bolvay, 1979. — 70-71

2. *Самойленко А.М.* исленно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. // Укр. мат. журн. — 1965. — Т. 17, №4., 82-93.

3. *Евхута Н.А., Забрейко П.П.* О сходимости метода последовательных приближений А. М. Самойленко отыскания периодических решений. // Докл. АН БССР. Т. 29, №1 (1985), 15-18.

4. *Евхута Н.А., Забрейко П.П.* О методе А. М. Самойленко отыскания периодических решений квазилинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. Т. 37, №2 (1985), 162-168.

5. *Евхута Н.А.* О сходимости метода последовательных приближений А.М. Самойленко отыскания периодических решений дифференциальных уравнений // Труды IX научно-технической конференции факультета математических знаний Куйбышевского политехнического института (16-19 мая 1984 г., Куйбышев). Депонировано в ВИНТИ 09.04.85, №23-83-85. Часть 1. 30-38.

6. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962.

7. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рунцицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969.

8. *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы // — М.: Наука, 1985.

РЕШЕНИЕ ДВУХМЕРНОЙ ОДНОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА ДЛЯ ПОЛУПОЛОСЫ

Р.Г. Зайнуллин
zaynulin_r.g@mail.ru

УДК 517.958:536.2

Излагается применение метода разложения по собственным функциям самосопряженного дифференциального оператора к решению одной нестационарной однофазной двухмерной задачи теплообмена с фазовым переходом при специальных краевых условиях на примере процесса промерзания некоторой сплошной среды. Устанавливается параболический закон движения свободной границы. Задачи подобного типа возникают при математическом моделировании процессов теплообмена в строительстве, особенно в районах вечной мерзлоты, в нефтегазодобыче при бурении и эксплуатации скважин, в металлургии и т.д.

Ключевые слова: фазовый переход, свободные границы, движущиеся границы, задача Стефана, конечные интегральные преобразования, вырожденные гипергеометрические функции, возмущенный дифференциальным оператор.

Solving a two-dimensional single-phase stefan problem for a half-strip

The application of the eigenfunction decomposition method of a self-adjoint differential operator to the solution of a non-stationary single-phase two-dimensional heat transfer problem with a phase transition under special boundary conditions is described using the example of the freezing process of a continuous medium. The parabolic law of motion of the interface between the two phases is established. Problems of this type arise in the mathematical modeling of heat transfer processes in construction, especially in permafrost areas, in oil and gas production during drilling and operation of wells, in metallurgy, etc.

Keywords: phase transition, free boundaries, moving boundaries, Stefan problem, finite integral transformations, degenerate hypergeometric functions, perturbed differential operator.

Рассмотрим задачу о динамике затвердевания плоской материальной области $D = \{|x_1| < b, x_2 > 0\}$ под действием стержневого источника холода, ограниченного с двух сторон. Допустим, в начальный момент времени область D обладает положительной температурой и под действием источника холода $J = \{|x_1| < b, x_2 = 0\}$ с температурой

Зайнуллин Рифат Гильметдинович, к.ф.-м.н., доцент, УУНИТ (Уфа, Россия);
Rifat Zaynullin (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

$t_0 < 0$ понижается до температуры $t = 0$. В таком случае в области D образуется зона затвердевания $D(x, \tau)$, и граница фазового перехода $S : x_2 = \xi(x_1, \tau)$ продвигается внутрь области D (см.рис.1).

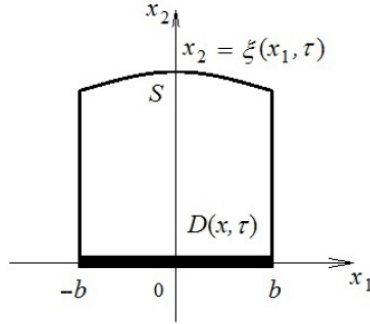


Рис. 1: Схема расположения зоны затвердевания

Математическую модель этого процесса с момента затвердевания можно описать уравнениями:

$$\frac{\partial t(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 t(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_i^2}; \quad (1)$$

$$(x_1, x_2, \tau) \in D(x, \tau) = \{|x_1| < b, 0 < x_2 < \xi(x_1, \tau)\}, b > 0, \tau > 0, \xi(x, +0) > 0.$$

$$t(x_1, x_2, 0) = \left(1 - \frac{x_2}{\xi(x_1, 0)}\right) t_0; \quad (2)$$

$$t(x_1, 0, \tau) = t_0; \quad (3)$$

$$t(x_1, \xi(x_1, \tau), \tau) = 0; \quad (4)$$

$$t(\pm b, x_2, \tau) = \left(1 - \frac{x_2}{\xi(\pm b, \tau)}\right) t_0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial t(x_1, \xi(x_1, \tau), \tau)}{\partial x_2} - \frac{\partial t(x_1, \xi(x_1, \tau), \tau)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \xi(x_1, \tau)}{\partial x_1} = \frac{\sigma \nu}{\lambda} \cdot \frac{\partial \xi(x_1, \tau)}{\partial \tau}; \quad (6)$$

где σ – скрытая теплота кристаллизации, a^2 ; λ – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности, соответственно, ν – плотность образующейся фазы. Требуется найти функции $t_1(x_1, x_2, \tau)$; $\xi(x_1, \tau)$, удовлетворяющее равенствам (1) – (6). Решение задачи начинается с

преобразования области с помощью соответствующих подстановок к области с неподвижными границами, затем для решения преобразованной задачи строятся конечные интегральные преобразования по пространственным координатам с неизвестными ядрами, нахождение которых связано с постановкой и решением соответствующих спектральных задач; одно из ядер выражается через вырожденные гипергеометрические функции. Находятся собственные числа и собственные функции, а также формулы обращения для введенных интегральных преобразований, что позволяет выписать аналитическое решение задачи.

Литература

1. *Шафеев М.Н.* Решение плоской задачи Стефана методом ВГПП // Инженерно-физический журнал, 1978, Т.34, №4, С.713-722.
2. *Зайнуллин Р.Г.* Об одном аналитическом подходе к решению одномерной задачи переноса тепла со свободными границами // Известия вузов. Математика, 2008, №2, С.24-31
3. *Зайнуллин Р.Г., Файзуллин З.Ю.* Краевая задача для уравнения параболического типа в нецилиндрической области // Мат. заметки СВФУ, Т.27, №2, апр.-июн., 2020, С.3-20.
4. *Зайнуллин Р.Г., Файзуллин З.Ю.* Краевая задача для уравнения нестационарной теплопроводности в нецилиндрической области // Челябинский физ-мат журнал, Т.8, вып.3, 2023, С.319-330.

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РАЗРЫВНОЙ СТИЛТЬЕСОВСКОЙ СТРУНЫ

М.Б. Зверева,
margz@rambler.ru

УДК 517.927.21

Доказаны теоремы существования и единственности решения вариационного неравенства, моделирующего деформации разрывной стилтьесовской струны (цепочки стилтьесовских струн, скрепленных между собой пружинами) с локализованным на одном из концов препятствием на перемещение. В явном виде получена формула представления точного решения. Установлены качественные свойства решения (знакорегулярные, экстремальные).

Ключевые слова: вариационное неравенство, интеграл Стильеса, мера, производная по мере, функция ограниченной вариации.

Qualitative properties of the solution of the variational inequality for a discontinuous Stieltjes string

Theorems of existence and uniqueness of the solution of the variational inequality modeling deformations of a discontinuous Stieltjes string (a chain of Stieltjes strings fastened together by springs) with an obstacle to movement localized at one point are proved. A formula for representing the exact solution is obtained in explicit form. Qualitative properties of the solution (sign-regular, extremal) are established.

Keywords: variational inequality, Stieltjes integral, measure, derivative with respect to measure, function of bounded variation.

Проведено исследование вариационного неравенства

$$\int_0^l p u'_\mu v'_\mu d\mu - \int_0^l p u'^2_\mu d\mu + \int_0^l u v d[Q] - \int_0^l u^2 d[Q] - \int_0^l v d[F] + \int_0^l u d[F] \geq 0 \quad (1)$$

с разрывными решениями на $[0, l]$, моделирующего деформации разрывной стилтьесовской струны (цепочки стилтьесовских струн, скрепленных между собой пружинами). Здесь функция $u(x)$ определяет деформацию струны под воздействием внешней силы; $p(x)$ характеризует силу натяжения; $Q(x)$ и $F(x)$ описывают упругую реакцию внешней

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы ОТГЕ-2024-0002)

Зверева Маргарита Борисовна, к.ф.-м.н., доцент, ВГУ, ВГПУ (Воронеж, Россия); Margarita Zvereva (Voronezh State University, Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia)

среды и внешнюю нагрузку соответственно. Предполагается, что в точке $x = l$ установлен ограничитель на вертикальное перемещение правого конца струны, представленный отрезком $[-m, m]$, т.е. $|u(l)| \leq m$. Левый конец струны жестко закреплен, т.е. выполнено условие $u(0) = 0$. Функции $p(x)$, $F(x)$ имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$, причем $\inf_{[0, l]} p > 0$; функция $Q(x)$ не убывает на $[0, l]$. Первый и второй интегралы в (1) понимаются по Лебегу - Стильтесу как интегралы по мере, порожденной строго возрастающей на $[0, l]$ функцией $\mu(x)$. Остальные интегралы понимаются в обобщенном смысле по Стильтесу, предложенном Ю.В. Покорным в [1], когда происходит "расщепление" меры в точках разрыва. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о таком интеграле, мы заключаем функцию, стоящую под знаком дифференциала в квадратные скобки.

Пусть K — множество μ — абсолютно-непрерывных на $[0, l]$ функций, μ производные которых u'_μ имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$, удовлетворяющих условиям $u(0) = 0, |u(l)| \leq m$. Решения $u(x)$ вариационного неравенства (1) мы ищем в классе K ; $v(x)$ — произвольные функции, принадлежащие K .

Теорема 1. *Решение $u(x)$ вариационного неравенства (1) существует и единственно.*

Теорема 2. *Предположим, что существует разбиение $[0, l]$ точками ξ_i такое, что на каждом промежутке $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ функция $F(x)$ монотонна; для всех $1 \leq i \leq k - 1$ выполняется неравенство*

$$(F(\xi_i) - F(\xi_{i-1})) \cdot ((F(\xi_{i+1}) - F(\xi_i))) < 0.$$

Тогда соответствующее нетривиальное решение $u(x)$ вариационного неравенства (1) имеет на $(0, l]$ не более $k - 1$ нулевой точки.

Литература

1. Покорный Ю.В. Интеграл Стильтеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. АН, **364**:2 (1999), 167-169.

О ДЕФОРМАЦИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В КОНТЕКСТЕ КТП

А.В. Иванов, Н.В. Харук
regul1@mail.ru, natakharuk@mail.ru

УДК 51-71, 51-72, 517.95

Данное исследование посвящено изучению примеров расходящихся интегралов в контексте анализа квантово-полевых моделей, а также методов их регуляризации путем деформации фундаментальных решений.

Ключевые слова: оператор Лапласа, фундаментальное решение, регуляризация, деформация.

On a deformation of a fundamental solution of a Laplace operator in the context of QFT

This study aims to investigate examples of divergent integrals within the framework of the analysis of quantum field models, along with methods for their regularization through a deformation of fundamental solutions.

Keywords: Laplace operator, fundamental solution, regularization, deformation.

Как известно, см. [1,2], использование пертурбативного подхода при изучении квантово-полевых моделей может приводить к появлению расходящихся величин. Это связано с тем фактом, что обобщенные функции, которые должны рассматриваться на некотором тестовом классе, в действительности действуют на другие обобщенные функции. В итоге, получающиеся комбинации могут содержать не только неинтегрируемые плотности, но и сингулярные функционалы в особых точках. Это приводит к необходимости вводить регуляризацию, которая, как правило, сводится к некоторой деформации функции Грина.

В настоящем исследовании, см. для примера [3-5], рассматривается серия примеров, содержащих «расходимости», изучаются методы их регуляризации, а также предлагается новая регуляризация обрезанием в координатном представлении, удовлетворяющая «условию применимости», которое гарантирует неотрицательность в импульсном представлении. В частности, исследуется семейство деформаций для фундаментального решения оператора Лапласа специального вида.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-11-00311).

Иванов Александр Валентинович, к.ф.-м.н., научный сотрудник, ПОМИ РАН (Санкт-Петербург, Россия); Aleksandr Ivanov (St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia)

Харук Наталья Вячеславовна, к.ф.-м.н., научный сотрудник, ПОМИ РАН (Санкт-Петербург, Россия); Natalia Kharuk (St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia)

Литература

1. *Collins J.C.* Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion — Cambridge University Press, 1984.
2. *Zavialov O.I.* Renormalized quantum field theory — Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1990.
3. *Ivanov A.V., Kharuk N.V.* Quantum equation of motion and two-loop cut off renormalization for ϕ^3 model // Zap. Nauchn. Sem. POMI, **487**, POMI, St. Petersburg, 2019, 151–166; J. Math. Sci. (N. Y.), **257**:4 (2021), 526–536, arXiv:2203.04562, 10.1007/s10958-021-05500-5
4. *Ivanov A.V.* Explicit Cutoff Regularization in Coordinate Representation // 2022 J. Phys. A: Math. Theor. **55**, 495401, arXiv:2209.01783, 10.1088/1751-8121/aca8dc
5. *Ivanov A.V.* Three-loop renormalization of the quantum action for a four-dimensional scalar model with quartic interaction with the usage of the background field method and a cutoff regularization // Nucl. Phys. B, **1006**, 116647 (2024), 10.1016/j.nuclphysb.2024.116647, arXiv:2402.14549, <https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-02.html>

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Б. Ж. Кадиркулов, Ф. Х. Бегимкулов
kadirkulovbj@gmail.com, begimkulovfkh@gmail.com

УДК 517.518

Аннотация. В данной работе для вырождающегося эллиптического уравнения в вертикальной полуполосе исследована задача типа Бицадзе-Самарского. Спектральным методом доказаны теоремы о существовании и единственности решения задачи. В работе также изучены спектральные свойства задачи типа Бицадзе-Самарского для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, найдены собственные числа, а также соответствующие собственные функции, доказана их полнота и базисность, также исследована сопряженная задача.

Ключевые слова: полуполоса, вырождающееся уравнение, задача типа Бицадзе-Самарского, модифицированное уравнение Бесселя, полнота, базисность.

On the unique solvability of the Bitsadze-Samarsky problem for a degenerate elliptic equation

Abstract. In this work, a nonlocal Bitsadze-Samarskii type problem is investigated for a degenerate elliptic equation in a vertical half-strip. Theorems on the existence and uniqueness of a solution to the problem are proven using the spectral method. In this work we also studied the spectral properties of the Bitsadze-Samarskii type problem for an ordinary differential equation of the second order, found the eigenvalues, as well as the corresponding eigenfunctions, proved their completeness and basis property, and also investigated the adjoint problem.

Keywords: half-strip, degenerate equation, Bitsadze-Samarskii type problem, modified Bessel equation, completeness, basis property.

Задачи с краевыми условиями типа Ионкина-Самарского для вырождающегося уравнения, с использованием спектрального метода,

Кадиркулов Бахтияр Жалилович, доцент, (Ташкент, Узбекистан); Kadirkulov Baxtiyar (Alfraganus University, Tashkent, Uzbekistan) и Академия наук Республики Узбекистан Институт математики имени В. И. Романовского (Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky, Tashkent, Uzbekistan).

Бегимкулов Фозил Хидирович, преподаватель, (Ташкент, Узбекистан); Begimqulov Fozil (Tashkent Perfect University, Uzbekistan).

изучены в работах [1,2]. В данной работе для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка вида

$$Lu \equiv t^m u_{xx} + u_{tt} - b^2 t^m u = 0,$$

в полуполосе $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 1, y > 0\}$ спектральным методом изучается задача типа Бицадзе-Самарского в следующей постановке:

Задача BS. Найти ограниченную в области Ω функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, t) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega), Lu(x, t) \equiv 0, (x, t) \in \Omega,$$

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = u(x_0, t), t \in [0; +\infty), u(x; 0) = \tau(x), x \in [0, 1],$$

где $\tau(x)$ - заданная функция, $x_0 \in (0, 1), b, m > 0$.

В данной работе задача BS изучается в двух различных значениях x_0 , а именно при $x_0 = 0,5$ и $x_0 = 0,2$.

1. Случай $x_0 = 0,5$. Для решения задачи BS используется спектральный метод, в результате которого рассматриваемая задача сводится к изучению спектральной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка по пространственной переменной. Исследуются спектральные свойства полученной, а также сопряженной задачи. Найдены собственные значения, а также соответствующие им собственные функции, доказано их базисность. Далее при определенных условиях на заданные функции доказываются теоремы о единственности и существования решения этой задачи.

2. Случай $x_0 = 0,2$. Спектральные вопросы задачи исследуются аналогичным образом. Отметим, что в этом случае, спектральная задача, полученная в результате применения спектрального метода, а также задача, сопряженная к этой, кроме собственных функций, также имеет присоединенные функции.

Литература

1. *Е. И. Моисеев* О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения, 1999, том 35, № 8, 1094-1100.

2. *К. В. Сабитов, О. Г. Сидоренко.* Об однозначной разрешимости нелокальной задачи для вырождающегося эллиптического уравнения спектральным методом // Труды международной конференции. Стерлитамак, 2003 г., стр. 213-219.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ И РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ЧЕТЫРЕХ ТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Г. Кайрат

gulzairakairat536@gmail.com

УДК 51.77

Ключевые слова: единственность решения, уравнения теплопроводности, спектры, операторы.

Uniqueness and solvability of one four point problem for the heat conduction equation

В предлагаемом сообщении рассматривается четырех точечная по времени задача для уравнения теплопроводности на всей оси.

The proposed communication considers a four-point time problem for the heat equation on the entire axis.

Keywords: uniqueness of solution, heat equations, spectra, operators.

Исследуется задача

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in R, 0 < t < T \quad (1)$$

$$\alpha_0 u(x, 0) + \alpha_1 u(x, \frac{T}{3}) + \alpha_2 u(x, \frac{2T}{3}) + \alpha_3 u(x, T) = \psi(x) \quad (2)$$

где

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \alpha_0 \neq 0, \alpha_3 \neq 0$$

В первой части сообщения выясняется, что единственность решения задачи (1.1)-(1.2) достигается тогда и только тогда, когда спектры следующих двух операторов

$$A = \frac{\partial}{\partial t}, D(A) = \{y(t) \in W_2^1[0, T] : \sum_{j=0}^3 \alpha_j y(\frac{jT}{3}) = 0\}$$

$$B = \frac{d^2 \omega(x)}{dx^2}, D(B) = \{W_2^2(-\infty, +\infty)\}$$

не пересекаются. В заключительной части доклада выявлен класс разрешимости задачи (1.1)-(1.2). Методы доказательства единственности можно найти в работах [1, 2]. Классы разрешимости подобных задач выясняются в работе [3]. Автор выражает благодарность профессору Кангужину Б.Е. за контроль над работой в ходе её выполнения.

Кайрат Г., Казахский Национальный Университет имени Аль-Фараби

References

1. *Кангузлин Б.Е., Кошанов Б.Д.* Критерий единственности решения краевой задачи для оператора $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - A$ с эллиптическим оператором A произвольного порядка.
2. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений// Известие РАН. Серия математика. 2003. Т. 67, №2. С. 133-166. <https://doi.org/10.4213/im429>
3. *А.Ю. Попов, И.В.Тихонов* Классы единственности в целокальной по времени задаче для уравнения теплопроводности и комплексные собственные функций оператора Лапласа, Дифференц. Уравнения, 2004, том 40, номер 3, 396-405.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В ОБЛАСТИ, ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ КОТОРОЙ ПОЛУПОЛОСА

К.Б. Казакбаева
qalligul96@gmail.com

УДК 517.956.6

В работе для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом изучена нелокальная краевая задача в неограниченной области. Единственность решения задачи доказана с помощью принципа экстремума. При доказательстве существования решения задачи применены методы интегральных уравнений и разделения переменных.

Ключевые слова: Полулопосо, уравнение с сингулярным коэффициентом, функция Бесселя, преобразование Ханкеля, ряд, единственность решения, существование решения, метод Фурье, сингулярное интегральное уравнение.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \quad (1)$$

где $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$ в области D , ограниченной прямыми $J_0 = \{(x, y) : x = 0, y > 0\}$, $J_1 = \{(x, y) : x = 1, y > 0\}$ и характеристиками $OC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$, $BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$ уравнения (1), выходящими из точек $O(0, 0)$, $B(1, 0)$, и отрезком OB прямой $y = 0$. Пусть $\bar{D} = \bar{D}^- \cup D^+ \cup \bar{J}_0 \cup \bar{J}_1$, $D^+ = D \cap \{(x, y) : y > 0\}$, $D^- = D \cap \{(x, y) : y < 0\}$.

Задача. Найти функцию $u = u(x, y)$ со свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D^+ \cup J_0 \cup D^-) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$ удовлетворяют уравнению (1) в $D^+ \cup D^-$;

2)

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0, \text{ равномерно по } x \in [0, 1];$$

3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0, y) - u(1, y) = \varphi_1(y), \quad y \geq 0,$$

$$u_x(0, y) = \varphi_2(y), \quad y > 0,$$

$$u(x, y)|_{OC} = \psi(x), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

Казакбаева Каллигул (Базовый докторант, Институт Математики им. В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ул. Университет, 9, Узбекистан)

и условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_y = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} u_y, \quad x \in (0, 1),$$

где $\varphi_1 = \varphi_1(y)$, $\varphi_2 = \varphi_2(y)$, $\psi = \psi(x)$ – заданные функции, такие, что $\psi(x) \in C^2 [0, \frac{1}{2}]$, $\varphi_i(y) \in C^1(0, \infty)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} \varphi_i(y) \in L_1(0, \infty)$, $i = 1, 2$,

$$\varphi_1(\infty) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y) = \psi(0).$$

Теорема. Пусть $\varphi_1(y) \equiv 0$, $\varphi_2(y) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Тогда задача не может иметь более одного решения.

Доказательство теоремы проводится с помощью принципа экстремума. Существование решения изучаемой задачи устанавливается методами разделения переменных и интегральных уравнений.

Отметим, что локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения (1) в случае, когда изучены в [1,2]. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в вертикальной полуполосе рассмотрена в [3].

Литература

1. Репин О.А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой полуполоса // Дифференциальные уравнения, 4:32 (1996), 565-567.
2. Лернер М.Е., Репин О.А. Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа // Сибирский математический журнал, 6:40 (1999), 1260-1275.
3. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в полуполосе // Дифференц. уравнения, 10:43 (2007), 1417-1422.

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ОБ ИСТОЧНИКЕ

А.В. Калинин, А.А. Тюхтина
avk@mm.unn.ru, tyukhtina@iee.unn.ru

УДК 517.9

Исследуются обратные задачи об источнике для системы уравнений Максвелла в квазистационарных приближениях. Характеризуются классы единственности решения обратных задач при различных видах граничных измерений.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла, квазистационарное приближение, обратные задачи об источнике, граничные наблюдения, финальное наблюдение, ортогональное проектирование.

Orthogonal projection method in inverse source problems

Inverse source problems for the system of Maxwell equations in quasi-stationary approximations are investigated. Uniqueness classes of solutions of inverse problems for different types of boundary measurements are characterized.

Keywords: system of Maxwell equations, quasi-stationary approximation, inverse source problems, boundary observations, final observation, orthogonal projection.

Задачи об определении источников электромагнитных полей по результатам граничных наблюдений являются классическим разделом теории обратных задач математической физики и находят широкое применение в различных областях естествознания [1–6]. В настоящей работе обсуждаются постановки и свойства решений обратных задач об источнике для системы уравнений Максвелла в различных квазистационарных приближениях в неоднородных средах по результатам граничных и финальных наблюдений. Обсуждаются особенности постановок прямых и обратных задач, обусловленные их приложением к моделированию электромагнитных процессов в атмосфере. В качестве граничных наблюдений рассматриваются измерения нормальных и касательных компонент электрического и магнитного полей.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00440, <https://rscf.ru/project/23-21-00440/>

Калинин Алексей Вячеславович, д.ф.-м.н., ННГУ имени Н.И.Лобачевского (Нижний Новгород, Россия); Aleksey Kalinin (Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia)

Тюхтина Алла Александровна, к.ф.-м.н., ННГУ имени Н.И.Лобачевского (Нижний Новгород, Россия); Alla Tyukhtina (Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia)

Литература

1. *He S., Romanov V.G., Popov M.* Explicit full identification of a transient dipole source in the atmosphere from measuring of the electromagnetic field at several points at ground level // *Radio Science*, **35**:1 (2000), 107-117
2. *Isakov V.* Inverse Source Problems. — Providence: American Mathematical Society, 1990.
3. *Bleistein N., Cohen J.* Nonuniqueness in the inverse source problem in acoustics and electromagnetics // *Journal of Math. Phys.*, **18** (1977), 194-201
4. *Marengo E.A., Devaney A.J., Ziolkowski R.W.* Inverse source problem and minimum-energy sources // *J. Opt. Soc. Am. A*, **17**:1 (2000), 34-45
5. *Albanese R., Monk P.B.* The inverse source problem for Maxwell's equations // *Inverse Problems*, **22**:3 (2006), 1023-1035
6. *Alonso Rodriguez A., Camano J., Valli A.* Inverse source problems for eddy current equations // *Inverse problems*, **28**:1 (2012), 015006

**О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ГРАФ-ЗВЕЗДЕ**
Б.Е. Кангужин, Ж.А. Кайырбек, М.О. Мустафина
kanbalta@mail.ru, kaiyrbek.zhalgas@gmail.com,
mustafina@gmail.com

УДК 517.956

Мы предлагаем два варианта задачи Коши для уравнения Штурма-Лиувилля на граф-звезде. Первый вариант задачи Коши задается с помощью констант связей. Выяснен физический смысл констант связей. Второй вариант задачи задается с помощью условий закреплений граничных вершин графа. Оказывается, что предложенные нами аналоги задачи Коши для уравнений Штурма-Лиувилля всюду разрешимы, если выполняется некоторое требование на длины дуг графа-звезды.

Ключевые слова: Граф, граф-дерево, спектр, условия Кирхгофа.

Известно, что задача Коши для неоднородного линейного дифференциального уравнения высшего порядка на отрезке корректно разрешима независимо от вида неоднородности. В данной статье изучается аналог задачи Коши для уравнения Штурма-Лиувилля на граф-звезде. Оказалось, что для разрешимости такой задачи надо требовать дополнительные условия на правую часть неоднородного уравнения Штурма-Лиувилля. В докладе показано, что дополнительные требования на правую часть неоднородного уравнения существенны. Их нельзя игнорировать. Приведены иллюстративные примеры, когда нарушается единственность решения, если эти требования игнорировать. Надо сказать, что существование решение гарантируется, когда указанные дополнительные требования нарушаются. В общем случае такие неоднородные уравнения имеют множество решений.

Литература

1. *Dezin A.A.* Operator-differential equations. The method of model operators in the theory of boundary value problems // Tr. Mat.Inst. Steklova229(2000), 176 pp., 19:2 (1964), 1-63

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта (проект № AP19678089 и проект № AP19175972).

Кангужин Балтабек Есмаатович, д.ф.-м.н., профессор, (Алматы, Казахстан); Baltabek Kanguzhin (Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan)

Кайырбек Жалгас Аскарлович, (Алматы, Казахстан); Zhalgas Kaiyrbek (Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan)

Мустафина Мергуль Оралбековна, докторант (Усть-Каменогорск, Казахстан); Mustafina Mergul (East Kazakhstan State University named after S. Amanzholova, Kazakhstan)

2. *Plaksina O.A.* Inverse problems of spectral analysis for the Sturm-Liouville operators with nonseparated boundary conditions // Math.USSR-Sb, **59**:1 (1988), 1-23

ЗАДАЧА ФРАНКЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ТРЕХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

К.Т. Каримов, А.М. Шоикров
karimovk80@mail.ru, shokirovasror@mail.ru

УДК 517.956.6

В работе исследована задача Франкля для трехмерного уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в смешанной области, эллиптическая часть которой полуцилиндр, а гиперболическая часть - треугольная прямая призма. На основании свойства полноты систем собственных функций двух одномерных спектральных задач, доказано теорема единственности. Решение поставленной задачи построено в виде суммы двойного ряда Фурье-Бесселя.

Ключевые слова: задача Франкля, сингулярный коэффициент, функция Бесселя, спектральная теория.

Frankl's problem for an equation with a singular coefficient in a three-dimensional domain

The paper studies the Frankl problem for a three-dimensional equation of mixed type with a singular coefficient in a mixed domain, the elliptic part of which is a semicylinder, and the hyperbolic part is a triangular right prism. Based on the completeness property of systems of eigenfunctions of two one-dimensional spectral problems, the uniqueness theorem is proved. The solution to the problem is constructed as the sum of a double Fourier-Bessel series.

Keywords: Frankl's problem, singular coefficient, Bessel function, spectral theory.

В работе уравнения

$$\operatorname{sign}(x+y)[U_{xx} + \operatorname{sign}y \cdot U_{yy}] + U_{zz} + \frac{2\gamma}{z}U_z = 0, \quad (1)$$

рассматриваются в области $D = \Omega \times (0, c)$, где Ω - конечная односвязная область плоскости xOy , ограниченная дугой $\bar{\sigma}_0$ и отрезками $\overline{MM^*}$, $\overline{M^*P}$, где $\bar{\sigma}_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, $\overline{MM^*} = \{(x, y) : x = 0, -1 < y < 1\}$, $\overline{M^*P} = \{(x, y) : x - y = 1, 0 < x < 1\}$.

Введем обозначения: $\Omega_0 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x, y) : y < 0, x + y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0, x + y < 0\}$, $D_j = \Omega_j \times (0, c)$,

Каримов Камолитдин Туйчибоевич, к.ф.-м.н., доцент, ФерГУ (Фергана, Узбекистан); Kamoliddin Karimov (Fergana state university, Fergana, Uzbekistan)

Шоикров Асрор Муроджонович, докторант, ФерГУ (Фергана, Узбекистан); Asror Shokirov (Fergana state university, Fergana, Uzbekistan)

$j = \overline{0, 2}$, $OP = \Omega \cap (y = 0)$, $OQ = \{(x, y) : x + y = 0, 0 < x < 1/2\}$, $OM = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < 1\}$, $OM^* = MM^* \setminus \overline{OM}$, $O(0, 0)$, $M(0, 1)$, $M^*(0, -1)$, причем здесь $\gamma = const \in R$, $0 < \gamma < 1/2$.

В области D уравнения (1) принадлежит смешанному типу, а именно: в области D_0 — эллиптическому типу, а в областях D_1 и D_2 — гиперболическому типу. Прямоугольник $OP \times (0, c)$ являются плоскостями изменения типа уравнения.

Заметим, что область D_0 удобнее определить в цилиндрических координатах (r, φ, z) в следующем виде:

$$D_0 = \{(r, \varphi, z) : r \in (0, 1), \varphi \in (0, \pi/2), z \in (0, c)\},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \arctg(y/x).$$

Для уравнения (1) в области Ω исследуем следующую задачу:

Задача F. Найти функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую в области D уравнению (1) и следующим условиям:

$$U(x, y, z) \in C(\bar{D}) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(D_0 \cup D_1 \cup D_2);$$

$$U(x, y, z)|_{x=\cos \varphi, y=\sin \varphi} = f(\varphi, z), \quad \varphi \in (0, \pi/2), \quad z \in (0, c);$$

$$U_x(x, y, z)|_{\overline{OM} \times (0, c)} = 0, \quad y \in (-1, 0) \cup (0, 1), \quad z \in (0, c);$$

$$U(x, y, z)|_{x=0} = U(x, -y, z)|_{x=0}, \quad y \in [0, 1], \quad z \in [0, c],$$

$$U(x, y, z)|_{z=0} = U(x, y, z)|_{z=c} = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y \rightarrow -0} U_y(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow +0} U_y(x, y, z), \quad x \in (0, 1), \quad z \in (0, c),$$

где $f(\varphi, z)$ — заданная функция.

Поставленная задача при $\gamma = 0$, исследовано в работе [1].

Литература

1. Moiseev E.I., Nefedov P.V. Frankl problem for the Lavrent'ev-Bitsadze equation in a 3D-domain // Integral Transforms and Special Functions, 2013, Vol. 24, Issue 7. P. 554-560.

ОБ ОЦЕНКАХ ГЛАДКОСТИ НА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ АТМОСФЕРЫ

Ю.Ю. Клевцова, klevtsovayulia@mail.ru

УДК 517.957

Получены оценки на гладкость решений одной стохастической модели атмосферы.

Ключевые слова: стохастическая модель атмосферы, гладкость решений.

On the smoothness of the solutions of a stochastic model of the atmosphere

Estimates for the smoothness of solutions of a stochastic model of the atmosphere are obtained.

Keywords: stochastic model of the atmosphere, smoothness of solutions.

В работе доказываются некоторые оценки гладкости на решения стохастической системы одной модели бароклинической атмосферы, возмущенной случайным шумом. Показывается, что эти оценки могут быть использованы для доказательства некоторых свойств стационарных решений этой системы. Автор продолжает свои исследования, которые были проведены в работах [1-3].

Литература

1. *Klevtsova Yu.Yu.* On the inviscid limit of stationary measures for the stochastic system of the Lorenz model for a baroclinic atmosphere // Siberian electronic mathematical reports, **19**:2 (2022), 1015-1037
2. *Клевцова Ю.Ю.* Об интегральных свойствах стационарных мер для стохастической системы модели Лоренца бароклинической атмосферы // Siberian electronic mathematical reports, **19**:2 (2022), 984-1014
3. *Klevtsova Yu.Yu.* On the rate of convergence as $t \rightarrow +\infty$ of the distributions of solutions to the stationary measure for the stochastic system of the Lorenz model describing a baroclinic atmosphere // Sb. Math., **208**:7 (2017), 929-976

Клевцова Юлия Юрьевна, к.ф.-м.н., ИСИ СО РАН, СибГУТИ (Новосибирск, Россия); Yulia Klevtsova (Ershov Institute of Informatics Systems, Siberian State University of Telecommunications and Information Science, Novosibirsk, Russia)

**VARIATIONAL INEQUALITIES WITH G -CONVERGENT
NONLINEAR ELLIPTIC OPERATORS
AND MEASURABLE BILATERAL CONSTRAINTS**
A.A. Kovalevsky
alexkv171@mail.ru

УДК 517.9

We discuss the application of G -convergence and strong G -convergence of nonlinear elliptic operators in divergence form to the study of the convergence of solutions of variational inequalities with bilateral constraints coinciding on a set of positive measure.

Keywords: variational inequality, bilateral constraints, G -convergence of operators, convergence of solutions.

In the talk, we consider variational inequalities with invertible operators $\mathcal{A}_s: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}$, in divergence form and the constraint set

$$V = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : \varphi \leq v \leq \psi \text{ a.e. in } \Omega\},$$

where Ω is a nonempty bounded open set in \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), $p > 1$, and $\varphi, \psi: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ are measurable functions.

We assume that the following conditions are satisfied:

- (C₁) $\text{int}\{\varphi = \psi\} \neq \emptyset$ and $\text{meas}(\partial\{\varphi = \psi\} \cap \Omega) = 0$;
- (C₂) there exist $\bar{\varphi}, \bar{\psi} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ such that $\varphi \leq \bar{\varphi} \leq \bar{\psi} \leq \psi$ a.e. in Ω and $\text{meas}(\{\varphi \neq \psi\} \setminus \{\bar{\varphi} \neq \bar{\psi}\}) = 0$.

One of the results we discuss is that if the sequence $\{\mathcal{A}_s\}$ G -converges to an invertible operator $\mathcal{A}: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ and a sequence $\{f_s\} \subset W^{-1,p'}(\Omega)$ converges strongly to a functional $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, then the solutions $u_s \in V$ of the variational inequalities

$$\forall v \in V, \quad \langle \mathcal{A}_s u_s - f_s, u_s - v \rangle \leq 0 \tag{1}$$

converge weakly in $W_0^{1,p}(\Omega)$ to the solution $u \in V$ of the variational inequality

$$\forall v \in V, \quad \langle \mathcal{A}u - f, u - v \rangle \leq 0. \tag{2}$$

This result was stated in [2]. A similar result was obtained in [1] with the difference that, instead of conditions (C₁) and (C₂) on the constraints φ and ψ , we assumed that the following condition is satisfied:

The research funding from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Ural Federal University Program of Development within the Priority-2030 Program) is gratefully acknowledged.

Ковалевский Александр Альбертович, д.ф.-м.н., профессор, ИММ УрО РАН и УрФУ (Екатеринбург, Россия); Alexander Kovalevsky (Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS and Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia)

(C) for every nonempty open set ω in \mathbb{R}^n with $\bar{\omega} \subset \Omega$, there exist $\varphi_\omega, \psi_\omega \in W_0^{1,p}(\Omega)$ such that $\varphi \leq \varphi_\omega \leq \psi_\omega \leq \psi$ a.e. in Ω and $\varphi_\omega < \psi_\omega$ a.e. in ω .

At the same time, in addition to the assertion that the solutions u_s of the variational inequalities (1) converge weakly in $W_0^{1,p}(\Omega)$ to the solution u of the variational inequality (2), we proved that $\mathcal{A}_s u_s \rightarrow \mathcal{A}u$ strongly in $W^{-1,p'}(\Omega)$, which implies that the energy integrals $\langle \mathcal{A}_s u_s, u_s \rangle$ converge to $\langle \mathcal{A}u, u \rangle$. In this regard, we note that, by condition (C), $\text{meas}\{\varphi = \psi\} = 0$, while, by condition (C₁), the measure of the set $\{\varphi = \psi\}$ is positive, which essentially influences the behavior of the sequence $\{\mathcal{A}_s u_s\}$ and causes the absence of the strong convergence in $W^{-1,p'}(\Omega)$ of the sequence $\{\mathcal{A}_s u_s\}$ in the case where conditions (C₁) and (C₂) are satisfied.

However, as stated in [2], if the sequence $\{\mathcal{A}_s\}$ strongly G -converges to an invertible operator $\mathcal{A}: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ in divergence form, a sequence $\{f_s\} \subset W^{-1,p'}(\Omega)$ converges strongly to a functional $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, and, in addition to conditions (C₁) and (C₂), the coefficients of the operators \mathcal{A}_s and the functions $\bar{\varphi}$ and $\bar{\psi}$ satisfy an extra condition, then, for the solutions u_s of the variational inequalities (1) and the solution u of the variational inequality (2), we have $u_s \rightarrow u$ weakly in $W_0^{1,p}(\Omega)$, $\mathcal{A}_s u_s \rightarrow \hat{\mathcal{A}}u$ weakly in $W^{-1,p'}(\Omega)$, and $\langle \mathcal{A}_s u_s, u_s \rangle \rightarrow \langle \hat{\mathcal{A}}u, u \rangle$, where $\hat{\mathcal{A}}: W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ is an operator in divergence form, and in general the equalities $\hat{\mathcal{A}}u = \mathcal{A}u$ and $\langle \hat{\mathcal{A}}u, u \rangle = \langle \mathcal{A}u, u \rangle$ do not hold. This result is also discussed in the talk.

Concerning the notions of G -convergence and strong G -convergence of operators and the related results, see, e.g., [3, 4].

References

1. *Kovalevsky A.A.* Convergence of solutions of nonlinear elliptic variational inequalities with measurable bilateral constraints // *Results Math.*, **78**:4 (2023), Paper No. 145, 22 p.
2. *Kovalevsky A.A.* Nonlinear variational inequalities with bilateral constraints coinciding on a set of positive measure // *Dokl. Math.*, **109**:1 (2024), 62–65.
3. *Pankov A.A.* Averaging and G -convergence of nonlinear elliptic operators of divergence type // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **278**:1 (1984), 37–41.
4. *Zhikov V.V., Kozlov, S.M., Oleinik O.A., Ngoan H.T.* Averaging and G -convergence of differential operators // *Russ. Math. Surv.*, **34**:5 (1979), 69–147.

MIXED PROBLEM FOR A SEMILINEAR NONSTRICTLY HYPERBOLIC EQUATION OF THE THIRD ORDER

V.I. Korzyuk, J.V. Rudzko

korzyuk@bsu.by, janycz@yahoo.com

УДК 517.956.35

We study the classical solution of a boundary value problem for a semilinear nonstrictly hyperbolic equation of the third order in the first quadrant. We pose Cauchy conditions on the lower base of the domain and the Dirichlet and Neumann conditions on the lateral boundary. By the method of characteristics and the Duhamel principle, we obtain an implicit analytic expression in the form of two integral equations for the solution of the problem. For the problem under consideration, the uniqueness of the solution is proved, and conditions are established under which a classical solution exists.

Keywords: classical solution, mixed problem, method of characteristics, third-order equation, semilinear equation, nonstrictly hyperbolic equation, matching conditions.

In the domain $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ of two independent variables $(t, x) \in Q \subset \mathbb{R}^2$, consider the nonlinear nonstrictly hyperbolic third-order equation

$$(\partial_t - a\partial_x + b_1)(\partial_t + a\partial_x + b_2)^2 u(t, x) = f(t, x, u(t, x)), \quad (t, x) \in Q, \quad (1)$$

where a , b , and b_1 such that $a > 0$. We supplement Eq. (1) with the initial conditions

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = \varphi_1(x), \quad \partial_t^2 u(0, x) = \varphi_2(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (2)$$

on the lower base of the domain Q and the boundary conditions

$$u(t, 0) = \mu_0(t), \quad \partial_x u(t, 0) = \mu_1(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (3)$$

on the lateral part of the boundary ∂Q .

Previously, we have considered the Cauchy problem for third-order hyperbolic semilinear equations similar to (1) in the works [1–3].

Our main results can be formulated as follows.

The work was published with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the program of the Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics under the agreement No. 075-15-2022-284.

Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Belarusian State University, (Minsk, Belarus); Senior Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

M. Sc. (Mathematics and Computer Sciences), Junior Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Theorem 1. *Let the conditions $f \in C^2(\overline{Q} \times \mathbb{R})$, $\varphi_0 \in C^4([0, \infty))$, $\varphi_1 \in C^3([0, \infty))$, $\varphi_2 \in C^2([0, \infty))$, $\mu_0 \in C^4([0, \infty))$, and $\mu_1 \in C^3([0, \infty))$ be satisfied, and let the function f satisfy the Lipschitz condition*

$$|f(t, x, u) - f(t, x, z)| \leq L(t, x)|u - z|$$

with a continuous function $L: \overline{Q} \mapsto [0, \infty)$. The mixed problem (1) – (3) has a unique solution u in the class $C^4(\overline{Q})$ if and only if the following matching conditions are satisfied:

$$\begin{aligned} \mu_0(0) &= \varphi_0(0), \quad D\mu_0(0) = \varphi_1(0), \quad D^2\mu_0(0) = \varphi_2(0), \\ D^3\mu_0(0) &= f(0, 0, \varphi_0(0)) + a^3 D^3\varphi_0(0) - a^2 b_1 D^2\varphi_0(0) + 2a^2 b_2 D^2\varphi_0(0) + \\ &+ a^2 D^2\varphi_1(0) + ab_2^2 D\varphi_0(0) - 2ab_1 b_2 D\varphi_0(0) - \\ &- 2ab_1 D\varphi_1(0) - aD\varphi_2(0) - b_1 b_2^2 \varphi_0(0) - b_2^2 \varphi_1(0) - 2b_1 b_2 \varphi_1(0) - \\ &- b_1 \varphi_2(0) - 2b_2 \varphi_2(0), \\ \mu_1(0) &= D\varphi_0(0), \quad D\mu_1(0) = D\varphi_1(0), \quad D^2\mu_1(0) = D\varphi_2(0), \\ D^4\mu_0(0) &= -b_1 f(0, 0, \varphi_0(0)) - 2b_2 f(0, 0, \varphi_0(0)) + \\ &+ \varphi_1(0) \partial_u f(0, 0, u = \varphi_0(0)) + \partial_t f(t = 0, 0, u(0, 0)) - b_1 a^3 D^3\varphi_0(0) - \\ &- 2a^3 b_2 D^3\varphi_0(0) + a^3 D^3\varphi_1(0) + a^2 b_1^2 D^2\varphi_0(0) - 4a^2 b_2^2 D^2\varphi_0(0) - \\ &- 2a^2 b_1 D^2\varphi_1(0) + a^2 D^2\varphi_2(0) - 2ab_2^3 D\varphi_0(0) + 3ab_1 b_2^2 D\varphi_0(0) + \\ &+ 2ab_2^2 b_2 D\varphi_0(0) + 2ab_1^2 D\varphi_1(0) + ab_2^2 D\varphi_1(0) + 2ab_1 b_2 D\varphi_1(0) - \\ &- ab_1 D\varphi_2(0) + 2ab_2 D\varphi_2(0) + 2b_1 b_2^3 \varphi_0(0) + b_1^2 b_2^2 \varphi_0(0) + \\ &+ 2b_2^3 \varphi_1(0) + 4b_1 b_2^2 \varphi_1(0) + 2b_1^2 b_2 \varphi_1(0) + b_1^2 \varphi_2(0) + 3b_2^2 \varphi_2(0) + \\ &+ 2b_1 b_2 \varphi_2(0) - aD^3\mu_1(0). \end{aligned}$$

In Theorem 1, we have denoted the Newton–Leibniz operator as D .

References

1. *Korzyuk V.I., Rudzko J.V.* Classical Solution to the Cauchy Problem for a Semilinear Hyperbolic Equation in the Case of Two Independent Variables // Russian Mathematics, **68**:3 (2024), 41–52.
2. *Korzyuk V.I., Rudzko J.V.* Cauchy Problem for a Semilinear Nonstrictly Hyperbolic Equation on a Half-Plane in the Case of a Single Characteristic // Nonlinear Phenomena in Complex Systems, **27**:2 (2024), 104–122.
3. *Korzyuk V.I., Rudzko J.V.* Cauchy Problem for a Semilinear Nonstrictly Hyperbolic Equation of the Third Order with Two Characteristics // Abilova F.V. (ed.) Proceedings of the International Scientific Conference “Mukhtarov Readings: Current Problems of Mathematics, Methods of Teaching and Related Issues”. — Makhachkala: Dagestan State Technical University, 2024. — 105–108.

4. *Trenogin V.A.* Global invertibility of nonlinear operators and the method of continuation with respect to a parameter // *Dokl. Math.*, **54**:2 (1996), 730–732.

5. *Trenogin V.A.* Invertibility of Nonlinear Operators and Parameter Continuation Method // *Ramm A.G. (ed.) Spectral and Scattering Theory.* — Boston: Springer, 1998. — 189–197.

6. *Korzyuk V.I., Mandrik A.A.* First Mixed Problem for a Nonstrictly Hyperbolic Equation of the Third Order in a Bounded Domain // *Differential Equations*, **52**:6 (2016), 767–780.

7. *Korzyuk V.I., Mandrik A.A.* Boundary Value Problems for a Nonstrictly Hyperbolic Equation of the Third Order // *Differential Equations*, **52**:2 (2016), 210–219.

СЛАБОЕ РАВНОВЕСИЕ ПО БЕРЖУ В ПОЛИМАТРИЧНОЙ ИГРЕ С НЕЧЕТКОЙ ЦЕЛЬЮ

К.Н. Кудрявцев, И.В. Измestьев
kudrkn@gmail.com, j748e8@gmail.com

УДК 519.833

Рассматривается полиматричная игра трех лиц с нечеткими целями, заданными в виде нечетких чисел с треугольной функцией принадлежности. Для такой игры предложена концепция слабого Т-равновесия по Бержу и разработан алгоритм построения такого равновесия.

Ключевые слова: равновесие по Бержу, бескоалиционная игра, нечеткие цели.

Weak Berge equilibrium in a polymatrix game with a fuzzy goal

A polymatrix three persons game with fuzzy objectives given as fuzzy numbers with triangular membership function is considered. For such a game the concept of weak Berge T-equilibrium is proposed. The algorithm for constructing weak Berge T-equilibrium is developed.

Keywords: Berge equilibrium, noncooperative game, fuzzy number.

Проблемы, связанные с неточностью и неполнотой информации, практически повсеместно проявляются при моделировании реальных процессов. Один из подходов к учету таких неточностей, заключается в использовании нечетких чисел. В представляемом докладе будут использоваться треугольные нечеткие числа [1].

\tilde{A} называется треугольным нечетким числом, если его функция принадлежности имеет вид

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a+l}{l}, & x \in [a-l, a], \\ \frac{a+r-x}{r}, & x \in [a, a+r], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где, a , l и r – действительные (четкие) числа, и l , r – неотрицательны. Множество таких чисел обозначим через \mathfrak{F}_3 .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00539, <https://rscf.ru/project/23-21-00539/>

Кудрявцев Константин Николаевич, к.ф.-м.н., доцент, ЮУрГУ (НИУ) (Челябинск, Россия); Konstantin Kudryavtsev (South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)

Измestьев Игорь Вячеславович, к.ф.-м.н., доцент, зав. каф. ТУиО, ЧелГУ (Челябинск, Россия); Igor Izmet'ev (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

В докладе рассматривается полиматричная игра трех лиц с треугольными нечеткими платежами. Такую игру можно задать с помощью трех полиматриц (трехмерных матриц) \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} одинаковой размерности, элементами которых являются треугольные нечеткие числа.

Существует ряд подходов к решению нечетких игр. В [2,3] были предложены понятия T -равновесий по Нэшу и T_1T_2 -седловой точки, зависящие от выбора способа сравнения нечетких чисел, а именно, от выбора оператора дефазификации $T(\cdot)$. Эти понятия, при различных $T(\cdot)$, включают в себя большинство других понятий решения. Аналогичным образом, следуя [4], может быть формализовано и понятие слабого T -равновесия по Бержу.

Рассмотрим бескоалиционную игру N лиц с треугольными нечеткими выигрышами в нормальной форме

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{\tilde{f}_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle,$$

в которой $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ — множество порядковых номеров игроков; множество стратегий x_i у i -го игрока ($i \in \mathbb{N}$) обозначено через X_i , где $X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$. В результате выбора игроками своих стратегий, складывается ситуация $x = (x_1, \dots, x_N) \in X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_N$). На множестве ситуаций X для каждого игрока i ($i \in \mathbb{N}$) определена нечеткая функция выигрыша $\tilde{f}_i(x) : X \rightarrow \mathfrak{F}_3$. Значение $\tilde{f}_i(x)$, реализовавшееся на выбранной игроками ситуации $x \in X$ есть выигрыш i -го игрока.

Определение 1. Будем называть ситуацию $x^w = (x_1^w, \dots, x_n^w)$ слабым T -равновесием по Бержу, если для каждого игрока i ($i \in \mathbb{N}$) его стратегия x_i^w является оптимальной по Парето альтернативой в $N - 1$ -критериальной задаче нечеткими

$$\Gamma_i = \langle X_i, \{\tilde{f}_j(x_i, x_{-i}^w)\}_{j \in \mathbb{N} \setminus \{i\}} \rangle,$$

где отношение предпочтения \preceq_T , означающее «меньше или равно по оператору дефазификации T », задается оператором дефазификации $T(\cdot)$.

Следуя [2] и [4], можно предложить алгоритм построения слабого T -равновесия по Бержу:

1. Сопоставить игре Γ четкую игру Γ_T , полученную из Γ заменой для каждого игрока i ($i \in \mathbb{N}$) его нечеткой функции выигрыша $\tilde{f}_i(x)$ на $f_i(x) = T(\tilde{f}_i(x))$.

2. По игре Γ_T построить вспомогательную игру

$$\tilde{\Gamma} = \langle \mathbf{N}, \{X_i\}_{i \in \mathbf{N}}, \{g_i(x)\}_{i \in \mathbf{N}} \rangle,$$

где множество игроков \mathbf{N} и множество стратегий X_i ($i \in \mathbf{N}$) тоже самое, что и в игре Γ_T , а функции выигрыша $g_i(x)$ имеют вид

$$g_i(x) = \sum_{j \in \mathbf{N} \setminus \{i\}} f_j(x).$$

3. Построить ситуацию равновесия по Нэшу в игре $\tilde{\Gamma}$. Эта ситуация и будет слабым T -равновесием по Бержу в исходной игре Γ .

Для приближенного поиска слабого T -равновесия по Бержу в полиматричной игре трех лиц с треугольными нечеткими платежами был использован ЗЛР-алгоритм из [4]. Результаты численных экспериментов приводятся в докладе.

Литература

1. *Zimmermann H.J.* Fuzzy Set Theory – and its Applications. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 1996.

2. *Kudryavtsev K.N., Stabulit I.S., Ukhobotov V.I.* A bimatrix game with fuzzy payoffs and crisp game // CEUR Workshop Proceedings. 2017. V. 1987. P. 343–349.

3. *Kudryavtsev K.N., Stabulit I.S., Ukhobotov V.I.* One approach to fuzzy matrix games // CEUR Workshop Proceedings. 2018. V. 2098. P. 228–238.

4. *Kudryavtsev K., Malkov U.* Weak Berge Equilibrium in Finite Three-person Games: Conception and Computation // Open Computer Science, 11:1 (2021), 127-134.

ОБ УСПОКОЕНИИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ С ГЛОБАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ВРЕМЕНИ

А.П. Леднов

lednovalexsandr@gmail.com

УДК 517.9

Исследуется задача об успокоении управляемой системы, заданной функционально-дифференциальными уравнениями первого порядка на графе-звезде с глобальным запаздыванием, пропорциональным времени. Доказана эквивалентность вариационной задачи о минимуме соответствующего функционала энергии некоторой краевой задаче для функционально-дифференциальных уравнений второго порядка. Установлена однозначная разрешимость обеих задач. При этом оптимальная траектория удовлетворяет условиям Кирхгофа во внутренней вершине.

Ключевые слова: квантовый граф, глобальное сжатие, оптимальное управление.

On damping a control system on a star graph with global time-proportional delay

We study the problem of damping a control system determined by first-order functional-differential equations on a star graph with global time-proportional delay. The equivalence of the variational problem of minimizing the corresponding energy functional to a certain boundary value problem for second-order functional-differential equations is proven. The unique solvability of both problems is established. The optimal trajectory obeys Kirchhoff's conditions at the internal vertex.

Keywords: quantum graph, global delay, optimal control.

Задача об успокоении управляемой системы с постоянным запаздыванием, описываемой уравнением запаздывающего типа, была поставлена и исследована Н.Н. Красовским в [1]. Более трудный случай, когда уравнение содержит запаздывание и в главных членах, т.е. принадлежит нейтральному типу, был рассмотрен А.Л. Скубачевским в [2]. Позднее С.А. Бутериным в [3] была предложена концепция функционально-дифференциальных операторов на геометрических графах с глобальным запаздыванием, которое "проходит" через внутренние вершины графа. В работах [4,5] с помощью данной концепции на графы была распространена указанная задача об успокоении управляемой системы с запаздыванием. В [4] был разобран случай

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 24-71-10003).
Леднов Александр Петрович, СГУ (Саратов, Россия);
Alexander Lednov (Saratov State University, Saratov, Russia)

уравнения первого порядка запаздывающего типа, а в [5] рассмотрен общий случай нестационарной управляемой системы, уравнения которой принадлежат нейтральному типу и имеют произвольный порядок $n \in \mathbb{N}$. Случай, когда запаздывание не постоянно, а пропорционально времени, для уравнения нейтрального типа на интервале был рассмотрен Л.Е. Россовским в [6].

В настоящей работе рассматривается задача об успокоении системы управления на графе типа звезды с глобальным запаздыванием, пропорциональным времени, для уравнения запаздывающего типа.

Зафиксируем $T_1 > 0$ и $q > 1$. Предположим, что до момента времени $t = qT_1$, ассоциированного с единственной внутренней вершиной v_1 графа Γ_m , система управления с запаздыванием, пропорциональным времени, на Γ_m описывается уравнением

$$\ell_1 y(t) := y_1'(t) + b_1 y_1(t) + c_1 y_1(q^{-1}t) = u_1(t), \quad 0 < t < qT_1, \quad (1)$$

заданным на ребре e_1 графа Γ_m , с начальным условием

$$y_1(0) = y_0. \quad (2)$$

При $t = qT_1$, т.е. в вершине v_1 , система разветвляется на $m - 1$ независимых процессов (по числу оставшихся ребер), описываемых уравнениями

$$\begin{aligned} \ell_j y(t) &:= y_j'(t) + b_j y_j(t) + c_j y_j(q^{-1}t - T_1(q - 1)) = u_j(t), \\ t > 0, \quad j &= \overline{2, m}, \end{aligned} \quad (3)$$

но имеющих общую историю, определяемую уравнением (1) с начальным условием (2), а также условиями прохождения запаздывания через v_1 :

$$y_j(t) = y_1(t + qT_1), \quad t \in (T_1(1 - q), 0), \quad j = \overline{2, m}, \quad (4)$$

и условиями непрерывности в вершине v_1 , которые в данном случае согласуются с (4) при $t \rightarrow -0$:

$$y_j(0) = y_1(qT_1), \quad j = \overline{2, m}. \quad (5)$$

Соответственно, j -ое уравнение в (3) задано на ребре e_j графа Γ_m , представляющем собой, вообще говоря, бесконечный луч, выходящий из v_1 . Также предположим, что $y_0 \in \mathbb{R}$ и все $b_j, c_j \in \mathbb{R}$.

Зафиксируем $T_j > T_1(q - 1)$, $j = \overline{2, m}$. Успокоение системы (1)–(5) означает, что $y_j(t) = 0$ при $t \geq qT_j$ для каждого $j = \overline{2, m}$. Для достижения этого достаточно отыскать управления $u_j(t)$, $j = \overline{1, m}$, приводящие систему в состояние

$$y_j(t) = 0, \quad t \in [T_j, qT_j], \quad j = \overline{2, m}, \quad (6)$$

и положить $u_j(t) = 0$ при $t > qT_j$ и $j = \overline{2, m}$.

Поскольку такие $u_j(t)$ не единственны, естественно искать их из условия минимума функционала энергии. Приходим к вариационной задаче

$$\sum_{j=1}^m \int_0^{qT_j} (\ell_j y(t))^2 dt \rightarrow \min \quad (7)$$

при условиях (2) и (4)–(6).

Обозначим через \mathcal{B} краевую задачу для функционально-дифференциальных уравнений второго порядка

$$\mathcal{L}_j y(t) := -(\ell_j y)'(t) + b_j \ell_j y(t) + q \tilde{\ell}_j y(t) = 0, \quad 0 < t < l_j, \quad j = \overline{1, m},$$

при условиях (2), (4)–(6) и условии

$$y_1'(qT_1) - \sum_{j=2}^m y_j'(0) + \beta y_1(qT_1) + \gamma y_1(T_1) = 0, \quad (8)$$

где

$$\tilde{\ell}_1 y(t) = \begin{cases} c_1 \ell_1 y(qt), & 0 < t < T_1, \\ \sum_{k=2}^m c_k \ell_k y(q(t - T_1)), & T_1 < t < qT_1, \end{cases}$$

$$\tilde{\ell}_j y(t) = \begin{cases} c_j \ell_j y(q(t + T_1(q - 1))), & 0 < t < T_j - T_1(q - 1), \\ 0, & T_j - T_1(q - 1) < t < T_j, \end{cases}$$

для $j = \overline{2, m}$, и

$$l_1 := qT_1, \quad l_j := T_j, \quad j = \overline{2, m},$$

$$\beta := b_1 - \sum_{k=2}^m b_k, \quad \gamma := c_1 - \sum_{k=2}^m c_k.$$

Теорема 1. *Кортеж*

$$y = [y_1, \dots, y_m] \in W_2^1(\mathcal{T}) := \bigoplus_{j=1}^m W_2^1[0, qT_j]$$

является решением вариационной задачи (2), (4)–(7) тогда и только тогда, когда

$$y \in W_2^2(\tilde{\mathcal{T}}) := W_2^2[0, qT_1] \oplus \bigoplus_{j=2}^m W_2^2[0, T_j]$$

и является решением краевой задачи \mathcal{B} .

Условие (8) можно охарактеризовать как нелокальное условие типа Кирхгофа. В частности если $\beta = \gamma = 0$, то соотношение (8) становится классическим условием Кирхгофа.

Следующая теорема дает однозначную разрешимость вариационной задачи (2), (4)–(7).

Теорема 2. *Красвая задача В имеет единственное решение*

$$y = [y_1, \dots, y_m] \in W_2^1(\mathcal{T}) \cap W_2^2(\tilde{\mathcal{T}}).$$

Более того, существует $C > 0$ такое, что

$$\|y\|_{W_2^1(\mathcal{T})} \leq C|y_0|.$$

Литература

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
2. *Скубачевский А.Л.* К задаче об успокоении системы управления с последствием // Докл. РАН, **335**:2 (1994), 157–160.
3. *Buterin S.* Functional-differential operators on geometrical graphs with global delay and inverse spectral problems // Results Math., **78** (2023), Art. No. 79.
4. *Buterin S.* On damping a control system with global aftereffect on quantum graphs. Stochastic interpretation, arXiv:2308.00496 [math.OC].
5. *Бутерин С. А.* Об успокоении системы управления произвольного порядка с глобальным последствием на дереве, Матем. заметки, 2024, том 115, выпуск 6, 825–848.
6. *Россовский Л.Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции, Функционально-дифференциальные уравнения, СМФН, 54, РУДН, М., 2014, 3–138.

**ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ
ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОБОБЩЕНИЯ
УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА**

**С.Ю. Лукашук, В.В. Спеле
lsu@ugatu.su, spele.vv@ugatu.su**

УДК 517.958

Рассматривается задача Дирихле в круге с однородным граничным условием для дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца с дробной степенью оператора Лапласа, близкой к единице. Получено разложение дробного лапласиана по его порядку. Это дает возможность свести задачу отыскания приближенного решения рассматриваемой задачи Дирихле к решению цепочки аналогичных задач для классических неоднородных уравнений Гельмгольца.

Ключевые слова: дробная степень оператора Лапласа, дробно-дифференциальное уравнение Гельмгольца, малый параметр, приближенное решение.

Approximate solution of fractional Helmholtz equation

The Dirichlet problem in a circle with a homogeneous boundary condition for a fractional differential generalization of the Helmholtz equation with a fractional degree of the Laplace operator close to one is considered. The decomposition of the fractional Laplacian in its order is obtained. This makes it possible to reduce the problem of finding an approximate solution to the Dirichlet problem under consideration to solving a chain of similar problems for classical inhomogeneous Helmholtz equations.

Keywords: fractional Laplacian, fractional Helmholtz equation, small parameter, approximate solution.

Для неоднородного дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца в круге $S_a = \{x \in R^2 : |x| \leq a\}$ ставится внутренняя задача Дирихле с однородным граничным условием:

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u + \omega^2 u = f, \quad x \in S_a, \quad \omega \in R, \quad \alpha \in (1, 2); \quad u|_{|x|=a} = 0, \quad (1).$$

где $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ — дробная степень оператора Лапласа¹. В докладе рассматривается случай, когда степень дробного оператора близка к единице: $\alpha = 2 - \varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll 1$). Решается задача построения приближенного

Лукашук Станислав Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, УУНиТ (Уфа, Россия); Stanislav Lukashchuk (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Спеле Владимир Владимирович, аспирант УУНиТ (Уфа, Россия); Vladimir Spele (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

решения задачи (1) в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций в виде формального разложения по малому параметру ε .

В рамках сделанных предположений, справедливо представление

$$(-\Delta)^{1-\frac{\varepsilon}{2}}u = \Delta K^\varepsilon u, \quad (2)$$

где

$$(K^\varepsilon u)(x) = \frac{1}{c_2(\varepsilon)} \iint_{S_a} \frac{u(\xi)}{|x-\xi|^{2-\varepsilon}} d\xi, \quad c_2(\varepsilon) = 2^\varepsilon \Gamma^2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \sin \frac{\pi\varepsilon}{2}$$

— потенциал Рисса¹. Доказано

Утверждение. Для потенциала Рисса (2) справедливо разложение

$$(K^\varepsilon u)(x) = u(x) + \varepsilon \left[(\gamma - \ln 2)u(x) + \frac{1}{4\pi} \Delta \iint_{S_a} \ln^2 |x - \xi| u(\xi) d\xi \right] + o(\varepsilon), \quad (3)$$

где $\gamma \approx 0.5772157$ — постоянная Эйлера.

Подстановка (2) и (3) в уравнение Гельмгольца из (1) приводит его с точностью до $o(\varepsilon)$ к интегро-дифференциальному уравнению с малым параметром. В простейшем случае его решение может искаться в виде формального разложения $u(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + o(\varepsilon)$. Тогда, после расщепления по малому параметру, имеем

$$\Delta u_0(x) + \omega^2 u_0(x) = f(x), \quad (4)$$

$$\Delta u_1(x) + \omega^2 u_1(x) = (\ln 2 - \gamma) \Delta u_0(x) - \frac{1}{4\pi} \Delta^2 \iint_{S_a} \ln^2 |x - \xi| u_0(\xi) d\xi. \quad (5)$$

В соответствии с рассматриваемой задачей Дирихле, уравнения (4) и (5) дополняются однородными граничными условиями

$$u_0|_{|x|=a} = 0, \quad u_1|_{|x|=a} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, задача отыскания приближенного решения задачи (1) сведена к двум связанным задачам Дирихле (4)–(6) для классического линейного уравнения Гельмгольца, решение которых не представляет сложности.

В докладе обсуждается также важный частный случай, когда функция $f(x)$ является радиальной.

Литература

1. Самко, С. Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ОБОБЩЕННЫМИ УСЛОВИЯМИ
ТИПА ШТУРМА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С
ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ**

М.Г. Мажгихова

mazhghihova.madina@yandex.mail.ru

УДК 517.91

Для линейного обыкновенного дифференциального уравнения высокого дробного порядка с запаздывающим аргументом исследована краевая задача с условиями, обобщающими условия Штурма. Развита метод функции Грина для решения этой задачи. Получено условие, гарантирующее однозначную разрешимость. Доказана теорема существования и единственности решения. Решение задачи получено в терминах функции Грина.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, краевая задача, условия Штурма, функция Грина, функция Миттаг-Леффлера.

Boundary value problem with generalized Sturm type conditions for a fractional order differential equation with delay

Boundary value problem with conditions generalizing Sturm's conditions for a linear ordinary differential equation of fractional order with delay is studied. The Green's function method has been developed. A condition that guarantees unique solvability is obtained. The existence and uniqueness theorem of the solution is proved. The solution to the problem is obtained in terms of the Green's function.

Keywords: fractional order differential equation, delay differential equation, boundary value problem, Sturm conditions, Green's function, Mittag-Leffler function.

Рассмотрим уравнение

$$D_{0+}^{\alpha}u(t) - \lambda u(t) - \mu H(t - \tau)u(t - \tau) = f(t), \quad 0 < t < 1, \quad (1)$$

где $D_{0+}^{\alpha}u(t)$ – дробная производная Римана–Лиувилля [1, с. 11], $\alpha \in (n - 1, n]$, λ, μ – произвольные постоянные, τ – фиксированное положительное число.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (проект FEFS-2020-0001).

Мажгихова Мадина Гумаровна, к.ф.-м.н., ИПМА КБНЦ РАН (Нальчик, Россия); Madina Mazhghikhova (Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, Nalchik, Russia)

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u(t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-n}u(t) \in C^n(0,1)$, $u(t) \in L(0,1)$, удовлетворяющую этому уравнению для всех $0 < t < 1$.

В работе для уравнения (1) строится решение задачи:

Задача. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik} \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-k} u(t) = c_i, & i = \overline{1, p}, \\ \sum_{k=1}^n b_{jk} \lim_{t \rightarrow 1} D_{0t}^{\alpha-k} u(t) = d_j, & j = \overline{1, q}, \end{cases} \quad (2)$$

причем $p + q = n$, a_{ik}, b_{jk}, c_i, d_j – заданные постоянные.

Доказана теорема существования и единственности решения для исследуемой задачи (1), (2).

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. — Москва: Физматлит, 2003.

**О ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С
ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ**
В.П. Максимов, maksimov@econ.psu.ru

УДК 517.529

Для линейной системы управления с дробной производной и последствием рассматривается задача управления по отношению к заданной системе целевых функционалов. Получены условия разрешимости этой задачи и описание программного управления, решающего задачу при выполнении указанных условий. В основе всех построений лежит формула представления решений рассматриваемой системы с использованием аналога матрицы Коши, детальной изученной для систем с целой производной.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, системы с дробными производными, задачи управления.

On control problems for systems with fractional derivatives and aftereffect

For a linear control system with a fractional derivative and aftereffect, the control problem is considered with respect to a given system of objective functionals. The conditions for the solvability of this problem and a description of the program control that solves the problem when those conditions are met are obtained. All constructions are based on a formula for representation of solutions to the system under consideration using an analogue of the Cauchy matrix, studied in detail for systems with the derivative of an integer order.

Keywords: functional differential equations, systems with fractional derivatives, control problems.

Рассматривается система управления с дробной производной и последствием

$$(\mathcal{D}^\alpha x)(t) = (\mathcal{J}x)(t) + (Fu)(t) + f(t), \quad t \in [0, T],$$

где \mathcal{D}^α – производная Капуто [1] порядка $\alpha \in (0, 1)$; \mathcal{J} и F – линейные вольтерровы операторы, определенные на банаховом пространстве фазовой переменной $x(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ и гильбертовом пространстве управляющей переменной $u(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r$, соответственно. Задано начальное состояние системы $x(0) = \beta$. Цель управления задается равенством

$$\ell x \equiv \sum_{i=1}^m A_i x(t_i) + \int_0^T B(\tau) x(\tau) dt = \gamma \in \mathbb{R}^N,$$

Максимов Владимир Петрович, д.ф.-м.н., профессор, ПГНИУ (Пермь, Россия); Vladimir Maksimov (Perm State University, Perm, Russia)

где $t_i, i = 1, \dots, m$ фиксированные точки промежутка $[0, T]$, A_i – постоянная $(N \times n)$ -матрица, $B(\cdot)$ – $(N \times n)$ -матрица с суммируемыми элементами, β – заданный вектор целевых значений. В такой постановке задача целевого управления существенно обобщает классическую задачу управления о переводе системы управления из заданного начального состояния в заданное конечное и охватывает класс задач управления с конечным числом многоточечных и интегральных целевых условий.

Для поставленной целевого управления получены условия разрешимости и описание программного управления, решающего задачу при выполнении указанных условий. В основе всех построений лежит формула представления решений рассматриваемой системы с использованием аналога матрицы Коши, детальной изученной для функционально-дифференциальных систем с целой производной [2]. Полученные результаты сопоставляются с известными, в том числе, упомянутыми в известном обзоре [3].

Литература

1. *Kilbas A.A., Srivastava H.H., J.J. Trujillo J.J.* Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam, etc.: Elsevier, 2006.
2. *Максимов В.П.* Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Избранные труды. — Пермь: Перм. ун-т, 2003.
3. *Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А.* Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация // Автоматика и телемеханика, № 5 (2013), 3-34.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ МАКСИМИННОЙ ЗАДАЧИ УКЛОНЕНИЯ-СБЛИЖЕНИЯ

А.Р. Маматов
akmm1964@rambler.ru

УДК 517.977

Рассматривается задача перевода траектории динамической системы, управляемой двумя игроками, цели которых противоположны, из точки в терминальное множество. Данная задача сводится к проверке систем неравенств и/или к решению систем линейных неравенств. Приводится алгоритм решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: игра, уклонения, сближения, алгоритм.

Algorithm for solving maximin problem of evasion-approach

We consider the problem of transferring the trajectory of a dynamic system controlled by two players whose goals are opposite from a point to a terminal set. This problem comes down to testing systems of inequalities and/or solving systems of linear inequalities. An algorithm for solving the problem under consideration is given.

Keywords: game, evasion, approach, algorithm.

Пусть на фиксированном отрезке времени $T = [0, t^*]$, поведение системы, управляемой двумя игроками (участниками), описывается дифференциальным уравнением:

$$\dot{x} = Ax + bu + dv, \quad x(0) = x_0. \quad (1)$$

Здесь $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))'$ - вектор состояния системы в момент t ; $u = u(t), v = v(t)$, - значения управляющих воздействий первого и второго игроков соответственно в момент t ; A - заданная постоянная $n \times n$ - матрица; b, d, x_0 - заданные n - векторы; (штрих)' - знак транспонирования.

Кусочно-постоянная функция $u(\cdot) = (u(t), t \in T)$, непрерывная справа, удовлетворяющая неравенствам $f_* \leq u(t) \leq f^*, t \in T$, называется управлением первого игрока (f_*, f^* - заданные числа).

Кусочно-постоянная функция $v(\cdot) = (v(t), t \in T)$, непрерывная справа с (возможными) точками разрыва (множеством квантования) $\tau = \{t_1, t_2, \dots, t_l\}, 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_l < t_{l+1} = t^*$, удовлетворяющая неравенствам $g_*(t) \leq v(t) \leq g^*(t), t \in T$, называется управлением второго игрока ($g_*(t), g^*(t), t \in T$, - заданные кусочно-постоянные функции с множеством квантования τ).

Маматов Акмал Равшанович, к.ф.-м.н., СИС, СамГУ (Самарканд, Узбекистан); Akmal Mamatov (Samarkand State University named after Sh.Rashidov, Samarkand, Uzbekistan)

Обозначим множества управлений первого и второго игроков соответственно через U, V .

Пусть $H \in \mathbb{R}^{m \times n}; g \in \mathbb{R}^m$. Введем в рассмотрение терминальное множество

$$M = \{x \in R^n \mid Hx = g\}.$$

Два игрока, выбирают управления $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ поочередно, сначала первый игрок выбирает $u(\cdot)$, затем, зная $u(\cdot)$, второй игрок выбирает $v(\cdot)$.

Задача уклонения. Выбрать управление $u^0(\cdot)$, так, чтобы не допустить попадания траектории системы (1) в момент t^* в множество M (уклонить траекторию от встречи с терминальным множеством в момент t^*) при любом управлении $v(\cdot)$.

Задача сближения. Выбрать управление $v^0(\cdot)$, так, чтобы "перевести" траекторию системы (1) из точки x_0 в множество M при t^* (при известном $u(\cdot)$).

Предлагается алгоритм решения рассматриваемой задачи (задач уклонения, сближения), отличающую от алгоритма [4] и основанную на проверке систем неравенств и/или к решению систем линейных неравенств.

Литература

1. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. — Москва: Наука, 1985.
2. *Сатимов Н.Ю.* Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. — Ташкент: Национальная библиотека Узбекистана имени А. Навои, 2019.
3. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. I, II. — Минск: Университетское, 1984.
4. *Маматов А.Р.* Алгоритм решения одной максиминной задачи уклонения-сближения // Бюллетень Института математики 2022, Т. 5, №6, стр.110-118.

ПОЛИТИЧЕСКИЙ АСПЕКТ В КОНКУРЕНЦИИ ЯЗЫКОВ

А.В. Медведев, О.А. Кузенков

a.medvedev.unn@gmail.com, oleg.kuzenkov@itmm.unn.ru

УДК 517.518

Цель настоящего исследования: определение зависимости параметров языков от политической повестки в стране и социальной обстановки в обществе. Для этого строится математическая модель двуязычного сообщества, которая учитывает эффект лексической схожести конкурирующих языков. Модель исследуется классическими методами качественной теории динамических систем при неограниченном увеличении времени динамики. Проводится исследование зависимости параметров языков от политической обстановки в стране. На основании наблюдаемых статистических данных, определяются параметры двух самых распространённых языков Украины: украинский, русский. Определена зависимость параметров языков от политической обстановки в стране. Составлен прогноз изменения численности носителей рассматриваемых языков.

Ключевые слова: исчезновение языков, лексическое сходство, языковая волатильность, билингвизм, языковая конкуренция, языковая динамика, сохранение языка, математическая модель, обыкновенные дифференциальные уравнения.

The political aspect of language competition

The purpose of this study is to determine the dependence of language parameters on the political agenda in the country and the social situation in society. To do this, a mathematical model of the bilingual community is being built, which takes into account the effect of lexical similarity of competing languages. The model is investigated by classical methods of the qualitative theory of dynamical systems with an unlimited increase in the dynamics time. A study is being conducted on the dependence of the language parameters on the political situation in the country. Based on the observed statistical data, the parameters of the two most common languages of Ukraine are determined: Ukrainian, Russian. The dependence of the language parameters on the political situation in the country is determined. A forecast of changes in the number of native speakers of the languages under consideration has been made.

Медведев Александр Викторович, ННГУ (Нижний Новгород, Россия); Alexander Medvedev (N.Novgorod University of Nizhny Novgorod, N.Novgorod, Russia)

Кузенков Олег Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент, ННГУ имени Н.И.Лобачевского (Нижний Новгород, Россия); Kuzenkov Oleg (Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia)

Keywords: disappearance of languages, lexical similarity, language volatility, bilingualism, language competition, language dynamics, language preservation, mathematical model, ordinary differential equations.

Для моделирования конкуренции языков примем гипотезы, рассмотренные в работе [1-6], а модель на их основе дополним эффектом лексического сходства языков. Коэффициент k будет определять лексическое сходство языков, $k = 0.76$ [2, 7, 8]. Динамика носителей языков в обществе характеризуется следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = (1 - k)c_1 r z_{12} - b_1 z_1 (z_2 + z_{12})^\alpha, \\ \dot{z}_2 = (1 - k)c_2 r z_{12} - b_2 z_2 (z_1 + z_{12})^\beta, \\ \dot{z}_{12} = b_1 z_1 (z_2 + z_{12})^\alpha + b_2 z_2 (z_1 + z_{12})^\beta - (1 - k)r z_{12}, \end{cases}$$

Данная модель исследована классическими методами качественной теории динамических систем при неограниченном увеличении времени динамики. Выявлено два качественных случая: сосуществование языков при $1 \leq \alpha \leq 2b_1, 1 \leq \beta \leq 2b_2$ или вытеснение одного языка другим. В работах [9, 10] приведена статистика по долям численности человек на территории Украины, которые идентифицируют себя как украиноговорящие или русскоговорящие, за 1994 – 2012 года. В источниках [11-13] приведена аналогичная статистика за 2001-2023 года. Значения динамики по отсутствующим годам были дополнены усреднёнными значениями на интервале (Рис. ??).

На основе данных статистики, методом наименьших квадратов, были идентифицированы параметры языков. Получилось что украинский и русский языки отличаются престижностью $c_1 = 0.9, c_2 = 0.1$ соответственно, а параметры $\alpha, \beta, b_{1,2}$ оказались равными для двух языков. Точность моделирования оказалась достаточно низкой $diff = 0.316$, что даёт повод исследовать динамику языков раздельно по более коротким временным периодам. Учитывая параметр лексической схожести языков k в нашей модели, мы принимаем его как достаточно постоянный во времени аргумент, претерпевающий существенные изменения лишь на достаточно большом временном периоде. То же самое можно сказать и о параметрах языковой волатильности α, β , а также о коэффициентах, характеризующих изучение второго языка $b_{1,2}$. Определяющим параметром для языковой динамики в непродолжительный временной период является престижность языков $c_{1,2}$. Параметры модели были определены на более коротких временных интервалах, их значения приведены в таблице 1. Полученные результаты дают основание утверждать о наличии зависимости престижности языков от политического курса государства и социальных настроений в обществе: пророссийским тенденциям соответствует увеличение престижности русского языка, а прозападным увеличение престижности языка украинского. Так же выявлено, что при внешнем воздействии на языковую динамику определяющими являются параметры языковой престижности.

Таблица 1: Престижность языков по годам.

-	1994– 1998	1998– 2002	2002– 2005	2005– 2012	2011– 2015	2015– 2022	2020– 2023
c_1	0,8	0,2	0,1	0,1	0,9	0,9	0,95
c_2	0,2	0,8	0,9	0,9	0,1	0,1	0,05

Учитывая тенденции последних лет, которые происходят на Украине, ожидается полное исчезновение русского языка из общества. Обоснованием этому служит предельно низкая престижность русского языка ($c_2 = 0.05$) и стремительно сокращающаяся численность его носителей: -37% за период 2013-2023гг.; в то время как престижность украинского языка высока ($c_1 = 0.95$), а изменение численности говорящих на нём +36% за период 2013-2023гг. Однако, такие тенденции будут сохраняться лишь при не меняющейся политической повестке в стране.

Литература

1. *Castelly X., Egunluz V., San Miguel M.* Ordering Dynamics with Two Non-Excluding Options: Bilingualism in Language Competition // *New Journal of Physics*, 2006, № 8, P. **308**
2. *Mira J., Paredes B.* Interlinguistic Similarity and Language Death Dynamics // *EPL (Europhysics Letters)* 2005, V. 69, P. 1031.
3. *Alexandrova N.* The disappearance of languages, natural bilingualism and nonlinear dynamics // In: 8th International Conference on Cognitive Science, pp. 35–37, Svetlogorsk, Russia, 2018. Abstracts.
4. *Alexandrova N., Antonets V., Kuzenkov J., Nuidel I., Shemagina V., Yakhno V.* Bilingualism as an Unstable State // *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 2021, V. 1358. Springer, Cham.
5. *Abrams D., Strogatz S.* Modelling the Dynamics of Language Death // 2003, *Nature*, 424, 900.
6. *Medvedev, A., Kuzenkov, O.* (2024). Моделирование конкуренции языков в двуязычном сообществе // *Прикладная нелинейная динамика*. 2024. Известия высших учебных заведений.
7. *Дьячок М., Шаповал В.* ГЕНЕАЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ЯЗЫКОВ // Новосибирск, С.32, (2002) URL=<http://www.philology.ru/linguistics1/dyachok-shapoval-02.htm>
8. *Arel D., Driscoll J.* Ukraine's Unnamed War: Before the Russian Invasion of 2022. — Cambridge University Press, 2023-01-05. — 287 с. — ISBN 978-1-316-51149-7.
9. *Панина Н.* Украинское сусильство 1994–2005: Социологический мониторинг. — Киев: ТОВ Издательство Софія, 2005. - С. 68. - ISBN 966-8075-31-5.

10. Закономерности развития украинской устной литературной речи // Институт языкознания им. А. А. Потемки, научная мысль-К., 1965.

11. Государственная статистика Украины
URL=<https://www.ukrstat.gov.ua>

12. *Тилецко К.* Правда про походження української мови / УКРАЇНСЬКИЙ ТИЖДЕНЬ № 39 (256) 28.09 – 4.10.09.2012

13. *Girdenis A., Maziulis V.* Baltu kalbu divergencine chronologija // Baltistica. T. XXVII (2). - Vilnius, 1994. - P. 9.

НЕЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДРОБНОЙ ПО ВРЕМЕНИ СИСТЕМЫ КЕЛЬВИНА — ФОЙГТА

Д.В. Мелехина, В.Е. Федоров

daryamelekhina0112@gmail.com, kar@csu.ru

УДК 517.518

Исследована однозначная разрешимость нелинейной обратной задачи для модифицированной системы уравнений с дробными производными Джрбашяна — Нерсесяна по времени и с неизвестными коэффициентами при младших из них.

Ключевые слова: дробная производная Джрбашяна — Нерсесяна, обратная коэффициентная задача, система уравнений Кельвина — Фойгта, начально-краевая задача.

Nonlinear inverse problem for a Kelvin–Voigt time-fractional system

The unique solvability of a nonlinear inverse problem for a modified system of equations with Dzhrbashyan–Nersesyan fractional derivatives in time and with unknown coefficients at the lowest of them is investigated.

Keywords: Dzhrbashyan–Nersesyan fractional derivative, inverse coefficient problem, Kelvin–Voigt system of equations, initial boundary value problem.

Рассмотрим задачу

$$(\lambda - \Delta)D_t^{\sigma_n}w(\xi, t) = \nu\Delta w(\xi, t) - r(\xi, t) + (\lambda - \Delta) \sum_{k=0}^{n-1} u_k(t)D_t^{\sigma_k}w(\xi, t) + u_n(t)g(\xi, t) + h(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (1)$$

$$\nabla \cdot w(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (2)$$

$$w(\xi, t) = 0, \quad (\xi, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (3)$$

$$D_t^{\sigma_k}w(\xi, 0) = w_k(\xi), \quad \xi \in \Omega, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4)$$

$$\int_{\Omega} \langle \eta_j(\xi), w(\xi, t) \rangle_{\mathbb{R}^d} d\xi = \psi_j(t), \quad t \in [0, T], \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (5)$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области №24-21-20015.

Мелехина Дарья Владимировна, ассистент, Челябинский государственный университет (Челябинск, Россия); Daria Melekhina (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Федоров Владимир Евгеньевич, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой математического анализа, Челябинский государственный университет (Челябинск, Россия); Vladimir Fedorov (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

где $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^d}$ — внутреннее произведение в \mathbb{R}^d , $\mathcal{D}_t^{\sigma k}$, $k = 0, 1, \dots, n \in \mathbb{N}$, — дробные производные Джрбашьяна — Нерсесяна по t [1], соответствующие числам $\{\alpha_k\}$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $\alpha_0 = 1$; $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$, $\Delta = \Delta I_d$, где I_d — единичная $d \times d$ -матрица, $\Delta = D_{\xi_1}^2 + D_{\xi_2}^2 + \dots + D_{\xi_d}^2$ — оператор Лапласа, $g, h : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, $w_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $\eta_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\psi_j : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, n$, заданы. Вектор-функции скорости $w = (w^1, w^2, \dots, w^d)$ и градиента давления $r = (r^1, r^2, \dots, r^d) = \nabla p$ для некоторого давления $p \in H^1(\Omega)$, а также функции $u_j(t)$, $j = 0, 1, \dots, n$, являются искомыми.

Пусть $\mathbb{L}_2 := (L_2(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^1 := (W_2^1(\Omega))^d$, $\mathbb{H}^2 := (W_2^2(\Omega))^d$. Замыкание подпространства $\mathfrak{L} := \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^d : \nabla \cdot v = 0\}$ в норме пространства \mathbb{L}_2 будет обозначаться \mathbb{H}_σ , а в норме $\mathbb{H}^1 - \mathbb{H}_\sigma^1$. Также будем использовать обозначения: $\mathbb{H}_\sigma^2 := \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$, \mathbb{H}_π является ортогональным дополнением к \mathbb{H}_σ в \mathbb{L}_2 , $\Sigma : \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi := I - \Sigma$ соответствующие ортопроекторы. Пусть Λ — оператор в \mathbb{L}_2 , действующий как Δ , определенный на \mathbb{H}_σ^2 .

Теорема 1. [2] Пусть $w_k \in \mathbb{H}_\sigma$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $\alpha_0 = 1$, $0 < \alpha_k \leq 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, $D^{\sigma k} \psi_j \in C([t_0, T]; \mathcal{U})$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\eta_j \in \mathbb{L}_2$, $\langle \eta_j(\cdot), w_0(\cdot) \rangle_{\mathbb{L}_2} = \psi_j(0)$, $j = 0, 1, \dots, n$, $g, h \in C([0, T]; \mathbb{L}_2)$, $\det \|a_{jk}\|_{j,k=0}^n \neq 0$, $\det \|b_{jk}(t)\|_{j,k=0}^n \neq 0$ для $t \in [0, T]$, где $a_{jk} := \langle \eta_j(\cdot), w_k(\cdot) \rangle_{\mathbb{L}_2}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $a_{jn} := \langle \eta_j(\cdot), (\lambda - \Lambda)^{-1} \Sigma g(\cdot, 0) \rangle_{\mathbb{L}_2}$, $j = 0, 1, \dots, n$, $b_{jk}(t) := D_t^{\sigma k} \psi_j$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $b_{jn}(t) := \langle \eta_j(\cdot), (\lambda - \Lambda)^{-1} \Sigma g(\cdot, t) \rangle_{\mathbb{L}_2}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Тогда существует $T_1 \in (0, T]$, такое, что обратная задача (1)–(5) имеет единственное решение на отрезке $[0, T_1]$.

Литература

1. Джрбашьян М. М., Нерсесян Ф. В. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. Акад. Наук Арм. ССР, **3:1** (1968), 3–28.
2. Fedorov V.E., Plekhanova M.V., Melekhina D.V. Nonlinear inverse problems for equations with Dzhrbashyan–Nersesyan derivatives // Fractal and Fractional, **7:6** (2023), 464.

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ И ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ В СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ

Э.М. Мухамадиев , И.Д. Нуров
emuhamadiev@rambler.ru, nid1@mail.ru

УДК 517.19

Изучается вопрос о поведении траекторий решений кусочно-линейных систем двух дифференциальных уравнений первого порядка. Кусочно-линейные дифференциальные уравнения возникают в прикладных задачах механики, электротехники и теории автоматического управления. Интерес представляют условия возникновения предельных циклов в окрестности зоны покоя таких систем дифференциальных уравнений. Получены условия существования предельного цикла для систем с прямой линией шивания.

Ключевые слова: кусочно-линейные дифференциальные уравнения, шивание траектории, точка контакта, зона покоя, фазовая плоскость, предельный цикл.

Qualitative analysis of phase portraits and occurrence of limit cycles in systems of differential equations with switching.

The question of the behavior of trajectories of solutions to piecewise linear systems of to first order differential equations is studied. Piecewise linear differential equations arise in applied problems of mechanics, electrical engineering and the theory of automatic control. Of interest are the conditions for the emergence of limit cycles in the vicinity of the rest zone of such systems differential equations. Conditions for the existence of a limit cycle for systems with a straight stitching line are obtained.

Keywords: piecewise linear differential equations, trajectory stitching, contact point, rest zone, phase plane, limit cycle.

Рассмотрим кусочно- линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} A_+x + b_+ & \text{если } h(x) > 0, \\ A_-x + b_- & \text{если } h(x) < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Мухамадиев Эргашбой Мирзоевич, д.ф.-м.н., профессор, кафедры математика и информатика (ВоГУ, Вологда, Россия); Mukhamadiev Ergashboi Mirzoevich(Russia)

Нуров Исхокбой Джумаевич, д.ф.-м.н., профессор кафедры информационных и коммуникационных технологий, ГНУ (Душанбе, Таджикистан); Nurov Iskhokboi Jumaevich (Tajik national University , Tajikistan)

где $A_{\pm} = (a_{ij}^{\pm}), i, j = 1, 2$ - матрицы второго порядка, $h(x) = (a, x) + c$ - линейная функция, $a, b_{\pm} \in R^2, c \in R$.

Отметим, что если $A_+ \neq A_-$, то на линии $h(x) = 0$ правая часть системы (1) имеет разрыв первого рода.

Уравнение вида (1) называют "сшитым" или "склеенным" дифференциальным уравнением. Как известно [1], к рассмотрению таких сшитых динамических систем приводят многие задачи из приложений. Определения решения для таких и более общих сшитых систем приведено в [2,3]

Траектории системы (1) в каждой области $G_{\pm} = \{x : \pm h(x) > 0\}$, определяются по траекториям линейных систем

$$\frac{dx}{dt} = A_{\pm}x + b_{\pm}, \quad (2)$$

соответственно. На линии сшивания траектория системы (1) специально доопределяется в зависимости от поведения траекторий линейных систем (2).

Приведем правила сшивания системы (2), в окрестности линии $h(x) = 0$. Если $x_+(t)$ и $x_-(t)$, $x_+(t_0) = x_-(t_0)$, $h(x_+(t_0)) = 0$ решение системы (2), рассматриваемое на всей плоскости соответственно, то

$$x(t) = \begin{cases} x_+(t), & \text{если } x_+(t) \in G_+ \text{ при } t > t_0 (t < t_0) \\ x_-(t), & \text{если } x_-(t) \in G_- \text{ при } t < t_0 (t > t_0) \end{cases}$$

является решением системы (1) при малых $|t - t_0| > 0$.

В случае, когда $x_+(t) \in G_+(G_-)$ и $x_-(t) \in G_+(G_-)$ при $t > t_0 (t < t_0)$, точку $x_+(0) = x_-(0)$ прямой $h(x) = 0$ считают аналогичной точке покоя системы (1) и решение системы (1) определяют равенствами $x(t) = x_+(t)$ при $t > t_0$ и $x(t) = x_+(t_0)$ при $t \leq t_0$ ($x(t) = x_+(t)$ при $t \leq t_0$ и $x(t) = x_+(t_0)$ при $t > t_0$) и, аналогично, $x(t) = x_-(t)$ при $t \leq t_0$ и $x(t) = x_-(t_0)$ при $t > t_0$ ($x(t) = x_-(t)$ при $t > t_0$ и $x(t) = x_+(t_0)$ при $t \leq t_0$).

Точку $x_+(0)$ линии $h(x) = 0$ в первом случае назовём точкой согласованности, а во втором случае точкой несогласованности (покоя) системы.

Для ясности процесса сшивания сначала опишем поведение траектории линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b, \quad A = (a_{ij}), i, j = 1, 2, b \in R^2 \quad (3)$$

относительно заданной прямой $h(x) \equiv (a, x) + c = 0$. Ограничимся случаем, когда собственные значения матрицы A комплексные числа, т.е. дискриминант $D(A) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}$ характеристического уравнения отрицательный: $D(A) < 0$.

Пусть $x(t)$ - решение системы (3) и $h(x(0)) = 0$. Если прямая $h(x) = 0$ не является касательной в точке $x(0)$ траектории $x(t)$, то говорят [2],

что прямая $h(x) = 0$ не имеет контакта с системой (3) в точке $x(0)$. Отметим, что точки прямой $h(x) = 0$ имеют представление $x = \mu a^\perp + x^0$, $\mu \in (-\infty, +\infty)$, где $x^0 = -\frac{c}{\|a\|}a$, $a = (a_1, a_2)^T$, $a^\perp = (-a_2, a_1)^T$. Обозначим $\mu_0 = -\frac{(a_1, b + Ax^0)}{(a, Aa^\perp)}$.

Лемма 1. Пусть $D(A) < 0$ и $a \in R^2$ — ненулевой вектор. Тогда $(a, Aa^\perp) \neq 0$, где $a^\perp = (-a_2, a_1)^T$ и прямая $h(x) \equiv (a, x) + c = 0$ не имеет контакта в точках $x = \mu a^\perp + x_0$ при $\mu \neq \mu_0$, а $x_0 = \mu_0 a^\perp + x_0$ является точкой контакта с системой (3), причём для решения $x(t), x(t_0) = \mu a^\perp + x^0$ системы (3) функция $f(t) \equiv a_{12} \cdot h(x(t))$ при $\mu \neq \mu_0$ монотонно возрастает, а при $\mu = \mu_0$ и $\mu_0 a^\perp + x_0 \neq -A^\perp b$ удовлетворяет условию $f(t) > 0$ при достаточно малых $|t - t_0| > 0$.

Предположим, что матрицы A_\pm в системе (1) удовлетворяют условиям $D(A_\pm) < 0$. Согласно лемме 1, прямая $h(x) = 0$ не имеет контакта с системами (2), рассматриваемыми на всей плоскости, соответственно, за исключением точки $x_\pm = \mu_\pm a^\perp + x^0$, где $\mu_\pm = -\frac{(a, b_\pm + A_\pm x^0)}{(a, A_\pm a^\perp)}$.

Оказывается, характер поведения траектории системы (1) существенно зависит от расположения точки x_+ и x_- прямой $h(x) = 0$ и знака элементов a_{12}^+ и a_{12}^- матриц A_+ и A_- .

Лемма 2. Пусть $D(A_\pm) < 0$ и $a_{12}^+ \cdot a_{12}^- > 0$ ($a_{12}^+ \cdot a_{12}^- < 0$). Тогда точки $x = \mu a^\perp + x^0$ прямой $h(x) = 0$ являются точками согласованности (несогласованности) при $\mu \notin [\mu_1, \mu_2]$ ($\mu \in (\mu_1, \mu_2)$) и несогласованности (согласованности) при $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$ ($\mu \notin [\mu_1, \mu_2]$) систем (2), где $\mu_1 = \min\{\mu^+, \mu^-\}$, $\mu_2 = \max\{\mu^+, \mu^-\}$.

Из леммы 2 следует, что зона несогласованности (зона покоя) системы (2) (системы (1)) ограничена только в том случае, когда элементы a_{12}^\pm матриц A_\pm одновременно либо положительны либо отрицательны. В условиях ограниченности зона несогласованности представляет интерес поведения траектории системы (1) вне круга достаточно большого радиуса. Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть матрицы A_\pm удовлетворяют условиям: $D(A_\pm) < 0$, $a_{12}^+ \cdot a_{12}^- > 0$ и $(a_{11}^+ + a_{22}^+) \sqrt{-D(A_-)} + (a_{11}^- + a_{22}^-) \sqrt{-D(A_+)} < 0$. Тогда любое решение $x(t)$ системы (1) ограничено при $t \geq 0$.

Качественное поведение траектории решения системы (1) существенно зависит от расположения стационарных точек относительно прямой $h(x) = 0$ и точек контакта прямой $h(x) = 0$ с траекториями систем (2), рассматриваемых на всей плоскости.

Согласно лемме 1 точки контакта прямой $h(x) = 0$ с траекториями систем (2) определяются равенствами

$$x^\pm = \mu_\pm a^\perp + x^0, \mu_\pm = -\frac{(a, b_\pm + A_\pm x^0)}{(a, A_\pm a^\perp)}.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть $a_{11}^+ + a_{22}^+ > 0$, $a_{12}^+(\mu_- - \mu_+) \geq 0$ и стационарные точки $-A_\pm^{-1}b_\pm$ систем

(2) удовлетворяет условиям $h(-A_{\pm}^{-1}b_{\pm}) > 0$. Тогда система (1) имеет цикл, ограничивающий область, содержащую множества точек покоя системы (1).

Если в условиях теоремы (2) величина $a_{12}^{+}(\mu_{-} - \mu_{+}) < 0$, то система (1) может не иметь цикла. В этом случае требуется дополнительное условие относительно поведения решений $x_{+}(t)$ и $x_{-}(t)$ систем (2), удовлетворяющих общим начальным условиям $x_{+}(t_0) = x_{+}$, $x_{-}(t_0) = x_{-}$, где $x_{+} = \mu_{+}a^{+} + x^0$ – точка контакта прямой $h(x) = 0$ с системой (2) с матрицей A_{+} . Обозначим через t_1 наибольшее решение склярного уравнения $h(x_{-}(t)) = 0$, $t < t_0$ и через t_2 наименьшее решение $h(x_{+}(t)) = 0$, $t > t_0$. Точки $x_{-}(t_1)$ и $x_{+}(t_2)$ имеют представления

$$x_{-}(t_1) = \frac{(a^{+}, x_{-}(t_1))}{(a, a)} a^{+} + x^0, \quad x_{+}(t_2) = \frac{(a^{+}, x_{+}(t_2))}{(a, a)} a^{+} + x^0.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть $a_{11}^{+} + a_{22}^{+} > 0$, $a_{12}^{+}((a^{+}, x_{-}(t_1)) - (a^{+}, x_{+}(t_2))) > 0$ и стационарные точки $-A_{\pm}^{-1}b_{\pm}$ систем (2) удовлетворяют условиям $h(-A_{\pm}^{-1}b_{\pm}) > 0$. Тогда система (1) имеет цикл, ограничивающий область, содержащую точки покоя системы (1).

Литература

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. //2-е-М.: Физматгиз, 1959.
2. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. // Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М. Наука, 1976. РЖ Мат. 1977, 5Б. 125 К.
3. Филиппов А. Ф. // Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М. Наука, 1985. РЖ 223 К.
4. Leine R. I., Van Campen D. H. General Topology. — European Journal of mechanics. A/Solids. —2006.-25.P. 595–616.
5. Мухамадиев Э. М., Нуоров И. Дж., Халилова М. Ш. Предельные циклы кусочно –линейных дифференциальных уравнений второго порядка. — Уфимский математический журнал., 2014, том 6, выпуск 1, 84 – 93. A/Solids.

ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ХИЛЬФЕРА

Е.М. Мухсинов, Р.И. Хакимов
yodgor.mukhsinov@gmail.com, rahmatjon@gmail.com

УДК 517.9

В данной работе в банаховом пространстве исследуется разрешимость задачи преследования для дифференциальной игры с дробными производными Хильфера порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$ типа $\mu, 0 \leq \mu \leq 1$. Используя первый метод Понтрягина [1, с. 320] доказана теорема о разрешимости задачи преследования [2, с. 143].

Ключевые слова: дифференциальная игра с дробными производными Хильфера, задача преследования, банахово пространство.

The pursuit problem for a differential game with Hilfer fractional derivatives

In this paper, we investigate the solvability of the pursuit problem for a differential game with fractional Hilfer derivatives of order $\alpha, 0 < \alpha < 1$ of type $\mu, 0 \leq \mu \leq 1$ in a Banach space. Using the first Pontryagin method [1, p. 320], we proved a theorem on the solvability of the pursuit problem [2, p. 143].

Keywords: differential game with Hilfer fractional derivatives, pursuit-evasion problem, Banach space.

В банаховом пространстве X рассматривается дифференциальная игра, описываемая дифференциальным уравнением дробного порядка

$$\begin{cases} D_{0+}^{\alpha, \mu} x(t) = Ax(t) + F(t, u(t), v(t)) \\ I_{0+}^{(1-\alpha)(1-\mu)} x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

и замкнутым терминальным $M \subset X$, где заканчивается игра. В игре (??) $t \in (0, T], T > 0, x(t) \in X, Y, Z$ - банаховые пространства, $U((0, T], Y)$ - множество измеримых отображений, действующих из $(0, T]$ в $Y, u(\cdot) \in U((0, T], Y)$ - управление преследования, $v(\cdot) \in U((0, T], Z)$ - управление убегания, $D_{0+}^{\alpha, \mu}$ - дробная производная Хильфера порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$ и типа $\mu, 0 \leq \mu \leq 1, A$ - линейный замкнутый оператор, имеющий плотную в X область определения, который

Мухсинов Едгор Мирзоевич, д.ф.-м.н., доцент, ТГУПБП (Худжанд, Таджикистан); Edgor Mukhsinov (Tajik State University of Law, Business and Politics, Khujand, Tajikistan)

Хакимов Рахматджон Иномович, преподаватель, ХГУ имени академика Б. Гафурова (Худжанд, Таджикистан); Rahmatjon Hakimov (Khujand State University named after academician B. Gafurov, Tajikistan)

порождает сильно непрерывную полугруппу $S(t), t \geq 0$, а $I_{0+}^{(1-\alpha)(1-\mu)}$ - дробный интеграл порядка $\rho = (1-\alpha)(1-\mu)$. Полагаем, что для любых допустимых $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ отображение $t \rightarrow F(t, u(t), v(t))$ локально интегрируемо и задача Коши (1) имеет слабое решение [3, с.5].

Справедлива следующая

Теорема. Пусть выполняются следующие условия:

1) X, Y - сепарабельные банаховы пространства;

2) начальная точка $x_0 \in X \setminus M$ такая, что при некотором $T > 0$ имеет место включение

$$S_{\alpha, \mu}(T)x_0 \in M - \int_0^T \bigcap_{v \in Z} K_\alpha(T-s)F(s, Y, v)ds,$$

где $S_{\alpha, \mu}(t) = I_{0+}^{\mu(1-\alpha)}K_\alpha(t)$, $K_\alpha(t) = t^{\alpha-1} \cdot P_\alpha(t)$, $P_\alpha(t) = \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s)S(t^\alpha s)ds$,

$M_\alpha(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-z)^{n-1}}{(n-1)! \cdot \Gamma(1-\alpha n)}$, $0 < \alpha < 1$, где $\Gamma(z)$ - гамма-функция и

$$\int_0^\infty s^\delta M_\alpha(s)ds = \frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma(1+\alpha\delta)}, s \geq 0.$$

3) отображение $F : [0, \infty) \times Y \times Z \rightarrow X$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

Тогда из начальной точки $x_0 \in X$ в игре (1) возможно завершение преследования за время T .

Литература

1. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. 1980, т. 112 (154), № 3, с. 307 – 330.
2. Мухомов Е.М. Разрешимость задачи преследования для одной дифференциальной игры в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. 2023, т. 59, № 1, с. 142 – 146.
3. Gu H.B., Trujillo J.J. Existence of mild solution for evolution equation with Hilfer fractional derivative // Appl. Math. Comput. 2015, т. 257, с. 344 – 354, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.10.083>

ПОТРАЕКТОРНО-ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ СДУ В СЛУЧАЕ НЕФИКСИРОВАННОГО ВРЕМЕНИ

Ф.С. Насыров
farsagit@yandex.ru

УДК 519.2

Построен принцип максимума для стохастических дифференциальных уравнений в случае потраекторного целевого функционала, когда концы закреплены, а конечный момент не фиксирован. В частности, для задачи быстрогодействия найден эффективный способ решения краевой задачи принципа максимума, представляющий *FBSD*-систему.

Ключевые слова: Детерминированный принцип максимума, задача быстрогодействия, неупреждающее управление, стохастическое дифференциальное уравнение с симметричным интегралом, *FBSD*-системы уравнений с симметричным интегралом.

On stochastic and path-wise maximum principal

The nonlinear stochastic heat and combustion equation is investigated. 4 cases of noise impact on various terms in the right part of the equation are considered. Theorems have been obtained that allow us to construct exact solutions of the nonlinear heat and combustion equation with noise. Special cases are given.

Keywords: Deterministic maximum principle, time-optimal control problem, non-anticipatory control, stochastic differential equation with symmetric integral, *FBSD*-systems of equations with symmetric integral.

Пусть на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$ задан \mathcal{H}_t -измеримый случайный процесс $V(t) = V(t, \omega)$, $t \in [0, T]$, с непрерывными реализациями. В работе исследуется задача минимизация целевой функции

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T f_0(t, x(t), u(t)) dt + h_0(T, x(0), x(T)) \quad (1)$$

в классе неупреждающих кусочно-непрерывных управлений $u(t)$, где $x(t)$ есть решение стохастического дифференциального уравнения (СДУ) с симметричным интегралом (см [3]):

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(s, u(s), x(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, x(s)) * dV(s), \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Насыров Фарит Сагитович. д.ф.-м.н. профессор, УУНиТ(Уфа, Россия); Nasyrov Farit Sagitovich, doctor of Physics and Mathematics, Professor (UUST, Ufa, Russia)

Рассматривается задача с закрепленными концами, $x(0) = x_0$, $x(T) = x_T$ и с нефиксированным T .

Под неупреждаемостью управления $u(t)$ понимается ее H_t -согласованность. Это означает, что управление $u(t)$ строится только на основе информации, доступной к моменту времени t , а не на основе всей информации, как это принято в детерминированном принципе максимума.

Известно (см. [1, 4, 6]), что проблема построения оптимального неупреждающего управления в задаче минимизации усредненного функционала $\mathbf{E}(J(u(\cdot)))$, то есть в виде математического ожидания от потраекторного функционала качества, при ограничениях в виде стохастического дифференциального уравнения Стратоновича или Ито относительно винеровского процесса $V(t) = W(t)$ может быть решена с помощью стохастического принципа максимума, в котором краевая задача принципа максимума представляет собой систему "вперед-назад" стохастических дифференциальных уравнений. С другой стороны, для классического (потраекторного в случае случайных процессов) принципа максимума с ограничениями в виде обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) краевая задача есть система ОДУ (см. [2]), однако управление, построенное таким образом, не будет неупреждающим. В рассматриваемой задаче, в отличие от стохастического принципа максимума, функционал качества (1) потраекторный, а не усредненный.

Теорема Пусть функции $b(t, x, u)$, $\sigma(t, x)$, $f_0(t, x, u)$, $h_0(T, x(0), y)$ дважды непрерывно дифференцируемы по всем своим переменным, $\sigma(t, x) \neq 0$ для всех (t, x) .

Пусть $(T, x(s), \psi(s), \Lambda(s, x(s)))$ есть решение системы

$$\begin{cases} dx(s) = b(s, x(s), u(s))ds + \sigma(s, x(s)) * dV(s), & x(0) = x_0, \\ d\psi(s) = [(f_0)'_x(s, x(s), u(s)) - \psi(s)b'_x(s, x(s), u(s))]ds \\ \quad + [\Lambda'_x(s, x(s)) - \psi(s)\sigma'_x(s, x(s))] * dV(s), \\ Z(T, x_T, \psi(T), u(T)) = 0, & x(0) = x_0, x(T) = x_T, s \in [0, T], \end{cases}$$

здесь $Z(T, x, \psi, u) = H^*(T, x, \psi, u) + h'_T(T, x_0, x)$, $u_n(s) = u(s, x_n(s), \psi_n(s))$, функция $u(s, x(s), \psi(s))$ найдена из условия максимума $H(s, x, \psi, u(s, x, \psi)) = \max_{u \in U(s)} H(s, x, \psi, u)$, где $H(s, x, \psi, u) = \psi b(s, x, u) - f_0(s, x, u)$.

Тогда система является краевой задачей принципа максимума для исследуемой задачи, то есть тройка $(T, x(s), \psi(s))$ удовлетворяет необходимым условиям принципа максимума для задачи (1)-(2)

Функции T , $x(s)$, $\psi(s)$ и $\Lambda(s, x)$ могут быть найдены из этой системы методом, предложенным автором.

Литература

1. Arkin V. I. Saksonov, M. T. On the theory of stochastic maximum

principle in problems with continuous time. Models and methods of stochastic optimization. Moscow: TSEMI, pp. 3-26, 1983.(in Russian)

2. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации.— М.: Факториал Пресс, 2002.

3. *Насыров Ф. С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ — М.: Физматлит, 2011.

4. *Nasyrov F. S.* The Pathwise-Determined Maximum Principle and Symmetric Integrals.— Journal of Mathematical Sciences. <https://doi.org/10.1007/s10958-022-06144-9>, Springer Nature, 2023.

5. *Nasyrov F. S.* The Pathwise-Determined Maximum Principle for SDE.— Journal of Mathematical Sciences, В печати.

6. *Yong J., Zhou X. Y.* Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations. Springer-Verlag, New York, 1999.

ОСОБЕННОСТИ ФАЗОВОГО МНОГООБРАЗИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ХОФФА

Н.Г. Николаева, Н.А. Манакова
nikolaevang@susu.ru, manakovana@susu.ru

УДК 517.9

Статья посвящена изучению структуры фазового многообразия математической модели деформации двутавровой балки, которое лежит на гладких банаховых многообразиях с особенностями (k -сборка Уитни) в зависимости от параметров задачи. Математическая модель изучена в случае, когда размерность ядра оператора при производной по времени равна 1 или 2.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, уравнение Хоффа, сборка Уитни.

Features of the Phase Manifold of the Mathematical Hoff Model

The study of the phase manifolds structure of the mathematical model deformation of an I-beam, which lies on smooth Banach manifolds with features (k -Whitney assembly) depending on the parameters of the problem, is devoted to the work. The mathematical model is studied in the case when the dimension of the operator kernel with a time derivative is equal to 1 or 2.

Keywords: Sobolev type equations, the Hoff equation, Whitney assembly.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей класса C^∞ . Рассмотрим модель Хоффа [1]

$$(\mu + \Delta)u_t = \alpha u + \beta u^3, \quad x \in \Omega, t \in (0, T), \quad (1)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (2)$$

Модель Хоффа описывает динамику деформации двутавровой балки. Неизвестная функция $u = u(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, имеет физический смысл отклонения балки от положения равновесия. Параметр $\mu \in \mathbb{R}$ характеризует продольную нагрузку на балку, а параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ характеризуют свойства материала балки.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-11-20037, <https://rscf.ru/project/24-11-20037/>

Николаева Надежда Геннадьевна, аспирант, ЮУрГУ (Челябинск, Россия);
Nadezhda Nikolaeva (South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)

Манакова Наталья Александровна, д.ф.-м.н., профессор, ЮУрГУ (Челябинск, Россия);
Natalia Manakova (South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)

Целью данного исследования является изучение структуры фазового многообразия модели (1), (2) и выявление условий накладываемых на параметры α, β ($\alpha\beta < 0$), при которых фазовое пространство имеет особенности при $\dim \ker(\mu + \Delta) = 1$ и $\dim \ker(\mu + \Delta) = 2$ [2].

В работе [3] показано, что фазовое многообразие модели (1), (2) является простым банаховым C^∞ -многообразием в случае $\alpha\beta > 0$ и принимает следующий вид

$$\mathfrak{B} = \left\{ u \in L_4(\Omega) : \int_{\Omega} (\alpha + \beta u^2) u \varphi_l dx = 0, l : \mu = \lambda_l \right\},$$

где $\{\lambda_l\}$, $\{\varphi_l\}$ – собственные значения и собственные функции однородной задачи Дирихле оператора $(-\Delta)$.

Например, для $\dim \ker(\mu + \Delta) = 1$ множество \mathfrak{B} C^∞ – диффеоморфно множеству

$$\mathfrak{B} = \{(s_1, u^\perp) \in \mathbb{R} \times L_4(\Omega) : s_1^3 \|\varphi_{k_1, k_2}\|_{L_4(\Omega)}^4 + 3s_1^2 \int_0^\pi \int_0^\pi \varphi_{k_1, k_2}^3 u^\perp dx dy + \\ + s_1 (3 \int_0^\pi \int_0^\pi \varphi_{k_1, k_2}^2 (u^\perp)^2 dx dy + \alpha\beta^{-1} + \int_0^\pi \int_0^\pi \varphi_{k_1, k_2} (u^\perp)^3 dx dy = 0\}.$$

Сформулируем теорему о структуре фазового многообразия модели (1), (2):

Теорема 1. Пусть $\mu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\alpha\beta < 0$, тогда

- (i) если $\dim \ker(\mu + \Delta) = 1$, то множество \mathfrak{B} образует 2-сборку Уитни;
- (ii) если $\dim \ker(\mu + \Delta) = 2$, то множество \mathfrak{B} образует k -сборку Уитни.

Литература

1. Hoff N.J. Creep Buckling // Journal of the Aeronautical Science, 7 (1956), 1-20.
2. Николаева Н.Г., Гаврилова О.В., Манакова Н.А. Исследование единственности решения задачи Шоултера – Сидорова для математической модели Хоффа. Морфология фазового пространства // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование, 17:1 (2024), 49-63.
3. Свиридюк Г.А., Казак В.О. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа // Математические заметки, 71:2 (2002), 292-297.

**КЛАССЫ НЕАВТОНОМНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ
МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С
КРАТНЫМИ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫМИ
ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ**

П.Б. Павлючик, А.Ф. Проневич
p.pavlyuchik@grsu.by, pranevich@grsu.by

УДК 517.936

В работе выделены классы неавтономных полиномиальных систем уравнений в полных дифференциалах, у которых первые интегралы находятся по кратным комплекснозначным полиномиальным частным интегралам. Установлены аналитические виды первых интегралов неавтономных многомерных дифференциальных систем с заданными кратными комплекснозначными полиномиальными частными интегралами.

Ключевые слова: система уравнений в полных дифференциалах, первый интеграл, частный интеграл, кратность.

Classes of non-autonomous polynomial multidimensional differential systems with multiple complex-valued polynomial partial integrals

In this article we identify the classes of non-autonomous systems of total differential equations, which first integrals can be constructed via multiple complex-valued polynomial partial integrals. The sufficient conditions for building first integrals of non-autonomous systems of total differential equations by multiple complex-valued polynomial partial integrals are obtained.

Keywords: system of total differential equations, first integral, partial integral, multiplicity.

Рассмотрим систему уравнений в полных дифференциалах

$$dx_i = \sum_{j=1}^m P_{ij}(t, x) dt_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \leq n, \quad (1)$$

где $P_{ij}: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, суть полиномы по зависимым переменным x_1, \dots, x_n с голоморфными по независимым переменным t_1, \dots, t_m на области $T \subset \mathbb{R}^m$ коэффициентами. При $m = 1$

Павлючик Павел Болеславович, к.ф.-м.н., доцент, ГрГУ им. Янки Купалы (Гродно, Беларусь); Pavel Pauliuchyk (Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus)

Проневич Андрей Францевич, к.ф.-м.н., доцент, ГрГУ им. Янки Купалы (Гродно, Беларусь); Andrei Pranevich (Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus)

дифференциальная система (1) является неавтономной полиномиальной обыкновенной дифференциальной системой n -го порядка.

В конце XIX века французским математиком Ж.Г. Дарбу (J.G. Darboux) был сформулирован подход о построении первого интеграла по известным частным интегралам [1], который в настоящее время называется задачей Дарбу. В дальнейшем нахождение интегралов типа Дарбу получило свое развитие, как в постановке задачи, так и в разнообразии методов ее решения (см., например, монографию [2]).

Цель работы — выделить классы неавтономных полиномиальных систем уравнений в полных дифференциалах (1), у которых первые интегралы строятся по *кратным комплекснозначным полиномиальным частным интегралам*. Статья продолжает исследования [3–7] по изучению аналитической структуры первых интегралов дифференциальных систем в зависимости от полиномиальных частных интегралов.

Будем говорить [2, с. 173], что комплекснозначный полиномиальный частный интеграл w_l системы в полных дифференциалах (1) является

кратным с кратностью $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} f_{\zeta_l}$, если существуют функции

$$\mathfrak{R}_{1h_{\zeta_l} g_{\zeta_l} j}, \quad h_{\zeta_l} \in \mathbb{N}, \quad g_{\zeta_l} = 1, \dots, f_{\zeta_l}, \quad \zeta_l = 1, \dots, \epsilon_l, \quad j = 1, \dots, m, \quad \Omega_{1h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \text{ и}$$

являющиеся полиномами по x_1, \dots, x_n с комплекснозначными голоморфными по t_1, \dots, t_m на области T коэффициентами, такие, что

$$\mathfrak{A}_j \mathfrak{R}_{1h_{\zeta_l} g_{\zeta_l} j}(t, x) = \mathfrak{R}_{1h_{\zeta_l} g_{\zeta_l} j}(t, x), \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где функции $\mathfrak{R}_{1h_{\zeta_l} g_{\zeta_l} j}(t, x) = \frac{\Omega_{1h_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(t, x)}{w_l^{h_{\zeta_l}}(t, x)}$, а линейные дифференци-

альные операторы первого порядка $\mathfrak{A}_j(t, x) = \partial_{t_j} + \sum_{i=1}^n P_{ij}(t, x) \partial_{x_i}$.

Отметим, что альтернативная точка зрения на понятие «кратность частного интеграла» для автономных обыкновенных дифференциальных систем была предложена в работах J. Llibre и X. Zhang [8; 9].

Для системы в полных дифференциалах (1) верна следующая [7]

Теорема 1. Пусть система (1) имеет кратные комплекснозначные полиномиальные частные интегралы w_l кратностей $\mathfrak{z}_l = 1 + \sum_{\zeta_l=1}^{\epsilon_l} f_{\zeta_l}$ такие, что выполняются тождества (2) при $l = 1, \dots, s$. Тогда функция

$$F(t, x) = \sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\bar{\zeta}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\bar{g}_{\zeta_l}} \left(\varphi_{l\mathfrak{h}_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \cdot \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{l\mathfrak{h}_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(t, x) + \psi_{l\mathfrak{h}_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \cdot \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{l\mathfrak{h}_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}(t, x) \right)$$

будет первым интегралом системы (1) тогда и только тогда, когда при каждом индексе $j = 1, \dots, t$ имеет место тождество

$$\sum_{l=1}^s \sum_{\zeta_l=1}^{\bar{\zeta}_l} \sum_{g_{\zeta_l}=1}^{\bar{g}_{\zeta_l}} \left(\varphi_{l\mathfrak{h}_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Re} \mathfrak{K}_{l\mathfrak{h}_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}^j(t, x) + \psi_{l\mathfrak{h}_{\zeta_l} g_{\zeta_l}} \operatorname{Im} \mathfrak{K}_{l\mathfrak{h}_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}^j(t, x) \right) = 0,$$

где вещественные числа $\varphi_{l\mathfrak{h}_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$ и $\psi_{l\mathfrak{h}_{\zeta_l} g_{\zeta_l}}$ одновременно не равны нулю.

Так, например, неавтономная полиномиальная система уравнений в полных дифференциалах

$$dx_1 = \left(t_1 t_2 x_4 (t_1^2 x_1^4 - x_2^2 - t_1 x_1^2 x_2) - \frac{x_1}{2t_1} \right) dt_1 + t_1 t_2 x_4 (t_1^2 x_1^4 - x_2^2 - t_1 x_1^2 x_2) dt_2,$$

$$dx_2 = t_1^2 t_2 x_1 x_4 (t_1^2 x_1^4 - x_2^2 + 4t_1 x_1^2 x_2) (dt_1 + dt_2), \quad (3)$$

$$dx_3 = t_1^2 t_2 x_1 x_4 (x_3^2 - t_1^4 x_4^4 + 4t_1^2 x_3 x_4^2) (dt_1 + dt_2), \quad dx_4 = \left(-\frac{1}{t_1} x_4 - \right. \\ \left. - t_2 x_1 (x_3^2 - t_1^4 x_4^4) + t_1^2 t_2 x_1 x_3 x_4^2 \right) dt_1 + \left(-t_2 x_1 (x_3^2 - t_1^4 x_4^4) + t_1^2 t_2 x_1 x_3 x_4^2 \right) dt_2$$

имеет двукратные [7] комплекснозначные полиномиальные частные интегралы $\mathfrak{w}_1(t, x) = t_1 x_1^2 + i x_2$ и $\mathfrak{w}_2(t, x) = x_3 - i t_1^2 x_4^2$ такие, что

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{K}_{111}(t, x) = \mathfrak{A}_1 \frac{1}{\mathfrak{w}_1(t, x)} = -(2+i)t_1^2 t_2 x_1 x_4 = \mathfrak{R}_{111,1}(t, x),$$

$$\mathfrak{A}_2 \mathfrak{K}_{111}(t, x) = \mathfrak{A}_2 \frac{1}{\mathfrak{w}_1(t, x)} = -(2+i)t_1^2 t_2 x_1 x_4 = \mathfrak{R}_{111,2}(t, x),$$

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{K}_{211}(t, x) = \mathfrak{A}_1 \frac{1}{\mathfrak{w}_2(t, x)} = -(1+2i)t_1^2 t_2 x_1 x_4 = \mathfrak{R}_{211,1}(t, x),$$

$$\mathfrak{A}_2 \mathfrak{K}_{211}(t, x) = \mathfrak{A}_2 \frac{1}{\mathfrak{w}_2(t, x)} = -(1+2i)t_1^2 t_2 x_1 x_4 = \mathfrak{R}_{211,2}(t, x),$$

где функции $\mathfrak{Q}_{111}(t, x) = 1$ и $\mathfrak{Q}_{211}(t, x) = 1$, числа $\mathfrak{h}_1 = 1$ и $\mathfrak{h}_2 = 1$, а \mathfrak{A}_1 и \mathfrak{A}_2 есть операторы дифференцирования в силу системы (3).

По теореме 1 строим два функционально независимых первых интеграла системы уравнений в полных дифференциалах (3):

$$F_1(t, x) = \operatorname{Re} \frac{1}{\mathfrak{w}_1(t, x)} - 2 \cdot \operatorname{Im} \frac{1}{\mathfrak{w}_1(t, x)} = \frac{t_1 x_1^2 + 2x_2}{t_1^2 x_1^4 + x_2^2} \quad (\varphi_{111} = 1, \psi_{111} = -2)$$

и

$$F_2(t, x) = 2 \operatorname{Re} \frac{1}{w_2(t, x)} - \operatorname{Im} \frac{1}{w_2(t, x)} = \frac{2x_3 - t_1^2 x_4^2}{x_3^2 + t_1^4 x_4^4} (\varphi_{211} = 2, \psi_{111} = -1).$$

Литература

1. *Darboux G.* Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré // Bulletin des Sciences Mathématiques. **2** (1878), 60-96, 123-144, 151-200.

2. *Горбузов В.Н.* Интегралы дифференциальных систем. — Гродно: ГрГУ, 2006.

3. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф., Павлючик П.Б.* Кратность полиномиальных частных интегралов неавтономных обыкновенных и многомерных дифференциальных систем // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта. Сер. 2. Матэматыка. **9**:1 (2019), 15-25.

4. *Горбузов В.Н., Павлючик П.Б., Проневич А.Ф.* Комплекснозначные полиномиальные частные интегралы неавтономных обыкновенных и многомерных дифференциальных систем // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта. Сер. 2. Матэматыка. **11**:1 (2021), 56-66.

5. *Pranovich A., Grin A., Musafirov E.* Darboux polynomials and first integrals of polynomial Hamiltonian systems // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. **109**:106338 (2022), 1-12.

6. *Проневич А.Ф.* Частные интегралы обобщенно-консервативных полиномиальных гамильтоновых обыкновенных дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения и процессы управления. **1** (2022), 1-63.

7. *Горбузов В.Н., Павлючик П.Б., Проневич А.Ф.* Кратность комплекснозначных полиномиальных частных интегралов неавтономных обыкновенных и многомерных дифференциальных систем // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта. Сер. 2. Матэматыка. **13**:3 (2023), 33-48.

8. *Llibre J., Zhang X.* Darboux theory of integrability in \mathbb{C}^n taking into account the multiplicity // Differential Equations. **246** (2009), 541-551.

9. *Llibre J., Zhang X.* Darboux theory of integrability for polynomial vector fields in \mathbb{R}^n taking into account the multiplicity at infinity // Bulletin des Sciences Mathématiques. **133**:7 (2009), 765-778.

**ЗАДАЧА Е ДЛЯ ОДНОГО ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ
УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ДАРБУ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ
ВЫРОЖДЕНИЯ**

С.В. Подклетнова
podkletnova.sv@ssau.ru

УДК 517.518

В настоящей статье рассматривается задача Е для частного случая уравнения Эйлера-Дарбу с двумя линиями вырождения при условии тривиальности одного из параметров. Решение задачи получено в явном виде при определённых условиях, наложенных на параметры уравнения. Доказана теорема существования и единственности решения.

Ключевые слова: математика, дифференциальные уравнения, краевая задача.

Problem E for a special case of the Euler–Darboux equation

This paper discusses the problem E for a special case of the Euler–Darboux equation with two degeneracy lines under the condition that one of the parameters is trivial. The solution to the problem is obtained explicitly under certain conditions imposed on the parameters of the equation. The theorem of the existence and uniqueness of the solution has been proved.

Keywords: mathematics, differential equations, boundary value problem.

Рассмотрим уравнение

$$(\xi \cdot \operatorname{sgn} \xi - \eta) \cdot u_{\xi\eta} - \beta \cdot u_{\xi} = 0 \quad (1)$$

на множестве $G_h = G_+ \cup G_-$, где $G_+ = \{(\xi, \eta) \mid 0 < \xi < \eta < h\}$, $G_- = \{(\xi, \eta) \mid 0 < -\xi < \eta < h\}$.

Задача Е. Найти решение уравнения (1) на множестве G_h , удовлетворяющее краевым условиям

$$u(\xi, \xi) = \tau_+(\xi), \quad \xi \in [0, h],$$

$$u(\xi, -\xi) = \tau_+(\xi), \quad \xi \in [-h, 0]$$

и условиям сопряжения

$$\lim_{\xi \rightarrow -0} u(\xi, \eta) = A \lim_{\xi \rightarrow +0} u(\xi, \eta) + \gamma(\eta), \quad \eta \in [0, h],$$

Подклетнова Светлана Владимировна, к.ф.-м.н., доцент. (Самара, Россия);
Svetlana Podkletnova (Samara University, Samara, Russia)

$$\begin{aligned} & \lim_{\xi \rightarrow -0} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{-\eta}^{\xi} (\xi - t)^{-\lambda} u(t, \eta) dt = \\ & = B \lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\xi}^{\eta} (t - \xi)^{-\lambda} u(t, \eta) dt + \delta(\eta), \eta \in (0, h), 0 < \lambda < 1. \end{aligned}$$

Теорема. При $0 < \lambda, \beta < 1, A + B \neq 0$ существует единственное решение задачи E для уравнения (1) на множестве G_h , которое выражается формулами

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \tau_+(\eta) - \frac{f_1(\eta)}{A+B} + \\ &+ \frac{(\eta - \xi)^{1-\beta}}{(A+B) \mathbf{B}(\beta, 1-\beta)} \int_0^{\xi} \frac{f_1(t)}{\eta - t} (\xi - t)^{\beta-1} dt + \\ &+ \frac{\eta^\lambda (\eta - \xi)^{1-\beta}}{(A+B) (1-\beta) \mathbf{B}(\beta, 1-\beta)} \int_0^{\xi} f'_2(t) (\eta - t)^{\beta-1} \times \\ &\times F_1\left(1-\beta, -\lambda, 1-\beta; 2-\beta; \frac{\eta - \xi}{\eta}, \frac{\eta - \xi}{\eta - t}\right) dt + \\ &+ \frac{\eta^\lambda}{A+B} \int_{\xi}^{\eta} f'_2(t) F\left(1-\beta, -\lambda; 1; \frac{\eta - t}{\eta}\right) dt, \xi \in (0, h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \tau_-(-\eta) + \frac{B f_1(\eta)}{A+B} - \\ &- \frac{B(\eta + \xi)^{1-\beta}}{(A+B) \mathbf{B}(\beta, 1-\beta)} \int_{\xi}^0 \frac{f_1(-t)}{\eta + t} (t - \xi)^{\beta-1} dt + \\ &+ \frac{A \eta^\lambda (\eta + \xi)^{1-\beta}}{(A+B) (1-\beta) \mathbf{B}(\beta, 1-\beta)} \int_{\xi}^0 f'_2(-t) (\eta + t)^{\beta-1} \times \\ &\times F_1\left(1-\beta, -\lambda, 1-\beta; 2-\beta; \frac{\eta + \xi}{\eta}, \frac{\eta + \xi}{\eta + t}\right) dt + \\ &+ \frac{A \eta^\lambda}{A+B} \int_{-\xi}^{\eta} f'_2(t) F\left(1-\beta, -\lambda; 1; \frac{\eta - t}{\eta}\right) dt, \xi \in (-h, 0), \end{aligned}$$

если

$$\begin{aligned} f_1(\eta) &= A \cdot \tau_+(\eta) - \tau_-(-\eta) + \gamma(\eta), \\ f_2(\eta) &= \delta(\eta) + B \cdot \tau_+(\eta) \cdot \eta^{-\lambda} - \tau_-(-\eta) \cdot \eta^{-\lambda}, \\ f_1(0) &= f_2(0) = 0, f_1(\eta) \in C^1_{[0, h]}, f_2(\eta) \in C^1_{[0, h]}. \end{aligned}$$

И это решение непрерывно в каждой из замкнутых областей G_+ и G_- .

Литература

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — Москва: Наука, 1965. — 297 с.
2. *Волкодав В.Ф., Сергиевская И.М.* Новые краевые задачи для дифференциальных уравнений с двумя перпендикулярными линиями вырождения / Самарск. гос. пед. ин-т. — Самара, 1994. — 14 с. Деп. В ВИНИТИ 10.01.94. № 21-В94.
3. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — Москва: Физматгиз, 1962. — 1108 с.
4. *Подклетнова С.В.* Задача Коши для некоторых значений параметров уравнения Эйлера-Дарбу // 51-я научная конференция СГПУ. — Самара: СГПУ, 1997. — 66-75.
5. *Подклетнова С.В.* Ряд краевых задач для уравнения Эйлера-Дарбу с двумя линиями вырождения // Международная научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа". — Уфа: Аэтерна, 2023. — 103-105.

**О ЛЕБЕГОВЫХ МНОЖЕСТВАХ СЛАБЫХ
ПОКАЗАТЕЛЕЙ КОЛЕБЛЕМОСТИ КОРНЕЙ РЕШЕНИЙ
ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ**

В.А. Похачевский
pokhachevskiy@gmail.com

УДК 517.926.4

Слабые показатели колеблемости корней, введённые И.Н.Сергеевым, изучаются как функционалы на декартовом произведении пространства n -мерных линейных дифференциальных систем с бесконечно-дифференцируемыми коэффициентами с C^∞ -компактно-открытой топологией и пространства $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ начальных векторов их решений. Показано, что прообраз всякого луча $(r, +\infty]$, $r \in \mathbb{R}$, для нижнего показателя является F_σ -множеством, а прообраз всякого луча $[r, +\infty]$, $r \in \mathbb{R}$, для верхнего – $F_{\sigma\delta}$ -множеством.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, колеблемость, классы Бэра.

On Lebesgue sets of the weak oscillation exponents of roots of solutions to linear systems

We study the weak oscillation exponents of roots introduced by I.N.Sergeev as functionals on the product of the space of n -dimensional linear differential systems with infinitely differentiable coefficients equipped with C^∞ -compact-open topology and the space $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ of initial vectors of their solutions. It is shown that the preimage of any ray $(r, +\infty]$, $r \in \mathbb{R}$, for the lower exponent is an F_σ -set, and the preimage of every ray $[r, +\infty]$, $r \in \mathbb{R}$, for the upper one is an $F_{\sigma\delta}$ -set.

Keywords: linear differential system, oscillation, Baire classes.

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $C^\infty \tilde{\mathcal{M}}^n$ множество систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

с бесконечно дифференцируемыми функциями $A: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ (которые мы отождествляем с задаваемыми ими системами) и метрикой

$$\rho(A, B) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \min\{|A^{(k)}(t) - B^{(k)}(t)|, (t+1)^{-1}\}, \quad A, B \in C^\infty \tilde{\mathcal{M}}^n.$$

Похачевский Всеволод Андреевич, аспирант, МГУ имени М.В.Ломоносова (Москва, Россия); Vsevolod Pokhachevskiy (Lomonosov Moscow State University, Russia)

Определение. [1,2] Верхним и нижним слабыми показателями колеблемости корней ненулевого решения $x(\cdot)$ системы (1) называются, соответственно, величины

$$\hat{\nu}_\circ^+(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^+((x, m), t), \quad \check{\nu}_\circ^+(x) = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^+((x, m), t),$$

где $\nu^+(y, t)$ – количество корней (т.е. нулей с учётом кратности) функции $y(\cdot)$ на промежутке $(0, t]$, (\cdot, \cdot) – скалярное произведение, а звёздочка снизу обозначает выкалывание нуля.

Ниже расширенную числовую прямую $\overline{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \sqcup \{-\infty, +\infty\}$ наделяем стандартным порядком и порядковой топологией.

Пусть \mathfrak{M} и \mathfrak{N} – какие-либо классы подмножеств метрического пространства M . Будем говорить [3, с. 223–224], что функция $f : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $(\mathfrak{M}, *)$ (классу $(*, \mathfrak{N})$), если для всякого $r \in \mathbb{R}$ справедливо включение $f^{-1}((r, +\infty]) \in \mathfrak{M}$ (соответственно, включение $f^{-1}([r, +\infty]) \in \mathfrak{N}$). Напомним, что через F_σ обозначается класс, состоящий из всевозможных счётных объединений замкнутых множеств, а через $F_{\sigma\delta}$ – класс, состоящий из счётных пересечений множеств из класса F_σ . Через $X_A(\cdot, \cdot)$ условимся обозначить оператор Коши системы A .

Теорема. Для любого $n \geq 2$ справедливы следующие утверждения:

1) функция $\mathcal{C}^\infty \widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}_*^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, действующая по правилу, $(A, \xi) \mapsto \hat{\nu}_\circ^+(X_A(\cdot, 0)\xi)$, принадлежит классу $(F_\sigma, *)$.

2) функция $\mathcal{C}^\infty \widetilde{\mathcal{M}}^n \times \mathbb{R}_*^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, действующая по правилу, $(A, \xi) \mapsto \check{\nu}_\circ^+(X_A(\cdot, 0)\xi)$, принадлежит классу $(*, F_{\sigma\delta})$.

Следствие. Для любой системы $A \in \mathcal{C}^\infty \widetilde{\mathcal{M}}^n$ спектры слабых показателей колеблемости корней системы A , т.е. множества $\{\hat{\nu}_\circ^+(X_A(\cdot, 0)\xi) : \xi \in \mathbb{R}_*^n\}$ и $\{\check{\nu}_\circ^+(X_A(\cdot, 0)\xi) : \xi \in \mathbb{R}_*^n\}$ являются суслинскими подмножествами расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$.

Литература

1. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем., **76:1** (2012), 149–172.
2. Сергеев И.Н. Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ, **46:2** (2015), 171–183.
3. Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М.-Л.: ОНТИ, 1937.

Литература

1. Насыров Ф.С. Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 212 с.
2. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Локализация тепла в нелинейных средах. Диф.уравнения, 1981, т.17, №10, с.1826–1841.

**ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО
РЕШЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО
ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА**

А.Г. Олими, Н.К. Охунзода
Abdumanon1950@mail.ru, okhunov_73@mail.ru.

УДК 517.927.21

Получено интегральное представление общего решения уравнения, полученного итерированием дифференциального оператора первого порядка с двумя внутренними сингулярными и правой граничной сверхсингулярной точками и с ее помощью изучены свойства решений, поставлены и исследованы задачи Коши – Рикье и типа линейного сопряжения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение специального типа, сингулярная и сверхсингулярная точки, общее решение, формулы обращения, Коши – Рикье и типа линейного сопряжения задачи

Integral representation of the general solution and boundary value problems for one ordinary differential equation of a special type

An integral representation of the general solution of the equation obtained by iterating a first-order differential operator with two internal singular and right boundary supersingular points is obtained and with its help the properties of solutions are studied, Cauchy-Riquier problems and the type of linear conjugation are posed and investigated.

Keywords: differential equation of a special type, singular and supersingular points, general solution, inversion formulas, Cauchy-Riquier and linear conjugation problems.

Уравнение

$$A_{(\alpha),(b)}^n y = f(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i}, \quad (1)$$

$$A_{(\alpha),(b)} y \equiv y' + p(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i} y - q(x) \prod_{i=1}^3 |x - b_i|^{-\alpha_i},$$

рассмотрим на множестве $\Gamma_{(b)} = \Gamma \setminus (b)$ вещественной числовой оси, где $\Gamma = (a, b)$, $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$, $a < b_1 < b_2 < b_3 = b$, $(\alpha) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$,

Олими Абдуманнон Гафорзода, к.ф.-м.н., доцент, ХГУ (Худжанд, Таджикистан);
Olimi Abdumanon Gaforzoda (Khujand State University, Khujand, Tajikistan)

Охунзода Нозимджон Кобил, соискатель, ХГУ (Худжанд, Таджикистан);
Okhunzoda Nozimjon Qobil (Khujand State University, Khujand, Tajikistan)

$\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_3 > 1$, то есть $b_i, i = 1, 2$ сингулярные точки, b_3 сверхсингулярная точка уравнения, n - натуральное число, а $p(x), q(x)$ и $f(x)$ - известные функции, непрерывные на отрезке \bar{G} кроме, быть может, точек b_i , в которых могут иметь разрыв первого рода.

Теорема. Пусть $\Gamma_{(b)} = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_0 = (a, b_1), \Gamma_i = (b_i, b_{i+1}), i = 1, 2, x_i^0$ фиксированная точка интервала $\Gamma_i = \Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2, \Gamma_i^1 = (b_i, x_i^0], \Gamma_i^2 = [x_i^0, b_{i+1})$.

1) функции $p_i^1(x), p_i^2(x)$, определяемые равенствами

$$p_i^1(x) = p(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k}, \quad p_i^2(x) = p(x) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i+1}}^3 |x - b_k|^{-\alpha_k}$$

удовлетворяют, соответственно, условию Гельдера

$$|p_i^1(x) - p_i^1(b_i + 0)| \leq H_i^1(x - b_i)^{h_i^1}, \quad H_i^1 - const. > 0, \quad 0 < h_i^1 \leq 1$$

при $x \rightarrow b_i + 0, i = 1, 2$,

$$|p_i^2(b_{i+1} - 0) - p_i^2(x)| \leq H_i^2(b_{i+1} - x)^{h_i^2}, \quad H_i^2 - const. > 0, \quad 0 < h_i^2 \leq 1, \quad \text{при}$$

$x \rightarrow b_{i+1} - 0, i = 0, 1$, а функция $p_2^2(x)$ условию

$$|p_2^2(b_3 - 0) - p_2^2(x)| \leq H_2^2(b_3 - x)^{h_2^2}, \quad H_2^2 > 0, \quad h_2^2 > \alpha_3 - 1 \quad \text{при } x \rightarrow b_3 - 0;$$

2) имеет место следующее сочетание знаков числа $p(b_i \pm 0)$:
 $p(b_i + 0) > 0, i = 1, 2, \quad p(b_i - 0) < 0, i = 1, 2, 3;$

Тогда общее решение уравнения (1) и степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от него на множестве $\Gamma_{(b)}$ выражается при помощи формулы

$$A_{(\alpha),(b)}^s y = \begin{cases} K_{b_{1,s}}^{1,-} [p_0^2(x), q_0^2(x), f_0^2(x), C_{0s}^2, C_{0(s+1)}^2, \dots, C_{0(n-1)}^2], & x \in \Gamma_0^2 \\ K_{b_{1,s}}^{1,+} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1], & x \in \Gamma_1^1 \\ K_{b_{2,s}}^{1,-} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2], & x \in \Gamma_1^2 \\ K_{b_{2,s}}^{1,+} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, C_{2(s+1)}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1], & x \in \Gamma_2^1 \\ K_{b_{3,s}}^{\alpha_3,-} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2], & x \in \Gamma_2^2 \end{cases} \quad (2)$$

$s = 0, (n-1)$, где $K_{b_{i,s}}^{1,\pm} [\dots], K_{b_{3,s}}^{\alpha_3,-} [\dots]$ интегральные операторы, определяемые, соответственно, формулами (4), (8) [1, с. 71, 72] и (8) [2, с. 13], $q_i^1(x), q_i^2(x), f_i^1(x), f_i^2(x)$, функции, определяемые подобно функций $p_i^1(x), p_i^2(x)$, а $C_{0j}^2, C_{ij}^1, C_{ij}^2, i = 1, 2, j = 0, (n-1)$ - произвольные постоянные, группы из которых относящиеся к промежутку $\Gamma_i, i = 1, 2$, однозначно связаны, соответственно, следующими определёнными с.л.а.у:

$$\begin{aligned} & K_{b_{1,s}}^{1,+} [p_1^1(x), q_1^1(x), f_1^1(x), C_{1s}^1, C_{1(s+1)}^1, \dots, C_{1(n-1)}^1]_{x=x_1^0-0} = \\ & = K_{b_{2,s}}^{1,-} [p_1^2(x), q_1^2(x), f_1^2(x), C_{1s}^2, C_{1(s+1)}^2, \dots, C_{1(n-1)}^2]_{x=x_1^0+0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K_{b_2, s}^{1,+} [p_2^1(x), q_2^1(x), f_2^1(x), C_{2s}^1, C_{2(s+1)}^1, \dots, C_{2(n-1)}^1]_{x=x_2^0-0} = \\
& = K_{b_3, s}^{\alpha_3, -} [p_2^2(x), q_2^2(x), f_2^2(x), C_{2s}^2, C_{2(s+1)}^2, \dots, C_{2(n-1)}^2]_{x=x_2^0+0},
\end{aligned}$$

$s = \overline{0, (n-1)}$.

Теорема остается верной также при любом другом сочетании знаков чисел $p(b_i \pm 0)$. При этом, иногда нужно будет требовать, чтобы некоторые из функций $q_i^1(x), q_i^2(x), f_i^1(x), f_i^2(x)$ обращались в нуль с определенным поведением в соответствующей особой точке.

Установлено, что: а) представление (2) обратимо, б) решения уравнения (1) в окрестности сингулярной и сверхсингулярной точек ведут себя подобно степенной и экспоненциальной функции, соответственно, и стремятся к бесконечности или нулю в зависимости от знака чисел $p(b_i \pm 0)$.

Полученное представление (2) применено к исследованию полной картины разрешимости граничных задач с условиями в особых точках. Например, в явном виде найдены решения уравнения (1) по условиям:

$$\begin{aligned}
& 1. \left[(b_1 - x)^{-p_0^2(b_1-0)} A_{(\alpha), (b)y}^s \right]_{x=b_1-0} = \\
& = a_{0s}^2, \left[(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)} A_{(\alpha), (b)y}^s \right]_{x=b_1+0} = a_{1s}^2 \\
& \left\{ \exp [p_2^2(b_3 - 0) \omega_{b_3}^{\alpha_3, -}(x)] A_{(\alpha), (b)y}^s \right\}_{x=b_3-0} = a_{2s}^2, \quad s = \overline{0, (n-1)}; \\
& 2. \sum_{j=0}^{n-1} b_{kj} \left[(b_1 - x)^{-p_0^2(b_1-0)} A_{(\alpha), (b)y}^s \right]_{x=b_1-0} + \\
& \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(n+j)} \left[(x - b_1)^{p_1^1(b_1+0)} A_{(\alpha), (b)y}^j \right]_{x=b_1+0} + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(2n+j)} \left[(b_2 - x)^{-p_1^2(b_2-0)} A_{(\alpha), (b)y}^j \right]_{x=b_2-0} + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(3n+j)} \left[(x - b_2)^{p_2^1(b_2+0)} A_{(\alpha), (b)y}^j \right]_{x=b_2+0} + \\
& + \sum_{j=0}^{n-1} b_{k(4n+j)} \left\{ \exp [p_2^2(b_3 - 0) \omega_{b_3}^{\alpha_3, -}(x)] A_{(\alpha), (b)y}^s \right\}_{x=b_3-0} = \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, 3n},
\end{aligned}$$

где a_{is}^2 , $i = 0, 1, 2$, b_{kj} и ε_k , $j = \overline{0, (5n-1)}$ - заданные вещественные числа.

Литература

1. Раджабов Н.Р. Представление общего решения в интегральном виде и задачи Коши-Рикье для обыкновенного дифференциального уравнения специального типа с тремя сингулярными точками /

Н.Р. Раджабов, А.Г. Олими, Н.К. Охунов // Вестник Таджикского Национального Университета. Серия естественных наук. – 2023, №1, С. 69–82.

2. *Охунов Н.К.* Интегральное представление общего решения и задачи Коши - Рикье для обыкновенного операторно-дифференциального уравнения с тремя внутренними сверхсингулярными точками / Н.К. Охунов // Ученые записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия естественные и экономические науки. – 2023, №2, С. 9–22.

**ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ
ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ
ПОСТРОЕНИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ КООРДИНАТ ДЛЯ
УРАВНЕНИЯ ЛУРЬЕ**

**Т.С. Орипов
turdimurod1955@mail.ru**

УДК 517.91

В докладе обсуждаются вопросы разрешимости переопределенных систем, возникающих в задаче построения гамильтоновых координат для уравнения Лурье

Ключевые слова: переопределенные системы, разрешимость, гамильтоновы системы.

On the conditions of solvability of overdetermined systems in problems of constructing Hamiltonian coordinates of the Lurie equation

The report discusses the issues of solvability of overdetermined systems arising in the problem of constructing Hamiltonian coordinates for the Lurie equation

Keywords: overdetermined systems, solvability, hamiltonian systems.

В предлагаемой работе рассматривается дифференциальное уравнение

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)y = M\left(\frac{d}{dt}\right)f(y), \quad (1)$$

в котором

$$L(p) = p^{2n} + a_1p^{2n-2} + a_2p^{2n-4} + \dots + a_{n-1}p^2 + a_n,$$

$$M(p) = b_0p^{2m} + b_1p^{2m-2} + \dots + b_{m-1}p^2 + b_m,$$

– взаимно простые многочлены ($0 \leq m < n$), а $f(y)$ – скалярная непрерывная функция. Уравнение (1) часто называют *уравнением Лурье*.

Многочлены $L(p)$ и $M(p)$ содержат степени только четных порядков. К таким уравнениям приводят многие задачи теории гамильтоновых систем и ее приложений. Естественен вопрос о конструировании для уравнения (1) эквивалентной гамильтоновой системы вида

$$x' = J\nabla H(x), \quad x \in R^{2n},$$

Орипов Турдикул Сафарович, к.ф.-м.н., доцент, Денауский институт предпринимательства и педагогики (Денау, Узбекистан); Oriпов Turdikul, Denau Institute of Entrepreneurship and pedagogy (Denau, Uzbekistan)

в которой

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla H(x) = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_{2n}} \right)^T;$$

здесь 0 и I – это, соответственно, нулевая и единичная (порядка n) матрицы, $H(x)$ – скалярная вещественная гладкая функция, называемая *гамильтонианом*.

Гамильтониан $H(x)$ является решением системы уравнений

$$J\nabla H(x) = JAx + \xi f(y), \quad (2)$$

в которой JA – матрица нормальной формы, соответствующей линейной части уравнения (1). Система дифференциальных уравнений (2) относительно неизвестной функции $H(x)$ является переопределенной. Доклад посвящен изложению результатов относительно разрешимости переопределенной системы (2).

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н.А. Раутиан
nrautian@mail.ru

УДК 517.968.72

Исследуются абстрактные интегро-дифференциальные уравнения с ядрами интегральных операторов общего вида из пространства функций, интегрируемых на положительной полуоси, которые являются операторными моделями задач теории вязкоупругости. Рассматриваются вопросы корректной разрешимости и экспоненциальной устойчивости решений указанных уравнений.

Ключевые слова: вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах, оператор-функция.

On the properties of solutions for Volterra integro-differential equations in Hilbert spaces

The abstract integro-differential equations where the kernels of integral operators are of general type and lie in the space of functions integrable on the positive half-line are studied. These equations are operator models of viscoelasticity theory problems. We discuss the well-posed solvability and exponential stability of solutions for the equations of this type.

Keywords: Volterra integro-differential equation, linear differential equation in Hilbert spaces, operator semigroup, operator-function.

В теории определяющих соотношений линейной вязкоупругости большую роль играют связи напряжений и деформаций в виде интегральных операторов с ядрами, являющимися материальными функциями, которые можно найти из установочных экспериментов. Если материальные функции зависят только от одной временной переменной, вязкоупругие среды называют нестареющими. Подстановка данных определяющих соотношений в постулаты механики сплошной среды приводит, в частности, к уравнениям движения, представляющими собой

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2022-284.

Раутиан Надежда Александровна, д.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В.Ломоносова (Москва, Россия); Nadezhda Rautian (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах. Будем называть их далее абстрактными интегро-дифференциальными уравнениями.

На примере абстрактного интегро-дифференциального уравнения, возникающего в линейной теории вязкоупругости, будет представлен общий подход, связанный с исследованием однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений, который можно применить ко многим другим линейным моделям, содержащим вольтерровы интегральные операторы. Данный подход является продолжением и развитием исследований, посвященных спектральному анализу оператор-функций, являющихся символами вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений (см. [1]–[3]).

Литература

1. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и представление решений вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами // Доклады Академии наук, **488:5** (2019), 103–107.
2. *Раутиан Н.А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представляемыми интегралами Стильеса // Дифференциальные уравнения, **57:9** (2021), 1255–1272.
3. *Георгиевский Д.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Дифференциальные уравнения, **60:4** (2024), 533–549.

ЗАДАЧА КОШИ С СУММИРУЕМОЙ НАЧАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА С ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ СДВИГАМИ В ПОТЕНЦИАЛАХ

Г.Л. Россовский, grossovski@yandex.ru

УДК 517.518

В работе рассматривается задача Коши для параболического уравнения со сдвигами по пространственной переменной в младших членах. Начальная функция полагается суммируемой. Вводится решение задачи в виде свертки ядра выписанного параболического оператора с начальной функцией. Далее исследуется поведение полученного решения и его производных при больших значениях времени.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, начальная задача, параболический оператор.

Cauchy problem with summable initial-value function for a parabolic equation with spatial translations in potential-like terms

In this paper we study a Cauchy problem for a parabolic operator with spatial translations in potential-like terms. The initial-value function belongs to the class of summable functions. We construct the solution of the mentioned problem in the form of convolution between the kernel of the parabolic operator and the initial-value function. Then we investigate the behaviour of the solution and its derivatives.

Keywords: differential-difference equations, initial-value problem, parabolic operator.

Пусть параметры a_k и h_k , $k = 1, \dots, n$ - вещественные.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^n a_k u(x - h_k, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(t), & u_0 \in L_1(\mathbb{R}). \end{cases} \quad (1)$$

Определим следующую функцию:

$$\mathcal{E}(x, t) = \int_0^{+\infty} e^{-t \left(\xi^2 - \sum_{k=1}^n a_k \cos h_k \xi \right)} \cos \left(x \xi - t \sum_{k=1}^n a_k \sin h_k \xi \right) d\xi$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (мегагрант соглашение № 075-15-2022-1115).

Россовский Григорий Леонидович, РТУ МИРЭА (Москва, Россия), РУДН (Москва, Россия); Grigorii Rossovskii (RTU MIREA/RUDN, Moscow, Russia)

в указанной полуплоскости $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Эта функция удовлетворяет уравнению задачи в классическом смысле и называется ядром Пуассона.

Введем решение поставленной задачи Коши в виде свертки ядра Пуассона с начальной функцией задачи:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathcal{E}(x - \xi, t) u_0(\xi) d\xi. \quad (2)$$

Были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Функция (2) удовлетворяет задаче Коши (1) в смысле обобщенных функций и удовлетворяет исходному уравнению в полуплоскости $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ в классическом смысле.*

Теорема 2. *Пусть выполнено условие $\sum_{k=1}^n |a_k| h_k^2 \leq 2$. Тогда решение (2) равномерно сходится к нулю при $t \rightarrow \infty$ для всех $x \in \mathbb{R}$, и скорость убывания оценивается следующим неравенством:*

$$|u(x, t)| \leq C \frac{\|u_0\|_{L_1(\mathbb{R})}}{\sqrt{t}},$$

где C - константа.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие $\sum_{k=1}^n |a_k| h_k^2 \leq 2$. Тогда частные производные решения (2) произвольного порядка $m+n$ равномерно сходятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ для всех $x \in \mathbb{R}$, и скорость их убывания оценивается следующим образом:*

$$\left| \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial t^n} \right| \leq \frac{\|u_0\|_{L_1(\mathbb{R})}}{\pi} \left[\tilde{C} e^{-a_0 t} + \sum_{j=0}^n \tilde{C}_j \frac{1}{t^{(m+2j+1)/2}} \right]$$

где \tilde{C}_j ($j = 1, \dots, n$) - константы.

Литература

1. Муравник А.Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // СМФН, **52**:3 (2016), 141
2. Скубачевский А.Л., Шамин Р.В. Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Мат. заметки, **66**:1 (1999), 145-153
3. Зайцева Н.В. Гиперболические дифференциально-разностные уравнения с нелокальными потенциалами общего вида // Уфимский мат. журнал, **13**:3 (2021), 37-44
4. Рабинович В.С. О дифференциально-разностных уравнениях в полупространстве // Дифф. уравн., **16**:11 (1980), 2030-2038

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА, МАЛЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ

К.Б. Сабитов
sabitov_fmfm@mail.ru

УДК 517.95

В работе для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа в прямоугольном параллелепипеде изучена первая граничная задача. Установлен критерий единственности. Решение построено в виде суммы ортогонального ряда. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов. Установлены оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой, что позволило доказать сходимость ряда в классе регулярных решений и устойчивость решения относительно граничных функций.

Ключевые слова: трехмерный аналог уравнения Лаврентьева – Бицадзе, задача Дирихле, критерий единственности, ряд, малые знаменатели, существование, устойчивость.

Dirichlet problem for a three-dimensional equation of mixed type, small denominators

In this paper, the first boundary value problem for a mixed elliptic-hyperbolic equation in a rectangular parallelepiped is studied. A uniqueness criterion is established. The solution is constructed as a sum of an orthogonal series. When substantiating the convergence of the series, the problem of small denominators of two natural arguments arose. Estimates of separation from zero with the corresponding asymptotics are established, which makes it possible to prove the convergence of the series in the class of regular solutions and the stability of the solution with respect to boundary functions.

Keywords: three-dimensional analogue of the Lavrentiev-Bitsadze equation, Dirichlet problem, uniqueness criterion, series, small denominators, existence, stability.

Рассмотрим уравнение смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$\mathcal{L}u = u_{zz} + (\operatorname{sgn}z)(u_{xx} + u_{yy}) = F(x, y, z), \quad (1)$$

которое является трехмерным аналогом уравнения Лаврентьева-Бицадзе, в области

$$Q = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, -\alpha < z < \beta\}, \quad D = \{(x, y) \mid 0 < x < p, 0 < y < q\},$$

Сабитов Камил Басирович, д.ф.-м.н., профессор, УУНиТ (Стерлитамак, Россия); Kamil Sabitov (Mavlyutov Institute of Mechanics Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia; Sterlitamak branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia)

где α, β, p, q – заданные положительные действительные числа, и поставим следующую краевую задачу на сопряжения на плоскости изменения типа, которую назовем задачей Дирихле.

Задача Дирихле. *Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x, y, z) \in C^1(\bar{Q}) \cap C^2(Q_+ \cup Q_-), \quad u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} \in L(D); \quad (2)$$

$$\mathcal{L}u(x, y, z) \equiv F(x, y, z), \quad (x, y, z) \in Q_+ \cup Q_-; \quad (3)$$

$$u(x, y, z)|_{x=0} = u(x, y, z)|_{x=p} = u(x, y, z)|_{y=0} = u(x, y, z)|_{y=q} = 0, \\ -\alpha \leq z \leq \beta; \quad (4)$$

$$u(x, y, z)|_{z=-\alpha} = \psi(x, y), \quad u(x, y, z)|_{z=\beta} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad (5)$$

где $F_i(x, y, z)$, $i = 1, 2$, $\psi(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции, при этом $\psi(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ удовлетворяют условиям согласования с граничными данными (5), $Q_+ = Q \cap \{z > 0\}$, $Q_- = Q \cap \{z < 0\}$.

Интерес к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа возник после работы Франкля Ф.И. [1], где впервые было показано, что задача перехода через звуковой барьер установившихся двумерных безвихревых течений идеального газа в соплах, когда сверхзвуковые волны примыкают к стенкам сопла вблизи минимального сечения, сводится к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа.

Первые постановки аналога задачи Трикоми для трехмерного уравнения типа (1) принадлежат А.В. Бицадзе [2], С.П. Пулькину [3].

В данной работе показано, что корректность постановки задачи (2) – (5) существенным образом зависит от длин ребер p, q и α параллелепипеда Q_- гиперболической части области Q . Установлен критерий единственности решения этой задачи. Решение построено в виде суммы ортогонального ряда. При обосновании сходимости ряда возникла проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов. Установлены оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой, что позволило доказать сходимость ряда в классе регулярных решений и устойчивость решения относительно граничных функций.

Задача Дирихле для двумерного аналога уравнения (1) изучен в работе [4].

Литература

1. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. — М.: Наука, 1973.
2. Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях // Докл. АН СССР, **110**:6 (1956), 901-902.
3. Пулькин С.П. К вопросу о постановке задачи Трикоми в пространстве // Ученые записки Куйбышевского госпединститута, **14** (1956), 63-77.
4. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для неоднородного уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе // Известия РАН. Серия математическая, **88**:4 (2024), 61-83.

**ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДЛЯ
ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ
ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

Д.С. Сафаров, С.К. Миратов
safarov-5252@mail.ru, safarkhonop@mail.ru

УДК 517.95

В работе для уравнения обобщенных аналитических функций в классе двоякопериодических функций решена задача о собственных значениях.

Ключевые слова: собственное значение, двоякопериодических решений, эллиптическая функция, собственные функции

Eigenvalue problem for doubly periodic solutions to the equation of generalized analytical functions

In this work, the problem of eigenvalues is solved for the equation of generalized analytic functions in the class of doubly periodic functions.

Keywords: eigenvalue, doubly periodic solutions, elliptic function, eigenfunctions.

Пусть H_*^α и C_*^1 – классы двоякопериодических функций с периодами h_1, h_2 , $Im(h_2/h_1) > 0$, принадлежащих соответственно $H^\alpha(\Omega)$, $C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, Ω – основной параллелограмм периодов.

Для уравнения

$$w_{\bar{z}} + (a(z) + \lambda b(z))w(z) = f(z), \quad (1)$$

рассмотрим задачу нахождения решений, удовлетворяющие условиям

$$w(z + h_1) = w(z), \quad w(z + h_2) = w(z), \quad (2)$$

λ – неизвестный параметр [1],[2].

При условии $a(z), b(z), f(z) \in H_*^\alpha$ будем искать решение задачи (1),(2) из класса C_*^1 .

В работах [3],[4] при $\lambda = 0$ показано, что задача (1),(2) Фредгольмова в классе C_*^1 , а в классе функций допускающих полюсов, задача нетривиальна.

Сафаров Джумабой, д.ф.-м.н., профессор, Бох.ГУ (Бохтар, Республика Таджикистан); Safarov Dzhumaboy (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

Миратов Сафархон Кудратович, к.ф.-м.н., Бох.ГУ (Бохтар, Республика Таджикистан); Miratov Safakhon (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

Введем обозначения $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} a(z) dz$, $b_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\Omega} b(z) dz$, где $d_z \Omega$ – элемент площади, $\tilde{a}_0 = a_0 + \lambda b_0$ и $\Gamma = \{m_1 h_1 + m_2 h_2, m_1, m_2 \text{ – целые}\}$ – решетка периодов.

Тогда для любого решения уравнения (1) из класса C_*^1 справедлива

$$w(z) = \begin{cases} \{c \exp[-T_{\zeta}(a(z) + \lambda b(z)) + dz], & \text{при } \tilde{a} \in \Gamma, \text{ и } w(z) \equiv 0, \\ 0, & \text{при } \tilde{a} \notin \Gamma, \end{cases} \quad (3)$$

где c – произвольная постоянная, $T_{\zeta} \rho(z)$ – интегральный оператор с ядром $\zeta(z)$ – дзета-функция Вейерштрасса, постоянное d и \tilde{a}_0 решение системы

$$\begin{cases} \eta_1 \tilde{a}_0 + h_1 d = 2\pi i k_1, \\ \eta_2 \tilde{a}_0 + h_2 d = 2\pi i k_2, \end{cases} \quad (4)$$

где k_1, k_2 – некоторые целые числа, $\eta_j = 2\zeta(h_j/2)$, $j = 1, 2$, циклические постоянные связаны с h_1, h_2 соотношением Лежандра $\eta_1 h_2 - \eta_2 h_1 = 2\pi i$ [5].

Теорема 1. Пусть уравнение $a_0 + \lambda b_0 = m_1 h_1 + m_2 h_2$ имеет решение в целых числах m_1, m_2 и λ_{00} , d_{00} – одно из решений системы (4). Тогда при $b_0 \neq 0$ задача (1), (2) имеет бесчисленное множество собственных значений

$$\lambda_{m_1 m_2} = \lambda_{00} + \frac{1}{b_0} (m_1 h_2 - m_2 h_1),$$

отвечающие им собственным функциям

$$\varphi_{m_1 m_2}(z) = c_{m_1 m_2} \exp[-T_{\zeta}(a(z) + \lambda_{m_1 m_2} b(z)) + d_{m_1 m_2} z],$$

где $d_{m_1 m_2} = d_{00} + (m_1 \eta_1 - m_2 \eta_2)$, $m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда задача (1), (2), не будучи нетривиальной, не будучи фредгольмовой нормально разрешима по Хаусдорфу [6].

Если нарушено теорема 1, то любое число $\lambda \in C$ является регулярным значением задача (1), (2).

Литература

1. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. – М.: Наука, 1959. – 629 с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976 г. – 589 с.
3. Сафаров Д.С. Двоёкопериодические обобщённые аналитические функции // Диф. урав. -1991. - Т.27. - №4/7. - С. 14-20.
4. Сафаров Д.С. Двоёкопериодические обобщённые аналитические функции и их приложения. – Душанбе, Дониш, 2012. – 190 с.
5. Ахиезер И.И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, 1970. – 304 с.
6. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

ВЫРОЖДЕННОЕ ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ С ПРОИЗВОДНОЙ ЛИУВИЛЛЯ

Н.М. Скрипка, В.Е. Федоров
vio.nadezhda@ya.ru, kar@csu.ru

УДК 517.9

Исследуется линейное неоднородное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве с вырожденным оператором под знаком дробной производной Лиувилля. Уравнение рассматривается на всей прямой и не наделено начальными условиями. Доказаны существование и единственность решения в случае (L, p) -ограниченного оператора в правой части уравнения.

Ключевые слова: производная Лиувилля, дифференциальное уравнение без начальных условий, преобразование Фурье.

Degenerate Evolution Equation with the Liouville Derivative

Linear inhomogeneous differential equation in a Banach space with a degenerate linear operator at the Liouville derivative is studied. The equation is considered on the whole real line and are not endowed by initial conditions. The uniqueness and existence of a solution are proved in the case of (L, p) -bounded operator in the right-hand side of the equation.

Keywords: Liouville derivative; differential equation without initial conditions; Fourier transform.

Пусть X, Y — банаховы пространства, $\mathcal{L}(X; Y)$ — банахово пространство всех линейных непрерывных операторов из X в Y , $\mathcal{Cl}(X; Y)$ — множество всех линейных замкнутых операторов с плотной областью определения в X , действующих в Y , $L \in \mathcal{L}(X; Y)$, $M \in \mathcal{Cl}(X; Y)$. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с $\ker L \neq \{0\}$ и заданной функцией $g \in C(\mathbb{R}; Y)$

$$D^\alpha Lx(t) = Mx(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Здесь используется производная Лиувилля [1, 2]

$$D^\alpha z(t) := D^m \int_{-\infty}^t \frac{(t-s)^{m-\alpha} z(s) ds}{\Gamma(m-\alpha-1)}, \quad m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФН и Правительства Челябинской области (проект № 24-11-20002).

Скрипка Надежда Михайловна, аспирант, ЧелГУ (Челябинск, Россия); Nadezhda Skripka (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Федоров Владимир Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор, ЧелГУ (Челябинск, Россия); Vladimir Fedorov (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Функцию $x : \mathbb{R} \rightarrow D_M$ будем называть решением уравнения (1), если $Mx \in C(\mathbb{R}; \mathcal{Y})$, $D^\alpha Lx \in C(\mathbb{R}; \mathcal{Y})$ и для всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется (1).

Лемма 1. Пусть оператор M (L, p) -ограничен $\gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r > a\}$. Тогда следующие операторы являются проекторами

$$P := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{X}), \quad Q := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} L_{\mu}^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}).$$

Обозначим $\mathcal{X}^0 := \ker P$, $\mathcal{X}^1 := \operatorname{im} P$, $\mathcal{Y}^0 := \ker Q$, $\mathcal{Y}^1 = \operatorname{im} Q$, $L_k := L|_{\mathcal{X}^k}$, $M_k := M|_{\mathcal{X}^k \cap D_M}$, $k = 0, 1$.

Теорема 1. [3] Пусть оператор M (L, σ) -ограничен. Тогда

- (i) $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^k; \mathcal{Y}^k)$, $k = 0, 1$;
- (ii) существуют обратные операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1; \mathcal{X}^1)$, $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0; \mathcal{X}^0)$.

Для $p \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ оператор M называется (L, p) -ограниченным, если оператор $M_0^{-1} L_0$ нильпотентен степени p . При $t \in \mathbb{R}$ обозначим

$$X_{\alpha}(t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} ((-i\omega)^{\alpha} - L_1^{-1} M_1)^{-1} e^{-i\omega t} d\omega.$$

Теорема 2. Пусть $\alpha > 0$, $p \in \mathbb{N}_0$, оператор M (L, p) -ограничен, $\{(-i\omega)^{\alpha} : \omega \in \mathbb{R}\} \cap \sigma^L(M) = \emptyset$, $g \in C(\mathbb{R}; \mathcal{Y})$, $Qg \in L_2(\mathbb{R}; \mathcal{Y})$, $(D^{\alpha} J)^k M_0^{-1} (I - Q)g \in C(\mathbb{R}; \mathcal{X})$, $k = 0, 1, \dots, p$. Тогда функция

$$z_f(t) = \int_{\mathbb{R}} X_{\alpha}(t-s) L_1^{-1} Qg(s) ds - \sum_{k=0}^p (D^{\alpha} H)^k M_0^{-1} (I - Q)g(t)$$

является единственным решением уравнения (1).

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam, Boston, Heidelberg: Elsevier Science Publ., 2006. 541 p.
3. Sviridyuk, G.A.; Fedorov, V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — VSP: Utrecht, The Netherlands; Boston, USA, 2003.

**ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ
ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА ЦЕЛОЙ
ОСИ С НЕПОЛНЫМИ ДАННЫМИ**

Н.Ф. Валеев, Я.Т. Султанаев
valeevnf@yandex.ru, sultanaevyt@gmail.com

УДК 517.518

Исследуется постановка оптимизационной обратной спектральной задачи с неполными спектральными данными для одномерного оператора Шредингера на всей оси: для заданного потенциала q_0 найти ближайшую к нему функцию \hat{q} такую, чтобы первые m собственных значений оператора Шредингера с потенциалом \hat{q} совпали с заданными значениями $\lambda_k^* \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, m$.

Ключевые слова: обратные спектральные задачи, система нелинейных уравнений Шредингера, оператор Шредингера
Inverse spectral problem for one-dimensional Schrodinger operator on the integer axis with incomplete data

We investigate the statement of the optimization inverse spectral problem with incomplete spectral data for the one-dimensional Schrodinger operator on the entire axis: for a given potential q_0 , find the closest function \hat{q} such that the first m eigenvalues of the Schrodinger operator with potential \hat{q} coincided with the given values $\lambda_k^* \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, m$.

Keywords: Inverse spectral problems; System of nonlinear Schrodinger equations; Schrodinger operator;

В гильбертовом пространстве $H = L^2(\mathbb{R})$ рассматривается самосопряженный оператор Шредингера

$$\mathcal{L}[q]\psi := -\psi''(x) + q(x)\psi(x), \quad (1)$$

где потенциал $q(x)$ удовлетворяет условиям

$$q(x) = q_0(x) + h(x), \text{ где } h \in L^2(\mathbb{R}), q_0 \in C^{loc}(\mathbb{R}), \lim_{|x| \rightarrow +\infty} q_0(x) = +\infty. \quad (2)$$

Изоспектральным многообразием оператора $\mathcal{L}[q]$ для спектральных данных

$$\sigma = \{(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*) | \lambda_1^* < \lambda_2^* < \dots < \lambda_m^* \in \mathbb{R}\}$$

Валеев Нурмухамет Фуатович, к.ф.-м.н., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Nurmukhamet Valeev (Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa, Russia)

Султанаев Яудат Талгатович, д.ф.-м.н., проф., БГПУ имени М.Акмоллы (Уфа, Россия); Yaudat Sultanaev (Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla)

будем называть множество (многообразие) потенциалов $q \in W$ на которых первые m собственных значений оператора $\mathcal{L}[q]$ принимают заданные значения $\lambda_k^*, k = 1, \dots, m$, то есть

$$ISM(\mathcal{L}[q], W; \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*) := \{q \in W | \lambda_k(q) = \lambda_k^*, k = 1, 2, \dots, m; \}.$$

В работе обсуждается *оптимизационная обратная спектральная задача* в следующей формулировке.

(\mathcal{P}^0) Пусть заданы операторы $\mathcal{L}[q]$, $q_0 \in W$ и изоспектральное многообразие $ISM = ISM(\mathcal{L}[q], W; \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$. Требуется найти вещественный потенциал $\hat{q} \in ISM$ такой, что

$$\inf_{q \in ISM} \|q - q_0\| = \|\hat{q} - q_0\|.$$

Основной целью данной работы является доказательство утверждений о существовании решений ООСЗ (\mathcal{P}^0), а также описание связи между (\mathcal{P}^0) и системой нелинейных уравнений Шредингера.

Литература

1. V. A. Sadovnichii, Ya. T. Sultanaev, N. F. Valeev Optimization Inverse Spectral Problem for the One-Dimensional Schrodinger Operator on the Entire Real Line //Differential Equations, 2024, V.60(Issue4), pp. 465-471

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE STURM-LIOUVILLE EQUATION IN VECTOR-FUNCTION SPACE

Ya.T. Sultanaev, N.F. Valeev, A. Yeskermessuly
 sultanaevyt@gmail.com, valeevnf@yandex.ru,
 alibek.yeskermessuly@gmail.com

УДК 517.926.7

We study the asymptotic behavior of fundamental systems of solutions to the Sturm-Liouville equation with rapidly oscillating potentials in a two-dimensional vector-function space. We consider different cases where the coefficients do not satisfy the regularity conditions. Additionally, we investigate the asymptotic behavior of solutions in resonance cases

Keywords: asymptotic methods, rapidly oscillating coefficients, vector-function, L-diagonal system, resonance case

We consider the Sturm-Liouville equation in two dimensional vector-function space:

$$\vec{\varphi}'' + \left(A_0 + \frac{p(x)}{x^\alpha} A_1 \right) \vec{\varphi} = 0, \quad A_0^* = A_0 > 0, \quad \alpha > 0, \quad (1)$$

$$p(x) = \sum_{k=1}^m s_k e^{ip_k x}, \quad s_k \in \mathbb{C}, \quad p_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2)$$

Substitution

$$\vec{\varphi} = T\vec{y}, \quad (3)$$

transforms equation (1) to the equation

$$\vec{y}'' + \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 \end{pmatrix} \vec{y} + \frac{p(x)}{x^\alpha} B\vec{y} = 0, \quad x_0 \leq x < \infty, \quad \alpha > 0, \quad (4)$$

where

$$T^{-1} A_0 T = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 \end{pmatrix}, \quad B = T^{-1} A_1 T = (b_{jk}), \quad j, k = \overline{1, 2}.$$

Theorem 1. *Let $\alpha > 1/3$, and let a function $p(x)$ have the form (2).*

Moreover, suppose the following conditions hold:

The studies of Valeev N.F. and Sultanaev Y.T. Ya.T. Sultanaev are supported by the Ministry of Education of the Russian Federation (agreement No. 073-03-2023-010 dated 26.01.2023). Yeskermessuly A. is supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP14869090).

Sultanaev Yaudat Talgatovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, BSPU (Ufa, Russia)

Valeev Nurmukhamet Fuatovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Institute of Mathematics with Computing Centre - SUFRS RAS (Ufa, Russia)

Yeskermessuly Alibek, PhD, Altynsarin Institute (Arkalyk, Kazakhstan)

1. For any set of numbers $\{c_1, \dots, c_m\}$, where $c_j \in 0 \cup \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^m c_j \neq 0$, the condition is met:

$$\sum_{k=1}^m c_k p_k \neq 0. \quad (5)$$

2. For any p_k , $k = 1, \dots, m$, it is true that

$$p_k \notin \{\pm 2\mu_1, \pm 2\mu_2, \pm\mu_1 \pm \mu_2\}. \quad (6)$$

Then, for the fundamental system of solutions of equation (4), as $x \rightarrow +\infty$, the following asymptotic relations hold:

$$\vec{y} \sim \begin{pmatrix} c_{11} e^{i\mu_1 x} & c_{12} e^{-i\mu_1 x} \\ c_{21} e^{i\mu_2 x} & c_{22} e^{-i\mu_2 x} \end{pmatrix} (I + o(1)) \vec{y}_0, \quad c_{jk} = \text{const}, \quad j, k = \overline{1, 2}, \quad \vec{y}_0 = \text{const}.$$

Resonance case.

We consider the resonance case where $p_k \in \{\pm 2\mu_1, \pm 2\mu_2, \pm\mu_1 \pm \mu_2\}$, i.e., condition (6) is not satisfied. Let $p(x) = \cos(\mu_1 + \mu_2)x$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \setminus 0$. Then the dominant part of asymptotic solutions has the following form:

- if $1/2 < \alpha < 1$:

$$\vec{z} \sim e^{\frac{i}{2}\Lambda_0 x} \cdot \exp\left\{\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} B_0\right\} (I + M \cdot o(1)) \vec{z}_0,$$

- if $\alpha = 1$:

$$\vec{z} \sim e^{\frac{i}{2}\Lambda_0 x} \cdot \exp\left\{\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} B_0\right\} (I + M \cdot o(1)) \vec{z}_0,$$

where $\vec{z} = \text{colon}(y_1, y_2, y'_1, y'_2)$, $\vec{z}_0 = \text{const}$, B_0, M are 4×4 constant matrices, and

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}.$$

**О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
РАВНОВЕСИЯ НЕПОЛОГИХ АНИЗОТРОПНЫХ
ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО С
НЕЗАКРЕПЛЕННЫМИ КРАЯМИ**

**С.Н. Тимергалиев,
Samat_tim@mail.ru**

УДК 517.958

Исследуется разрешимость краевой задачи для системы пяти нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка при заданных граничных условиях, описывающей состояние равновесия упругих непологих анизотропных неоднородных оболочек с незакрепленными краями нулевой главной кривизны в рамках сдвиговой модели Тимошенко.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения равновесия, обобщенное решение, теорема существования.

On the solvability of nonlinear boundary value problems of equilibrium of non-flat anisotropic shells of Timoshenko type with loose edges

We study the solvability of a boundary value problem for a system of five nonlinear differential equations with partial derivatives of the second order under given boundary conditions, describing the state equilibrium of elastic non-sloping anisotropic inhomogeneous shells with loose edges of zero principal curvature within the framework of the Timoshenko shear model.

Keywords: differential equilibrium equations, generalized solution, existence theorem.

Рассматривается задача о равновесии упругой непологой анизотропной неоднородной оболочки с незакрепленными краями нулевой главной кривизны в рамках сдвиговой модели Тимошенко, которая описывается системой из пяти дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка при статических граничных условиях. Дифференциальные уравнения и граничные условия линейны относительно углов поворота ψ_1 , ψ_2 , нелинейны относительно тангенциальных перемещений w_1 , w_2 и прогиба w_3 . Целью работы является вывод условий, при выполнении которых существует обобщенное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее граничным

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-21-00212). Тимергалиев Самат Низаметдинович, д.ф.-м.н., профессор, КГАСУ (Казань, Россия); Samat Timergaliev (Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia)

условиям. Предложенные исследования развивают результаты статьи [1] на случай анизотропных оболочек.

В основе метода исследования лежат интегральные представления для обобщенных перемещений, содержащие произвольные функции, которые построены в работе [1]. Произвольные функции находятся так, чтобы обобщенные перемещения удовлетворяли линейной системе уравнений и линейным граничным условиям, которые специальным образом выделяются из исходной нелинейной задачи. В результате исходная краевая задача сводится к нелинейному операторному уравнению вида

$$a - L_s(a) - L_c(a) - G(a) = a_* + \tilde{a}_F \quad (1)$$

относительно вектора $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2)$ обобщенных перемещений в соболевском пространстве $W_p^{(2)}(\Omega)$, $p > 2$, где L_s и L_c - линейные соответственно ограниченный и вполне непрерывный, G - нелинейный ограниченный операторы в $W_p^{(2)}(\Omega)$, $p > 2$, a_* и \tilde{a}_F - известные вектор- функции, зависящие соответственно от произвольных постоянных и внешних сил.

В случае изотропных оболочек [1] $L_s \equiv 0$.

При исследовании разрешимости уравнения (1) наиболее сложным моментом является доказательство обратимости линейного оператора $I - L_s - L_c$, I - тождественный оператор, которое существенно зависит от физико-геометрических характеристик оболочки. При помощи обратного оператора $(I - L_s - L_c)^{-1}$ уравнение (1) преобразуется к эквивалентному виду $a - G_*(a) = a_F$ с нелинейным ограниченным в $W_p^{(2)}(\Omega)$, $p > 2$ оператором G_* и с известной правой частью a_F , зависящей от внешних сил, разрешимость которого устанавливается с использованием принципа сжатых отображений.

Литература

1. *Тимергалиев С.Н.* Разрешимость нелинейных краевых задач для непологих изотропных оболочек типа Тимошенко нулевой главной кривизны // Уфимск. матем. журн., **16:1** (2024), 81-98.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ф.Р. Турсунов,
farhod.tursunov.76@mail.ru

УДК 517.946

В статье изучается продолжение решения задачи Коши для линейных эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами в области G по ее известным значениям на гладкой части S границы ∂G . Предполагается, что решение задачи существует и непрерывно дифференцируемо в замкнутой области с точно заданными данными Коши. Для этого случая устанавливается явная формула продолжения решения.

Ключевые слова: Задача Коши, некорректные задачи, функция Карлемана, регуляризованные решения, регуляризация, формулы продолжения.

Regularization of the Cauchy problem for linear elliptic systems of the first order with constant coefficients

The thesis studies the continuation of the solution of the Cauchy problem for linear elliptic systems of the first order with constant coefficients in a domain G from its known values on a smooth part S of the boundary ∂G . It is assumed that the solution of the problem exists and is continuously differentiable in a closed domain with exactly given Cauchy data. For this case, an explicit formula for the continuation of the solution is established.

Keywords: Cauchy problem, ill-posed problems, Carleman function, regularized solutions, regularization, continuation formulas.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ точки трёхмерного Евклидова пространства \mathbb{R}^3 , и G – ограниченная односвязная область в \mathbb{R}^3 с границей $\partial G = S \cup Q$ состоящей из компактной связной части Q плоскости $y_3 = 0$ и гладкого куска поверхности Ляпунова S , лежащей в полупространстве $y_3 > 0$. Положим $\bar{G} = G \cup \partial G$.

Обозначим через $A_{l \times n}(x)$ класс матриц $D(x^T)$, элементами которых являются линейные формы с комплексными коэффициентами таких, что выполняется равенство $D^*(x^T) D(x^T) = E(x^2 u^0)$; здесь $D^*(x^T)$ – сопряженная к $D(x^T)$ матрица, а $E(x)$ – диагональная матрица размерность $(n \times l)$, $n, l \geq 3$, $u^0 = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, $x^T = (x_1, x_2, x_3)^T$ – транспонированный вектор x .

Турсунов Фарход Рузikuлович, док. фил. по физ. мат. наук, СамГУ (Самарканд, Узбекистан); Tursunov Farkhod Ruzikulovich (Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan)

В области G рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$D \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) U(x) = 0, \quad x \in G, \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T$, $U(x) = (U_1(x), U_2(x), \dots, U_n(x))^T$.

Требуется найти функцию $U(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ являющиеся решением системы (1), у которого известно значение на части S границы области G т.е.

$$U(x)|_S = f(x) \quad (2)$$

относительно неизвестной функции

$U(x) = (U_1(x), U_2(x), \dots, U_n(x))^T$; $n \geq 3$, здесь, $f(x)$ - непрерывная функция, заданная на части S границы области G .

Если функция $U(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ является решением системы (1), то верно следующее интегральное представление [1]:

$$U(x) = \int_{\partial G} M(x, y) U(y) dS_y, \quad (3)$$

где

$$M(x, y) = \left(E \left(\frac{1}{4\pi r} u^0 \right) D^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right) D(t^T),$$

$t = (t_1, t_2, t_3)$ - единичная внешняя нормаль, проведенная в точке у границы ∂G .

Пусть $\sigma > 0$. Определим при $\alpha > 0$ функции $\Phi_\sigma(x, y)$ следующим равенством [2]:

$$-2\pi^2 e^{\sigma x_3^2} \Phi_\sigma(x, y) = \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} \left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_3} \right] \frac{du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3, \quad (4)$$

где

$$y' = (y_1, y_2), \quad x' = (x_1, x_2), \quad \alpha = |y' - x'|,$$

$$r = |y - x| = \alpha^2 + (y_3 - x_3)^2, \quad \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2.$$

Отделяя мнимую часть равенство (4), имеем

$$\Phi_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi^2} e^{-\sigma(\alpha^2 + x_3^2 - y_3)} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} \cos 2\sigma y_3 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{u^2 + r^2} du - \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} (y_3 - x_3) \sin 2\sigma y_3 \sqrt{u^2 + \alpha^2}}{u^2 + r^2} \frac{du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \right].$$

Формула (3) верна, если $\frac{1}{4\pi r}$ заменить функцией $\Phi_\sigma(x, y)$ определяемой равенством (4). Тогда интегральное представление (3) имеет вид

$$U(x) = \int_{\partial G} N_\sigma(x, y) U(y) dS_y, \quad x \in G \quad (5)$$

где

$$N_\sigma(x, y) = \left(E(\Phi_\sigma(x, y)u^0) D^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right) D(t^T). \quad (6)$$

Положим

$$U_\sigma(x) = \int_S N_\sigma(x, y) U(y) dS_y, \quad x \in G. \quad (7)$$

Теорема. Пусть $U(x)$ вектор-функция из класса $C^1(G) \cap C(\bar{G})$, является решением системы (1) на части S границы ∂G удовлетворяющее начальному условию (2) и на части Q границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)| \leq M, \quad M > 0, \quad y \in Q. \quad (8)$$

Тогда для любого $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедливы оценки

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq \psi_3(\sigma, x_3) M e^{-\sigma x_3^2}, \quad (9)$$

$$\left| \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \right| \leq \omega_i(\sigma, x_3) M e^{-\sigma x_3^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

где

$$\psi_3(\sigma, x_3) = \left(\frac{5}{2\pi} + \frac{1}{8\sigma x_3^2} + \frac{1}{4x_3\sqrt{\sigma\pi}} \right) c, \quad c = \text{const},$$

$$\omega_1(\sigma, x_3) = \left(\frac{13\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}} + \frac{13}{4\sqrt{\sigma\pi}x_3^2} + \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}x_3^2} \right) c, \quad \omega_2(\sigma, x_3) = \omega_1(\sigma, x_3),$$

$$\omega_3(\sigma, x_3) = \left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\pi} + \frac{\sqrt{\sigma}(11 + 4\sigma x_3^2)}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma\pi}} \left(\frac{27x_3 + 16}{27x_3^3} \right) \right) c.$$

Следствие 1. При каждом $x \in G$ справедливо равенство

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x) = U(x), \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Обозначим через \bar{G}_ε^1 множество

$$\bar{G}_\varepsilon^1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in G, \quad a > x_3 \geq \varepsilon, \quad a = \max_T h(x_1, x_2), \quad 0 < \varepsilon < a, \right\}.$$

Легко заметить, что множество $\bar{G}_\varepsilon^1 \subset G$ является компактным [3].

Следствие 2. Если $x \in \bar{G}_\varepsilon^1$, то семейство функций $\{U_\sigma(x)\}$ и $\left\{ \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \right\}$

$$U_\sigma(x) \Rightarrow U(x), \quad \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Следствие 1 дает точное решение задачи Коши (1)-(2) в случае, когда данные Коши на поверхности S заданы точно.

Литература

1. *Тарханов Н.Н.* Об интегральном представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных и некоторых его приложениях // Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа, **1** (1980), 147-160

2. *Ярмухамедов Ш.* Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши // Математические заметки, **83:2** (2008), 763-778

3. *Хасанов А. Б., Турсунов Ф.Р.* Задача Коши для трехмерного уравнения Лапласа // Известия высших учебных заведений, **2** (2021), 56-73

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Ш.Р. Фармонов,
farmonovsh@gmail.com

УДК 517.956.6

В настоящей работе сформулированы три задачи с нелокальными условиями на линиях вырождения и на боковых характеристиках для уравнения смешанного типа второго рода с двумя линиями вырождения. Сформулированные задачи эквивалентно сведены к соответствующим задачам в области эллиптичности уравнения. Приведены теоремы о существовании единственного решения изучаемых задач.

Ключевые слова: Уравнение смешанного типа второго рода, задача типа Франкла, принцип экстремума, сингулярное интегральное уравнение.

The main tasks of mathematics

In the present work three problems with non-local conditions on the lines of degeneracy and on the lateral characteristics for mixed type equation of the second kind with two lines of degeneracy are formulated. The formulated problems equivalently reduced to problems in the elliptic part of the considered domain. The existence and uniqueness theorems for studied problems are proved.

Keywords: Second kind mixed type equation, Frankl type problem, extremum principle, singular integral equation.

Пусть Ω - конечная односвязная область плоскости xOy , ограниченная отрезками $\overline{AB} = \{(x, y) : x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, $\overline{BA^*} = \{(x, y) : x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$ и дугой $A^*A = \{(x, y) : \sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1, x > 0, y < 0\}$, а $\Omega_0 = \Omega \cap \{(x, y) : y > 0\}$, $\Omega_{1j} = \Omega \cap \{(x, y) : (-1)^j(x + y) < 0, y < 0\}$, $j = \overline{1, 2}$.

Задача $A_1 [A_2]$. Найти функцию $u(x, y) \in C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) в области Ω_0 есть регулярное решение уравнения

$$xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_x + \alpha u_y = 0, \quad 0 < \alpha = \text{const} < (1/2); \quad (1)$$

2) в Ω_{11} и Ω_{12} есть обобщенное решение уравнения (1) из класса $R_2[1]$;

3) удовлетворяет условиям

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{AB}; \quad (2)$$

Фармонов Шерзодбек Рахмонжонович, Ферганский государственный университет (Фергана, Узбекистан); Sherzodbek Farmonov (Fergana state university, Fergana, Uzbekistan)

$$u(0, y) + u(0, -y) = f(y), \quad -1 \leq y \leq 1; \quad (3)$$

$$u[x, -(1 - \sqrt{x})^2] - u[(1 - \sqrt{x})^2, -x] = p(x), \quad (1/4) \leq x \leq 1; \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha u_x(x, y) = g(y), \quad 0 < y < 1; \quad (5)$$

$$\left[\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha u_x(x, y) - \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha u_x(x, -y) = g(y), \quad 0 < y < 1; \quad (5') \right]$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\alpha u_y(x, y) = - \lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha u_y(x, y), \quad 0 < x < 1. \quad (6)$$

где $\varphi(x, y)$, $f(t)$, $p(t)$, $g(t)$ – заданные непрерывные функции, причем $p(1/4) = 0$, $\varphi(1, 0) + \varphi(0, 1) = p(1) + f(1)$.

Отметим, что уравнение (1) в области Ω_0 принадлежит эллиптическому типу, а в Ω_{11} и Ω_{12} – гиперболическому типу, причем отрезок OA является линией изменения типа.

Очевидно, что (3) и (5') являются условиями типа условия Франкля, а условие (4) связывает значения искомой функции в точках, лежащих на дугах A^*D и DA характеристики $\sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1$ уравнения (1), где $A(1, 0)$, $A^*(0, -1)$, $D(1/4; 1/4)$.

Пусть $u(x, y)$ решение задачи A_1 . Введём обозначения:

$$\tau_{11}(t) = u(t, 0), \quad \tau_{12}(-t) = u(0, -t), \quad \tau_{21}(t) = u(0, t), \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$\nu_{11}^+(t) = \lim_{y \rightarrow +0} y^\alpha u_y(t, y), \quad \nu_{11}(t) = \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^\alpha u_y(t, y), \quad t \in (0, 1);$$

$$\nu_{21}^+(t) = \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha u_x(x, t), \quad \nu_{12}(-t) = \lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha u_x(x, -t), \quad t \in (0, 1);$$

$$u_{1j}(x, y) = u(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{1j}, \quad j = \overline{1, 2}.$$

Обобщенные решения $u_{1j}(x, y) \in R_2$, уравнения (1) в областях Ω_{11} и Ω_{12} представимы в виде[2]

$$u_{1j}(x, y) = \int_0^\xi \sigma^{-\beta} T_{1j}(z) dt + \frac{1}{2\cos(\beta\pi)} \int_\xi^\eta (-\sigma)^{-\beta} N_{1j}(z) dz, \quad (7)$$

где $\beta = \alpha - (1/2)$, $\xi = \left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right|^2$, $\eta = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \right)^2$,

$$T_{1j}(z) = \text{sign}(z) \frac{\chi_1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \int_0^z (z-s)^{2\beta} [\tau_{1j}(s) - \tau_{1j}(0)] ds,$$

$N_{1j}(z) = T_{1j}(z) + (-1)^j \chi |t|^{\alpha-1} \nu_{1j}^-(z)$, $z = (-1)^{j+1} t$, $j = \overline{1, 2}$;
 $\sigma = (\xi - t)(\eta - t)$, $\chi = 2^{4\beta-1} (1 - \alpha)^{-1} \cos(\beta\pi) \Gamma(2 - 2\beta) \Gamma^{-2}(1 - \beta)$,
 $\chi_1 = \sin(\beta\pi) (\beta\pi)^{-1}$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Кроме того, в силу $u(x, y) \in C(\overline{\Omega})$, справедливо равенство

$$\lim_{y \rightarrow -x+0} u_{11}(x, y) = \lim_{y \rightarrow -x-0} u_{12}(x, y), \quad 0 < x < (1/4). \quad (8)$$

Подставляя функции $u_{1j}(x, y)$, определяемые формулами (7), в равенство(8), после некоторых преобразований, получим

$$T_{11}(t) - T_{12}(-t) = \chi t^{\alpha-1} [\nu_{11}(t) + \nu_{12}(-t)], \quad 0 < t < 1. \quad (9)$$

Далее, с помощью формул (7) находим $u_{11} [x, -(1 - \sqrt{x})^2]$, $u_{12} [(1 - \sqrt{x})^2, -x]$ и подставляем в условие (5). Затем, используя равенство(9), условие (3) и считая $\tau_{1j}(0) = 0$, имеем

$$\tau_{11}(t) + \tau_{21}(t) = f(t) + \Phi_1(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (10)$$

где $\Phi_1(t) = \chi_1 \int_0^t \frac{(1-\zeta)^\beta}{(t-\zeta)^{2\beta}} d\zeta \frac{d^2}{d\zeta^2} \int_0^\zeta (\zeta-s)^\beta p \left[\frac{(1+\sqrt{s})^2}{4} \right] ds.$

Равенство (10) является функциональным соотношением между $\tau_{11}(t)$ и $\tau_{21}(t)$, получаемым из того условия, что решение задачи A_1 должно удовлетворить условиям (3)-(5) и (8).

Этим задача A_1 эквивалентно сведена к следующей задаче \tilde{A}_1 : найти регулярное в области Ω_0 решение $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}_0)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2),(5) и (10).

Аналогичным методом, задача A_2 эквивалентно сведется к задаче \tilde{A}_2 , об определении регулярного в области Ω_0 решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2),(10) и

$$\nu_{21}^+(x) - \nu_{11}^+(x) = \Phi_2(x),$$

где $\Phi_2(t) = g(x) + \frac{\chi_1}{\chi} \frac{(1-t)^\beta}{t^{\alpha-1}} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t (t-s)^\beta p \left[\frac{(1+\sqrt{s})^2}{4} \right] ds.$

Единственность решения задач A_1 (\tilde{A}_1) и A_2 (\tilde{A}_2) доказывается методом принципа экстремума, а существование-методом интегральных уравнений.

Теорема. Пусть заданные функции удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $\varphi(x, y) = [x(1-x)]^\varepsilon \tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{\varphi}(x) \in C[0, 1], \quad \varepsilon > 1 + \alpha;$
- 2) $f(t) = A [t^{-2\beta} - 1] + \tilde{f}(t), \quad \tilde{f}(0) = A, \quad \tilde{f}(t) \in C^{(2,\gamma)}[0, 1], \quad \gamma > 0;$
- 3) $p(t) = (t - 1/4)^{\gamma_1} (1-t)^{\gamma_2} \tilde{p}(t), \quad \tilde{p}(t) \in C[1/4, 1], \quad \gamma_1 \geq 2 - 4\beta, \quad \gamma_2 \geq 4;$
- 4) $g(t) = t^{1-\alpha} \tilde{g}(t), \quad \tilde{g}(t) \in C[0, 1] \cap L(0, 1),$

где

$$A = \frac{4^{2\beta} \beta \Gamma^2(\beta)}{2\pi \Gamma(2\beta)} \int_0^1 \tilde{\varphi}(t) [t(1-t)]^{\beta+\varepsilon-(1/2)} dt.$$

Тогда задача A_1 (A_2) имеет единственное решение.

Литература

1. *Исамухамедов С.С., Орамов Ж.* О краевых задачах для уравнения смешанного типа второго рода с негладкой линией вырождения // Дифференциальные уравнения. -Минск, **18:2** (1982), 324-334
2. *Urinov A. K., Farmonov S. R.* An analog of the Frankl problem for a second-kind mixed-type equation. // Journal of Mathematical Sciences, **194:5** (2013), 573–583
3. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. —М.: Наука, 1985.

ПРИНЦИП СУБОРДИНАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В.Е. Федоров, Н.В. Филин
kar@csu.ru, nikolay_filin@inbox.ru

УДК 517.95

Доказан принцип субординации для одного класса уравнений с пропорциональными распределенными дробными производными в банаховых пространствах.

Ключевые слова: дробная производная Герасимова — Капуто, распределенная производная, разрешающее семейство операторов, принцип субординации, функция типа Райта.

Subordination principle for a class of equations of equations with a distributed derivative

The principle of subordination is proved for a class of equations with proportional distributed fractional derivatives in Banach spaces.

Keywords: Gerasimov–Caputo fractional derivative, distributed derivative, resolving family of operators, subordination principle, Wright type function.

Пусть $c_1 > c_2 > 0$, рассмотрим два уравнения с распределенной производной Герасимова — Капуто:

$$\int_0^{c_1} D^\alpha z(t) d\mu_1(\alpha) = Az(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$\int_0^{c_2} D^\alpha z(t) d\mu_2(\alpha) = Az(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

где A — линейный замкнутый оператор с плотной областью определения в банаховом пространстве \mathcal{Z} , $\mu_i \in BV(0, c_i]$, $i = 1, 2$ (функции ограниченной вариации). Пусть $\gamma := c_2/c_1 \in (0, 1)$, $d\mu_2(\beta) = d\mu_1(\beta/\gamma)$ при $\beta \in (0, c_2)$, тогда при $|\arg \lambda| < \pi$

$$W_1(\lambda^\gamma) := \int_0^{c_1} \lambda^{\gamma\alpha} d\mu_1(\alpha) = \int_0^{c_2} \lambda^\beta d\mu_1(\beta/\gamma) = \int_0^{c_2} \lambda^\beta d\mu_2(\beta) := W_2(\lambda).$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области №24-11-20002.

Федоров Владимир Евгеньевич, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой математического анализа, Челябинский государственный университет (Челябинск, Россия); Vladimir Fedorov (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Филин Николай Владимирович, ассистент, Челябинский государственный университет (Челябинск, Россия); Nikolay Filin (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathcal{C}_W(\omega)$, если при некоторых $K, \omega \geq 0$ выполняются условия:

- (i) if $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, then $W(\lambda) \in \rho(A)$;
- (ii) if $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, then for all $n \in \mathbb{N}_0$

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\frac{W(\lambda)}{\lambda} (W(\lambda)I - A)^{-1} \right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{Kn!}{(\lambda - \omega)^{n+1}}.$$

Если $A \in \mathcal{C}_{W_i}(\omega)$ при $\omega \geq 0$, то разрешающее семейство операторов уравнения (i) обозначим $\{S_i(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$, $i = 1, 2$.

Определим класс $\mathcal{A}_W(\theta_0, \omega_0)$ при $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $\omega_0 \geq 0$ как множество операторов A , таких, что:

(i) при любом $\lambda \in S_{\theta_0, \omega_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - \omega_0)| < \theta_0, \mu \neq \omega_0\}$ имеем $W(\lambda) \in \rho(A)$;

(ii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $\omega > \omega_0$ существует такое $K(\theta, \omega) > 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta, \omega}$ $\|(W(\lambda)I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq |W(\lambda)|^{-1} K(\theta, \omega)$.

Теорема 1. Пусть $2 > c_1 > c_2 > 0$, $\gamma = c_2/c_1 \in (0, 1)$, $d\mu_2(\beta) = d\mu_1(\beta/\gamma)$ при $\beta \in (0, c_2)$, $\omega \geq 0$, $A \in \mathcal{C}_{W_1}(\omega)$. Тогда $A \in \mathcal{A}_{W_2}(\theta_0, \omega^{1/\gamma})$, $\theta_0 = \min \left\{ \pi, \frac{\pi}{2\gamma} \right\}$, и при $d \in (0, 1)$ для всех $z \in \mathcal{Z}$,

$$S_2(t)z = \int_0^\infty t^{-\gamma} \Phi_\gamma(st^{-\gamma}) S_1(s)z ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(1-\gamma\sigma)} t^{-\gamma\sigma} \mathfrak{M}[S_1(t)z](\sigma) d\sigma.$$

Здесь Φ_γ — функция типа Райта, \mathfrak{M} — преобразование Меллина.

Принцип субординации для различных классов уравнений можно найти в [1, 2].

Литература

1. Prüss J. Evolutionary Integral Equations and Applications. — Basel: Birkhauser-Verlag, 1993.

2. Bazhlekova E.G. Subordination principle for fractional evolution equations // Fractional Calculus & Applied Analysis, **3:3** (2000), 213-230.

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ С
НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ
ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО
УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА
ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Б.Б. Халхаджаев, С.З. Джамалов
xalxadjajev@yandex.ru, siroj63@mail.ru.

УДК 517.956.6

В данной работе предлагается новый метод для исследования однозначной разрешимости обратных задач для уравнения смешанного типа второго рода, четвертого порядка в трехмерном параллелепипеде.

Ключевые слова: методы ε -регуляризации и сжимающие отображения.

This paper proposes a new method for studying the unique solvability of inverse problems for a mixed type equation of the second kind, fourth order in a three-dimensional parallelepiped.

Keywords: ε -regularization and contraction mapping methods

В трехмерном параллелепипеде

$$G = (0, 1) \times (0, T) \times (0, \ell) = Q \times (0, \ell) = \\ = \{(x, t); 0 < x < 1; 0 < y < \ell; 0 < t < T < +\infty\}$$

рассмотрим уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка

$$Lu = Pu - Mu + Nu = \psi(x, t, y). \quad (1)$$

Здесь $Pu = \sum_{i=0}^4 K_i(x, t) D_i^i u$; $Mu = au_{xxxx} - bu_{xttt} - cu_{xx}$; $Nu = u_{yyyy}$, где $K_4(x, t) = K_4(t)$, $K_4(0) = K_4(T) = 0$; $a, b, c - const > 0$, $D_i^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4$), $D_0^0 u = u$.

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $K_4(t)$ по переменной t внутри отрезка $[0, T]$ не налагается никаких ограничений [1,2].

В дальнейшем будем предполагать, что $\psi(x, t, y) = g(x, t, y) + h(x, t) \cdot f(x, t, y)$, где $g(x, t, y)$ и $f(x, t, y)$ – заданные функции, а функция $h(x, t)$ подлежит определению.

Халхаджаев Бахтиёр Батырович, аспирант, ИМ им. В.И. Романовского АН Р.Уз. (Ташкент, Узбекистан); Bakhtiyor Khalkhadzhayev (V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

Джамалов Сирожиддин Зухриддинович, д.ф.м.н., профессор, ИМ им. В.И. Романовского АН Р.Уз. (Ташкент, Узбекистан); Sirojiddin Dzhamalov (V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan)

Линейная обратная задача. Найти функции $\{u(x, t, y), h(x, t)\}$, удовлетворяющие уравнению (1) в области G , такие, что функция $u(x, t, y)$ удовлетворяет следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}; \quad p = 0, 1, 2 \quad (2)$$

$$D_x^q u|_{x=0} = D_x^q u|_{x=1}; \quad q = 0, 1, 2, 3 \quad (3)$$

$$D_y^q u|_{y=0} = D_y^q u|_{y=\ell}; \quad q = 0, 1, 2, 3 \quad (4)$$

и дополнительному условию

$$u(x, t, \ell_0) = \varphi_0(x, t), \quad \text{где } 0 < \ell_0 < \ell < +\infty \quad (5)$$

и вместе с функцией $h(x, t)$ принадлежит классу

$$U = \{(u, h) \mid u \in W_2^{4,3}(G); h \in W_2^4(Q)\}.$$

Здесь $W_2^{4,3}(G)$ анизотропные пространства Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_2^{4,3}(G)}^2 = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \mu_k^4)^3 \|u_k(x, t)\|_{W_2^4(Q)}^2 \quad (6)$$

а норма в пространстве Соболева $W_2^4(Q)$ определяется следующим образом

$$\|\vartheta\|_{W_2^4(Q)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq 4} \int_Q |D^\alpha \vartheta|^2 dx dt,$$

где α — это мультииндекс, D^α — есть обобщенная производная по переменным x и t .

Литература

1. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа // Монография. Ташкент, **176**: (2021)
2. Врагов В.Н. О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // ПМатематический анализ и смежные вопросы математики. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. — 5-13.

О РАСХОДИМОСТИ НОРМАЛИЗУЮЩИХ РЯДОВ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК БИНАРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е.А. Черепанова, gloomson13@mail.ru

УДК 517.518

Для вырожденных бинарных дифференциальных уравнений предъявлен пример формальной нормальной формы, для которой нормализующие ряды, как правило, расходятся.

Ключевые слова: бинарные дифференциальные уравнения, нормализующие ряды, нормальные формы.

On the divergence of normalizing series for degenerate singular points of binary differential equations

For degenerate binary differential equations, an example of a formal normal form is presented for which the normalizing series, as a rule, diverge.

Keywords: binary differential equations, normalizing series, normal forms.

Бинарное дифференциальное уравнение — это неявное дифференциальное уравнение вида

$$ap^2 + 2bp + c = 0, \quad p = \frac{dy}{dx} \quad (1)$$

с коэффициентами $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y)$, аналитическими в окрестности точки $(0, 0)$. В случае

$$a(0, 0) = b(0, 0) = c(0, 0) = 0 \quad (1)$$

точку $(0, 0)$ будем называть *вырожденной особой точкой* бинарного дифференциального уравнения (1). Задача о классификации вырожденных особых точек бинарных дифференциальных уравнений поставлена в [1]; там же получена (достаточно простая) их топологическая классификация.

Аналитическая (и даже формальная) классификация бинарных дифференциальных уравнений (1), (2) намного сложнее. К настоящему времени получены следующие результаты. Жесткость: для типичных бинарных дифференциальных уравнений (1), (2), из формальной эквивалентности следует аналитическая. Аналогичное утверждение о жесткости получено в [2] и при некоторых нарушениях условий типичности. Однако, явление жесткости не универсально.

Черепанова Елена Анатольевна, старший преподаватель, ЧелГУ (Челябинск, Россия); Elena Cherepanova (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Теорема 1. *Для бинарных дифференциальных уравнений, формально эквивалентных модели*

$$(x + xy)p^2 + 2xp + 2x + y = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}$$

нормализующие ряды, как правило, расходятся.

Литература

1. *Bruce J.W., Tari F.* On binary differential equations // Nonlinearity, **8:2** (1995), 255-271
2. *Voronin S.M., Cherepanova E.A.* Linearizability of Degenerate Singular Points of Binary Differential Equations // Journal of Mathematical Sciences, **269:2** (2023), 143-164

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА С СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ЛИНИЕЙ

П.Л. Шабалин
pavel.shabalin@mail.ru

УДК 517.54

Для обобщенной системы Коши–Римана, коэффициент которой имеет особенности высокого порядка на мнимой оси получена формула общего решения и рассмотрена задача Римана с краевым условием на разрезе по вещественной полуоси.

Ключевые слова: обобщенные аналитические функции, сингулярная линия, краевая задача Римана.

Riemann boundary value problem for a generalized Cauchy-Riemann system with a supersingular line

We obtain a formula for the general solution of a generalized Cauchy-Riemann system with high-order singularities on the imaginary axis. For solutions to this system, consider the Riemann problem with a boundary condition on a section along a real semi-axis.

Keywords: generalized analytical functions, singular line, Riemann boundary value problem.

В плоскости \mathbb{C} комплексного переменного $z = x + iy$ рассмотрим область D , границей которой служит действительная положительная полуось Γ , и мнимую ось $L = \{z : \Re z = 0\}$. В области D рассмотрим частный случай обобщенной системы Коши-Римана с сверхсингулярной линией L :

$$\partial_{\bar{z}}U - A(z)U = F(z), \quad A(z) = \frac{(\bar{z} + z)a(z)}{|\bar{z} + z|^{\alpha+1}}, \quad 1 \leq \alpha < 2,$$

где $a(z), F(z) \in C(\bar{D} \setminus L)$. Следуя методу из [1] (развитие этого метода в последующих работах А.Б. Расулова (см., например, [2])), мы будем предполагать, что для $A(z)$ существует такая аналитическая в D , ограниченная в \bar{D} функция $a_0(z)$, что

$$A_0(z) := \frac{(\bar{z} + z)a(z) - a_0(z)}{|\bar{z} + z|^{\alpha+1}} \in L_{p,p'}(D), \quad p > 2, \quad 1 < p' < 2.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-21-00212).
Шабалин Павел Леонидович, д.ф.-м.н., доцент, КГАСУ (Казань, Россия); Pavel Shabalin (Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia)

В отличие от работ [1], [2], где $a_0(z) \in C(\overline{D})$, мы будем считать, что эта функция имеет нарушение непрерывности в точках $z = 0$, $z = \infty$. При этом, потребуем выполнения условий

$$|a_0(z) - a_0(-\bar{z})| \leq K(|z + \bar{z}|^\beta), \quad x \rightarrow 0, \quad 0 < \beta, \quad y \neq 0;$$

$$a_0(z) = O(|z|), \quad z \rightarrow 0, \quad y \neq 0;$$

и если $\alpha = 1$, то

$$a_0(z) = O(|z|^{-\gamma}), \quad z \rightarrow \infty, \quad \gamma > 0, \quad y \neq 0.$$

Граничные значения функции $a_0(z)$, на разрезе по Γ , т.е. функции $a_0^+(x)$, $a_0^-(x)$, будем считать непрерывными по Гёльдеру на интервале $(0, +\infty)$. При сделанных предположениях получена формула общего решения указанной обобщенной системы Коши–Римана.

Для решений $U(z)$ этой системы в области D исследуем задачу Римана с краевым условием на луче Γ

$$U^+(t) = G(t)U^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma,$$

с непрерывными по Гельдеру всюду на Γ , включая бесконечно удаленную точку, функциями $\ln G(t)$ и $g(t)$. В последней формуле $U^+(t)$, $U^-(t)$ – предельные значения функции $U(z)$ при $z \rightarrow t$ слева и справа. Выведена формула общего решения краевой задачи и в терминах характеристик $b_{0\pm}^\pm := \lim_{x \rightarrow 0\pm} a_0^\pm(x)$, $b_{\pm\infty}^\pm := \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0^\pm(x)$ доказаны теоремы существования и единственности решений в классе ограниченных в области D обобщенных аналитических функций.

Литература

1. Расулов А.Б., Солдатов А.П. Краевая задача для обобщённого уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференциальные уравнения, **52:3** (2016), 637–650.

2. Расулов А.Б., Якивич Н.В. Задача линейного сопряжения для уравнения Коши–Римана с сильной особенностью в младшем коэффициенте в области с кусочно гладкой границей // Итоги науки и техн. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **231** (2024), 115–123.

ФИЛЬТРАЦИЯ ФЛЮИДА В ТРЕЩИНЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

А.А. Шамматова, А.И. Исламова, Э.В. Галиакбарова,
stasya_7@mail.ru, bashalisa@yandex.ru,
emi.galiakbar@yandex.ru

УДК 532.59

Изучается фильтрация флюида в трещине, образованной путем гидроразрыва пласта, параллельной оси вертикальной скважины. Рассматривается вертикальная симметричная трещина конечной длины.

Ключевые слова: ГРП, интегро-дифференциальное уравнение, динамика давления, нефтяная скважина, дебит жидкости.

Fluid filtration in finite length fracture

Fluid filtration in a fracture formed by hydraulic fracturing parallel to the axis of a vertical well is studied. Vertical symmetric fractures of finite length are considered.

Keywords: hydraulic fracturing, integro-differential equation, pressure dynamics, oil well, fluid flow rate.

Трещина ГРП, рассматриваемая в работе, представляет из себя область в нефтяном пласте в виде очень узкого параллелепипеда, длина которого существенно больше его высоты, составляющей 10 – 30 метров, ширина трещины 1 – 5 миллиметров. Расположена трещина симметрично относительно оси нефтяной скважины. В случае нагнетательной скважины из скважины в трещину поступает жидкость, которая затем перетекает в пласт. При этом предполагается, что жидкость в основном течет перпендикулярно стенкам трещины. Кроме того предполагается, что в точках трещины, расположенных на одной вертикали, давление одинаково. Это допущение позволяет нам использовать две пространственные координаты вместо трех.

В работе решается интегро-дифференциальное уравнение [2-3], описывающее фильтрацию флюида в трещине:

$$\frac{\partial^2 \Delta P_f}{\partial x^2} = \chi_f \int_0^t \frac{\partial \Delta P_f}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\sqrt{\pi(t-\tau)}},$$

Шамматова Анастасия Анатольевна, старший преподаватель, УГНТУ (Уфа, Россия); Anastasia Shammatova (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

Исламова Алиса Ильдаровна, СНЭМА - СЕРВИС (Уфа, Россия); Alisa Islamova (Ufa, Russia)

Галиакбарова Эмилия Вильевна, д.ф.-м.н., УГНТУ (Уфа, Россия); Emiliya Galiakbarova (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

при граничных условиях $\Delta P_f|_{\substack{t \leq 0 \\ x \geq 0}} = 0$, $\frac{\partial \Delta P_f}{\partial x}|_{x=l} = 0$, $\Delta P_f|_{\substack{t > 0 \\ x=0}} = \Delta P_{f(w)} = const$ – отклонение давления от первоначального значения на скважине. Здесь $P_f = P_f(x, t)$ – давление в трещине на расстоянии x от стенки скважины, $0 \leq x < l$, $t > 0$; $\Delta P_f = P_f - P_0$ – отклонение давления от первоначального пластового давления P_0 , $\chi_f = \frac{2m_p \sqrt{\kappa_p}}{d_f m_f \kappa_f}$, где m_p , m_f – пористости, κ_p , κ_f – коэффициенты пьезопроводности. Нижние индексы p и f соответствуют значениям параметров в пласте и трещине ГРП.

Решение, описывающее динамику давления в трещине ГРП, получаем в следующем виде.

$$\Delta P_f(t, x) = \Delta P_{f(w)} \cdot \left(1 - \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \Phi \cdot \frac{e^{-\rho t}}{\rho} d\rho \right),$$

где

$$\Phi = \frac{\operatorname{ch} A \cdot \cos A \cdot \operatorname{sh} B \cdot \sin B - \operatorname{sh} A \cdot \sin A \cdot \operatorname{ch} B \cdot \cos B}{\operatorname{ch}^2 B + \cos^2 B - 1}$$

$$A = (l - x) \cdot \sqrt{\chi_f} \cdot \rho^{1/4} / \sqrt{2}, \quad B = l \cdot \sqrt{\chi_f} \cdot \rho^{1/4} / \sqrt{2}.$$

С помощью найденного решения получено изменение дебита скважины и изучено влияние коллекторских характеристик пласта и трещины на динамику давления в трещине ГРП.

Литература

1. *Хабидуллин И.Л., Хисамов А.А.* Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва // Известия РАН. Механика жидкости и газа, – 2019, № 5. – С. 6–14.
2. *Shagapov V.S., Bashmakov R.A., Fokeeva N.O., Shammatova A.A.* Evolution of Filtration Pressure Waves in a Hydraulic Fracture during Transient-Well-Operation Modes // Mathematics 2023, 11, 98. <https://doi.org/10.3390/math11010098>
3. *Нагаева Э. М., Шагапов В. Ш.* Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте // Прикладная математика и механика. – 2017. – Т. 81, № 3. – С. 319 – 329.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Ф.М. Шамсудинов, Д. Иззатуллоев, М.Ш. Ганиев
faizullo100@yahoo.com

УДК 517.955

В работе рассматривается система трех дифференциальных уравнений первого порядка с тремя независимыми переменными, причём эти уравнения связаны в силу неизвестной функции. Для рассматриваемой системы получены представления многообразия решений при помощи одной произвольной постоянной. Изучена свойства полученное решение и рассмотрена задача с начальными данными K_1 .

Ключевые слова: переопределённая система, многообразия решений, прямоугольник, сингулярный коэффициент, свойства решений.

INTEGRAL REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS FOR ONE OVERDETERMINED SYSTEM OF FIRST-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A SINGULAR POINT

The paper considers a system of three first-order differential equations with three independent variables, where these equations are related by virtue of an unknown function. For the system under consideration, representations of the manifold of solutions are obtained using one arbitrary constant. The properties of the obtained solution are studied and the problem with initial data K_1 is considered.

Keywords: overdetermined system, manifold solutions, rectangle, singular coefficient, properties of solutions.

Через области Ω обозначим параллелепипед.

$$D = \{(x, y, z), 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}.$$

Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич, д.ф.-м.н., профессор, Бох.ГУ (Бохтар, Республика Таджикистан); Faizullo Shamsudinov (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

Иззатуллоев Дости, к.ф.-м.н., Бох.ГУ (Бохтар, Республика Таджикистан); Dosti Izzatulloev (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

Ганиев Муродбек, к.ф.-м.н., Бох.ГУ (Бохтар, Республика Таджикистан); Murodbek Ganiev (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

соответственно обозначим:

$$\Omega_{11} = \{x = 0, 0 < y < b, 0 < z < c\}, \quad \Omega_{31} = \{y = 0, 0 < x < a, 0 < z < c\},$$

$$\Omega_{31} = \{y = 0, 0 < x < a, 0 < y < b\}, \quad \Gamma_{11} = \{y = 0, z = 0, 0 < x < a\},$$

$$\Gamma_{21} = \{x = 0, z = 0, 0 < y < b\}, \quad \Gamma_{31} = \{x = 0, y = 0, 0 < z < c\},$$

В области Ω рассмотрим следующую линейную переопределенную систему дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a(x, y, z)}{r^\alpha} u = \frac{f_1(x, y, z)}{r^\alpha}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{b(x, y, z)}{r^\beta} u = \frac{f_2(x, y, z)}{r^\beta}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{c(x, y, z)}{r^\gamma} u = \frac{f_3(x, y, z)}{r^\gamma}, \end{cases} \quad (1)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$ $f_j(x, y, z)$, ($j = 1, 2, 3$) – заданные функции в области $\bar{\Omega}$.

Проблема исследованию дифференциальных уравнений и переопределённых систем с сингулярными коэффициентами посвящены работы [1] – [6].

В настоящей работе на основе способа разработанного в [2] и [3] получено представление решений системы уравнений (1) при помощи одной произвольной постоянной.

Исследуется система уравнений (1) когда третье уравнение является основным.

Теорема 1. Пусть системе уравнений (1) $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 2$ коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям

1. $a(x, y, z) \in C_z^1(\Omega)$, $c_2(x, y, z) \in C_x^1(\Omega)$,
 $c(x, y, z) \in C_y^1(\Omega)$, $b(x, y, z) \in C_z^1(\Omega)$
 $a(x, y, 0) \in C_y^1(\Omega_{21})$, $b(x, y, 0) \in C_x^1(\Omega_{21})$
 $f_1(x, y, z) \in C_z^1(\Omega)$, $f_3(x, y, z) \in C_x^1(\Omega)$,
 $f_2(x, y, z) \in C_z^1(\Omega)$, $f_3(x, y, z) \in C_y^1(\Omega)$
 $f_2(x, y, 0) \in C_x^1(\Omega_{21})$, $f_1(x, y, 0) \in C_y^1(\Omega_{21})$;
2. $a(0, 0, 0) < 0$, $c(0, 0, 0) < 0$, $b(0, 0, 0) < 0$;
3. $|c(x, y, z) - c(0, 0, 0)| \leq H_1 \rho_1^{\gamma_1}$, $H_1 = const$, $\gamma_2 > 0$,
 $|a(x, y, z) - a(0, 0, 0)| \leq H_2 r^{\lambda_2}$, $H_2 = const$, $0 < \gamma_2 < 1$,
 $|b(0, y, 0) - b(0, 0, 0)| \leq H_3 z^{\gamma_3}$, $H_3 = const$, $\gamma_3 > 1$;
4. а) $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{a(x, y, z)}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c(x, y, z)}{r^2} \right)$ в Ω ,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c(x, y, z)}{r^2} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b(x, y, z)}{r^2} \right) \in \Omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(x, y, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b(x, y, z)}{r^2} \right) \in \Omega_{21};$$

$$b) \quad r^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_1(x, y, z)}{r} \right) + c(x, y, z) f_3(x, y, z) = r^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_1(x, y, z)}{r} \right) + a(x, y, z) f_3(x, y, z),$$

$$r^4 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_2(x, y, z)}{r} \right) + c(x, y, z) f_2(x, y, z) = r^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_1(x, y, z)}{r} \right) + a(x, y, z) f_3(x, y, z),$$

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_2(x, y, z)}{r} \right) + a(x, y, 0) f_2(x, y, 0) = \\ & = (x^2 + y^2)(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_1(x, y, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + b(x, y, 0) f_1(x, y, 0), \in \Omega_{21}; \end{aligned}$$

5. $f_1(x, y, z) =$ при $a(0, 0, 0) < 0$ с асимптотическим поведением

$$f_1(x, y, z) = o(r^{\gamma_1}), \quad \gamma_1 > |a(0, 0, 0) + 1|, \quad r > 0,$$

$$f_2(x, y, 0) = o(r^{\beta_1}), \quad \beta_1 > |b(0, 0, 0)|, \quad r > 0.$$

Тогда любое решение системы (1) из класса $C^1(D)$ представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \exp \left[-\omega_c^2(x, y, z) - \frac{c(0, 0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \times \\ & \times \left(\tau(x, y) + \int_0^z \frac{f_3(x, y, \zeta)}{x^2 + y^2 + \zeta^2} \exp \left[\omega_c^2(x, y, \zeta) + \frac{c(0, 0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \arctan \frac{\zeta}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] d\zeta \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(x, y) = & \exp \left[-\omega_a^1(x, y, 0) - a(0, 0, 0) \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \right] \times \\ & \times \left(\mu_4(y) + \int_0^x \frac{f_1(t, y, 0)}{\sqrt{t^2 + y^2}} \exp \left[\omega_a^1(t, y, 0) + a(0, 0, 0) \ln \frac{t + \sqrt{t^2 + y^2}}{y} \right] dt \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_4(y) = & \exp \left[-\omega_b^2(0, y, 0) - \frac{b(0, 0, 0)}{y} \right] \times \\ & \times \left(C_5 + \int_0^y \frac{f_2(0, s, 0)}{s^2} \exp \left[\omega_b^2(0, s, 0) + \frac{b(0, 0, 0)}{s} \right] ds \right) \equiv N_1(C_5, f_2(0, y, 0)), \end{aligned}$$

где

$$\omega_c^2(x, y, z) = \int_0^z \frac{c(x, y, \zeta) - c(0, 0, 0)}{x^2 + y^2 + \zeta^2} ds,$$

$$\omega_a^1(x, y, 0) = \int_0^x \frac{c(t, y, 0) - a(0, 0, 0)}{\sqrt{t^2 + y^2}} dt,$$

$$\omega_b^2(0, y, 0) = \int_0^y \frac{b(0, \zeta, 0) - b(0, 0, 0)}{s^2} d\zeta.$$

C_5 - произвольная постоянная.

Полученное решение обладает свойством

1⁰ Если $z \rightarrow 0$, то

$$\lim_{z \rightarrow 0} u(x, y, z) = \tau(x, y).$$

2⁰ Если $z \rightarrow 0$, и $x \rightarrow 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{z \rightarrow 0} u(x, y, z) \right\} = \mu_4(y).$$

3⁰ Если $z \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ и $y \rightarrow 0$ то

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{z \rightarrow 0} u(x, y, z) \right) \right\} = O \left(\exp \left[-\frac{b(0, 0, 0)}{y} \right] \right).$$

4⁰

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp \left[\frac{b(0, 0, 0)}{y} \right] \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{z \rightarrow 0} u(x, y, z) \right) \right\} = C_5.$$

Задача K_1 . Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C^1(\Omega)$ по начальному условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \exp \left[-\frac{b(0, 0, 0)}{y} \right] \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{z \rightarrow 0} u(x, y, z) \right) \right\} = p_1,$$

где p_1 - заданная известная постоянная.

Литература

1. Раджабов Н. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. - Душанбе изд. ТГУ, 1992. - 236с.

2. Раджабов Н. Иззатуллоев Д. Вестник Таджикского Национального университета, 2010, №3(59), стр. 3-7.

3. Шамсудинов Ф. М. Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сильной особенностью // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.- 2014.-Т.16, №1. - С. 40-46.

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ОЦЕНКИ ПЕРЕРЕГУЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЯЕМОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В.А. Шаршуков
st044546@student.spbu.ru

УДК 517.929, 517.972

В данной работе представлен новый подход к построению оценки перерегулирования экспоненциально устойчивого линейного дифференциального уравнения с постоянным запаздыванием, основанный на минимизации функционала полного типа на заданном классе начальных функций.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения запаздывающего типа, вариационное исчисление, выпуклый анализ.

A Variational Approach to Overshoot Estimation of a Dynamic Control System

In this paper, we provide a new approach to constructing an overshoot estimate for an exponentially stable linear differential equation with constant delay, based on minimizing a complete type functional on a certain class of initial functions.

Keywords: retarded differential equations, variational calculus, convex analysis.

Многие реальные процессы и явления описываются дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом [1; 2]. Для ряда приложений актуальным оказывается вопрос качественного поведения моделируемой системы при внешнем воздействии. В частности, склонность системы к колебаниям может быть охарактеризована перерегулированием [2].

Существуют различные подходы к построению оценки перерегулирования. К примеру, весьма распространены методы, основанные на решении линейных матричных неравенств (например, [3; 4]). Основное их преимущество заключается в том, что задача построения экспоненциальной оценки, сформулированная в терминах матричных неравенств, может быть эффективно решена с использованием выпуклого программирования.

В настоящей работе рассматривается скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = a_0x(t) + a_1x(t-h), \quad (1)$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10099, <https://rscf.ru/project/23-71-10099/>.

Шаршуков Владислав Алексеевич, студент, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия); Vladislav Sharshukov (St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia)

где $h > 0, a_1 \neq 0$, причём в качестве класса начальных функций φ положен класс непрерывных на отрезке $[-h, 0]$ функций с равномерной нормой.

Будем считать уравнение (1) экспоненциально устойчивым: существуют $\gamma \geq 1$ и $\sigma > 0$ такие, что для любого решения $x(t, \varphi)$ справедлива оценка

$$|x(t, \varphi)| \leq \gamma e^{-\sigma t} \|\varphi\|_h, \quad t \geq 0.$$

Отметим, что постоянную γ называют перерегулированием.

Из теории функционалов Ляпунова-Красовского известно [5], что для функционала полного типа

$$\begin{aligned} v[\varphi] = & u(0)\varphi^2(0) + 2a_1\varphi(0) \int_{-h}^0 u(-h-\theta)\varphi(\theta)d\theta + \\ & + a_1^2 \int_{-h}^0 \varphi(\theta_1) \left[\int_{-h}^0 u(\theta_1-\theta_2)\varphi(\theta_2)d\theta_2 \right] d\theta_1 + \\ & + \int_{-h}^0 [w_1 + (h+\theta)w_2] \varphi^2(\theta)d\theta \end{aligned}$$

справедлива оценка

$$\alpha_1\varphi^2(0) \leq v[\varphi] \leq \alpha_2\|\varphi(\theta)\|_h^2, \quad \varphi \in C([-h, 0]), \quad (2)$$

где $u(\tau)$ — функция Ляпунова, соответствующая числу $w = w_0 + w_1 + hw_2$, а α_1 и α_2 — некоторые положительные константы. Пользуясь полученной оценкой, перерегулирование может быть найдено как

$$\gamma = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}.$$

В настоящей работе представлен подход к нахождению постоянной α_1 , основанный на минимизации функционала полного типа $v[\varphi]$ на классе C функций, непрерывных на отрезке $[-h, 0]$ и равных единице в точке $t = 0$.

Первым результатом данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1. *Функционал $v[\varphi]$ является строго выпуклым на любом выпуклом подмножестве множества кусочно-непрерывных функций $PC([-h, 0])$.*

Из данной теоремы следует [6], что если у функционала $v[\varphi]$ на выпуклом множестве $G \subseteq PC([-h, 0])$ найдётся стационарная точка, то она единственная и в ней функционал принимает минимальное значение на G . Значит, необходимое условие экстремума $\delta v[\varphi] = 0$ является также и достаточным.

Для формулировки основного результата нам потребуется

Лемма 1. *Функция Ляпунова представима в виде*

$$u(\theta - t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 p_i(\theta)q_i(t), & \theta - t \in [0, h], \\ \sum_{i=1}^2 q_i(\theta)p_i(t), & \theta - t \in [-h, 0], \end{cases}$$

где $p_i(\theta)$ и $q_i(t)$ — линейно независимые непрерывные на \mathbb{R} функции.

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i(t) &= \frac{p_i(t)}{w_1 + (h+t)w_2}, & \tilde{q}_i(t) &= \frac{q_i(t)}{w_1 + (h+t)w_2}, & i \in \{1, 2\}, \\ A(t) &= -a_1^2 \begin{pmatrix} \tilde{p}_1(t)q_1(t) & \tilde{p}_2(t)q_1(t) & \tilde{q}_1(t)q_1(t) & \tilde{q}_2(t)q_1(t) \\ \tilde{p}_1(t)q_2(t) & \tilde{p}_2(t)q_2(t) & \tilde{q}_1(t)q_2(t) & \tilde{q}_2(t)q_2(t) \\ \tilde{p}_1(t)p_1(t) & \tilde{p}_2(t)p_1(t) & \tilde{q}_1(t)p_1(t) & \tilde{q}_2(t)p_1(t) \\ \tilde{p}_1(t)p_2(t) & \tilde{p}_2(t)p_2(t) & \tilde{q}_1(t)p_2(t) & \tilde{q}_2(t)p_2(t) \end{pmatrix}, \\ X(t) &= \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix}, & b(t) &= -a_1 u(t+h) \begin{pmatrix} \tilde{q}_1(t) \\ \tilde{q}_2(t) \\ \tilde{p}_1(t) \\ \tilde{p}_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Пусть W_0 — множество параметров w_0, w_1, w_2 , для которых существует решение системы ОДУ

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t)$$

с начальными

$$X(0) = \begin{pmatrix} r_{10} \\ r_{20} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -a_1^2 [p_1(0)r_{10} + p_2(0)r_{20}] - a_1 u(h) = w_1 + hw_2$$

и краевым

$$r_1(-h) = r_2(-h) = 0$$

условиями.

Основной результат работы может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 2. *Для любых $(w_0, w_1, w_2) \in W_0$:*

1. *существует единственная экстремаль функционала $v[\varphi]$ на классе \mathcal{C} . Эта экстремаль определена при $t \in [-h, 0]$ и задаётся формулой*

$$\mu^*(t) = a_1^2 \sum_{i=1}^2 \tilde{q}_i(t)s_i(t) - a_1^2 \sum_{i=1}^2 \tilde{p}_i(t)r_i(t) - \frac{a_1 u(-h-t)}{w_1 + (h+t)w_2}$$

и в ней функционал достигает минимума на \mathcal{C} ;

2. максимальное значение α_1 , при котором справедлива оценка (2), определяется как

$$\alpha_1^* = v[\mu^*].$$

Литература

1. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. — 4-е изд. — СПб.: Издательство “Профессия”, 2003.
3. Mondié S., Kharitonov V.L. Exponential Estimates for Retarded Time-Delay Systems: An LMI Approach // IEEE Transactions on Automatic Control, **50**:2 (2005), 268–273.
4. Xu Z., Li X., Stojanovic V. Exponential stability of nonlinear state-dependent delayed impulsive systems with applications // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, **42** (2021).
5. Kharitonov V.L. Time-Delay Systems. — Birkhauser, 2013.
6. Ванько В.И., Ермошина О.В., Кувыржин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. — 4-е изд. — М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018.

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УЖЁСТЧЕНИЕ И СМЯГЧЕНИЕ БЫСТРО ДВИЖУЩИХСЯ ПРУЖИН.

Р.А. Шарипов r-sharipov@mail.ru

УДК 514.822

Рассматриваются два идентичных пружинных маятника в виде шариков на пружинках. Один из них располагается в покоящейся системе отсчёта, а другой — в быстро движущемся звездолёте. Рассматриваются малые колебания таких маятников. Из сравнения частот таких колебаний выводятся законы релятивистского ужёстчения и смягчения пружин.

Ключевые слова: релятивистское ужёстчение, релятивистское смягчение, быстро движущиеся пружины.

Relativistic hardening and softening of moving springs.

Two identical relativistic spring-mass systems are considered, one in a frame at rest and the other in a fast moving starship. Their small oscillations are studied in the frame at rest. Comparing the frequencies of these oscillations the relativistic spring hardening and softening laws are derived.

Keywords: relativistic hardening, relativistic softening, fast moving springs.

Сначала рассмотрим колебания шариков на пружинках в направлении оси x , вдоль которой со скоростью v движется звездолёт:

$$x(t) = x_0 + a \sin(\omega t) + \dots, \quad \tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 + vt + \tilde{a} \sin(\tilde{\omega} t) + \dots \quad (1)$$

Со стороны пружин на шарики действуют силы:

$$F(t) = -k(x(t) - x_0) + \dots, \quad \tilde{F}(t) = -\tilde{k}(\tilde{x}(t) - \tilde{x}_0 - vt) + \dots \quad (2)$$

Импульсы шариков в релятивистской динамике задаются формулами

$$p(t) = \frac{m v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c_{br}^2}}}, \quad \tilde{p}(t) = \frac{m \tilde{v}(t)}{\sqrt{1 - \frac{\tilde{v}(t)^2}{c_{br}^2}}}, \quad (3)$$

где $v(t) = \dot{x}(t)$ и $\tilde{v}(t) = \dot{\tilde{x}}(t)$ — это скорости шариков. В силу нелинейной зависимости импульсов от скоростей колебания шариков ангармоничны, что проявляется в появлении малых поправок, обозначенных многоточием в формулах (1) и (2).

Шарипов Руслан Абдулович, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Ruslan Sharipov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Силы (2) являются производными по времени от импульсов (3). С учётом этого в [1] из (1), (2), (3) были выведены формулы для частот:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad \frac{\tilde{\omega}^2}{\left(\sqrt{\frac{1-v^2}{c_{\text{бр}}^2}}\right)^3} = \frac{\tilde{k}}{m}. \quad (4)$$

В формулах (1), (2), (3) и (4) через $c_{\text{бр}}$ обозначена предельная скорость для обычной барионной материи. В стандартной эйнштейновской теории относительности она совпадает со скоростью света (скоростью электромагнитных волн): $c_{\text{бр}} = c_{\text{ел}}$. В новой неэйнштейновской теории гравитации (см. [2], [3] и книгу [4]) равенство $c_{\text{бр}} = c_{\text{ел}}$ не является априори обязательным.

Известно, что время на борту быстро движущегося звездолёта течёт медленнее, чем в неподвижной системе координат. Из (1) мы знаем, что $\tilde{\omega}$ — это частота колебаний бортового маятника, наблюдаемая из неподвижной системы отсчёта. Отсюда $\tilde{\omega} < \omega$, что ведёт к формуле

$$\tilde{\omega} = \omega \sqrt{\frac{1-v^2}{c_{\text{бр}}^2}}. \quad (5)$$

Из (4) и (5) немедленно следует соотношение

$$\tilde{k} = \frac{k}{\sqrt{\frac{1-v^2}{c_{\text{бр}}^2}}}. \quad (6)$$

Формула (6) интерпретируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Всякая пружина, изготовленная из барионной материи и находящаяся на борту быстро движущегося звездолёта, для неподвижного наблюдателя выглядит более жёсткой, чем она есть, в случае если она ориентирована вдоль движения звездолёта.*

Во втором варианте, рассмотренном в [1], пружинные маятники ориентированы поперёк направления движения звездолёта:

$$x(t) = x_0, \quad \tilde{x}(t) = \tilde{x}_0 + v t, \quad (7)$$

$$y(t) = y_0 + a \sin(\omega t) + \dots, \quad \tilde{y}(t) = \tilde{y}_0 + \tilde{a} \sin(\tilde{\omega} t) + \dots \quad (8)$$

Для поперечных компонент импульсов здесь получаются формулы

$$p_y(t) = \frac{m v_y(t)}{\sqrt{\frac{1-v_x(t)^2}{c_{\text{бр}}^2}}}, \quad \tilde{p}_y(t) = \frac{m \tilde{v}_y(t)}{\sqrt{\frac{1-\tilde{v}_x(t)^2 - \tilde{v}_y(t)^2}{c_{\text{бр}}^2}}}. \quad (9)$$

В формулах (9) через $v_x(t) = \dot{x}(t)$, $\tilde{v}_x(t) = \dot{\tilde{x}}(t)$, $c_{\text{бр}}^2 v_y(t) = \dot{y}(t)$ и $\tilde{v}_y(t) = \dot{\tilde{y}}(t)$ обозначены продольные и поперечные компоненты скоростей шариков. Зависимость компонент импульсов от компонент скоростей в (9) является нелинейной. Поэтому колебания ангармоничны

и в формулах (8) проставлены многочотия. В формулах (7) многочотий нет, поскольку колебания в продольном направлении подавляются специальными направляющими стержнями (см. рисунок 3.1 в [1]).

Для поперечных компонент вектора силы пишутся формулы, аналогичные ранее написанным формулам (2):

$$F_y(t) = -k(y(t) - y_0) + \dots, \quad \tilde{F}_y(t) = -\tilde{k}(\tilde{y}(t) - \tilde{y}_0) + \dots \quad (10)$$

Компоненты сил (10) являются производными по времени от компонент импульсов (9). С учётом этого в работе [1] из (7), (8), (9) и (10) были выведены следующие формулы для частот:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \frac{\tilde{\omega}^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_{br}^2}}} = \frac{\tilde{k}}{m}. \quad (11)$$

Теперь остаётся подставить формулу (5) во вторую формулу (11) и учесть первую формулу (11). Это приводит к формуле

$$\tilde{k} = k \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_{br}^2}}. \quad (12)$$

Формула (12) интерпретируется в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Всякая пружина, изготовленная из барионной материи и находящаяся на борту быстро движущегося звездолёта, для неподвижного наблюдателя выглядит менее жёсткой, чем она есть, в случае если она ориентирована перпендикулярно направлению движения звездолёта.*

При выборе $c_{br} = c_{el}$ в формулах (6) и (12), то есть при совпадении c_{br} со скоростью света, эти формулы и соответствующие им теоремы 1 и 2 укладываются в рамки теории относительности Эйнштейна.

В новой теории гравитации из [2–4] допускается возможность существования небарионной тёмной материи, предельная скорость c_{nb} которой отлична от скорости света c_{el} . Если предположить, что в составе такой тёмной материи имеются стабильные структуры типа пружин и звездолётов, то величину c_{br} в формулах (6) и (12) можно заменить величиной c_{nb} и переформулировать теоремы 1 и 2 на случай небарионной тёмной материи.

Отметим, что предположение о возможном несовпадении $c_{nb} \neq c_{el}$ для частиц тёмной материи была высказана Луисом Гонзалезом Местресом в 1995 году в работе [5]. Допустив возможность выполнения неравенства $c_{nb} > c_{el}$, в работе [6] он назвал такие частицы супербрадионами. Через 25 лет после этого супербрадионы нашли своё место в рамках новой теории гравитации из [2–4]. Здесь для них были выведены уравнения движения в гравитационных полях.

Литература

1. Sharipov R.A., *Relativistic hardening and softening of fast moving springs*, 2024, ResearchGate, publication. № 379537924. DOI: 10.13140/RG.2.2.10991.24488
2. Sharipov R.A., *A three-dimensional brane universe in a four-dimensional spacetime with a Big Bang*, 2022, e-print viXra:2207.0173, 1–10.
3. Sharipov R.A., *3D-brane gravity without equidistance postulate*, 2023, e-print viXra:2306.0104, 1–14.
4. Шарипов Р.А., *Модель вселенной как 3D-браны*, Монография, часть I. — Инд. издатель Р.А. Шарипов, Уфа 2024. ISBN 978-5-600-04170-7
5. Gonzalez-Mestres L., *Properties of a possible class of particles able to travel faster than light*, 1995, e-print arXiv:astro-ph/9505117, 1–6
6. Gonzalez-Mestres L., *Space, time and superluminal particles*, 1997, e-print arXiv:physics/9702026, 1–18

РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА НА ПРЯМОЙ В КЛАССЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

П.С. Шишацкая, В.Е. Федоров
polinachka2003@icloud.com, kar@csu.ru

УДК 517.95

Доказана теорема о существовании и единственности решения уравнения в банаховом пространстве с ограниченным оператором при искомой функции, разрешенного относительно производной старшего порядка.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение на прямой без начальных условий, двустороннее преобразование Лапласа, экспоненциально ограниченная функция.

Solvability of a high-order equation on a real line in a class of exponentially bounded functions

A theorem is proved on the existence and uniqueness of a solution of an equation in a Banach space with a bounded operator at the unknown function, which is resolved with respect to the highest-order derivative.

Keywords: differential equation on a real line without initial conditions, two-sided Laplace transform, exponentially bounded function.

Пусть \mathcal{Z} — банахово пространство, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $C_{a,b}^l(\mathbb{R}; \mathcal{Z}) := \{x \in C^l(\mathbb{R}; \mathcal{Z}) : \text{при любом } \varepsilon > 0 \ e^{-(a+\varepsilon)t} x^{(k)}(t) \text{ ограничена при } t > 0 \text{ и } e^{-(b+\varepsilon)t} x^{(k)}(t) \text{ ограничена при } t < 0, k = 0, 1, \dots, l\}$, $C_{a,b}(\mathbb{R}; \mathcal{Z}) := C_{a,b}^0(\mathbb{R}; \mathcal{Z})$. Аналогично определим $C_{a,b}^l(\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$ при $l \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $C_{a,b}(\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, где $\mathbb{R}_- := \{c \in \mathbb{R} : c < 0\}$, $\mathbb{R}_+ := \{c \in \mathbb{R} : c > 0\}$.

При $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим уравнение

$$z^{(m)}(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

с оператором $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ (линейный ограниченный), $f \in C_{a,b}(\mathbb{R}; \mathcal{Z})$ для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Функция $z \in C^m(\mathbb{R}; \mathcal{Z}) \cap C_{a,b}^{m-1}(\mathbb{R}; \mathcal{Z})$, удовлетворяющая равенству (1), называется решением этого уравнения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Челябинской области №24-11-20002.

Шишацкая Полина Сергеевна, лаборант-исследователь, Челябинский государственный университет (Челябинск, Россия); Polina Shishatskaya (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Федоров Владимир Евгеньевич, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой математического анализа, Челябинский государственный университет (Челябинск, Россия); Vladimir Fedorov (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Дифференциальные уравнения на прямой без начальных условий встречаются при математическом моделировании физических процессов [1] и поэтому вызывают интерес у исследователей и с математической точки зрения [2,3]. В данном случае они исследуются методами теории двустороннего преобразования Лапласа [4].

Лемма 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $c \in (a, b)$, при $t \in \mathbb{R}$

$$Z_m(t) := \text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_c} (\lambda^m - A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda := \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{ct}}{2\pi} \int_{-R}^R ((c + i\omega)^m - A)^{-1} e^{i\omega t} d\omega.$$

Тогда

(i) при $a > \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}^{1/m}$ $Z_m(t) = 0$ для $t < 0$, при всех $b > a$ $Z_m \in C_{a,b}^{m-2}(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathcal{Z})) \cap C_{a,b}^{m-1}(\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z})) \cap C^\infty(\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$, $Z_m^{(k)}(0+) = 0$ для $k = 0, \dots, m-2$, $Z_m^{(m-1)}(0+) = I$;

(ii) при $b < -\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}^{1/m}$ $Z_m(t) = 0$ для $t > 0$, при всех $a < b$ $Z_m \in C_{a,b}^{m-2}(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathcal{Z})) \cap C_{a,b}^{m-1}(\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z})) \cap C^\infty(\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ $Z_m^{(k)}(0-) = 0$ для $k = 0, \dots, m-2$, $Z_m^{(m-1)}(0-) = I$.

Теорема 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $a < b < -\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}^{1/m}$ или $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}^{1/m} < a < b$, $f \in C_{a,b}^1(\mathbb{R}; \mathcal{Z})$. Тогда функция

$$z_f(t) := (Z_m * f)(t) = \int_{\mathbb{R}} Z_m(t-s)f(s)ds$$

является единственным решением уравнения (1).

Литература

1. Barenblatt G. I., Zel'dovich Ya. B. Intermediate asymptotics in mathematical physics // Russian Mathematical Survey, **26** (1971), 55–61.
2. Костин В. А., Костин Д. В., Алкади Х. Задача без начальных условий для уравнения с дробными производными и промежуточные асимптотики // Челяб. физ.-мат. журн., **8**:1 (2023), 18–28.
3. Fedorov V. E., Skripka N. M. Evolution equations with Liouville derivative on \mathbb{R} without initial conditions // Mathematics, **12**:4 (2024), 572.
4. LePage W. R. Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers. — New York: Dover Publ., 1961.

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОБ
ОПРЕДЕЛЕНИИ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ**
С.А. Шморган, s_shmorgan@ugrasu.ru

УДК 517.518

Мы рассматриваем задачу определения точечных источников, т.е. правой части в параболическом уравнении, представимой в виде суммы дельта функций Дирака с коэффициентами зависящими от времени. Задача некорректна по Адамару. Построен численный алгоритм решения задачи, основанный на методе конечных элементов и методе конечных разностей, и проведены численные эксперименты. Результаты численных экспериментов показали хорошую сходимость и устойчивость алгоритма к случайным возмущениям данных.

Ключевые слова: параболическая задача, точечный источник, конвекция-диффузия.

Numerical solution of the inverse problem of determining point sources

We consider the problem of determining point sources, i.e. the right-hand side of a parabolic equation, represented as a sum of Dirac delta functions with time-dependent coefficients. The problem is Hadamard ill-posed. A numerical algorithm for solving the problem based on the finite element method and the finite difference method is constructed, and numerical experiments are carried out. The results of the numerical experiments showed good convergence and stability of the algorithm to random data perturbations.

Keywords: parabolic problem, point source, convection-diffusion.

Мы рассматриваем вопрос об определении правой части в уравнении

$$Mu = u_t - Lu = u_t - \operatorname{div}(c(x, t)\nabla u) + b(x, t)\nabla u + a(x, t)u = f_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i(t)\delta(x - b_i),$$
$$b(x, t) = (b_1(x, t), \dots, b_n(x, t))^T, \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^T, n = 2, 3$$

которое рассматривается в области $Q = G \times (0, T)$. Считаем, что пространственная область имеет вид $G = \Omega \times (0, Z)$ в случае $n = 3$ и G - прямоугольник в случае $n = 2$. Здесь $\delta(x - b_i)$ - дельта-функция Дирака. Рассмотрим случай $n = 2$, $G = (0, X) \times (0, Y)$. Положим $\Gamma = \partial G$, $S = (0, T) \times \Gamma$.

Шморган Сергей Андреевич, аспирант, ЮГУ (Ханты-Мансийск, Россия); Sergey Shmorgan (Ugras State University, Khanty-Mansiysk, Russia)

При решении обратной задачи имеются дополнительные измерения вида

$$u(y_i, t) = \psi_i(t), i = 1, 2, \dots, r, y_i \in G.$$

Начально-краевые условия:

$$u|_{t=0} = u_0(x), u|_S = 0.$$

Определению подлежат решение u и неизвестные функции α_i из правой части рассматриваемого уравнения. Задача возникает при нахождении мощностей точечных источников (источников загрязнения). В случае распределенных источников эта задача при естественных условиях на данные корректна в пространствах Соболева и Гельдера и имеются многочисленные работы, посвященные как теоретическим результатам, так и численным алгоритмам ее решения. В нашем случае задача является некорректной по Адамару, теоретические результаты о существовании и единственности решений получены только в простейших случаях (см., например, 1). Имеется ряд подходов к численному решению задачи с помощью сведения задачи к задаче управления и минимизации соответствующего функционала.

Однако, как показывают примеры, такой способ построения решения не всегда корректен. Наш численный метод основан на методе конечных элементов (по пространственным переменным) и методе конечных разностей (по времени). При построении решений также используется метод регуляризации Тихонова. Проведен ряд численных экспериментов с различными входными данными. Они показали хорошую сходимость алгоритма и его устойчивость к случайным возмущениям данных. Описаны результаты численных экспериментов, подтверждающие корректность полученного алгоритма. Мы взяли идею построения алгоритма из работы 2.

Литература

1. *Пятков С. Г., Неустроева Л. В.* О разрешимости обратных задач об определении точечных источников // Математические заметки СВФУ. 2022, Т. 22. С. 31-43.
2. *Шергин С. Н.* On Some Inverse Coefficient Problems with the Pointwise Overdetermination for Mathematical Models of Filtration / S. N. Shergin, E. I. Safonov, S. G. Pyatkov // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2019. Vol. 12, No. 1. P. 82-95.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М.Г. Юмагулов, Л.С. Ибрагимова,
yum_mg@mail.ru, lilibr@mail.ru

УДК 517.938

Предлагаются новые подходы в задаче конструирования эквивалентных систем для дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Подходы основаны на переходе от линейной части уравнения к эквивалентным системам с последующим применением методов теории Флоке и теории возмущений.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами, эквивалентность, наблюдаемость.

Equivalent differential equations and systems with periodic coefficients

New approaches are proposed in the problem of constructing equivalent systems for differential equations with periodic coefficients. The approaches are based on the transition from the linear part of the equation to equivalent systems with subsequent application of methods of Floquet theory and perturbation theory.

Keywords: differential equations with periodic coefficients, equivalence, observability.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$L\left(\frac{d}{dt}, t\right)y = M\left(\frac{d}{dt}, t\right)f(y), \quad (1)$$

в котором

$$L(p, t) = p^{2n} + a_1(t)p^{2n-2} + a_2(t)p^{2n-4} + \dots + a_{n-1}(t)p^2 + a_n(t),$$

$$M(p, t) = b_0(t)p^{2m} + b_1(t)p^{2m-2} + \dots + b_{m-1}(t)p^2 + b_m(t),$$

– операторы многочлены ($0 \leq m < n$) с T -периодическими коэффициентами, а $f(y)$ – скалярная непрерывная функция. Уравнение (1) описывает динамику нестационарной одноконтурной системы управления, состоящей из линейного звена с дробно-рациональной передаточной функцией $W(p, t) = M(p, t)/L(p, t)$ и нелинейной обратной связи с характеристикой $f(y)$.

Юмагулов Марат Гаязович, д.ф.-м.н., УУНиТ (Уфа, Россия); Marat Yumagulov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Ибрагимова Лилия Сунагатовна, к.ф.-м.н., УУНиТ (Уфа, Россия); Liliya Ibragimova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Изучается задача о конструировании для уравнения (1) эквивалентной периодической системы, а также и обратная задача (см., например, [1, 2]). В настоящем докладе обсуждаются новые подходы к изучению указанного вопроса. Предлагается схема конструирования для уравнения (1) эквивалентной системы. В качестве приложения рассматриваются аналогичные задачи в теории гамильтоновых систем. Работа развивает исследования, начатые в [3].

Литература

1. Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Рапопорт Л. Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019. 500 с.
2. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
3. Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С. Эквивалентные дифференциальные уравнения в задачах теории управления и теории гамильтоновых систем // Дифференциальные уравнения, 2024. Т. 60, № 1. С. 24-40.

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2024»

СЕКЦИЯ

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

г. Уфа, 2 октября – 5 октября 2024 г.

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СМЕНЫ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

Е.А. Александрова , З.М. Нагаева , Р.А. Башмаков ,
lisaaleksandrovaa23@mail.ru, Nagaeva_Zilya@mail.ru,
Bashmakov_Rustem@mail.ru

УДК 532.59

Показывается, что при описании фильтрации флюида в трещине ГРП метод последовательной смены стационарных состояний дает удовлетворительные результаты для практического применения.

Ключевые слова: пласт, трещина гидроразрыва, давление, метод последовательной смены стационарных состояний.

On Application of the Method of Successive Change of Stationary States

It is shown that when describing fluid filtration in a fracture fracture the method of successive change of stationary states gives satisfactory results for practical application.

Keywords: reservoir, fracture, pressure, method of sequential change of stationary states.

При решении различных задач о фильтрации жидкости используется приближенный метод последовательной смены стационарных состояний, предложенный И.А. Чарным [1]. Он основан на предположении, что давление в пласте меняется во времени значительно медленнее, чем по координатам. Поэтому производную по времени в первом приближении можно отбросить, в результате чего для давления получается уравнение Лапласа, описывающее стационарный процесс. При этом пласт делится на две зоны: возмущенную и невозмущенную. Расстояние до границы зон определяется уравнением баланса.

Фильтрация флюида в вертикальной трещине ГРП, параллельной оси вертикальной скважины и в пористом пласте, окружающем трещину, описывается системой двух уравнений (см. [2], [3])

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} = \kappa_f \frac{\partial^2 P_f}{\partial x^2} + 2 \frac{m_p \kappa_p}{m_f d_f} \left(\frac{\partial P_p}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} \quad (0 < x < l_f),$$

$$\frac{\partial P_p}{\partial t} = \kappa_p \frac{\partial^2 P_p}{\partial y^2} \quad (0 < x < l_f, \quad 0 < y < \infty),$$

Александрова Елизавета Андреевна, студент, УУНИТ (Уфа, Россия); Elizaveta Aleksandrova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Нагаева Зилия Мунировна, к.ф.-м.н., УГНТУ (Уфа, Россия); Zilya Nagaeva (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

Башмаков Рустэм Абдрауфович, к.ф.-м.н., УУНИТ (Уфа, Россия); Rustem Bashmakov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Здесь нижние индексы $i = f$ и p соответствуют значениям параметров в трещине и окружающей ее пористой среде m_i – пористость, l_f ($0 < x < l_f$) – полудлина трещины, $\kappa_i = \frac{k'_i \rho_0 C^2}{m_i \mu}$ – коэффициенты пьезопроводности, координата x отсчитывается от стенки скважины вдоль трещины, координата y отсчитывается от стенки трещины. Мы предполагаем, что жидкость сначала движется вдоль трещины, затем, перпендикулярно стенкам трещины $P_p = P_p(t, x, y)$, $P_f = P_f(t, x)$. Изменением давления в трещине по вертикали пренебрегаем.

Для задачи при заданном фиксированном давлении жидкости на скважине находится приближенное решение

$$\Delta P_f = \Delta P_{f(w)} \exp\left(-\sqrt{A/\sqrt{2t}}x\right), \quad (t > 0, \quad 0 < x < \infty)$$

$$\Delta P_f = \Delta P_{f(w)} \exp\left(-2^{1/4}z\right), \quad z = \sqrt{\frac{A}{2}} \frac{x}{t^{1/4}}$$

и точное

$$\Delta P_f = \Delta P_{f(w)} \text{Gil}(z), \quad \text{Gil}(z) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(z\eta^{1/4})}{\eta} e^{-\eta - z\eta^{1/4}} d\eta.$$

Из сравнения полученных формул следует, что относительная разница не более 3 – 4 процентов. Показывается, результаты, получаемые методом последовательной смены стационарных состояний хорошо пригодны для практических расчетов.

Литература

1. *Чарный, И.А.* Подземная гидрогазодинамика / И.А. Чарный. - М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. - 436 с.
2. *Хабибуллин, И.Л.* Нестационарная фильтрация в пласте с трещиной гидроразрыва / И.Л. Хабибуллин, А.А. Хисамов // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2019. – № 5. – С. 6–14.
3. *Нагаева, З.М.* Об упругом режиме фильтрации в трещине, расположенной в нефтяном или газовом пласте / З.М. Нагаева, В.Ш. Шагапов // Прикладная математика и механика. – 2017. – Т. 81.–С. 319 – 329.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ TRANSFORMER ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

М.К. Арабов
cool.araby@mail.ru

УДК 004.8.

В последние годы архитектура Transformer активно используется в задачах обработки естественного языка, но её потенциал в прогнозировании временных рядов также вызывает интерес. Статья анализирует применение моделей Transformer для этих задач, выделяет их преимущества по сравнению с традиционными методами, такими как ARIMA и RNN, и рассматривает последние исследования и направления будущего развития..

Ключевые слова: Transformer, моделирование временных рядов, прогнозирование временных рядов, ARIMA, RNN, исследования, перспективы развития.

Application of the Transformer Architecture for Time Series Modeling and Forecasting

In recent years, the Transformer architecture has been actively used in natural language processing tasks, but its potential in time series forecasting is also gaining interest. The article analyzes the application of Transformer models for these tasks, highlighting their advantages over traditional methods such as ARIMA and RNN, and discusses the latest research and future development directions.

Keywords: Transformer, time series modeling, time series forecasting, ARIMA, RNN, research, future directions.

Объем тезисов — до двух страниц, подготовленных в LaTeX по данному образцу.

Прогнозирование временных рядов [1-3] играет ключевую роль в таких областях, как экономика, энергетика и медицина. Традиционные методы, такие как ARIMA и RNN, хорошо работают с временными рядами, но более сложные и объемные данные требуют мощных моделей. Архитектура Transformer, благодаря использованию механизма внимания (attention) и способности моделировать долгосрочные зависимости, может значительно улучшить точность прогнозов.

Эта работа была поддержана Программой стратегического академического лидерства Казанского федерального университета (PRIORITY-2030).

Арабов Муллошарф Курбонович, к.ф.-м.н., старший преподаватель, КФУ (Казань, Россия); Arabov Mullosharaf (Kazan Federal University, Kazan, Russia)

Transformer [1-2] базируется на механизме **self-attention**, который вычисляет важность каждого элемента последовательности по отношению к другим элементам. Для входной последовательности $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ создаются три матрицы [1]: **Query** (Q), **Key** (K) и **Value** (V):

$$Q = XW_Q, \quad K = XW_K, \quad V = XW_V,$$

где W_Q , W_K и W_V — обучаемые матрицы весов. Механизм внимания вычисляется по следующей формуле:

$$\text{Attention}(Q, K, V) = \text{softmax}\left(\frac{QK^T}{\sqrt{d_k}}\right)V,$$

где d_k — размерность ключей. Этот механизм позволяет модели учитывать контекст всей последовательности, а не только предыдущие элементы, как в рекуррентных нейронных сетях (RNN).

Стоит отметить, временные ряды могут быть представлены как последовательность векторов, где каждый вектор содержит значения признаков в определённый момент времени. Основные архитектуры Transformer для анализа временных рядов включают [1-2]:

- **Temporal Transformer:** Применяет стандартную архитектуру, обрабатывая каждый временной шаг как элемент последовательности.
- **Informer:** Улучшенная версия с механизмом "probSparse attention оптимизированным для длинных последовательностей.
- **Autoformer:** Использует автокорреляционные механизмы для выявления сезонных и трендовых компонентов.

Таким образом, использование архитектуры Transformer в анализе временных рядов открывает новые возможности для повышения точности прогнозирования. Несмотря на сложности, связанные с её внедрением, дальнейшие исследования и разработки могут значительно улучшить результаты в этой области.

Литература

1. *Vaswani A., Shazeer N., et al.* Attention is All You Need // Proceedings of the 31st International Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 2017). – 2017. – Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/1706.03762> (дата обращения: 03.09.2024).
2. *Wu H., Xu J., Wang J., Long M.* Autoformer: Decomposition Transformers with Auto-Correlation for Long-Term Series Forecasting // CoRR. 2021. Vol. abs/2106.13008. URL: <https://arxiv.org/abs/2106.13008> (дата обращения: 03.09.2024).
3. *Arabov M.K.* Algorithm Application of Machine Learning Algorithms to Predict Energy Demand / М.К. Arabov, А.Ф. Nazipova, R.A. Burnashev // 2024 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). Sochi, Russian Federation, 2024. pp. 141-145. doi: 10.1109/ICIEAM60818.2024.10553672.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФЕКТОВ КОСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Т.Р. Бавшин, А.С. Сухов, Е.Г. Хитров
timur.bavshin@gmail.com, sukhovtema@gmail.com,
yegorkhitrov@gmail.com

УДК 519.6

В работе изучена сходимость нескольких стохастических методов оптимизации на примере минимизации двух функций потерь при обучении модели искусственной нейронной сети-трансформера YOLO. Практической целью являлось обоснование выбора метода минимизации при обучении модели компьютерного зрения, предназначенной для определения дефектов древесины на цифровых снимках, имплементируемой в автоматизированную систему контроля качества конструкционных материалов.

Ключевые слова: минимизация, глубокое обучение, компьютерный эксперимент, сегментация, распознавание образов.

Study of Numerical Optimization Methods for Solving the Problem of Defect Detection in Structural Materials

The study investigates the convergence of several stochastic optimization methods by minimizing two loss functions during the training of a YOLO transformer neural network model. The practical goal was to justify the choice of optimization method for training a computer vision model designed to detect wood defects in digital images, to be implemented in an automated quality control system for structural materials.

Keywords: Minimization, Deep Learning, Computer Experiment, Segmentation, Pattern Recognition.

Решение многих задач математического моделирования связано с решением оптимизационных задач. Например, при разработке моделей машинного обучения и искусственного интеллекта, выполняется поиск точек минимума функций многих переменных – функций потерь (штрафа) (т.н. обучение моделей [1]). В частности, в задачах глубокого обучения для моделей компьютерного зрения количество переменных

Бавшин Тимур Русланович, студент, ИТМО (Санкт-Петербург, Россия); Timur Bavshin (National Research University ITMO, Saint Petersburg, Russia)

Сухов Артем Сергеевич, студент, ИТМО (Санкт-Петербург, Россия); Artem Sukhov (National Research University ITMO, Saint Petersburg, Russia)

Хитров Егор Германович, д.т.н., доцент, ИТМО (Санкт-Петербург, Россия); Egor Khitrov (National Research University ITMO, Saint Petersburg, Russia)

исчисляется миллионами, функции потерь невыпуклы и негладки, что, с учетом конечной разрядной сетки ЭВМ, делает едва ли возможным точный поиск точки глобального минимума. В этой связи используются различные приближенные методы минимизации целевых функций [1]; сходимости части из них даже для гладких выпуклых задач строго не доказана [2], несмотря на их широкое распространение в практике предметной области. Накопление сведений о скорости и сходимости приближенных методов минимизации при решении задач с большой размерностью является актуальным направлением развития численных методов оптимизации [1], на настоящем этапе исследований необходимым для разработки моделей компьютерного зрения, предназначенных для решения практических задач, а в перспективе — для дальнейшего анализа и обобщения.

В работе экспериментально изучена сходимость трех методов минимизации функций потерь при обучении модели искусственной нейронной сети (ИНС) YOLOv8n.pt [3] с архитектурой ИНС-трансформера, связанных с сегментацией (box_loss) изображений и распознавания образов (cls_loss) на цифровых снимках, а именно:

- SGD (стохастический градиентный спуск)[4]:

$$w_{t+1} = w_t - \alpha_t g_t,$$

где w — приближение к решению, α — шаг метода, g — приближение к градиенту ("стохастический градиент")[4] и t — номер итерации.

- RMSProp (метод экспоненциального скользящего среднего)[5, 6]:

$$\begin{aligned} v_0 &= 0, \\ v_t &= \beta v_{t-1} + (1 - \beta) g_t^2, \\ w_{t+1} &= w_t - \frac{\alpha}{\sqrt{v_t}} g_t, \end{aligned}$$

где v — вектор затухания.

- Adam (метод адаптивного момента)[7]:

$$w_{t+1} = w_t - \frac{\alpha}{\sqrt{\hat{v}_t}} \hat{m}_t,$$

где $\hat{m}_t = \frac{1}{1-\beta_1^t} m_t$ и $\hat{v}_t = \frac{1}{1-\beta_2^t} v_t$ — адаптивные параметры метода,

$$m_t = \beta_1 m_{t-1} + (1 - \beta_1) g_t,$$

$$v_t = \beta_2 v_{t-1} + (1 - \beta_2) g_t^2,$$

где β_1 и β_2 — числовые параметры.

Все операции над векторами производятся поэлементно [7].

Для проведения исследования при обучении модели ИНС был использован набор данных, содержащий изображения конструкционных материалов из древесины [8]; набор состоит из 20276 аннотированных изображений с дефектами 10 типов, размер набора данных и число классов отличает полученные результаты от опубликованных ранее. Вычисления проведены с использованием фреймворка Pytorch при стандартных гиперпараметрах обучения ИНС YOLO [3], размером изображений 640 пикселей и размером батча равным 16.

Практической целью являлось обоснование выбора метода минимизации при обучении модели компьютерного зрения, предназначенной для определения дефектов древесины на цифровых снимках; модель предназначена для последующей имплементации в автоматизированную систему контроля качества конструкционных материалов. Основные результаты приведены на рисунке 1.

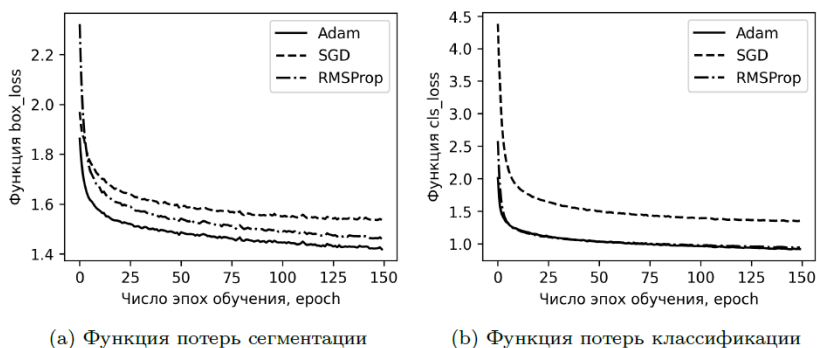


Рис. 1: Результаты экспериментов

В ходе исследования было выявлено, что метод Adam продемонстрировал наилучшие результаты для обеих функций ошибок. RMSProp показал достойные результаты для функции потерь классификации, но менее точен в определении начального приближения и уступает в минимизации функции потерь сегментации. Метод SGD в эксперименте оказался наименее эффективным.

В качестве перспективного решения для минимизации функций потерь при обучении модели компьютерного зрения, предназначенной для сегментации и классификации дефектов конструкционных материалов из древесины, на настоящем этапе исследований, рекомендуется метод Adam. С учетом чувствительности методов к настройкам гиперпараметров [2], следует далее провести эксперименты по их настройке, что нужно для составления более полного и систематизированного представления об эффективности численных методов минимизации в решении задачи глубокого обучения. Постепенное накопление

эмпирических сведений будет способствовать получению более строгих доказательств сходимости численных методов при решении задач мультиклассовой сегментации и классификации.

Литература

1. *Hutter F., Kotthoff L., Vanschoren J.* Automated Machine Learning: Methods, Systems, Challenges. — Springer, 2019. DOI: 10.1007/978-3-030-05318-5.
2. *Sun S., Cao Z., Zhu H., Zhao J.* A Survey of Optimization Methods from a Machine Learning Perspective. — arXiv, 2019, 1906.06821, DOI: 10.48550/arXiv.1906.06821.
3. YOLOv8 Documentation [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://docs.ultralytics.com> (дата обращения: 10.08.2024).
4. *Robbins H., Monro S.* A Stochastic Approximation Method. — The Annals of Mathematical Statistics, 1951. 22 (3): 400. DOI:10.1214/aoms/1177729586
5. *Hinton G., Srivastava N., Swersky K.* Neural Networks for Machine Learning: Lecture 6a Overview of Mini-batch Gradient Descent. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://www.cs.toronto.edu/tijmen/csc321/slides/lecture_slides_lec6a.pdf
6. *Graves A.* Generating Sequences With Recurrent Neural Networks. — arXiv, 2014, 1308.0850. DOI: 10.48550/arXiv.1308.0850
7. *Kingma D., Ba J.* Adam: A Method for Stochastic Optimization. — arXiv, 2017, 1412.6980. DOI: 10.48550/arXiv.1412.6980.
8. *Kodytek P., Bodzas A., Bilik P.* A large-scale image dataset of wood surface defects for automated vision-based quality control processes // F1000Research. 2021. Т. 10. С. 581. DOI: 10.12688/f1000research.52903.2. PMID: 35903217; PMCID: PMC9277195.

**НОВЫЙ СПОСОБ КОЛИЧЕСТВЕННОГО ОПИСАНИЯ
ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ
ВОЛЬТАМПЕРОМЕТРИЧЕСКИХ БАЗ ДАННЫХ
«ЭЛЕКТРОННОГО ЯЗЫКА» С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ**

**З.А. Баширова , Г.Г. Бижанова, Г.Р. Абушахмина,
А.В. Сидельников, Р.Р. Нигматуллин, Г.К. Будников
bashirova2903@gmail.com, bizhanova111@mail.ru,
abushahmina_g@mail.ru, Artsid2000@gmail.com,
renigmat@gmail.com, Herman.Budnikov@kpfu.ru**

УДК 517.518

Целью данной работы явилось исследование вольтамперометрического поведения некоторых образцов фруктов с низким содержанием электроактивных веществ с использованием темпорального подхода к структурированию вольтамперных временных рядов по методу главных компонент и количественному описанию и поиску ведущих главных компонент (1-3) каждой сложной жидкости (в нашем случае – яблочных соков различной кислотности/сахаристости) с помощью минимального числа подгоночных параметров.

Ключевые слова: метод главных компонент, динамическая система, темпоральность.

A new method for the quantitative description of the main components of voltammetric databases of the "electronic language" using fractional rational functions

The purpose of this work was to study the voltammetric behavior of some fruit samples with a low content of electroactive substances using a temporal approach to structuring voltammetric time series using the principal component method and quantitative description and search for leading principal components (1-3) for each complex liquid (in our case, apple juices of different acidity/sugar content) using a minimum number of adjustment parameters.

Баширова Зейна Анваровна, аспирант, УУНиТ (Уфа, Россия); Zeina Bashirova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Бижанова Гулия Габдинуровна, к.х.н., старший преподаватель, УУНиТ (Уфа, Россия); Gulia Bizhanova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Абушахмина Гульфья Ринатовна, старший преподаватель, БГМУ (Уфа, Россия); Gulfiya Abushahmina (Bashkir State Medical University, Ufa, Russia)

Сидельников Артем Викторович, д.х.н., профессор, УУНиТ (Уфа, Россия); Artem Sidelnikov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Нигматуллин Равиль Рашидович, д.х.н., профессор, КАИ (Уфа, Россия); Ravil Nigmatullin (Kazan National Research Technical University, Ufa, Russia)

Будников Герман Константинович, д.х.н., профессор, КФУ (Уфа, Россия); Herman Budnikov (Kazan Federal University, Ufa, Russia)

Keywords: principal component method, dynamic system, temporality.

Метод главных компонент применили для общего описания вольтамперометрического поведения фруктов с использованием «электронного языка» – первая задача, которую ставят и решают во многих научных статьях прикладного характера в области мультисенсорного анализа, в том числе с использованием «электронных языков и носов», и их гибридных вариантах. Вторая задача является особенной для данного вида электрохимических исследований с использованием принципов хемотроники – получение исходных МГК- данных для апробации метода дробно-рациональных функций для количественного описания эволюции электрохимических систем при их непрерывном функционировании и взаимодействии на границе раздела электрод/раствор. Первичный анализ вольтамперограмм по методу главных компонент выявил, что яблоки "Симиренко "Гала Дарк Барон "Эконом "Слава Победителям" и лимон отличаются по вольтамперометрическому поведению в пространстве первых трех главных компонентах между собой и в сравнении с другими яблоками "Брейберн "Голден "Ред Делишес "Айдаред "Кубанские Багряные "Грени Сит "Селеста «Крипс Пинк». В связи с этим для характеристики схожести и различия между данными, сильно отличающимися электрохимически, достаточно было использовать три первые главные компоненты, которые образовали выборку данных для количественного описания эволюции электродных систем по темпоральному методу дробно-рациональных функций. Нами предложено рассматривать не только стационарное состояние вольтамперометрической системы по классическому МГК, но и как она эволюционирует непрерывно с момента начала регистрации вольтамперограмм до последней 400-й точки. Основная задача - найти соответствующую функцию подгонки, которая позволяет количественно описать основные компоненты (1-3), которые использовались в традиционном РСА. Как известно, современный РСА можно охарактеризовать как качественный метод, и систематическое описание этих компонентов отсутствует. Предлагаемая функция подбора должна быть "универсальной относительно простой и содержать минимальное количество параметров подбора.

Литература

1. *Nigmatullin R.R., Budnikov H.C., Khamzin A.A., Sidelnikov A.V., Maksyutova E.I.* Temporal multi-sensor system for voltammetric recognition of L- and D-tryptophan enantiomers based on generalized principal component analysis // *New Journal of Chemistry*, 2018. V. 42. № 1. P. 465-475.

НОВЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ ТЕМПОРАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ОБРАЗОВАНИЯ/РАСТВОРЕНИЯ НАНОСТРУКТУРНЫХ КОМПОЗИТОВ, НА ПРИМЕРЕ МИКРОПЛЕНОК АЛЮМИНИЯ, ПО МЕТОДУ PLS-T'

З.А. Баширова, Г.Г. Бижанова, О. Г. Смольникова,
Н.А. Васенина, Е. Ю. Черняева, Г. Р. Султанов
bashirova2903@gmail.com, bizhanova111@mail.ru,
smolnic.olga@yandex.ru, zhiber.na@gmail.com,
cheri.2016@yandex.ru, germrussu@gmail.com

УДК 517.518

Известно, что в любом методе аналитической химии для получения информации о качественном и количественном составе используют аналитический сигнал. Для обнаружения веществ фиксируют появление аналитического сигнала, а для определения веществ – количественно его оценивают с использованием визуальных или инструментальных методов. Для количественной оценки, как правило, необходимо знать вид математической зависимости аналитического сигнала от концентрации анализируемого компонента – то есть вид аналитической функции. Это позволяет для определения концентрации веществ реализовывать такие подходы, как метод градуировочного графика, метод добавок, метод титрования и др.

Ключевые слова: фрактал, метод добавок, аналитический сигнал
A new approach to estimating the temporal parameters of formation/dissolution of nanostructured composites, using the example of aluminum microfilms, using the PLS-T method'

It is known that in any method of analytical chemistry, an analytical signal is used to obtain information about the qualitative and quantitative composition. For the detection of substances, the appearance of an analytical signal is recorded, and for the determination

Баширова Зейна Анваровна, аспирант, УУНиТ (Уфа, Россия); Zeina Bashirova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Бижанова Гулия Габдинуровна, к.х.н., старший преподаватель, УУНиТ (Уфа, Россия); Gulia Bizhanova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Смольникова Ольга Геннадиевна, старший преподаватель, УУНиТ (Уфа, Россия); Olga Smolnikova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Васенина Наталья Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Natalia Vasenina (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Черняева Елена Юрьевна, к.х.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Elena Chernyaeva (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Султанов Герман Рустамович, студент, УУНиТ (Уфа, Россия); Herman Sultanov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

of substances, it is quantified using visual or instrumental methods. To quantify, as a rule, it is necessary to know the type of mathematical dependence of the analytical signal on the concentration of the analyzed component – that is, the type of analytical function. This makes it possible to implement approaches such as the calibration graph method, the additive method, the titration method, etc. to determine the concentration of substances.

Keywords: fractal, additive method, analytical signal

При следовых количествах, например, в тонких металлических пленках, покрытиях, микропроводах или, когда вещество – легирующая сплав добавка неактивно, или объект имеет наноразмерные формы, аналитический сигнал часто настолько мал, что классическими методами статистической обработки данных характеризуется широким доверительным интервалом и, в связи с этим, ошибочно оператором может приравняться к шумовым сигналам. Для исключения этого предложено в работе накапливать сигналы в формате вольтамперных временных рядов и их расшифровывать, количественно описывать с использованием авторских подходов на основе теории фракталов и обобщенных методов главных компонент.

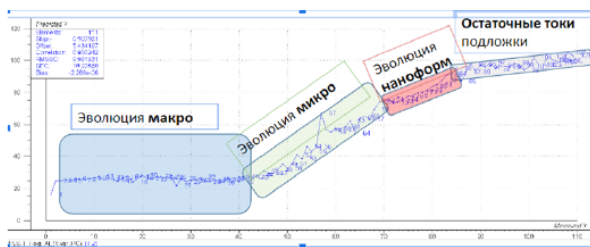


Рис. 1: Темпоральная кривая растворения фольгированного алюминия по методу ПЛС-Т'-моделирования с использованием двух главных компонент PC1-PC2.

В частности, в данной работе исследовали полное анодное растворение тонких слоев металла, на примере фольгированного алюминия, при переходе размерности объекта от макро до наноформ и переводе из твердого состояния в ионное. С использованием метода главных компонент впервые определена темпоральная структура электрохимических данных. Найден новый тип аналитических сигналов для дополнительного мониторинга процессов анодного растворения и коррозии металлов, раскрывающий вклад каждого компонента сплава/раствора в общие закономерности разрушения материалов.

Результаты исследования, на наш взгляд, могут быть полезны при разработке деталей авиационного, наземного транспорта и на военных

объектах, а также для создания высокочувствительных датчиков мониторинга коррозионных процессов в полевых условиях и в промышленности.

Литература

1. Дресвянников А.Ф., Петрова Е.В., Хайруллина А.И. Синтез прекурсорov алюмокальциевых оксидных систем методом анодного окисления алюминия в водных растворах // Физика и химия стекла. 2018. Т. 44. №. 4. С. 384-393.

2. Сидельников А.В., Бикмеев Д.М., Кудашева Ф.Х., Майстренко В.Н. Вольтамперометрическая идентификация моторных масел с использованием «электронного языка» //Журнал аналитической химии, 2013. Т. 68. № 2. С. 153.

ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА ПО СЕМЕЙСТВУ СФЕР В ПРОСТРАНСТВЕ

А.Х. Бегматов, А.С. Исмоилов
akrambegmatov@mail.ru, alisher_8778@mail.ru

УДК 517.946

В этой работе рассматривается задача восстановления функции по семействам сфер в пространстве. Доказывается единственность решения задачи путем сведения к интегральному уравнению Вольтерра первого, а затем второго рода.

Ключевые слова: Задача интегральной геометрии, семейство сфер, интегральное уравнение Вольтера, единственность решения.
Volterra-type integral geometry problem on families of spheres in space

This paper discusses considers the problem of recovering a function from families of spheres in space. The uniqueness of the solution of the problem is proved by reducing it to the Volterra integral equation of the first and then the second kind.

Keywords: Integral geometry problem, family of spheres, Volterra integral equation, uniqueness of solution.

Задачами интегральной геометрии вольтеровского типа называются задачи, которые могут быть сведены к исследованию операторных уравнений Вольтера в смысле определения, данного М.М. Лаврентьевым [1].

В работы М.М.Лаврентьева была предложена весьма плодотворная идея сведения широкого класса задач интегральной геометрии к исследованию уравнения эволюционного типа для некоторой вспомогательной функции. Это, в частности, позволило доказать теорему единственности решения исходной задачи. Следует отметить, что некоторые классы задачи интегральной геометрии Вольтерровского типа изучались также А.Л.Бухгеймом.

Новые классы задач интегральной геометрии получили свое развитие в работах Акр. Х. Бегматова [2 и др.]. В его работах изучались задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости и в пространстве. В работах [3,4] изучены новые классы задачи интегральной геометрии и введены новые подходы к исследованию задач

Бегматов Акрам Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, СБУМИПТК (Ташкент, Узбекистан); Akram Begmatov (Joint Belarusian-Uzbek intersectoral institute of applied technical qualifications, Tashkent, Uzbekistan)

Исмоилов Алишер Сидикович, к.ф.-м.н., Уз-ФинПИ (Самарканд, Узбекистан); Alisher Ismoilov (Uzbek-Finnish pedagogical institute, Samarkhand, Uzbekistan)

восстановления функции по весовым функциям с особенностью. В работе [5,6] изучена задача восстановления функции по семействам сфер в трехмерном пространстве.

В статье рассматривается задача восстановления функции по семействам сфер в пространстве. Доказывается единственность решения задачи путем сведения к интегральному уравнению Вольтерра первого, а затем второго рода. Применяются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными. Доказательство теоремы единственности основаны на изучении краевых задач для вспомогательных функций. Используется также метод преобразования Фурье. А также рассмотрена задача интегральной геометрии для семейства поверхностей второго порядка.

Задачи такого рода возникают в геофизике и компьютерной томографии. Практическая значимость статьи заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы при численном решении задач определения внутренней структуры объектов, возникающих в области медицины и геофизики.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу интегральной геометрии для семейства поверхностей в полупространств $z \geq 0$. Поверхность, по которой ведется интегрирование, представляет собой сферу

$$z^2 - \zeta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2. \quad (1)$$

Обозначим $L_D = (x, y, z) : x \in R, y \in R, 0 \leq z \leq D$.

Функция $u(\cdot)$ предполагается финитной по x, y , то есть $u(x, y, z) = 0$ при $(x, y) \in D$, где D - ограниченная область на плоскости $z = 0$.

Задача 1. В полупространств L_D восстановить функцию трёх переменных $u(x, y, z)$, если известны интегралы от нее по поверхностям семейства $\Upsilon(x, y, z)$:

$$f(x, y, z) = \int_{\Upsilon(x, y, z)} q(z, \zeta) u(\xi, \eta, \zeta) d\omega, \quad (2)$$

где произвольная поверхность семейства представлена выражением

$$\Upsilon(x, y, z) = (\xi, \eta, \zeta) : z^2 - \zeta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2, 0 \leq \zeta \leq z \leq D.$$

Лемма 1. Пусть функция $f(x, y, z)$ известна для всех из полупространств L_D , весовая функция $q(z, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - \zeta^2}}$.

Тогда решение уравнения (2) в классе дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций с носителем в полупространств L_D единственно.

Литература

1. Lavrentyev M.M. and Savelyev L.Y. Operator Theory and Ill-Posed Problems // Moscow: Publ House of the Inst Math (2010).

2. *Бегматов Акр. Х.* Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости // Сиб. мат. журн. **36**:2 (1995), 243-247

3. *Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S.* Weakly ill-posed problems of integral geometry on the Plane // Uzbek Mathematical Journal **66**:1 (2022), 64-75

4. *Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S., Khudayberdiev D.G.* Weakly ill-posed problems of integral geometry on the plane with perturbation // Journal of the Balkan Tribological Association **29**:3 (2023), 273-289

5. *Begmatov, A., Ismoilov, A., Dauletiyarov, A., Tasqinov, Y.* New classes of integral geometry problems of Volterra type in three-dimensional space // In AIP Conference Proceedings **3147**:1 (2024)

6. *Begmatov, A., Ismoilov, A.* Weekly Ill-posed integral geometry problems of Volterra type in three-dimensional space // Balikesir Universitesi Fen Bilimleri Enstitusu Dergisi **26**:2 (2024), 472-478

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПО СЕМЕЙСТВУ ПАРАБОЛ С ЗАДАННОЙ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

А.Х. Бегматов, Н.У. Утеулиев, А.С. Исмоилов
akrambegmatov@mail.ru, utewlievn@mail.ru,
alisher_8778@mail.ru

УДК 517.946

В работе исследуется задача интегральной геометрии в полосе на семействе парабол с заданной весовой функцией общего вида. Доказана теорема единственности и теорема существования решения задачи, получено аналитическое представление решения в классе гладких конечных функций. Приведены численные и графические результаты применения этих алгоритмов для решения задачи.

Ключевые слова: задача интегральной геометрии, обратные задачи, некорректные задачи, численное решение, преобразование Фурье.

Volterra-type integral geometry problem on families of spheres in space

The article deals with the study of problems of integral geometry in a strip on a family of broken lines with a given weight function of a general form. The theorems of uniqueness and existence for the solution of the task are proved; an analytic representation of the solution in the class of smooth finite functions is obtained. The numerical and graphical results of applying these algorithms to the solution of the task are given.

Keywords: Problem of integral geometry, inverse tasks, ill-posed tasks, numerical solution, Fourier transformation.

Задачи интегральной геометрии - интенсивно развивающееся направление современной математики, которое является одним из крупнейших направлений в теории некорректных задач математической физики и анализа. Ее задачи тесно связаны с многочисленными приложениями - задачами интерпретации данных геофизических исследований, электро-разведки, акустики и компьютерной томографии.

Бегматов Акрам Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, СБУМИПТК (Ташкент, Узбекистан); Akram Begmatov (Joint Belarusian-Uzbek intersectoral institute of applied technical qualifications, Tashkent, Uzbekistan)

Утеулиев Ниятбай Утеулиевич, д.ф.-м.н., профессор, НФТУИТ (Нукус, Узбекистан); Niyatbay Uteuliev (Nukus branch of Tashkent university of information technologies, Nukus, Uzbekistan)

Исмоилов Алишер Сидикович, к.ф.-м.н., Уз-ФинПИ (Самарканд, Узбекистан); Alisher Ismoilov (Uzbek-Finnish pedagogical institute, Samarkhand, Uzbekistan)

Одной из центральных проблем интегральной геометрии является восстановление функции, если известны ее интегралы по заданным многообразиям.

Приведем определение задачи интегральной геометрии [1]. Пусть $u(x)$ - достаточно гладкая функция, определенная в n -мерном пространстве $x = (x_1, \dots, x_n)$, и $M(\lambda)$ - семейство гладких многообразий в этом пространстве, зависящих от параметра $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Пусть, далее, от функции $u(x)$ известны интегралы

$$\int_{M(\lambda)} u(x) d\sigma = v(\lambda). \quad (1)$$

где $d\sigma$ определяет элемент меры по $M(\lambda)$. Требуется по функции $v(\lambda)$ найти функцию $u(x)$.

В работы М.М.Лаврентьева была предложена весьма плодотворная идея сведения широкого класса задач интегральной геометрии к исследованию уравнения эволюционного типа для некоторой вспомогательной функции. Это, в частности, позволило доказать теорему единственности решения исходной задачи. Следует отметить, что некоторые классы задачи интегральной геометрии Вольтерровского типа изучались также А.Л.Бухгеймом.

Новые классы задач интегральной геометрии получили свое развитие в работах Акр. Х. Бегматова [2 и др.]. В его работах изучались задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости и в пространстве. В работах [3-6] изучены новые классы задачи интегральной геометрии и введены новые подходы к исследованию задач восстановления функции по весовым функциям с особенностью. В работах [7,8] изучены аналитическое представление решения задачи интегральной геометрии в классе гладких финитных функций. Учитывая, что при измерениях всегда присутствуют зашумленные интегральные данные, на основе идеи регуляризации Тихонова строится устойчивый алгоритм для численного решения задачи интегральной геометрии на семействе ломаных. Проведенный численный эксперимент показывает, что разработанный алгоритм эффективно восстанавливает изображение внутренней структуры исследуемых объектов с достаточной точностью.

В данной работе исследуется задача интегральной геометрии в плоскости на семействе парабол с заданной весовой функцией общего вида. Доказана теорема единственности и теорема существования решения задачи, получено аналитическое представление решения в классе гладких конечных функций. Представлена оценка решения задачи в пространствах Соболева, из которой вытекает её слабая некорректность. Полученные теоретические результаты исследуются по экспериментальным данным. Приведены численные и графические результаты применения этих алгоритмов для решения задачи. Такие задачи имеют многочисленные приложения в математическом изучении проблем

сейсморазведки, интерпретации геофизических и аэрокосмических наблюдений, в решении обратных задач астрофизики и гидроакустики.

Литература

1. *Lavrentyev M.M. and Savelyev L.Y.* Operator Theory and Ill-Posed Problems // Moscow: Publ House of the Inst Math (2010).

2. *Бегматов Акр. Х.* Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости // Сиб. мат. журн. **36**:2 (1995), 243-247

3. *Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S.* Weakly ill-posed problems of integral geometry on the Plane // Uzbek Mathematical Journal **66**:1 (2022), 64-75

4. *Begmatov A.Kh., Ismoilov A.S., Khudayberdiev D.G.* Weakly ill-posed problems of integral geometry on the plane with perturbation // Journal of the Balkan Tribological Association **29**:3 (2023), 273-289

5. *Begmatov, A., Ismoilov, A., Dauletiyarov, A., Tasqinov, Y.* New classes of integral geometry problems of Volterra type in three-dimensional space // In AIP Conference Proceedings **3147**:1 (2024)

6. *Begmatov, A., Ismoilov, A.* Weekly Ill-posed integral geometry problems of Volterra type in three-dimensional space // Balikesir Universitesi Fen Bilimleri Enstitusu Dergisi **26**:2 (2024), 472-478

7. *Uteuliev N.U., Djaykov G.M., Pirimbetov A.O.* Modeling the problem of integral geometry on the family of broken lines based on Tikhonov regularization // Lecture Notes of Computer Science **13741** (2022), 417-428.

8. *Uteuliev, N., Djaykov, G., Yadgarov, S., Sagidullaev, N., Jarilkanov, B.* Modeling of circular radon transform using Tikhonov regularization // In AIP Conference Proceedings **3147**:1 (2024)

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГОГО И ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ АНТИФРИКЦИОННЫХ ПОЛИМЕРНЫХ И СМАЗОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В МОСТОСТРОЕНИИ

А.П. Богданова, А.А. Каменских

Ю.О. Носов

anastasia_pankova@mail.ru, anna_kamenskih@mail.ru,

ura.4132@yandex.ru

УДК 531.4

Работа включает экспериментальные исследования и численное моделирование поведения исследуемых материалов и конструкций, в которых они применяются. Выполнен анализ теплофизических и реологических свойств набора полимерных и смазочных материалов в широком диапазоне температур $[- 40; + 80]$ °С. Построена численная процедура идентификации моделей поведения материалов в рамках вязкоупругости и вязкоупругопластичности. Проанализировано влияния моделей поведения материалов на их деформационное поведение при статических и динамических нагрузках на тестовых и модельных задачах, а также при работе сферической опорной части производства ООО «АльфаТех» г. Пермь.

Ключевые слова: полимер, смазка, вязкость, термомеханика, метод конечных элементов, определяющие соотношения, модель.

Construction of viscoelastic and viscoelastoplastic models behavior of antifriction polymer and lubricant materials used in bridge design

The work includes experimental studies and numerical modeling of the behavior of the materials under study and the structures in which they are used. An analysis of the thermophysical and rheological properties of a set of polymer and lubricant materials in a wide temperature range $[- 40; + 80]$ °C has been completed. A numerical procedure for identifying models of material behavior within the framework of viscoelasticity and viscoelastoplasticity is constructed. The influence of material behavior models on their deformation behavior under static and dynamic loads in test and model problems, as well as during

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0007)

Богданова Анастасия Петровна, аспирант, ПНИПУ (Пермь, Россия); Anastasia Bogdanova (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Каменских Анна Александровна, к.т.н., доцент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Anna Kamenskikh (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Носов Юрий Олегович, аспирант ПНИПУ (Пермь, Россия); Yuriy Nosov (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

operation of the spherical support part manufactured by AlphaTech LLC, Perm, was analyzed.

Keywords: polymer, lubricant, viscosity, thermomechanics, finite element method, constitutive relations, model

Согласно Указа Президента от 28.02.24 г. № 145 «О стратегии научно-технологического развития Российской Федерации» п. 21 а, е для обеспечения суверенитета страны требуется переход к передовым технологиям проектирования и создания высокотехнологичной продукции, в том числе в мостостроительной отрасли для обеспечения связанности территорий. Одним из направлений развития транспортной отрасли страны является использование современных полимерных и композиционных материалов при строительстве мостов и несущих элементов конструкций [1]. Анализ возможности применения новых материалов в конструкциях предполагает как исследование их физико-механических и термомеханических характеристик, так и моделирование их поведения в условиях приближенных к эксплуатационным [2]. Поэтому все большее распространение получают современные методы компьютерного инжиниринга для создания цифровых аналогов современных материалов и конструкций [3].

Опорные части мостов относятся к ответственным элементам транспортных систем [4-5]. Они воспринимают комплекс нагрузок от мостового пролета и внешние климатические и техногенные воздействия. Такие конструкции позволяют мостовому сооружению эффективно выполнять возложенные на него функции. Работа сферических опорных частей мостового сооружения во многом зависит от полимерных и смазочных материалов, используемых в качестве относительно тонких антифрикционных слоев, позволяющих воспринимать и гасить нагрузки от транспортного потока и внешних природных и техногенных факторов [5]. Постоянный прогресс материаловедения в области создания функциональных полимерных и композиционных материалов ставит перед инженерами и исследователями задачи об анализ возможности их применения в ответственных элементах мостов, таких как опорные части.

В рамках работы выполнено исследование теплофизических и реологических свойств полимерных и смазочных материалах в широком диапазоне температур. Учет температурных режимов работы конструкций связан с расширением мостостроительной деятельности на регионы страны со сложными условиями эксплуатации.

Экспериментальные исследования включали термомеханический анализ поведения набора полимерных материалов: композиционный материал на основе фторопласта с дендритными бронзовыми включениями и дисульфидом молибдена (МАК (Ф4БР40М2)); сверхвысокомолекулярный полиэтилен (СВМПЭ) немецкого производства; Арфлон AR-200 (структурно-модифицированный политетрафторэтилен (ПТ-

ФЭ)); Арфлон AR-202 (спрессованная смесь порошков ПТФЭ и литейного кокса, обработанная высокотемпературной радиацией); Арфлон AR-204 (спрессованная смесь порошков ПТФЭ и углеволокна, обработанная высокотемпературной радиацией); композиционный материал на основе фторопласта, модифицированный углеродными волокнами (Суперфлувис SF-1); фторопласт-4. Такой набор антифрикционных материалов для исследования выбран из-за ряда факторов: часть материалов в настоящий момент применяется в мостостроительной области (МАК, СВМПЭ); часть материалов рассматриваются как перспективные, на основе многолетних научных исследований совместно с производственной компанией ООО «АльфатТех» г. Пермь (Арфлон AR-202, Суперфлувис SF-1). Исследования направлены на определения возможности перехода мостостроительных компаний на использование современных материалов с улучшенными физико-механическими, реологическими, фрикционными и эксплуатационными свойствами. Для сравнительного анализа поведения современных антифрикционных материалов в качестве контрольного образца выбран чистый фторопласт-4, как наиболее распространенный материал слоя скольжения классических опорных частей мостов.

Смазочные материалы используются для снижения трения на поверхностях сопряжения элементов опорных частей. В рамках работы выполнены экспериментальные исследования для набора смазочных материалов, применяемых в мостостроении: ЦИАТИМ-221; ЦИАТИМ-221F, ТОМФЛОН СВС 240 FM и ТОМФЛОН СК 170 FH.

На основе экспериментальных данных построена процедура численной идентификации вязкоупругих и вязкоупругопластических моделей поведения материалов: в рамках уравнений максвелловского типа с использованием рядов Прони и модели Ананд, полная модель Ананд с учетом зависимостей материальных констант от температуры.

В рамках работы получены определяющие соотношения, описывающие поведения материалов с учетом вязкости на широком диапазоне температур от -40 до $+80$ °С. Выполнена верификация на тестовых и модельных задачах с использованием конечно-элементного моделирования в прикладном пакете ANSYS Mechanical APDL. Исследовано поведение материалов при статическом и динамическом нагружении сферической опорной части Л-100 производства ООО «АльфаТех».

Литература

1. *Попов В.И.* . Мостостроение и материалы // Автомобильные дороги, **7(1088)** (2022), 6
2. *Nosov Y.O., Kamenskikh A.A.* Experimental Study of the Rheology of Grease by the Example of CIATIM-221 and Identification of Its Behavior Model // Lubricants, **11** (2023), 295
3. *Афанасьев А.А.* Цифровая трансформация машиностроения России в контексте четвертой промышленной революции // Вопросы инновационной экономики, **14:1** (2024), 221-240

4. *Eggert H., Kauschke W.* Structural Bearings. — Berlin, Germany, 2002.
5. *Bogdanova A.P., Kamenskikh A.A., Nosov Y.O.* The Geometric Configuration of Lubricant Recesses of the Polymer Sliding Layer of the Bearing // *Designs*, **7** (2023), 144

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПАНДЕМИИ С ДВУМЯ УСТОЙЧИВЫМИ СОСТОЯНИЯМИ ПО ПЕРЕСЕЧЁННОЙ МЕСТНОСТИ

В.О. Бугров, А.Э. Рассадин, М.И. Рубцов
bugrovvo@mail.ru, brat_ras@inbox.ru,
m.i.rubtsovmaxim@gmail.com

УДК 519.62

В докладе представлена простая математическая модель для описания распространения пандемии с двумя устойчивыми состояниями по пересечённой местности, основанная на использовании адвективного члена с коэффициентом, зависящим от пространственной координаты.

Ключевые слова: лагранжева координата, эйлерова координата, метод характеристик.

The spread of a pandemic with two stable states over rough terrain

The report presents a simple mathematical model for a describing the spread of a pandemic with two stable states over rough terrain, based on the use of an advective term with a coefficient depending on the spatial coordinate.

Keywords: Lagrangian coordinate, Eulerian coordinate, method of characteristics.

Пандемия COVID-19 в 2020-2022 годах вызвала всплеск интереса к задачам математической эпидемиологии (см. [1] и ссылки там). Однако среди всей этой массы появившихся за этот период времени статей лишь одна работа [2] может быть использована для оценки эффективности карантинных мероприятий при проникновении пандемий сквозь границы национальных государств.

В статье [3] идея работы [2] об описании миграции большой популяции с помощью адвективного члена была применена к заболеванию с двумя устойчивыми состояниями.

В данной работе рассматривается миграция большой популяции с двумя устойчивыми состояниями по пересечённой местности.

Бугров Владимир Олегович, ННМО (Нижний Новгород, Россия); Vladimir Bugrov (Nizhny Novgorod mathematical society, Nizhny Novgorod, Russia)

Рассадин Александр Эдуардович, аспирант, НИУ ВШЭ (Нижний Новгород, Россия); Alexander Rassadin (HSE University, Nizhny Novgorod, Russia)

Рубцов Максим Игоревич, студент бакалавриата, НИУ ВШЭ (Нижний Новгород, Россия); Maksim Rubtsov (HSE University, Nizhny Novgorod, Russia)

С математической точки зрения в рамках такой парадигмы эта проблема сводится к решению следующей задачи Коши на прямой $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x) \frac{\partial u}{\partial x} = u \ln u (1 - \ln^2 u), \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (1)$$

Задача Коши (1) решается с помощью метода характеристик:

$$u(x, t) = \exp \left[\frac{\ln u_0(Y(x, t))}{\sqrt{\ln^2 u_0(Y(x, t)) + [1 - \ln^2 u_0(Y(x, t))] \exp(-2t)}} \right], \quad (2)$$

где $y = Y(x, t)$ — связь между лагранжевой и эйлеровой координатой, соответствующая скорости переноса заболевания $c(x)$.

В работе выражение (2) исследовано для начального условия $u_0(x)$ в виде гауссоиды и двух различных зависимостей скорости переноса заболевания от пространственной координаты x вида: $c(x) = \cosh^{-1}(x)$ и $c(x) = 1 + (1 + \exp(-x))^{-1}$. Эти функции также могут служить нулевым приближением для асимптотического решения модификации задачи Коши (1) с помощью введения диффузионного члена с малым коэффициентом диффузии в рамках теории сингулярных возмущений [4].

Литература

1. *Криворотько О.И., Кабанихин С.И.* О математическом моделировании COVID-19 // Сиб. электрон. матем. изв., **20:2** (2023), 1211-1268.
2. *Аристов В.В., Строганов А.В., Ястребов А.Д.* Применение модели кинетического типа для изучения пространственного распространения COVID-19 // Комп. исслед. и моделир., **13:3** (2021), 611-627.
3. *Бугров В.О., Рассадин А.Э.* Модель распространения пандемии с двумя устойчивыми состояниями // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: X Международная научная молодёжная школа-семинар имени Е.В. Воскресенского (Саранск, 14-18 июля 2022 г.)-С. 40-48.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М: Высшая школа, 1990.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПАНДЕМИИ С ДВУМЯ УСТОЙЧИВЫМИ СОСТОЯНИЯМИ ПО ПЕРЕСЕЧЁННОЙ МЕСТНОСТИ

В.О. Бугров, А.Э. Рассадин,

М.И. Рубцов

bugrovvo@mail.ru, brat_ras@inbox.ru,

m.i.rubtsovmaxim@gmail.com

УДК 519.62

В докладе представлена простая математическая модель для описания распространения пандемии с двумя устойчивыми состояниями по пересечённой местности, основанная на использовании адвективного члена с коэффициентом, зависящим от пространственной координаты.

Ключевые слова: лагранжева координата, эйлерова координата, метод характеристик.

The spread of a pandemic with two stable states over rough terrain

The report presents a simple mathematical model for a describing the spread of a pandemic with two stable states over rough terrain, based on the use of an advective term with a coefficient depending on the spatial coordinate.

Keywords: Lagrangian coordinate, Eulerian coordinate, method of characteristics.

Пандемия COVID-19 в 2020-2022 годах вызвала всплеск интереса к задачам математической эпидемиологии (см. [1] и ссылки там). Однако среди всей этой массы появившихся за этот период времени статей лишь одна работа [2] может быть использована для оценки эффективности карантинных мероприятий при проникновении пандемий сквозь границы национальных государств.

В статье [3] идея работы [2] об описании миграции большой популяции с помощью адвективного члена была применена к заболеванию с двумя устойчивыми состояниями.

В данной работе рассматривается миграция большой популяции с двумя устойчивыми состояниями по пересечённой местности.

Бугров Владимир Олегович, ННМО (Нижний Новгород, Россия); Vladimir Bugrov (Nizhny Novgorod mathematical society, Nizhny Novgorod, Russia)

Рассадин Александр Эдуардович, аспирант, НИУ ВШЭ (Нижний Новгород, Россия); Alexander Rassadin (HSE University, Nizhny Novgorod, Russia)

Рубцов Максим Игоревич, студент бакалавриата, НИУ ВШЭ (Нижний Новгород, Россия); Maksim Rubtsov (HSE University, Nizhny Novgorod, Russia)

С математической точки зрения в рамках такой парадигмы эта проблема сводится к решению следующей задачи Коши на прямой $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x) \frac{\partial u}{\partial x} = u \ln u (1 - \ln^2 u), \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (1)$$

Задача Коши (1) решается с помощью метода характеристик:

$$u(x, t) = \exp \left[\frac{\ln u_0(Y(x, t))}{\sqrt{\ln^2 u_0(Y(x, t)) + [1 - \ln^2 u_0(Y(x, t))] \exp(-2t)}} \right], \quad (2)$$

где $y = Y(x, t)$ — связь между лагранжевой и эйлеровой координатой, соответствующая скорости переноса заболевания $c(x)$.

В работе выражение (2) исследовано для начального условия $u_0(x)$ в виде гауссоиды и двух различных зависимостей скорости переноса заболевания от пространственной координаты x вида: $c(x) = \cosh^{-1}(x)$ и $c(x) = 1 + (1 + \exp(-x))^{-1}$. Эти функции также могут служить нулевым приближением для асимптотического решения модификации задачи Коши (1) с помощью введения диффузионного члена с малым коэффициентом диффузии в рамках теории сингулярных возмущений [4].

Литература

1. *Криворотько О.И., Кабанихин С.И.* О математическом моделировании COVID-19 // Сиб. электрон. матем. изв., **20**:2 (2023), 1211-1268.
2. *Аристов В.В., Строганов А.В., Ястребов А.Д.* Применение модели кинетического типа для изучения пространственного распространения COVID-19 // Комп. исслед. и моделир., **13**:3 (2021), 611-627.
3. *Бугров В.О., Рассадин А.Э.* Модель распространения пандемии с двумя устойчивыми состояниями // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: X Международная научная молодёжная школа-семинар имени Е.В. Воскресенского (Саранск, 14-18 июля 2022 г.)-С. 40-48.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М: Высшая школа, 1990.

СРАВНЕНИЕ ВРЕМЕНИ ПРОВЕДЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ, ОПИСЫВАЕМЫХ КИНЕТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ.

О.А. Васильева
vasilievaoa@mgsu.ru

УДК 517.9

Для математического моделирования химических реакций с различным числом реагентов применяются дискретные кинетические системы уравнений. Рассмотрены математические модели, описываемые системами уравнений Карлемана, Годунова-Султагазина и Бродвелла. На основе их численного исследования проведено сравнение времени химических реакций с различным числом реагентов.

Ключевые слова: математическая модель, химическая реакция, кинетическая система уравнений.

On the rate of stabilization of solutions of the Cauchy problem for the two-dimensional kinetic Broadwell equation with periodic initial data (regular process)

Discrete kinetic systems of equations are used for mathematical modeling of chemical reactions with different numbers of reagents. Mathematical models described by the Carleman, Godunov-Sultagazin and Broadwell equation systems are considered. Based on their numerical study, a comparison of the times of chemical reactions with different numbers of reagents is made.

Keywords: mathematical model, chemical reaction, kinetic system of equations.

Исследуются процессы химических реакций, проводимых в бесконечном цилиндре для различного числа реагентов, а именно, для двух, трех и четырех реагентов. В качестве математических моделей указанных химических реакций рассматриваются задачи Коши для систем кинетических уравнений Карлемана, Годунова-Султагазина и Бродвелла для случая одной пространственной переменной [1-4]. На основе численного исследования математических моделей проведено сравнение времени проведения химических реакций с различным числом реагентов. Полученные численные результаты согласуются с имеющимися теоритическими результатами [5, 6].

Васильева Ольга Александровна, к.ф.-м.н., доцент, НИУ МГСУ (Москва, Россия); Российский химико-технологический университет имени Д. И. Менделеева, Высший химический колледж (Москва, Россия) Olga Vasilieva (Moscow State University Of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russia; Russian University of Chemical Technology named after D.I. Mendeleev, Higher Chemical College, Moscow, Russia)

Литература

1. *С. К. Годунов, У. М. Султангазин.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // *Успехи МН*(1974), т. XXVI, в. 3(159), стр. 3-51.
2. *Султангазин У.М.* Дискретные нелинейные Модели уравнения Больцмана. Алма-Ата: Наука, 1985.
3. *Васильева О.А.* Численное исследование системы уравнений Годунова — Султангазина. Периодический случай // *Вестник МГСУ.* 2016. №4., стр. 27-35.
4. *Васильева О.А.* Васильева Ольга Александровна Численное исследование системы уравнений Карлемана // *Вестник МГСУ.* 2015. №6. стр. 7-15.
5. *E. V. Radkevich, O. A. Vasil'eva* Generation of Chaotic Dynamics and Local Equilibrium for the Carleman Equation // *Journal of Mathematical Sciences*, 224, 764–795 (2017).
6. *Радкевич. Е. В., Васильева О. А., Филиппов Г. А.* О скорости стабилизации решений задачи Коши для двумерного кинетического уравнения Бродвелла с периодическими начальными данными. // *Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам.* - Суздаль: ВлГУ Владимир Владимир, 2024. - С. 243-244.

ПОСТРОЕНИЕ АППРОКСИМАЦИЙ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЙ ТЕОРИИ ПЕРКОЛЯЦИИ

Д.А. Черкашин, Ю.П. Вирченко
dmt.cherkashin@gmail.com, virch@bsu.edu.ru,

УДК 519.24

Разрабатывается метод аппроксимации вероятности перколяции на бесконечных графах. Он основан на конструировании последовательности «аппроксимирующих» бесконечных графов специального типа, называемых иерархическими. Вычисление вероятности перколяции сводится к анализу подходящего марковского ветвящегося процесса с дискретным временем.

Ключевые слова: бесконечный граф, вероятность перколяции, ветвящийся случайный процесс, надкритический режим.

Approximations constructing in problems of discrete percolation theory

A method for approximating the percolation probability on infinite graphs. It is based on the construction of a sequence of infinite graphs of a special type called the hierarchical ones. Calculating the percolation probability is reduced to analyzing a suitable Markov branching process with discrete time.

Keywords: infinite graph, percolation probability, branching random process, supercritical regime.

Рассматривается задача теории перколяции на бесконечном графе \mathbb{Z}^2 , называемом квадратной решеткой (см. [1]). Этот периодический граф при погружении в \mathbb{R}^2 определяется бинарным отношением смежности φ так, что $x\varphi y$, если $y = x \pm e_j$, $j \in \{1, 2\}$. Разрабатывается метод построения аппроксимаций для вероятности $P(c)$ перколяции на бесконечность из заданной вершины, то есть существования бесконечного несамопересекающегося пути γ по вершинам графа, в которых случайное бернуллиевское поле $\rho(x)$, $x \in \mathbb{Z}^2$ принимает значение 1 и $c = \Pr\{\rho(x) = 1\}$.

Метод основан на построении последовательности $\langle \Gamma_m; m \in \mathbb{N} \rangle$ бесконечных графов специального типа, которые названы *иерархическими*. Они получаются вырезанием из \mathbb{Z}^2 квадрата с размером $2m + 1$ и процедурой последовательного подклеивания к его внешним граничным вершинам таких же квадратов, совмещая нулевую вершину каждого из них с граничной вершиной квадрата, к которой производится

Черкашин Дмитрий Андреевич, аспирант, БГТУ (Белгород, Россия); Cherkashin Dmitriy (Belgorod State Technological University named V.G. Shukhov, Belgorod, Russia)

Вирченко Юрий Петрович, д.ф.-м.н., профессор, БГТУ имени В.Г.Шухова (Белгород, Россия); Virchenko Yuri (Belgorod State Technological University named V.G. Shukhov, Belgorod, Russia)

подклеивание. Решение задачи теории перколяции на иерархических графах сводится к решению алгебраического уравнения

$$Q(c) = \sum_{A \in \Gamma_m} Q^{|A|}(c) c^{|A|} (1-c)^{n-|A|} \quad (1)$$

для вероятности $Q(c) = 1 - P_m(c)$, где $P_m(c)$ — вероятность перколяции на графе Γ_m , которое имеет единственное решение, отличное от единицы при $c > c_*$, где c_* — т.н. порог перколяции, который является решением уравнения

$$1 = \sum_{A \in \Gamma_m} |A| c^{|A|-1} (1-c)^{n-|A|}.$$

Доказано, что выполняется аппроксимационное неравенство $P_m(c) \leq P(c)$. При этом имеет место предельное соотношение $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m(c) = P(c)$, что позволяет решать приближенно задачу перколяции на квадратной решетке. При $m = 0$ уравнением для $Q(c)$ принимает вид $Q(c) = 1 - c + cQ^4(c)$. Соответствующее значение порога $c_* = 0.25$. Получено и проанализировано уравнение следующего приближения с $m = 1$. Уравнение (1) имеет степень 12

$$\begin{aligned} q = & 1 - c + c(1-c)^4 + 4c^2(1-c)^5 q + 2c^3(1-c)^5 [3 - 2c] q^2 + \\ & + 4c^3(1-c)^4 [2 + c(1-c)] q^3 + c^4(1-c)^4 [20 - 7c] q^4 + 4c^4(1-c)^3 [1 + 4c(1-c)] q^5 + \\ & + 8c^5(1-c)^3 [3 - c] q^6 + 24c^6(1-c)^3 q^7 + 2c^6(1-c)^2 [6 - c] q^8 + 16c^7(1-c)^2 q^9 + \\ & + 2c^7(1-c^2) q^{10} + 4c^8(1-c) q^{11} + c^9 q^{12} \end{aligned}$$

с $q = Q(c)$. Для порога перколяции в этом приближении, получается значение (с недостатком) $c_* = 0.343$.

Достоинством предложенной схемы аппроксимации вероятности перколяции является то, что она, наряду со сходимостью аппроксимаций к истинному значению этой величины, дает для нее гарантированные верхние оценки.

Литература

1. *Hammersley J.M.* Percolation processes: lower bounds for the critical probability // *Ann. Math. Statistics*, **28**:3 (1957) 790-795.

**АКУСТИЧЕСКОЕ СКАНИРОВАНИЕ
НИЗКОПРОНИЦАЕМЫХ ПЛАСТОВ С ТРЕЩИНАМИ
ГРП ЧЕРЕЗ ПЕРЕСЕЧЕННУЮ СКВАЖИНУ С
ФЛЮИДОМ**

Э.В. Галиакбарова, З.Р. Хакимова, А.О. Пангаева
emi.galiakbar@yandex.ru, zulfya.hakimova@yandex.ru,
nastya.pangaeva@yandex.ru

УДК 532.59

Изучается возможность определения проводимости трещины с помощью акустических методов.

Ключевые слова: пласт, трещина гидроразрыва, жидкость, импульс, давление.

Acoustic scanning of low-permeability formats with fractures through a crossed well with fluid

The possibility of determining the conductivity of a fracture using acoustic methods is being studied.

Keywords: formation, hydraulic fracture, liquid, impulse, pressure.

В работе теоретически исследуется низкопроницаемый пласт с симметричными гидроразрывными трещинами. Трещина рассмотрена как пространство между пористыми проницаемыми плоскопараллельными стенками, закрепленными пропантом, бесконечной длины. Полагается, что в скважине с флюидом (водой или нефтью) создается акустический сигнал конечной длительности. В модели учитывается затухание сигнала происходит из-за вязкости флюида, которая проявляется в пограничном слое вблизи внутренних стенок скважины. В модели принята билинейная схема фильтрации флюида из трещины ГРП в пласт. Задачи решаются в два этапа. На первом этапе аналитически строится дисперсионные уравнения для затухающих волн в скважине. На втором этапе с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье восстанавливается динамика сигнала в алгоритмических датчиках давления на устье и забое скважины. Получено, возможно диагностировать проводимость трещин ГРП, которые расположены под произвольным углом относительно скважины по возникающим импульсам разгрузки. Точность метода повышается при сканировании с помощью

Галиакбарова Эмилия Вильевна, профессор, д-р физ.-матн., УГНТУ (Уфа, Россия); Emiliya Galiakbarova (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

Хакимова Зульфия Разифовна, доцент, канд. физ.-мат. наук, УГНТУ (Уфа, Россия); Zulfya Khakimova (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

Пангаева Анастасия Олеговна, магистрант, IT-институт, МАЭ09-24-02, УГНТУ (Уфа, Россия); Anastasiya Pangaeva (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

зонда длиной несколько метров непосредственно в открытом участке скважины из-за возможности применения коротких импульсов в более узком канале между стенкой скважины и зондом.

Литература

1. *Галиакбарова Э.В.* Влияние проводимости гидроразрывной трещины на возможность диагностирования с помощью акустического «телевизора» // Вестник Башкирск. ун-та. 2021. Т. 26. №4. С. 866 - 870.
2. *V.Sh. Shagapov, E. V. Galiakbarova, Z. R. Khakimova* ACOUSTIC SOUNDING OF HYDRAULIC FRACTURES IN A LOW-PERMEABILITY RESERVOIR // Mathematics 2023, 11(1), 97; <https://doi.org/10.3390/math11010097>
3. *Башмаков Р.А., Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р., Шагапов В.Ш.* К теории метода «эхоскопии» призабойной зоны скважины в низкопроницаемом пласте, подверженном ГРП // Прикладная математика и механика. 2023. Т. 87. № 2. С. 314-326.
4. *Шагапов В.Ш.* Избранные труды. Составители: Галиакбарова Э.В. – Уфа, Медиа Принт, 2023. – 308 с.
5. *Галиакбарова Э.В.* Акустическое сканирование призабойной зоны скважины в пластах с гидроразрывными трещинами / Э. В. Галиакбарова, З. Р. Хакимова // XIII Всероссийский Съезд по теоретической и прикладной механике: Сборник тезисов докладов. В 4-х томах, Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 года. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2023. – С. 1123-1124.

ТЕМПОРАЛЬНЫЕ ПОДХОДЫ К ИСЛЕДОВАНИЮ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ ХЕМОМЕТРИКИ

Н.А. Васенина, Г.К. Галина, И. А. Гареев, К. О. Лебедев, Ю.

А. Харламова, Д. Л. Мингазов

zhiber.na@gmail.com, g.k.galina@mail.ru,

ildargareev2002@mail.ru, lebedevk60@mail.ru,

harlamova03@yandex.ru, denchig.mengazov@bk.ru

УДК 517.518

В настоящее время в области информационных технологий все большее внимание уделяется так называемым темпоральным базам данных, разрабатываются новые методы их создания и обработки с использованием цифровых технологий. Это является дополнительным побудительным мотивом к получению и исследованию таких данных с использованием мультисенсорных систем, и позволит с более высокими показателями точности прогнозировать свойства и распознавать сложные химические объекты, изучать физико-химические процессы с их участием, в том числе в присутствии нанокolicеств или следов веществ.

Ключевые слова: «электронный язык», хемометрика, метод главных компонент, темпоральность, распознавание образов.

Temporal approaches to the study of electrochemical dynamical systems with using projection methods of chemometrics

Currently, in the field of information technology, increasing attention is being paid to the so-called temporal databases, new methods of their creation and processing using digital technologies are being developed. This is an additional incentive to obtain and study such data using multisensory systems, and will allow predicting properties and recognizing complex chemical objects with higher accuracy,

Васенина Наталья Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Natalia Vasenina (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Галина Галия Кабировна, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Galiya Galina (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Гареев Ильдар Альбертович, студент, УУНиТ (Уфа, Россия); Ildar Gareev (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Лебедев Кирилл Олегович, студент, УУНиТ (Уфа, Россия); Kirill Lebedev (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Харламова Юлия Андреевна, студент, УУНиТ (Уфа, Россия); Julia Kharlamova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Мингазов Денис Ленарович, студент, УУНиТ (Уфа, Россия); Denis Mingazov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

studying physico-chemical processes involving them, including in the presence of nanoparticles or traces of substances.

Keywords: "electronic language", chemometrics, principal component method, temporality, pattern recognition.

На наш взгляд, темпоральность, как базовая площадка для характеристики нового «времени» или временной структуры динамических систем в естественных науках, позволяет себя распознать с использованием специальных приемов хеометрики (МГК и ПЛС). Так, например, на рисунке представлены результаты МГК-моделирования массива темпоральных данных электрохимического поведения различных электрохимических объектов типа «электрод/раствора» функционирующих в условиях циклической вольтамперометрии. В качестве исследуемых растворов использовали яблочные, лимонный и грушевый свежие соки.

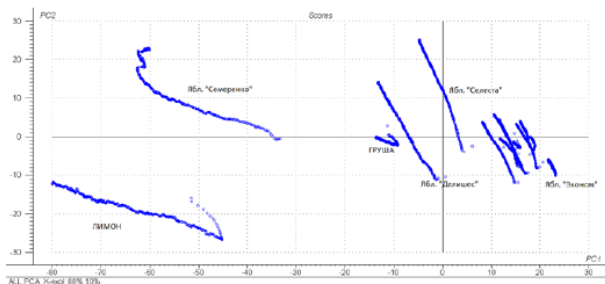


Рис. 1: «Карты образцов»/графики счетов МГК-моделирования амперометрических данных яблок, лимона и груши на плоскости ГК1-ГК2

Как видно на рисунке, в пространстве трех главных компонент все образцы занимают свое определенное место. Темпоральный способ заключается в регистрации для каждого образца последовательно 400 амперограмм, которые преобразуются по методу главных компонент в одну точку на каждой из плоскостей. Применение математического аппарата метода главных компонент в сочетании с темпоральным подходом к накоплению полезной химической информации позволяет раскрыть пространственно-временную структуру электрохимической системы. Каждый образец имеет свою уникальную форму кривой темпорального дрейфа со своими стадиями, их количеством и протяженностью во времени. Применение проекционных методов хеометрики (начало развития начало 20 века) и темпорального способа регистрации вольтамперограмм (начало 21 века) не ограничивается только применением метода главных компонент и анализом графиков счетов исследуемых образцов. Динамику и количество стадий электрохимической эволюции электродов под действием электрического тока и химического

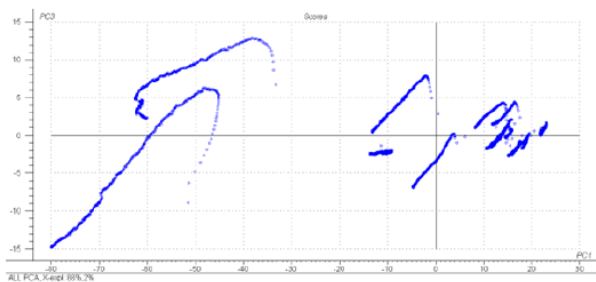


Рис. 2: «Карты образцов»/графики счетов МГК-моделирования амперометрических данных яблок, лимона и груши на плоскости ГК1-ГК3.

состава анализируемых растворов, а, следовательно, и его темпоральную структуру количественно описаны методом ПЛС – проекций на латентные структуры с использованием авторского подхода с ПЛС-t'-методикой, которая будет освящена применительно к яблочным образцам и различным материалам электродов (медь, алюминий и железо) в следующих наших работах.

Литература

1. *Nigmatullin R.R., Budnikov H.C., Khamzin A.A., Sidelnikov A.V., Maksyutova E.I.* Temporal multi-sensor system for voltammetric recognition of L- and D-tryptophan enantiomers based on generalized principal component analysis // *New Journal of Chemistry*, 2018. V. 42. № 1. P. 465-475.
2. *Nigmatullin R.R., Budnikov H.C., Sidelnikov A.V.* New approach for voltammetry near limit of detection: integrated voltammograms and reduction of measurements to an “ideal” experiment // *Electroanalysis*, 2015. V. 27. № 6. P. 1416-1426.

РЕГУЛЯРНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КВАЗИГИДРОДИНАМИКИ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Ф.А. Евсеев, fedor_evseev@rambler.ru

УДК 517.95

В работе рассматривается разрешимость аналога первой начальной краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды. При определенных условиях на данные показано, что существует единственное регулярное решение задачи локально по времени.

Ключевые слова: начально-краевая задача, квазигидродинамическая система, регулярное решение.

Regular Solvability of the first initial-boundary value problem for the quasihydrodynamics equations in the shallow water approximation

In this paper we consider the solvability of the analog of the first initial boundary value problem for the quasihydrodynamic system of equations in the shallow water approximation. Under certain conditions on the data, it is shown that there exists a unique regular solution of the problem locally in time.

Keywords: Initial-boundary value problem, quasi-hydrodynamic system, regular solution.

Рассмотрим вопрос о существовании регулярного решения аналога первой начально-краевой задачи для квазигидродинамической системы уравнений в приближении мелкой воды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(h\vec{w}) &= \operatorname{div}(h\vec{w}), \quad \vec{w} = \tau((\vec{u}, \nabla)\vec{u} + g\nabla h), \\ \frac{\partial(h\vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(h\vec{u} \otimes \vec{u}) + g\nabla\left(\frac{h^2}{2}\right) &= 2\operatorname{div}(\nu h\hat{\sigma}(\vec{u})) + \operatorname{div}(h\vec{w} \otimes \vec{u} + h\vec{u} \otimes \vec{w}), \\ (t, x) \in Q &= (0, T) \times G, \quad G \subset \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

- где тензор скоростей деформации $\hat{\sigma}$ имеет форму:

$$\hat{\sigma}(\vec{u}) = \hat{\sigma} = \frac{1}{2}[(\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T], \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ix_j} + u_{jx_i}),$$

G – ограниченная область с границей $\Gamma \in C^2$, коэффициент кинематической вязкости жидкости ν , характерное время релаксации τ считаются заданными положительными константам. Пусть $S = (0, T) \times \Gamma$.

Евсеев Федор Александрович, аспирант, ЮГУ (Ханты-Мансийск, Россия); Fedor Evseev (Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russia)

Вектор $\vec{u} = (u_1(t, x_1, x_2), u_2(t, x_1, x_2))$ – усредненная по высоте скорость течения. Величина $h = h(t, x_1, x_2)$ интерпретируется как расстояние по вертикали от ровного дна водоема, расположенного в плоскости x_1ox_2 , до свободной поверхности жидкости. Система включает константу Галилея $g = 9.8 \text{ m/c}^2$, равную модулю ускорения свободного падения в гравитационном поле Земли.

Система (1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$\vec{u}|_S = 0, (\vec{w} \cdot \vec{n})|_S = 0, \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(x_1, x_2), h|_{t=0} = h_0(x_1, x_2). \quad (2)$$

где \vec{n} – вектор внешней единичной нормали к Γ .

Система (1) представляет собой регуляризованную систему Сен-Венана, аналогом которой в газовой динамике является квазигазодинамическая система уравнений, полученная Елизаровой и Четверушкиным [1, 2]. Вывод регуляризованных уравнений Сен-Венана и их подробный анализ представлен в [3]. Ранее вопросы регулярной разрешимости задачи (1)-(2) не рассматривались.

В настоящей работе мы показываем, что в каждом из случаев при определенных условиях на данные задача (1)-(2) локально по времени имеет единственное решение, принадлежащее классу $W_p^{1,2}(Q)$.

Литература

1. Четверушкин Б.Н. Кинетически согласованные схемы в газовой динамике // МГУ, Москва, 1999.
2. Elizarova T. G. Quasi-Gas Dynamic Equations // Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg, 2009.
3. Шеретов Ю. В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Москва; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009. 400 с.

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ГУРВИЦЕВОСТИ ПОЛИНОМОВ В ПРОСТРАНСТВЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.П. Жабко, Д.Н. Гапонов

a.zhabko@spbu.ru, st076870@student.spbu.ru

УДК 517.929.4

В работе рассматривается вопрос оценки области гурвицевости полиномов. Получены меры областей устойчивости в различных пространствах при некоторых достаточных условиях устойчивости. Произведено сравнение потерь достаточных условий.

Ключевые слова: устойчивость полиномов, коэффициенты устойчивости, гурвицевость.

Estimation of the Hurwitz domain of polynomials in the coefficient space

In this paper we consider the question of estimating the Hurwitz region of polynomials. Measures of stability regions in different spaces under some sufficient stability conditions are obtained. A comparison of losses of sufficient conditions is made.

Keywords: polynomial stability, determining coefficients, Hurwitz stability

Рассмотрим полином с вещественными коэффициентами

$$P(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k.$$

Обозначим коэффициенты устойчивости

$$\sigma_j = \frac{p_{j-1} p_{j+2}}{p_j p_{j+1}}, \quad j = \overline{1, n-2}.$$

В работах [1–8] были показаны достаточные условия устойчивости, которые выражаются через σ_j коэффициенты. Для анализа области устойчивости вводится редуцированный полином

$$Q(x) = x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \sum_{k=0}^{n-3} q_k x^k,$$

коэффициенты которого определяются рекурсивной формулой

$$q_{n-3} = \sigma_1, \quad q_{n-k} = \sigma_{k-2} \prod_{j=0}^{k-1} q_{n-j}.$$

Жабко Алексей Петрович, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия); Alexey Zhabko (Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia)

Гапонов Дмитрий Николаевич, магистр, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия); Dmitry Gaponov (Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia)

Далее в работе доказана эквивалентность задачи устойчивости для полиномов $P(x)$ и $Q(x)$, а также с помощью полинома $Q(x)$ проводится анализ и оценка областей гурвицевости полиномов.

Литература

1. Xie X. A new criterion of linear system stability // Special Issue on Basic Theory of Transaction of Northeast Institute of Technology of China. 1963. Vol. 1. P. 26–30.
2. Nie Y. A new criterion of Hurwitz polynomial // Mechanics. 1976. Vol. 2. P. 110–116.
3. Липатов А. В., Соколов Н. И. О некоторых достаточных условиях устойчивости и неустойчивости линейных непрерывных стационарных систем // Автоматика и телемеханика. 1978. Вып. 9. С. 30–37.
4. Масленников В. В. Гипотеза о существовании простого аналитического достаточного условия устойчивости // Автоматика и телемеханика. 1984. Вып. 2. С. 160–161.
5. Клепцын А. Ф. Об одном достаточном условии устойчивости многочлена // Автоматика и телемеханика. 1984. Вып. 10. С. 175–177.
6. Nie Y., Xie X. New criteria for polynomial stability // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 1987. Vol. 4. No 1. P. 1–12.
7. Hou X., Wang X. A generalization of Xie-Nie stability criterion: Computer Algebra and Geometric Algebra with Applications. Berlin: Springer, 2004. P. 65–71.
8. Жабко И. А. Достаточные условия устойчивости полиномов с вещественными коэффициентами // Актуальные проблемы математики и информатики. Труды математического факультета. 2010. № 1. С. 52–62.

УСЛОВИЕ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ

А.П. Жабко, Н.А. Жабко

zhabko.apmath.spbu@mail.ru, ztasha@mail.ru

УДК 517.929.4

Для линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений известны условия Ляпунова существования и единственности решения соответствующих матричных уравнений Ляпунова. Это условие формулируется в терминах собственных чисел матрицы системы. В данной работе рассматриваются системы однородных дифференциальных уравнений, и предлагается вариант условия Ляпунова, играющий аналогичную роль. В конце работы рассмотрены приложения полученных результатов.

Ключевые слова: однородные дифференциальные уравнения, функции Ляпунова, устойчивость, условие Ляпунова.

Lyapunov conditions for homogeneous systems

The Lyapunov conditions for the existence and uniqueness of a solution to the matrix Lyapunov equations are known. These conditions are formulated in terms of the eigenvalues of matrices of differential and difference linear systems. In this paper, systems of homogeneous differential equations are considered, and version of the Lyapunov condition is proposed that play a similar role. At the end of the paper, applications of the results obtained are considered.

Keywords: homogeneous differential equations, Lyapunov functions, stability, Lyapunov condition.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^T \cdot f(x) = W(x), \quad (1)$$

где предполагаем функции $f(x)$ и $W(x)$ однородными функциями порядков $\mu > 1$ и $l = k + \mu - 1$ соответственно. Задача заключается в определении условий на функцию $f(x)$, при которых уравнение (1) имеет решение в виде однородной порядка $k > 1$ функции $V(x)$.

Жабко Алексей Петрович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой теории управления, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия); Alexey Zhabko (St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia)

Жабко Наталия Алексеевна, к.ф.-м.н., доцент, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия); Natalia Zhabko (St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia)

Далее будем считать функции $V(x)$, $f(x)$ и $W(x)$ положительными однородными, определенными в пространстве R^n , непрерывными и непрерывно дифференцируемыми. Тогда существует единственное непрерывно дифференцируемое по своим переменным решение $x(t - t_0, x_0)$ вспомогательной системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (2)$$

Очевидно, что

$$\frac{dV(x(t, x_0))}{dt} = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right)^T \cdot f(x).$$

Все дальнейшие утверждения основаны на анализе поведения проекций решений системы (2) на поверхность $\|x\| = 1$. С этой целью введём функцию $y(t) = \frac{1}{\|x(t)\|} \cdot x(t)$, которая является проекцией решения $x(t, x_0)$ в фазовом пространстве R^n на поверхность $\|x\| = 1$, и функцию $\tau = \int_0^t \|x(\nu, x_0)\|^{\mu-1} \cdot d\nu$. Тогда решение системы

$$\frac{dy}{d\tau} = f(y) - (y, f(y)) \cdot y \quad (3)$$

с начальными условиями $\tau_0 = 0, y_0 = \frac{1}{\|x_0\|} \cdot x_0$ удовлетворяет равенству

$$y(\tau, x_0) = \frac{1}{\|x(t, x_0)\|} \cdot x(t, x_0).$$

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Ляпунова для однородных функций, если для любой положительно однородной функции $W(x)$ порядка $l = k + \mu - 1$ ($k > 1, \mu > 1$) существует решение уравнения (1) в виде положительно однородной порядка $k > 1$ функции $V(x)$.

Основные результаты

Теорема 1. Если система уравнений (2) имеет равновесное $x(t, \tilde{x}_0) \equiv \tilde{x}_0 \neq 0$ или периодическое $x(L, \hat{x}_0) = \hat{x}_0$ решение, то функция $f(x)$ не удовлетворяет условию Ляпунова.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Ляпунова (определение 1) для положительно однородных функций.

Если для некоторой точки $\tilde{x}_0 \neq 0$ выполнено условие $f(\tilde{x}_0) = \alpha(\|\tilde{x}_0\|) \cdot \tilde{x}_0$, причём $\alpha(\|\tilde{x}_0\|) \neq 0$, или для некоторого решения $x(t, \hat{x}_0)$ уравнения (2) выполнено условие $x(L, \hat{x}_0) = \alpha \cdot \hat{x}_0$, причём $\alpha \neq 1$, то для любой положительно однородной функции $W(x)$ порядка $l = k + \mu - 1$

($k > 1, \mu > 1$) любые два решения $\tilde{V}(x)$ и $\hat{V}(x)$ уравнения (1) удовлетворяют равенствам

$$\tilde{V}(\gamma \cdot \tilde{x}_0) = \hat{V}(\gamma \cdot \tilde{x}_0), \quad \gamma \geq 0$$

или

$$\tilde{V}(x(t, \gamma \cdot \hat{x}_0)) = \hat{V}(x(t, \gamma \cdot \hat{x}_0)), \quad \gamma \geq 0, t \in (-\infty, +\infty).$$

Следствие 1. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 для всех точек, то имеет место единственность решения уравнения (1).

Далее рассмотрим функцию $f(x)$, удовлетворяющую определению 1, и решение $x(t, x_0)$ системы (2), отличное от рассмотренных в теореме 2 решений. Пусть интервал существования решения есть $t \in (a, b)$. Пусть функция $W(x)$ является положительно однородной, положительно определённой в R^n , непрерывной и непрерывно дифференцируемой, а функция $V(x)$ есть решение уравнения (1). Тогда возможны следующие альтернативы.

1. Существует последовательность $\{t_j\}_1^\infty \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a$ или b такая, что

$$\{x(t_j, x_0)\}_1^\infty \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

2. Существует последовательность $\{t_j\}_1^\infty \xrightarrow{j \rightarrow \infty} a$ или b такая, что

$$\{x(t_j, x_0)\}_1^\infty \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \omega \neq 0.$$

3. Существуют бесконечные пределы

$$\|x(t, x_0)\| \xrightarrow{t \rightarrow a} \infty \quad \text{и} \quad \|x(t, x_0)\| \xrightarrow{t \rightarrow b} \infty.$$

Замечание. Поскольку функция $f(x)$ определена в R^n , то в случае выполнения альтернативы 1 или 2 справедливы равенства $a = -\infty$ или $b = +\infty$.

Лемма 1. В случае альтернативы 1 верно равенство

$$V(x_0) = \tilde{V}(x_0) - \hat{V}(x_0) = 0.$$

Лемма 2. В случае альтернативы 2 верно равенство

$$V(x_0) = \tilde{V}(x_0) - \hat{V}(x_0) = 0.$$

Лемма 3. В случае альтернативы 3 верно равенство

$$V(z) = \tilde{V}(z) - \hat{V}(z) = 0.$$

Теорема 3. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Ляпунова, то для любой функции $W(x)$ существует единственное решение уравнения (1).

Литература

1. Александров А.Ю., Жабко А.П. Об асимптотической устойчивости решений нелинейных систем с запаздыванием. // Сиб. мат. журнал, **53**:3 (2012), 495–508.
2. Зубов В.И. Устойчивость движения. — М.: Высш. школа, 1973, 272 с.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭВРИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

А.П. Кашникова, Э.Н. Мифтахов
a.kashnikova98@yandex.ru, promif@mail.ru

УДК 517.977.5

В статье рассматриваются особенности задачи управления физико-химическими процессами, достоинства и недостатки генетических методов.

Ключевые слова: эвристический метод, генетический алгоритм, задача оптимизации

Using heuristic methods to solve problems of optimization of complex physical and chemical processes

The article discusses the features of the problem of controlling physical and chemical processes, the advantages and disadvantages of genetic methods.

Keywords: heuristic method, genetic algorithm, optimization problem

К ряду ключевых практически значимых проблем при организации комплексного исследования сложных химико-технологических систем можно отнести решение задачи планирования производства, которое включает в себя поиск оптимальных решений для повышения эффективности производства и минимизации затрат. Эмпирические исследования зачастую невозможны из-за высокой стоимости исходных материалов и необходимости непрерывной работы действующего производства, в связи с чем все более значимыми становятся математические методы, которые позволяют с помощью организации серии вычислительных испытаний определить значимые закономерности процесса и найти оптимальные условия.

Математическое описание сложных процессов должно учитывать множество факторов, а высокая размерность и нелинейность затрудняет использование классических методов оптимизации.

В условиях наличия достаточно большого количества параметров системы наиболее эффективными являются эвристические методы [1],

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2023-0002)

Кашникова Анастасия Павловна, аспирант, СФ УУНиТ (Стерлитамак, Россия); Anastasia Kashnikova (Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia)

Мифтахов Эльдар Наилевич, д.ф.-м.н., научный сотрудник, УУНиТ (Уфа, Россия); Eldar Miftakhov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

которые дают нужные инструменты для анализа и усовершенствования кинетических параметров, реакционных механизмов и условий реакции. Среди этих алгоритмов выделяются эволюционные методы и, в частности, генетические алгоритмы [2]. Они могут работать с крупными пространствами поиска и сложными функциями оценки.

К сожалению, генетические алгоритмы, работающие со сложными пространствами поиска, нуждаются в значительных вычислительных ресурсах. Развитие облачных технологий и возможность распараллеливания позволяет минимизировать эти проблемы при оптимизации сложных многофакторных систем [3]. Также серьезным недостатком алгоритма является низкая эффективность в ситуациях, когда параметры алгоритма не настроены для конкретной задачи оптимизации, что обуславливает большой интерес к изучению воздействия параметров генетических алгоритмов на результат решения задач оптимизации.

Литература

1. *Пантелеев А.В.* Метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума. — М: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009.
2. *Карпенко А.П.* Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой: учеб. пособие. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.
3. *Andravs S., Shmatkov S., Bulavin D.* Using genetic algorithms for solving the comparison-based identification problem of multifactor estimation model // Journal of Software Engineering and Applications, **6:7** (2013), 349-353.

ФОРМУЛИРОВКА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ГОРЕНИЯ И ДЕТОНАЦИИ В ТРУБАХ С УЧАСТКАМИ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Е.П. Канонирова, А.Я. Гильманов, А.П. Шевелёв
stud0000123797@study.utmn.ru, a.y.gilmanov@utmn.ru,
a.p.shevelev@utmn.ru

УДК 536.711

Рассматривается актуальная задача гашения волн горения и детонации в трубопроводах, транспортирующих унитарное топливо, за счёт наличия участков их расширения. Формулируется математическая модель такого процесса с учётом цилиндрической симметрии задачи. Проводится процедура обезразмеривания и выделение комплексов, позволивших сформулировать физическую постановку задачи в рамках обоснованных допущений на основе критериального анализа. Показано, что определяющую роль в процессе распространения волн горения и детонации оказывают реакции горения унитарного топлива.

Ключевые слова: физико-математическая модель, обезразмеривание, механика многофазных систем, критериальный анализ, горение, унитарное топливо

Formulation of a physical and mathematical model of combustion and detonation waves propagation in pipelines with variable cross-section

The actual problem of combustion and detonation waves decline in pipelines transporting unitary fuel due to the presence of their expansion parts is considered. A mathematical model of such a process is formulated considering the cylindrical symmetry of the problem. The procedure of de-dimensioning and introduction of complexes is carried out, which made it possible to formulate the physical formulation of the problem within the framework of reasonable assumptions based on a criterion analysis. It is shown that the combustion reactions of unitary fuels play a decisive role in the propagation of combustion and detonation waves.

Канонирова Елизавета Петровна, магистрант, ТюмГУ (Тюмень, Россия);
Elizaveta Kanonirova (University of Tyumen, Tyumen, Russia)

Гильманов Александр Янович, к.ф.-м.н., доцент, ТюмГУ (Тюмень, Россия);
Alexander Gilmanov (University of Tyumen, Tyumen, Russia)

Шевелёв Александр Павлович, к.ф.-м.н., профессор, ТюмГУ (Тюмень, Россия);
Alexander Shevelev (University of Tyumen, Russia)

Keywords: physical and mathematical model, de-dimensioning, mechanics of multiphase systems, criterion analysis, combustion, unitary fuel.

В различных технологических процессах актуальной задачей является безопасная транспортировка унитарного топлива по трубопроводам. В ходе такого процесса могут возникать волны горения и детонации. Для предотвращения их развития за счёт гашения перспективным способом является добавление участков большего диаметра в трубопроводе, где происходит адиабатическое расширение газовой фазы. Для достижения максимальной эффективности гашения необходимо проводить моделирование для определения параметров трубопровода. Поэтому целью работы является формулировка физически обоснованной математической модели распространения волн горения и детонации в трубопроводах переменного сечения.

В основе предложенной модели лежит развитие подходов Р.И. Нигматулина, А.Г. Кутушева, С.П. Родионова, И.К. Гималтдинова. Рассматривается трёхфазная система, состоящая из газообразных продуктов горения, газов, не вступающих в реакцию горения, и частиц унитарного топлива. Записываются законы сохранения массы и импульса фаз, закон сохранения количества частиц, закон сохранения энергии гетерогенного потока, уравнение притока тепла к частицам топлива с учётом цилиндрической симметрии задачи, а также замыкающие соотношения. Формулируются начальные и граничные условия, соответствующие началу процессов горения и детонации.

Осуществляется процедура обезразмеривания записанной системы уравнений и выделяются безразмерные комплексы, характеризующие особенности процесса. С помощью критериального анализа проводится формулировка физически обоснованных допущений.

На основе полученной физико-математической модели проведён численный эксперимент. Система уравнений приводится к конечно-разностному виду на основе методов контрольного объёма и крупных частиц, который подтвердил возможность гашения волн горения и детонации. Полученный программный продукт позволит провести анализ чувствительности модели и выделить ряд параметров, преимущественно влияющих на процесс распространения волн горения и детонации, определить эффективные характеристики трубопровода.

На основе критериального анализа показано, что определяющую роль в процессе распространения волн горения и детонации оказывают реакции горения унитарного топлива. Определено, что термобарическими условиями в начальный момент времени можно пренебречь по сравнению с условиями на фронте волны.

Литература

1. Нигматулин Р.И., Вайнштейн П.Б., Азатов И.Ш., Пыж В.А. Структура детонационных волн в двухфазных дисперсных средах //

Химическая физика процессов горения и взрыва, (1977), 100-103.

2. *Кутушев А.Г., Родионов С.П.* Взаимодействие слабых ударных волн со слоем порошкообразной среды // Физика горения и взрыва, **36**:3, (2000), 131-140.

3. *Гималтдинов И.К., Левина Т.М., Кучер А.М.* Зависимость характеристик детонационных волн в многокомпонентной пузырьковой жидкости от начального давления // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. **329**:12, (2018), 73-79.

**АНАЛИЗ ТЕМПОРАЛЬНЫХ ОТКЛИКОВ
МЕТАЛЛОКСИДНОГО "ЭЛЕКТРОННОГО НОСА" ПО
МЕТОДУ ПРОЕКЦИЙ НА ЛАТЕНТНЫЕ СТРУКТУРЫ
ВОЛЬТАМПЕРОМЕТРИЧЕСКИХ БАЗ ДАННЫХ**

**Л.Д. Шарипова, А. С. Квятковская, И. А. Гареев,
Н.А. Васенина, И. Ю. Черданцев, А. В. Зеркина
liliyadamirovna98@mail.ru, kvyatkovskay@mail.ru,
ildargareev2002@mail.ru, zhiber.na@gmail.com,
igor_cherd@mail.ru, arsenkuzh@outlook.com**

УДК 517.518

«Вольтамперометрический нос» представляет собой инновационный инструмент, позволяющий количественно описывать уровни загрязнения воздуха. В нем используются датчики, которые обладают различной парциальной чувствительностью к анализируемому облаку запахов. В то же время каждый сенсор массива в наборе имеет свой собственный индивидуальный профиль отклика, отвечающий за определенный диапазон тестируемых запахов. В результате обобщенный профиль суммарной реакции сенсоров электронного носа для различных запахов имеет довольно сложную структуру и может быть расшифрован для целей идентификации запаха только с использованием хемометрических (компьютерных) методов распознавания образов и классификации.

Ключевые слова: базы данных, вольтамперограмма, ПЛС-параметр

Analysis of temporal responses of a metal oxide "electronic nose" using the projection method on latent structures of voltammetric databases

The Voltammetric Nose is an innovative tool for quantifying air pollution levels. It uses sensors that have different partial sensitivity to the analyzed cloud of odors. At the same time, each sensor array

Шарипова Лилия Дамировна, аспирант, УУНиТ (Уфа, Россия); Lilia Sharipova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Квятковская Аделя Станиславовна, к.х.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Adele Kvyatkovskaya (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Гареев Ильдар Альбертович, студент, УУНиТ (Уфа, Россия); Idar Gareev (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Васенина Наталья Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Natalia Vasenina (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Черданцев Игорь Юрьевич, к. ф.-м. н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Igor Cherdantsev (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Зеркина Анастасия Васильевна, старший преподаватель, УУНиТ (Уфа, Россия); Anastasia Zerkina (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

in the kit has its own individual response profile, responsible for a certain range of tested odors. As a result, the generalized profile of the total response of electronic nose sensors for various odors has a rather complex structure and can be deciphered for odor identification purposes only using chemometric (computer) pattern recognition and classification methods.

Keywords: databases, voltammogram, PLS parameter

Эффективная обработка многомерных данных, полученных от массива сенсоров в режиме непрерывного функционирования, играет ключевую роль в аналитическом контроле производственных процессов и экологическом наблюдении. В работе количественно описали временные ряды токов – откликов «электронного носа» на суточное изменение состава воздуха жилищной зоны. Эксперимент начался 6 апреля в 9:48 и завершился 10 апреля в 00:00, то есть длился 4 суток. В течение этого времени каждые 6 секунд регистрировалась вольтамперограмма, с перерывами каждые 40 секунд. Полученный массив вольтамперограмм, состоящий из 970 записей, был подвергнут комбинаторному анализу с использованием МГК/ПЛС-моделирования. Данный анализ позволил установить, что величина измеряемого тока возрастает с увеличением концентрации загрязняющих веществ в воздухе. Проекция латентных структур (PLS) - это метод статистического и машинного обучения для анализа данных, который позволяет изучать скрытые (латентные) факторы, определяющие поведение данных. Этот метод используется для изучения скрытых или латентных факторов, которые определяют поведение данных, но не могут быть непосредственно измерены или наблюдаемы. Метод PLS позволяет анализировать данные, используя несколько зависимых переменных одновременно, что дает более полное представление о поведении данных воздушных масс как динамических систем.

С помощью первой Главной Компоненты определены: количество стадий и скрытых обобщенных сигналов, которые в целом определяют темпоральность всей динамической системы воздушных масс, то есть ее количество стадий, их амплитуды и колебания, протяженность. На рисунке приведена диаграмма распределения интегрального параметра насыщенности загрязнителями воздушных масс жилой зоны, зарегистрированного в течение четырех суток.

Результаты показали, что интензивность ПЛС-параметра «электронного носа» повышается в период утренних и вечерних часов рабочих дней. Используя мультисенсорные системы, основанные на газочувствительных сенсорах с изменяемой чувствительностью, и методы анализа данных, такие как хеометрия и машинное обучение, удалось создать систему для обнаружения и анализа сложных смесей запаховых соединений.



Рис. 1: ПЛС-диаграмма распределения параметра насыщенности загрязненными вещества атмосферного воздуха жилой зоны.

Литература

1. *Nigmatullin R.R., Budnikov H.C., Khamzin A.A., Sidelnikov A.V., Maksytova E.I.* Temporal multi-sensor system for voltammetric recognition of L- and D-tryptophan enantiomers based on generalized principal component analysis // *New Journal of Chemistry*, 2018. V. 42. № 1. P. 465-475.
2. *Nigmatullin R.R., Budnikov H.C., Sidelnikov A.V.* New approach for voltammetry near limit of detection: integrated voltammograms and reduction of measurements to an “ideal” experiment // *Electroanalysis*, 2015. V. 27. № 6. P. 1416-1426.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА МЕЖДУ ПЕРСПЕКТИВНЫМИ КОНСТРУКЦИЯМИ ТЕРМОСТАБИЛИЗАТОРА И СВАИ

А.С. Ким, А.Я. Гильманов, А.П. Шевелёв
3659696@mail.ru, a.y.gilmanov@utmn.ru, a.p.shevelev@utmn.ru

УДК 536.242

Использование термостабилизаторов актуально в условиях криолитозоны для сохранения устойчивости возведённых зданий и сооружений. Моделирование многофазных потоков в таких устройствах позволяет оценить их параметры до установки в мерзлый грунт. Целью работы является создание физико-математической модели для расчёта перспективных конструкций термостабилизаторов. Модель использует основные уравнения теплопереноса с выделением характерных участков процесса. Определены параметры хладагента в восходящем потоке и распределение температуры грунта по глубине..

Ключевые слова: термостабилизатор, криолитозона, вечная мерзлота, хладагент, физико-математическое моделирование, термосифон.

Modeling of heat transfer between promising designs of a heat stabilizer and a pile

The use of heat stabilizers is relevant in cryolithozone conditions to preserve the stability of constructed buildings and structures. Modeling of multiphase flows in such devices makes it possible to estimate their parameters before installation in frozen ground. The aim of the work is to create a physical and mathematical model for calculating promising designs of heat stabilizers. The model uses the basic equations of heat and mass transfer with the allocation of characteristic sections of the process. The parameters of the refrigerant in the upstream flow and the distribution of soil temperature over depth are determined.

Keywords: heat stabilizer, cryolithozone, permafrost, refrigerant, physical and mathematical modeling, thermosyphon.

Ким Андрей Сергеевич, заместитель директора, ООО "Альянс" (Тюмень, Россия); Andrey Kim ("Alians" LLC, Tyumen, Russia)

Гильманов Александр Янович, к.ф.-м.н., доцент, ТюмГУ (Тюмень, Россия); Alexander Gilmanov (University of Tyumen, Tyumen, Russia)

Шевелёв Александр Павлович, к.ф.-м.н., профессор, ТюмГУ (Тюмень, Россия); Alexander Shevelev (University of Tyumen, Tyumen, Russia)

Существенная часть территории Российской Федерации относится к криолитозоне. Строительство зданий и сооружений в этих регионах сопряжено с рисками протаивания грунта и разрушения таких конструкций. Для предотвращения этих негативных явлений необходимо поддерживать грунт в замороженном состоянии за счёт отрицательных температур окружающего воздуха в зимний период. Для этого эффективно использовать термостабилизаторы, представляющие собой заглубляемые устройства, внутри которых циркулирует хладагент, обеспечивающий теплообмен грунта с надземной частью устройства. В каждом рассматриваемом случае для перспективных конструкций свай и термостабилизаторов необходимо проводить моделирование, позволяющее установить оптимальные значения параметров таких устройств. Целью работы является создание физико-математической модели для расчёта перспективных конструкций термостабилизаторов.

Эта модель основана на расщеплении процессов в установке на следующие составляющие: теплообмен надземной части термостабилизатора с окружающей средой, тепломассоперенос в нисходящем потоке хладагента, теплообмен восходящего потока хладагента с корпусом устройства, теплообмен корпуса устройства с грунтом и сваей. Используется комплексный подход, использующий для моделирования как критериальные уравнения и эмпирические корреляции, так и законы сохранения массы, импульса и энергии.

Получено распределение температуры в грунте и проведена оценка несущей способности грунта с применением перспективной конструкции сваи, состоящей из нескольких сегментов. Определены параметры хладагента в восходящем потоке. Показано, что сегментирование разделяющего потоки устройства позволяет более равномерно охлаждать грунт.

Литература

1. Кузнецов Г.В., Аль-Ани М.А., Шеремет М.А. Математическое моделирование нестационарных режимов теплопереноса в замкнутом двухфазном цилиндрическом термосифоне в условиях конвективного теплообмена с внешней средой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, **1**, (2011), 93-104.
2. Ишков А.А., Аншкин Г.В. Математическая модель функционирования систем температурной стабилизации грунтов с горизонтальным испарителем // Прикладная физика и математика, **5**, (2020), 12-16.
3. Bouhal T., Agrouaz Y., Kousksou T., El Rhafiki T., Zeraouli Y. Performance optimization of a two-phase closed thermosyphon through CFD numerical simulations // Applied Thermal Engineering, **128**, (2018), 551-563.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА
ЭЛЕКТРОЭРОЗИОННОЙ ОБРАБОТКИ МАТЕРИАЛОВ
НА ОСНОВЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАДАЧИ

Н.А. Кропанев, А.Ю. Горохов, А.А. Каменских
Е.С. Шлыков, Т.Р. Абляз

cropanew.nikita2016@yandex.ru, littlealex99@mail.ru,
anna_kamenskih@mail.ru, kruspert@mail.ru,
lowrider11-13-11@mail.ru

УДК 536.33

В рамках работы выполнено моделирование процесса электроэрозионной обработки материала с использованием единичного и серии электрических импульсов. Построена параметризованная численная модель с преобразованием импульсов в температурное воздействие. Реализация выполнена в ANSYS с использованием технологии «EKill-EAlive», позволяющей исключать элементы с температурой более температуры плавления обрабатываемого материала. Выполнена верификация модели с данными натуральных экспериментов и математическим описанием процесса в MATLAB.

Ключевые слова: электроэрозионная обработка, эволюция поверхности, электрод, моделирование, метод конечных элементов, температурная задача.

Modeling of the electrical discharge machining process of materials based on the temperature problem

Modeling of the electrical discharge machining process of material using single and series of electrical pulses was performed within the framework of the work. A parameterized numerical model with transformation of impulses into temperature effects is constructed. The implementation was carried out in ANSYS using the «EKill-EAlive» technology, which allows excluding elements with a temperature higher than the melting point of the material being processed. Verification of the model with data from experiments and a mathematical description of the process in MATLAB were performed.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда по гранту № 23-29-00104. <https://rscf.ru/project/23-29-00104/>

Кропанев Никита Анатольевич, студент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Nikita Kropanev (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Горохов Александр Юрьевич, старший преподаватель, ПНИПУ (Пермь, Россия); Alexander Gorokhov (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Каменских Анна Александровна, к.т.н., доцент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Anna Kamenskikh (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Шлыков Евгений Сергеевич, к.т.н., доцент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Evgeniy Shlykov (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Абляз Тимур Ризович, к.т.н., доцент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Timur Ablyaz (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Keywords: electrical discharge machining, surface evolution, electrode, modeling, finite element method, temperature problem.

Метод электроискровой обработки металлов, открытый и запатентованный Борисом и Наталией Лазаренко в 40-х годах XX века, базируется на научных изысканиях английского ученого XVIII века Джозефа Пристли, который установил эффект эрозии металла под действием электрического заряда. В рамках технического и научного прогресса метод обработки материалов с использованием электрических импульсов получил название – электроэрозионной обработки (ЭЭО). Данный метод стал отличной альтернативой механического способа обработки для формообразования токопроводящих труднообрабатываемых материалов, обладающих сложными физико-механическими свойствами [1]. Электроэрозионную обработку можно смело назвать величайшим прорывом 20 века.

С 1970-х по настоящее время ведутся разработки, направленные на математическое описание процесса [2-3]. Первые модели базируются на термомеханике и теплофизике процесса, т.е. рассматриваются термические или электротермические задачи [2]. Процесс обработки зависит от большого числа факторов, обладающих разной механической природой, что приводит к сложности моделирования технологического процесса электроэрозии [4]. Стохастическая природа ЭЭО осложняет численное моделирование процесса, особенно при учете многократного действия электрических импульсов на поверхность электрода-детали. Моделирование процесса в рамках температурной задачи не теряет своей актуальности [5].

На базе ЦКП «Центр аддитивных технологий» ПНИПУ г. Пермь выполнен большой объем эмпирических исследований по электроэрозионной обработке поверхностей металлических и композиционных материалов. При этом актуален вопрос прогнозирования эволюции поверхности обрабатываемых деталей с использованием современных численных методов, таких как метод конечных элементов. В данной работе выполнено моделирование процесса ЭЭО при многократном действии электрических импульсов на основе температурной задачи. Моделирование выполнено в программном комплексе ANSYS с использованием технологии «EKill-EAlive», которая позволяет исключать из модели элементы по заданным критериям. В данном случае происходит исключение элементов с температурой более температуры плавления материала электрода-детали.

Моделирование включает ограничения и гипотезы, накладывающие определенные ограничения на результаты: материал обрабатываемой поверхности изотропный, физико-механические свойства не зависят от температуры; коэффициент конвективного теплообмена не зависит от условий эксперимента и является константой; не учитывается зазор между электродом-деталью и электродом-инструментом, а также потеря энергии на изменение агрегатного состояния материала и

прессы теплопередачи.

В рамках работы рассмотрено действие единичного импульса и серии импульсов на обрабатываемую поверхность. Выполнена верификация модели на основе данных натуральных экспериментов. Исследована эволюция обрабатываемой поверхности и установленные закономерности изменения глубины и радиуса пробоя от числа последовательных импульсов в рамках итерационной процедуры.

Литература

1. *Livshits A.L.* Electro-erosion Machining of Metals. — London, England, 1960.
2. *Van Dijk F.S., Dutre W.L.* Heat conduction model for the calculation of the volume of molten metal in electric discharges // Journal of Physics D: Applied Physics, **7(6)** (1974), 899
3. *Kamenskikh A.A., Muratov K.R., Shlykov E.S., Sidhu S.S., Mahajan A., Kuznetsova Y.S., Ablyaz T.R.* Recent trends and developments in the electrical discharge machining industry: A Review // Journal of Manufacturing and Materials Processing, **7:6** (2023), 204
4. *Ming W., Zhang S., Zhang G., Du J., Ma J., He W., Cao C., Liu K.* Progress in modeling of electrical discharge machining process // International Journal of Heat and Mass Transfer, **187** (2022), 122563
5. *Абляз Т.Р., Муратов К.Р., Красновский Е.Е., Борисов Д.А.* Моделирование температурного воздействия единичного импульса при электроэрозионной обработке // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение, **20:1** (2018), 53-61

ОБ АЛГОРИТМЕ УТОЧНЕНИЯ ФОРМЫ И ТЕНЗОРА УДЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ЛОКАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ПО ДАННЫМ ГЕОЛЕКТРИКИ

В.Н. Кризский, П.Н. Александров

М.Л. Владов

krizsky@rambler.ru, alexandr@igemi.troitsk.ru,

vladov_ml@mail.ru,

УДК 550.8.013

На основе решения обратных коэффициентных задач геоэлектрики постоянного тока в линейной постановке излагается способ уточнения формы и алгоритм нахождения компонент тензора удельной электропроводности локального включения, находящегося в кусочно-постоянной среде.

Ключевые слова: обратная коэффициентная задачи геоэлектрики, кусочно-постоянные анизотропные среды, форма локального включения, тензор удельной электропроводности.

**ABOUT THE ALGORITHM FOR REFINING THE FORM
AND TENSOR OF SPECIFIC CONDUCTIVITY OF LOCAL
HETEROGENEITY ACCORDING TO GEOELECTRIC
DATA**

Based on the solution of inverse coefficient problems of direct current geoelectrics in a linear formulation, a method for refining the form is presented and an algorithm for finding the components of the electrical conductivity tensor of a local inclusion located in a piecewise constant medium.

Keywords: inverse coefficient problem of geoelectrics, piecewise constant anisotropic media, form of local inclusion, conductivity tensor.

Определение параметров локальной неоднородности неоднородной среды представляет актуальную проблему при изучении рудных месторождений, локальных техногенных объектов, при решении ряда других геологических задач.

Решение этой обратной задачи сталкивается с проблемой одновременного определения формы и физических свойств геологического объекта, что приводит к ее некорректности. Здесь следует учитывать, что

Кризский Владимир Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия); Vladimir Krizsky (Saint-Petersburg Mining University, Saint-Petersburg, Russia)

Александров Павел Николаевич, д.ф.-м.н., г.н.с., ЦГЭМИ ИФЗ РАН им. О.Ю. Шмидта (Москва, Троицк, Россия); Pavel Alexandrov (Schmidt Institute of Physics of the Earth of the RAS, Russia)

Владов Михаил Львович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ им. М.В.Ломоносова (Москва, Россия); Michael Vladov (Moscow State University, Russia)

форма тела и его электропроводность взаимосвязаны и неоднозначность в решении приводит к возникновению множества эквивалентных решений – локальных тел с различающимися формами и электропроводностями. Инвариантом при таком поиске является лишь некоторая функциональная зависимость, связывающая удельную электропроводность и отражающие его форму объемные характеристики тела. Это означает, что процесс поиска формы и удельной электропроводности тела нельзя реализовывать последовательно по отдельности (сначала форму, затем электропроводность или наоборот, сначала электропроводность, а затем – форму). Поиск формы и удельной электропроводности следует вести параллельно, уточняя их поочередно.

В работе излагается процедура уточнения формы и тензоров удельных электропроводностей подобластей локального анизотропного включения кусочно-постоянной по удельной электропроводности среды по данным измерений поля постоянного электрического тока.

Проведенное компьютерное моделирование с применением процедуры решения обратной задачи геоэлектрики постоянного тока в линейной постановке на основе объёмных интегральных уравнений [1] демонстрируют возможность уточнения формы локального включения и тензора удельной электропроводности. Для этого следует многократно проводить решение обратной задачи, определяя граничные дискретные блоки окаймляющего тела, которые с некоторой заданной степенью точности можно интерпретировать, как блоки вмещающего пространства и исключать их рассмотрение на последующем итерационном шаге алгоритма.

Вычислительные эксперименты показывают, что для определения структуры локальной неоднородности и распределения в ней электрофизических параметров не всегда достаточно измерений поля лишь на дневной поверхности. Для решения такой задачи необходимо заглубление источников, что на практике требует бурения скважин.

Литература

1. Александров П.Н., Кризский В.Н. Решение линейной коэффициентной обратной задачи геофизики на основе интегральных уравнений // Физика Земли, **68**:2 (2022), 136-143.

EMPIRICS ON PORTFOLIO TURNOVER

Andrew Kuliga
andrewkuliga@gmail.com

УДК 51.77

This study examines the forecasting of the turnover of a portfolio made up of two algorithmic trading strategies with crossing positions. We conducted experiments to compare empirics on the quality of forecasting. In some experiments, comparatively better results were obtained in terms of forecasting quality.

Keywords: Algorithmic Portfolio Management, Portfolio Turnover, Cross Trade.

Today, there are trillions of dollars under the management of hedge funds around the world and this amount continues to grow every year. There is a desire to find and combine the alpha streams of hedge funds. We will explore the possibility of crossing trades between algorithmic trading strategies (alphas). In this research, we aim to explore, propose and compare several approaches to modeling the turnover of a portfolio consisting of two alphas. Based on these empirics experiments were conducted.

Algorithmic trading strategies (Alphas).

Algorithmic trading strategies have been built in which short and long positions are equally occupied (neutralization). In the alphas "delay 1 alpha since we do not know the future.

The work carried out experiments on the following sets of algorithmic trading strategies:

Experiment 1. 10 alphas, the ratio $\frac{T}{std(PnL)}$ between alphas differs up to 7 times.

Experiment 2. 10 alphas, the ratio $\frac{T}{std(PnL)}$ between alphas differs up to 4 times.

Experiment 3. 8 alphas, the ratio $\frac{T}{std(PnL)}$ between alphas varies by up to 24 %.

Empirics.

The formula is an empirical Kakushadze-Liew formula for the turnover of a portfolio consisting of two alphas, from the article [1]:

$$T_{*KL} = \frac{1 + \rho}{2} (w_1 T_1 + w_2 T_2) + \frac{1 - \rho}{2} |w_1 T_1 - w_2 T_2|,$$

where T_j is the turnover of the alpha j , w_j is the weight in the alphas portfolio j , ρ is the correlation between PnL alpha 1 and alpha 2

This work was supported by the grant of the state program of the B«SiriusB» Federal Territory B«Scientific and technological development of the B«SiriusB» Federal TerritoryB».

Kuliga Andrew, Sirius, Russia

Formulas are proposed by us to model the turnover of a portfolio made up of two alphas:

$$T_{*1} = \left(\frac{w_1 T_1}{std_1} + \frac{w_2 T_2}{std_2} \right) \sqrt{w_1^2 std_1^2 + 2\rho w_1 w_2 std_1 std_2 + w_2^2 std_2^2}$$

$$T_{*2} = (w_1 T_1 + w_2 T_2) \frac{\sqrt{w_1^2 std_1^2 + 2\rho w_1 w_2 std_1 std_2 + w_2^2 std_2^2}}{\sqrt{w_1 std_1 w_2 std_2}}$$

$$T_{*3} = (w_1 T_1 + w_2 T_2) \frac{\sqrt{w_1^2 std_1^2 + 2\rho w_1 w_2 std_1 std_2 + w_2^2 std_2^2}}{\sqrt{w_1 std_1 + w_2 std_2}},$$

where T_j is the turnover of the alpha j , w_j is the weight in the alphas portfolio j , ρ is the correlation between PnL alpha 1 and alpha 2, std_j is the standard deviation PnL alpha j .

Metrics for experiments.

To conduct a comparative analysis of empirics, quality metrics were proposed to predict portfolio turnover with crossing positions.

Let $T_*(d)$ be the turnover of the algorithmic trading strategies (alpha) portfolio according to empirical data per day d , $T(d)$ be the turnover of the alpha portfolio per day d with a crossing of trades, $T_{max}(d)$ be the turnover of the portfolio without a crossing of trades per day d , k - number of trading days.

$$\rho_1(T_*, T) = \frac{1}{k} \sum_{d=1}^k (T_*(d) - T(d)) \quad \rho_2(T_*, T) = \frac{1}{k} \sum_{d=1}^k |T_*(d) - T(d)|$$

$$\rho_3(T_*, T) = \frac{\sum_{d=1}^k (T_*(d) - T(d))}{\sum_{d=1}^k (T_{max}(d) - T(d))} \quad \rho_4(T_*, T) = \frac{\sum_{d=1}^k |T_*(d) - T(d)|}{\sum_{d=1}^k (T_{max}(d) - T(d))}$$

Results.

Experiments were conducted and the results of the metrics were calculated. The experiment number indicates an alphas pool. For each of the experiments 1,2,3, we took all possible combinations of two alphas with the same weights ($w_1 = w_2 = \frac{1}{3}$) and with different weights ($w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{2}{3}$ and $w_1 = \frac{1}{5}, w_2 = \frac{4}{5}$), calculated the metrics, took the module and averaged the results.

The research was conducted in collaboration with I. Shnurnikov and N. Chadromtsev. In experiments with different orders of the $\frac{T}{std}$ ratio for alphas, it turned out that the Kakushadze-Liew empiricism, on average, gives better results. However, in experiments where the ratio is of the same order, our empirics, on average, showed better results.

References

1. *Kakushadze Z., Liew J.K.-S.* Is It Possible to OD on Alpha? // The Journal of Alternative Investments, **18**:2 (2015), 39–49
2. *Kakushadze Z.* 101 formulaic alphas. // Wilmott, 2016, 72–81.
3. *Kakushadze Z.* Spectral model of turnover reduction. // Econometrics, **3**:3 (2015), 577–589

**ФУНКЦИИ ИНВЕСТИЦИЙ И СБЕРЕЖЕНИЙ В МОДЕЛИ
В. ЧАНГА — Д. СМИТА НА ПРИМЕРЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО
ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА
Е.Ю. Лискина, А.В. Алыпов
katelis@yandex.ru**

УДК 517.9; 330.4

В математической модели делового цикла В. Чанга — Д. Смита используются нелинейные зависимости инвестиций и сбережений от капитала и национального дохода, обладающие определенным типом выпуклости по национальному доходу. В данной статье мы рассматриваем идентификацию этих зависимостей по статистическим данным регионов Центрального федерального округа.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, деловой цикл, экономико-математическая модель, нелинейная функция, регрессионный анализ.

Investment and savings functions in the W. Chang — D. Smith model on the example of the Central Federal District

The mathematical model of the business cycle of W. Chang — D. Smith uses nonlinear dependencies of investments and savings on capital and income, which have a certain type of convexity in income. In this article, we consider the identification of these dependencies based on statistical data from the regions of the Central Federal District.

Keywords: differential equations, business cycle, economic and mathematical model, nonlinear function, regression analysis.

Рассмотрим модель делового цикла, предложенную в работе [1]:

$$\begin{cases} \dot{Y} = \alpha (I(Y, K) - S(Y, K)), \\ \dot{K} = I(Y, K) - \mu K, \end{cases}$$

в которой экономический цикл должен быть определен нелинейными функциями инвестиций $I(Y, K)$ и сбережений $S(Y, K)$, которые зависят от валового выпуска в денежном выражении $Y(t)$ и капитала $K(t)$, $\alpha > 0$ — коэффициент адаптации (скорость, с которой доход Y реагирует на изменение соотношения между инвестициями I и сбережениями

Лискина Екатерина Юрьевна, к.ф.-м.н., доцент, РГУ имени С.А. Есенина (Рязань, Россия); Ekaterina Liskina (Ryazan State University named after S.A. Esenin, Ryazan, Russia)

Алыпов Алексей Викторович, магистрант, РГУ имени С.А. Есенина (Рязань, Россия); Aleksey Alyipov (Ryazan State University named after S.A. Esenin, Ryazan, Russia)

S). При этом предполагается, что инвестиции являются возрастающей логистической функцией национального дохода $Y(t)$, а сбережения — нелинейной возрастающей функцией с промежутками, у которых тип выпуклости противоположен соответствующим промежуткам функции инвестиций.

Данное исследование состоит в идентификации функций инвестиций $I(Y, K)$ и сбережений $S(Y, K)$ по данным [2]. При этом использовалась следующая интерпретация величин: K — стоимость основных фондов, Y — валовой региональный продукт, I — инвестиции. Сбережения S — это часть полученного за некоторый период дохода, не потраченная на текущее потребление, а сохраненная и отложенная (вложенная) для использования в будущем. Определим функцию сбережений S как разность между среднедушевыми доходами населения X и среднедушевыми расходами населения C , то есть $S = X - C$.

Идентификация проводилась по каждому субъекту Центрального федерального округа отдельно. Оценивались коэффициенты по 16 типам уравнений множественной нелинейной регрессии для I и для S , по статистическим характеристикам отбирались лучшие уравнения. У 11 регионов из 18 наилучшим оказалось уравнение для инвестиций $I(Y, K) = Y^{A_1} e^{B_1 K + C_1}$, и у 12 регионов из 18 наилучшим оказалось уравнение для сбережений $S(Y, K) = e^{A_2 Y + B_2 K + C_2}$.

Литература

1. *Chang, W.W., Smyth, D.J.* The Existence and Persistence of Cycles in a Non-linear Model: Kaldor's 1940 Model Re-examined // *The Review of Economic Studies*, **38**:1 (1971), 37-44

2. Регионы России. Социально-экономические показатели: статистический сборник. 2010–2023 гг. // Федеральная служба государственной статистики: [сайт]. URL: <https://rosstat.gov.ru/folder/210/document/13204> (дата обращения: 15.03.2023)

MATHEMATICAL MODELING OF STOCHASTIC OSCILLATIONS OF A VISCOELASTIC ROPE WITH A MOVING BOUNDARY

V. L. Litvinov, K. V. Litvinova

vladlitvinov@rambler.ru , kristinalitvinova900@rambler.ru

УДК 517.518

The study of viscoelasticity includes the analysis of the stochastic stability of stochastic viscoelastic systems, their reliability, etc. The paper considers stochastic linear longitudinal oscillations of a viscoelastic beam with moving boundaries, taking into account the influence of damping forces. The case of a difference kernel makes it possible to reduce the problem of analyzing a system of stochastic integro-differential equations to the study of a system of stochastic differential equations. To estimate the expansion coefficients, it is proposed to apply the statistical numerical Monte Carlo method.

Keywords: stochastic longitudinal oscillations, vibrations of a viscoelastic rope, moving boundaries

Currently, reliability issues in the design of machines and mechanisms require more and more complete consideration of the dynamic phenomena occurring in the objects being designed. The widespread use in technology of mechanical objects with moving boundaries necessitates the development of methods for their calculation. The problem of oscillations of systems with moving boundaries is associated with obtaining solutions of integro-differential equations and partial differential equations in time-varying domains [1-10]. Such problems are currently insufficiently studied. Their peculiarity is the difficulty of using known methods of mathematical physics suitable for problems with fixed boundaries. The complexity of the solutions obtained is explained by the fact that there is still no sufficiently general approach to analyzing the features of the dynamics of such systems. In connection with the danger of resonance, the study of forced oscillations is of great importance here. Attempts have been made to study this process, but the results obtained are limited mainly to a qualitative description of dynamic phenomena [1-4]. In addition, it is recognized that deterministic modeling of systems cannot be adequate for some types of problems, so it is necessary to move on to probabilistic-statistical modeling, where random variables and stochastic fluctuations are present. When solving here, predominantly approximate methods are used [5-9], since obtaining

Litvinov Vladislav Lvovich, Ph.D. (Technical), Associate Professor, Head of Dept., Dept. of General-Theoretical Disciplines, Syzran branch of Samara State Technical University (Syzran, Russia)

Litvinova Kristina Vladislavovna – student, Moscow State University (Moscow, Russia)

exact solutions is possible only in the simplest cases [10]. If the damping of transverse vibrations occurs primarily due to the action of external damping forces, then in the case of longitudinal vibrations, the damping is mainly affected by elastic imperfections in the material of the vibrating object [5-10]. The study of viscoelasticity includes an analysis of the stochastic stability of stochastic viscoelastic systems, their reliability, etc. The work examines stochastic linear vibrations of a viscoelastic rope with moving boundaries. The case of a difference kernel allows us to reduce the problem of analyzing a system of stochastic integrodifferential equations to studying a system of stochastic differential equations. To estimate the expansion coefficients, it is proposed to use the statistical numerical Monte Carlo method [11].

Литература

1. *Savin G.N., Goroshko O.A.* Dynamics of a variable length thread // *Nauk. dumka, Kiev, 1962, 332 p.*
2. *Samarin Yu.P.* On a nonlinear problem for the wave equation in one-dimensional space // *Applied Mathematics and Mechanics. - 1964. - T. 26, V. 3. - P. 77–80.*
3. *Vesnitsky A.I.* Waves in systems with moving boundaries and loads // *Fizmatlit, Moscow, 2001, 320 p.*
4. *Lezhneva A.A.* Bending vibrations of a beam of variable length // *Izv. Academy of Sciences of the USSR. Rigid Body Mechanics. - 1970. - No. 1. - P. 159-161.*
5. *Litvinov V.L.* Solution of boundary value problems with moving boundaries using an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations // *Tr. Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. 2020. Vol. 26, No. 2. P. 188-199.*
6. *Anisimov V.N., Litvinov V.L.* Mathematical models of longitudinal-transverse vibrations of objects with moving boundaries // *Vestn. Himself. tech. un-t. Ser. Phys and mat. science, 2015. Vol. 19, No. 2. P. 382-397.*
7. *Anisimov V.N., Litvinov V.L.* Mathematical modeling and study of the resonance properties of mechanical objects with a changing boundary: monograph / *V. L. Litvinov, V. N. Anisimov - Samara: Samar. state tech. un - t, 2020. - 100 p.*
8. *Litvinov V.L., Anisimov V.N.* Application of the Kantorovich - Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Rigid Body Mechanics. 2018. No. 2. P. 70–77.*
9. *Litvinov V.L., Anisimov V.N.* Transverse vibrations of a rope moving in a longitudinal direction // *Bulletin of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. 2017. T. 19. No. 4. – P.161–165.*
10. *Litvinov V.L., Anisimov V.N.* Mathematical modeling and research of oscillations of one –dimensional mechanical systems with moving

boundaries: monograph / V. L. Litvinov, V. N. Anisimov – Samara: Samar. state tech. un-t, 2017.– 149 p.

11. *Elepov B. S., Kronberg A. A., Mikhailov G. A. and Sabelfeld K. K.* Solution of boundary value problems by the Monte Carlo method. - Novosibirsk: Nauka, 1980. - 174 p.

ОБОСНОВАНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ПОЛИМЕРНЫХ СИСТЕМ

А.С. Малыгина, Г.В. Пышнограй
ma.malygina.98@mail.ru, pyshnograï@mail.ru

УДК 532.135

Разработанная модифицированная модель Виноградова-Покровского позволяет анализировать как линейные, так и нелинейные эффекты, возникающие при сдвиге и растяжении расплавов полимеров. Модель корректно описывает вязкоупругое поведение материала, а также переходные процессы, происходящие при текучести и растяжении..

Ключевые слова: реология, полимеры, мезоскопический подход, вязкоупругость, нелинейные эффекты, простой сдвиг, одноосное растяжение.

The main tasks of mathematics

The developed modified Vinogradov-Pokrovsky model allows us to analyze both linear and nonlinear effects occurring during shear and tensile behavior of polymer melts. This model correctly describes the viscoelastic behavior of the material, as well as the transient processes occurring in yielding and tensile conditions.

Keywords: rheology, polymers, mesoscopic approach, viscoelasticity, nonlinear effects, simple shear, uniaxial elongation.

Учет множества времен релаксации представляет собой ключевую задачу в реологии полимеров. Применение многомодового подхода необходимо даже для разбавленных растворов монодисперсных полимеров, так как их молекулы имеют цепочечную структуру. Исследования показывают, что время релаксации моды уменьшается пропорционально квадрату ее номера, что соответствует «раузовскому» поведению. Однако с увеличением концентрации полимерного раствора происходит усложнение динамики, связанными с перепутанностью и сцеплением молекул, в результате чего возникают «сверхмедленные» релаксационные процессы, и дополнительно формируются новые члены в уравнении для тензора напряжений. Для полидисперсных и разветвленных полимеров возрастает значимость учета множественных

Малыгина Анжела Сергеевна, магистрант, АлтГУ (Барнаул, Россия); Angela Malygina (Altai State University, Barnaul, Russian Federation)

Пышнограй Григорий Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, АлтГТУ имени И.И. Ползунова (Барнаул, Россия); Grigory Pyshnograï (Altai State Technical University named after I.I. Polzunov, Barnaul, Russian Federation)

времен релаксации, усложняя их зависимости. Это подчеркивает необходимость надежной модели для реологии концентрированных полимеров. Мезоскопический подход описывает полимер как систему бусинок (сегментов), соединенных пружинами, с характеристиками, включающими коэффициент трения и размеры клубка.

Таким образом, предложена новая модификация модели Виноградова-Покровского, на основе которой проанализированы линейные и нелинейные эффекты при одновременном воздействии простого сдвига и одноосного растяжения на образцы из полиэтилена. Модель адекватно описывает частотные зависимости компонент динамического модуля сдвига и переходные процессы в сдвиговом течении и одноосном растяжении, сопоставленные с экспериментальными данными из литературы. При наложении осциллирующего сдвигового течения на простой сдвиг наблюдаются различные изменения форм верхней и нижней полуволн отклика. Несмотря на то, что предложенная многомодовая модель является развитием теоретических основ, касающихся динамики линейных полимерных цепей, она демонстрирует адекватное описание нестационарных зависимостей вязкости расплавов разветвленных полимеров от времени в условиях одноосного растяжения. Эта новая версия модели является надежной основой для более сложных реологических исследований, включая взаимодействия в геометрически сложных потоках.

Литература

1. *Пышиноград Г.В., Малыгина А.С., Макарова М.А., Рудаков Г.О.* Моделирование реологических свойств расплавов полиэтиленов при их одноосном растяжении // *Вычислительная механика сплошных сред*, (2020), № 1, С. 73-82.
2. *Пышиноград Г.В., Лаас А.А., Макарова М.А., Малыгина А.С., Рудаков Г.О.* Уточнение реологической модели для описания линейной и нелинейной вязкоупругости полимерных систем // *Вычислительная механика сплошных сред*, (2021), № 1, С.12-29
3. *Рудаков Г. О., Пышиноград Г. В., Вайцель Д. Э., Павлюк Ю. А.* Влияние реологических свойств полимерного расплава на гидродинамические характеристики вихревого течения в сходящемся канале // *Инженерно-физический журнал* (2023), № 5, С. 1186-1194

ПРИМЕНЕНИЕ КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ К ОСНОВНОМУ КИНЕТИЧЕСКОМУ УРАВНЕНИЮ

В.Б. Малютин, Б.О. Нуржанов
malyutin@im.bas-net.by, nurjanov@list.ru

УДК 519.6

Характеристики основного кинетического уравнения в частности вероятности нахождения в j -ом состоянии можно выразить через функциональный интеграл. В работе предлагается использование квазиклассической аппроксимации для вычисления функционального интеграла и следовательно вычисления вероятностных характеристик стохастических систем, описываемых основным кинетическим уравнением.

Ключевые слова: основное кинетическое уравнение, квазиклассическая аппроксимация, функциональный интеграл.

Application of semiclassical approximation to Master equation

The characteristics of the Master equation, in particular the probability of being in the j -th state, can be expressed through a functional integral. The work proposes the use of a semiclassical approximation to calculate the functional integral and, consequently, to calculate the probability characteristics of stochastic systems described by the Master equation.

Keywords: Master equation, semiclassical approximation, functional integral.

Основное кинетическое уравнение (управляющее уравнение или Master equation) широко используются при моделировании различных физических, химических и биологических систем. Основное кинетическое уравнение представляет собой разновидность уравнения Колмогорова-Чепмена для марковских процессов и является уравнением баланса для вероятности каждого состояния в некоторый момент времени.

Однако основное кинетическое уравнение имеет обычно достаточно сложную структуру, что затрудняет его решение и исследование. Поэтому для его исследования можно использовать функциональные

Малютин Виктор Борисович, д.ф.-м.н., Институт математики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Республика Беларусь); Victor Malyutin (Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus)

Нуржанов Бердах Орынбаевич, к.ф.-м.н., Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Республика Узбекистан); Berdakh Nurjanov (Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan)

интегралы через которые выражаются характеристики управляющего уравнения (производящая функция, вероятности нахождения в j -ом состоянии и другие).

Для основного кинетического уравнения

$$\frac{\partial p_n(t)}{\partial t} = \mu_1(n-1+N)p_{n-1}(t) - \mu_1(n+N)p_n(t)$$

при помощи техники рассмотренной в работе [1] мы можем выразить вероятности нахождения в j -ом состоянии $p_j(t)$ через функциональный интеграл

$$p_j(t) = \frac{1}{j!} \exp\left\{-\frac{1}{2}\mu_1 t N\right\} \int \exp\left\{\left(N - \frac{1}{2}\right) \ln(y)\Big|_0^t - \mu_1 \frac{1}{4} y^2 \Big|_0^t\right\} \times \quad (1)$$

$$\left(\frac{\mu_1}{2} y_n^2\right)^j \int D[y] \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^t \left(\dot{y}^2(\tau) - \frac{(N - \frac{1}{2})(\frac{3}{2} - N)}{y^2(\tau)} + \frac{\mu_1^2 y^2(\tau)}{4}\right) d\tau\right\} dy_n.$$

С помощью квазиклассической аппроксимации мы можем вычислить функциональный интеграл в выражении (1) и таким образом вычислить значение $p_j(t)$.

Литература

1. *Dickman R., Vidigal R.* Path integrals and perturbation theory for stochastic processes. // Brazilian Journal of Physics, **33**:1 (2003), 73-93.

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ С ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ НЕФТЬЮ

Н.Д. Морозкин, Н.Н. Морозкин, В.В. Галлямов,
MorozkinND@mail.ru, NNM_89@mail.ru,
thaum.mechanics@gmail.com

УДК 550.36:536.24

Исследуется задача расчета температурного поля в пласте с вязкопластичной нефтью при естественных условиях с учетом экспоненциальной зависимости коэффициента вязкости от градиента давления. Приведены результаты вычислительных экспериментов в одномерном случае вблизи скважины из которых следует, что температура вязкопластичной нефти в начальный период времени после запуска резко отличается от температуры ньютоновской нефти.

Ключевые слова: вязкопластичная нефть, градиент давления, температура, неньютоновские нефти, градиент давления, пористая среда.

Calculation of the temperature field in a porous formation with viscoplastic oil

The problem of calculating the temperature field in a reservoir with viscoplastic oil under natural conditions is studied taking into account the exponential dependence of the viscosity coefficient on the pressure gradient. The results of computational experiments in a one-dimensional case near the well are presented, from which it follows that the temperature of viscoplastic oil in the initial period of time after startup differs sharply from the temperature of Newtonian oil.

Keywords: viscoplastic oil, pressure gradient, temperature, non-Newtonian oils, pressure gradient, porous medium.

Процесс нестационарной фильтрации вязкопластичной нефти в осесимметричном пласте (пористой среде) в цилиндрической системе координат описывается следующим уравнением сохранения массы фаз:

$$\beta^* \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z), \quad (1)$$

где $\beta^* = m\beta_{fe} + \beta_{sk}$ - коэффициент упругоёмкости пласта, m - пористость, β_{fe}, β_{sk} - коэффициенты сжимаемости флюида и объёмной

Морозкин Николай Данилович, д.ф.-м.н., профессор, УУНИТ (Уфа, Россия); Nikolay Morozkin (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Морозкин Никита Николаевич, к.ф.-м.н., доцент, УУНИТ (Уфа, Россия); Nikita Morozkin (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Галлямов Всеволод Викторович, аспирант, УУНИТ (Уфа, Россия); Vsevolod Gallyamov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

упругости пористой среды, ϑ_r и ϑ_z - скорости фильтрации в радиальном и вертикальном направлениях.

$$\vartheta_r = -\frac{k_r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \vartheta_z = -\frac{k_z}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_0 g \right), \quad (2)$$

k_r, k_z - проницаемости в радиальном и вертикальном направлениях, $p = p(r, z)$ - давление, $\rho = \rho(r, z)$ - плотность флюида

$$\rho(r, z) = \rho_0 [1 + \beta_{fe}(p - P_0)], \quad (3)$$

ρ_0 - плотность флюида при давлении P_0 , g - ускорение свободного падения.

Вязкопластичная нефть относится к неньютоновским жидкостям и закон фильтрации таких жидкостей носит нелинейный характер. В настоящей работе предполагается, что вязкость зависит от градиента давления следующим образом [1, 2, 3]:

$$\mu = \mu \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\mu_H - \mu_L}{1 + e^{B(\frac{\partial p}{\partial r} - G)}} + \mu_L, \quad (4)$$

Здесь G - градиент давления предельного разрушения структуры (ГДПРС), μ_H - вязкость нефти с неразрушенной структурой, μ_L - вязкость нефти при достижении градиентом давления значения ГДПРС, B - параметр, зависящий от свойств нефти.

Тепловое поле записывается с помощью уравнения сохранения энергии:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c (\vartheta_r \frac{\partial T}{\partial r} + \vartheta_z \frac{\partial T}{\partial z}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \lambda \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \frac{\partial T}{\partial z}) + m \eta \rho c \frac{\partial p}{\partial t} - \varepsilon \rho c (\vartheta_r \frac{\partial p}{\partial r} + \vartheta_z \frac{\partial p}{\partial z}), \quad (5)$$

Здесь $C = m \rho c + (1 - m) \rho_{sk} c_{sk}$ - объёмная теплоёмкость насыщенной пористой среды, c - удельная теплоёмкость скелета, λ - теплопроводность, η - адиабатический коэффициент, ε - коэффициент Джоуля-Томсона

Система уравнений (1) - (5) решается методом конечных разностей с использованием локально одномерных схем А.А. Самарского. Полученные в результате разностных аппроксимаций системы нелинейных уравнений решаются с использованием метода Ньютона. Результаты расчётов в одномерном случае приведены в работе [1].

Литература

1. Морозкин Н.Д., Морозкин Н.Н., Галлямов В.В. Исследование температурных полей вблизи скважины при фильтрации вязкопластичной нефти // Нефтегазовое дело. 2024. Т.22, №4, с. 46-52

2. Девликамов В.В., Хабибуллин З.А., Кабиров М.М. Аномальные нефти // М.: Недра, 1975, 168 с.

3. Келбалиев Г. И., Рзаев Аб. Г., Расулов С. Р., Гусейнова Л. В. Моделирование фильтрации аномальных нефтей в пористом пласте // Инженерно-физический журнал. 2015, Т.88, №2, с. 296-302

**ТЕМПОРАЛЬНЫЙ ПОДХОД К
ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ЭЛЕКТРОДНЫХ
ПРОЦЕССОВ С УЧАСТИЕМ СЛЕДОВ КОМПОНЕНТОВ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НА ПРИМЕРЕ
«ЭЛЕКТРОД/ЭЛЕКТРОАКТИВНЫЙ ПОЛИМЕР/БАВ»**

**Э.И. Максютова, Р.С. Сякаев, З.А. Баширова,
Ю.Б. Сабурова, А.Г. Мустафин, М.Г. Юмагулов
maksyutovaelza@gmail.com, himrom@mail.ru,
bizhanova111@mail.ru, saburova.yb@mail.ru,
agmustafin@gmail.com, yum_mg@mail.ru**

УДК 517.518

Авторами разработана новая хемометрическая методика преобразования многомерных временных рядов вольтамперных данных в данные меньшей размерности для определения энтальпийного и энтропийного факторов. При этом используется ПЛС-Т-фактор, упорядоченный по времени влияния следов БАВ, на примере витаминных, на электрополимеризацию анилина. Необходимость решения задачи обусловлена отсутствием четко выраженных пиков окисления/восстановления мономера и низкой концентрацией исследуемых компонентов БАВ – следами - в исходном растворе при сохранении их латентного влияния на образование/рост полимерных глобул и темпоральную структуру электрохимических данных.

Ключевые слова: временной ряд, регрессионная модель, темпоральность.

A temporal approach to the thermodynamic analysis of electrode processes involving traces of components of dynamic systems, using the example of "electrode/electroactive polymer/BAS"

Максютова Эльза Ильдусовна, к.х.н., ведущий инженер, АО "УАП "Гидравлика" (Уфа, Россия); Elsa Maksutova (JSC UAP Hydraulics, Ufa, Russia)

Сякаев Роман Сергеевич, аспирант, УУНиТ (Уфа, Россия); Roman Syakaev (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Баширова Зейна Анваровна, аспирант, УУНиТ (Уфа, Россия); Zeina Bashirova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Сабурова Юлия Борисовна, к.х.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Julia Saburova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Мустафин Ахат Газизьянович, д.х.н., профессор, УУНиТ (Уфа, Россия); Akhat Mustafin (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Юмагулов Марат Гаязович, д.ф.-м.н., профессор, УУНиТ (Уфа, Россия); Marat Yumagulov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

The authors have developed a new chemometric technique for converting multidimensional time series of current-voltage data into lower-dimensional data to determine enthalpy and entropy factors. In this case, the PLC-T factor is used, ordered by the time of the effect of traces of BAS, for example vitamins, on the electropolymerization of aniline. The need to solve the problem is due to the absence of clearly defined peaks of oxidation/reduction of the monomer and the low concentration of the studied components of BAS – traces - in the initial solution while maintaining their latent effect on the formation/growth of polymer globules and the temporal structure of electrochemical data.

Keywords: time series, regression model, temporality.

Суть предложенного подхода заключается в построении регрессионной модели, связывающей временной фактор с количеством последовательно зарегистрированных вольтамперограмм окисления/восстановления мономера.

Известно, что сила тока и плотность тока прямо пропорциональны скорости электрохимических реакций в изучаемых электрохимических системах. Поэтому плотность тока в наших системах также зависит от температуры в аррениусовых координатах:

$$i = A \cdot \exp(Q/PT),$$

$$T' = \text{const} \cdot i,$$

$$\ln T' = \ln \text{const} + \ln i = \ln \text{const} + \ln A - Q/PT \cdot 1/T$$

На оси ординат отложен логарифм параметра T' , который получен как совокупность плотности тока 100 последовательных вольтамперограмм. Результаты ПЛС-моделирования в Аррениусовских координатах представлены на рисунке.

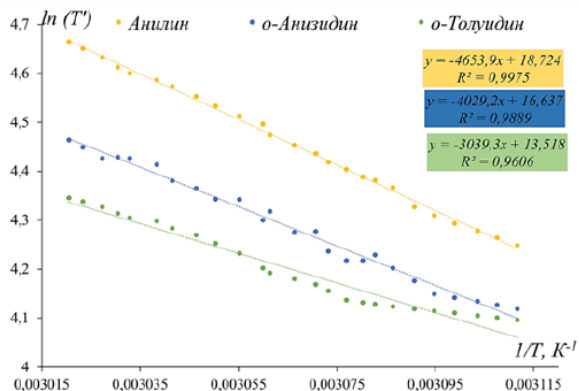


Рис. 1: Результаты ПЛС-моделирования временных рядов реакции полимеризации анилина, o-анизидина и o-толуидина в условиях температурного эксперимента

На рисунке видно, что угловое изменение температурной зависимости зависит от типа мономера, задействованного в процессе электрополимеризации. Чтобы определить, как состав раствора влияет на термодинамику электрополимеризации анилина и протестировать метод, использовались витамины группы В и витамин С в качестве маркеров со следовыми количествами. Выбор этих витаминов основан на результатах МГК-моделирования, которое показало, что информация о сходстве и различии в вольтамперометрическом поведении сенсорной системы в присутствии витаминов сохраняется в 7-й главной компоненте, объясняющей 98 процентов общей дисперсии.

Литература

1. *Nigmatullin R.R., Budnikov H.C., Khamzin A.A., Sidelnikov A.V., Maksyutova E.I.* Temporal multi-sensor system for voltammetric recognition of L- and D-tryptophan enantiomers based on generalized principal component analysis // *New Journal of Chemistry*, 2018. V. 42. № 1. P. 465-475.

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ
ПОЛИМЕРНОГО СЛОЯ СКОЛЬЖЕНИЯ ПРИ УПРУГОМ,
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ И ВЯЗКОУПРУГОМ
ПОВЕДЕНИИ МАТЕРИАЛА**

**А.Н. Мухаметшин, Д.А. Баймурзин, А.П. Богданова,
А.А. Каменских, Ю.О. Носов
89127868326@mail.ru, slekjoy0@gmail.com,
anastasia_pankova@mail.ru, anna_kamenskih@mail.ru,
ura.4132@yandex.ru**

УДК 531.4

В рамках исследования экспериментально получены теплофизические и термомеханические свойства для набора современных полимерных материалов, их модификаций и композитов на их основе. В качестве контрольного образца исследован чистый фторопласт. С использованием численной процедуры идентификации модели максвелловского типа на основе рядов Прони получены материальные константы и выполнена их имплантация в прикладной пакет конечно-элементного анализа ANSYS. Исследовано поведение материалов в рамках модели, приближенной к классической задаче Герца. Проанализировано влияние реологии материалов на их напряженно-деформированное состояние.

Ключевые слова: полимер, контакт, метод конечных элементов, упругость, пластичность, вязкость.

Comparative analysis of the stress-strain state of a polymer sliding layer at elastic, elastic-plastic and viscoelastic material behavior

Thermophysical and thermomechanical properties for a set of modern polymeric materials, their modifications and composites based on them were obtained experimentally as part of the study. PTFE was

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0007)

Мухаметшин Андрей Ренатович, студент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Andrej Muhametshin (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Баймурзин Даниил Андреевич, студент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Daniil Bajmurzin (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Богданова Анастасия Петровна, аспирант, ПНИПУ (Пермь, Россия); Anastasia Bogdanova (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Каменских Анна Александровна, к.т.н., доцент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Anna Kamenskikh (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Носов Юрий Олегович, аспирант ПНИПУ (Пермь, Россия); Yuriy Nosov (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

studied as a control sample. The material constants were obtained using a numerical procedure for identifying a Maxwell-type model based on Prony series and were implanted into the ANSYS finite element analysis application package. The behavior of materials within the framework of a model close to the classical Hertz problem is investigated. The influence of materials rheology on their stress-strain state is analyzed.

Keywords: polymer, contact, finite element method, elasticity, plasticity, viscosity

Сферические опорные части мостов включают плоские и сферические полимерные слои скольжения, обеспечивающие долговременную подвижность и правильную работу конструкции [1, 2]. Широкое распространение получили слои из фторопласта, его модификаций и композитов на его основе [3]. Благодаря постоянному расширению производственных мощностей, совершенствованию технологий изготовления и изменению состава появляются новые функциональные материалы пригодные для использования в качестве слоев скольжения [4]. Для оценки возможности использования материалов в конструкции опорных частей требуется анализ их поведения в рамках экспериментальных исследований и численного моделирования [2, 4].

В рамках данной работы выполнена серия натуральных экспериментов для набора современных полимерных и композиционных материалов, выделанных в качестве перспективных для создания относительно тонких плоских и сферических слоев скольжения опорных частей. Поиск и первичные научные изыскания выполнялись производственной компанией ООО «АльфаТех». На базе лаборатории пластмасс ПНИПУ получены теплофизические и термомеханические свойства для 7 материалов: 2 полимерных материала разного состава и производителей, 2 модифицированных политетрафторэтилена (ПТФЭ), 3 композиционных материала на основе ПТФЭ. В исследованиях в качестве контрольного образца рассматривался чистый фторопласт. Эксперименты проводились на диапазоне рабочих температур мостовых сооружения от -40 до $+80$ °С. На основе полученных экспериментальных данных построены модели поведения материалов с учетом релаксации и вязкости с использованием ранее разработанной процедуры идентификации материальных констант [5]. В рамках первого приближения для описания нелинейного поведения материалов в рамках вязкоупругости используется модель максвелловского типа на основе рядов Прони. Упругая и упругопластическая модели были построены в более ранних исследованиях на основе экспериментальных данных, полученных на базе Института механики сплошных среду УрО РАН д.ф.-м.н. А.А. Адамовым.

В рамках анализа напряженно-деформированного состояния полимерных слоев скольжения из разных материалов рассматривается мо-

дель классического контакта Герца о деформировании полупространства стальным сферическим индентором. Выполнен анализ влияния степени дискретизации системы. Проанализировано влияния марок и моделей поведения материалов на характеристики пятна контакта при мгновенно прикладываемой статической нагрузке и при ее выдержке.

Литература

1. *Nosov Y.O., Kamenskikh A.A.* Influence Analysis of Lubricant Recesses on the Working Capacity of the Bridge Span Spherical Bearing // *Lubricants*, **10** (2022), 283
2. *Адамов А.А., Келлер И.Э., Острер С.Г., Селетков Д.В.* Оценка работоспособности антифрикционных ПТФЭ-компози́тов при давлении свыше 60 МПа I. Сравнение твердости и деформационных свойств в условиях свободного и стесненного сжатия // *Mehanika kompozitnih materialov*, **5:58** (2022), 965-986
3. *Adamov A.A., Kamenskikh A.A., Pankova A.P., Strukova V.I.* Comparative analysis of the work of bridge spherical bearing at different antifriction layer locations // *Lubricants*, **10** (2022), 207
4. *Адамов А.А., Келлер И.Э., Петухов Д.С., Кузьминых В.С., Патраков И.М., Гракович П.Н., Шилько И.С.* Оценка работоспособности ПТФЭ-компози́тов в качестве антифрикционных слоев опорных частей с шаровым сегментом // *Трение и износ*, **3** (2023), 201-211
5. *Nosov Y.O., Kamenskikh A.A.* Experimental Study of the Rheology of Grease by the Example of CIATIM-221 and Identification of Its Behavior Model // *Lubricants*, **11** (2023), 295

СТАТИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД ОПИСАНИЯ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Л.В. Мышеловка, Ю.П. Вирченко
myshelovka@bsu.edu.ru, virch@bsu.edu.ru,

УДК 519.24

Развивается флюктуационная «квазимикроскопическая» теория радиационно-кондуктивного теплообмена в твердотельных диэлектриках на основе статистических полуфеноменологических представлений. Она исходит из кинетических представлений переноса тепла излучением в среде и в математическую модель теории включается переносящее тепло излучение электромагнитное поля.

Ключевые слова: тепловые флуктуации, электромагнитное излучение, уравнения Максвелла.

Statistical approach to the description of thermal radiation transfer

The fluctuation [quasi-microscopic] theory of radiation-conductive heat transfer in solid-state dielectrics is being developed on the basis of statistical semi-phenomenological representations. It proceeds from kinetic representations of heat transfer by radiation in the medium and the mathematical model of the theory includes electromagnetic fields transferring heat radiation.

Keywords: thermal fluctuations, electromagnetic radiation, Maxwell's equations.

В рамках подхода, использованного в работе [1], изучается одномерная задача об эволюции распределения температуры $T(x, t)$ в ограниченном образце с учётом радиационно-кондуктивного теплообмена. Изменение со временем $T(x, t)$ описывается уравнением теплопроводности

$$\dot{T}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1)$$

где $P(x, t)$ – поток энергии излучения, переносящего тепло. Рассматривается перенос теплового электромагнитного излучения в диэлектрической диспергирующей среде, которая обладает зависящими от частоты ω поля диэлектрической $\varepsilon(\omega)$ и магнитной $\mu(\omega)$ проницаемостями. Для определенности постановки задачи вычисляется плотность потока

Мышеловка Лариса Викторовна, аспирант, БелГУ (Белгород, Россия);
Myshelovka Larisa (Belgorod State University, Belgorod, Russia)

Вирченко Юрий Петрович, д.ф.-м.н., профессор, БГТУ имени В.Г.Шухова (Белгород, Россия); Virchenko Yuri (Belgorod State Technological University named V.G. Shukhov, Belgorod, Russia)

$P(x, t)$ энергии электромагнитного поля в точке x среды в момент времени t , излучаемого малым объемом, окружающим точку x . Плотность потока $P(x, t)$ рассматривается как функция от локальной температуры $T(x, t)$.

Функционал $P(x, t)$, в случае идеальной диэлектрической среды, определяется в виде

$$P(x, t) = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c^2} ([\mathbf{E}(x, t), \mathbf{H}(x, t)])_x ,$$

где ε, μ – соответственно, электрическая и магнитная восприимчивости среды, $\mathbf{E}(x, t)$, $\mathbf{H}(x, t)$ – векторные поля электрической и магнитной составляющие теплового электромагнитного излучения. Поля $\mathbf{E}(x, t)$ и $\mathbf{H}(x, t)$ подчинены уравнениям Максвелла в среде,

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \dot{\mathbf{E}} + \gamma \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(x, t), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \dot{\mathbf{H}}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Ток $\mathbf{j}(x, t)$ описывает процесс генерации излучения тепловыми колебаниями среды. Стохастические $\mathbf{E}(x, t)$ и $\mathbf{H}(x, t)$ порождаются тепловыми флуктуациями. В связи с этим стохастический источник $\mathbf{j}(x, t)$ моделируется обобщённым гауссовским случайным процессом белого шума, как по времени, так и по пространственной координате.

$$\langle \mathbf{j}(x, t) \rangle = 0, \quad \langle j_k(x, t) j_l(x', t') \rangle = \delta_{kl} A [T(x, t)] \delta(t - t') \delta(x - x').$$

Его амплитуда в каждой пространственно-временной точке определяется локальной температурой $T(x, t)$. Для вычисления потока $P(x, t)$, решается стационарная задача на отрезке вещественной оси для системы стохастических уравнений (2) с граничными условиями непрерывности полей \mathbf{E} и \mathbf{H} и их производных по x . Математическое ожидание, определяющее поток $P(x, t)$, вычисляется в коротковолновой асимптотике, когда частота ω фурье-образов полей \mathbf{E} и \mathbf{H} стремится к бесконечности.

Литература

1. *Вирченко Ю.П., Сапрыкин М.А.* Неравновесная термодинамика радиационно-кондуктивного теплообмена в диэлектрических средах // Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics, **23(118)**:25 (2011) 158-167.

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В НЕФТЯНОЙ СКВАЖИНЕ

Д.А. Насырова
dinasyrova@mail.ru

УДК 532.5.013.3

Рассмотрены собственные колебания столба жидкости в нефтяной скважине, возникающие при гидроударе. Период колебаний, интенсивность затухания колебаний определяются протяженностью столба жидкости, ее реологическими свойствами, а также коллекторскими характеристиками призабойной зоны пласта. На основе математической модели, описывающей движение столба жидкости в скважине и фильтрацию в призабойной зоне, подверженной ГРП, получены решения задачи о собственных затухающих колебаниях столба жидкости в скважине.

Ключевые слова: собственные колебания, амплитуда колебаний, нефтяная скважина, гидроразрыв пласта, фильтрация жидкости

The main tasks of mathematics

The natural oscillations of the liquid column in an oil well arising from a hydraulic shock are considered. The oscillation period and the intensity of attenuation of vibrations are determined by the length of the liquid column, its rheological properties, as well as the reservoir characteristics of the bottomhole formation zone. Based on a mathematical model describing the movement of a column of liquid in a well and filtration in a bottomhole zone exposed to hydraulic fracturing, solutions to the problem of intrinsic damping vibrations of a column of liquid in a well are obtained.

Keywords: natural oscillations, amplitude of oscillations, oil well, hydraulic fracturing, liquid filtration.

В настоящее время при добыче нефти широко применяется технология гидроразрыва пласта (ГРП). В пласте создаются трещины, которые закрепляются пропантантами для предотвращения их смыкания. Трещины, которые возникают в результате применения технологии ГРП, увеличивают площадь, с которой можно извлечь нефть из добывающей скважины или расширяют поверхность закачки жидкости, если это нагнетающая скважина.

Работа выполнена при поддержке средствами госбюджета по госзаданию №075-00570-24-01 ("Гидрогазодинамика многофазных, термовязких и микродисперсных сред")

Насырова Дина Ахметовна, аспирант (Уфа, Россия); Dina Nasyrova (R.R. Mavlyutov Institute of Mechanics of the UFIC RAS, Ufa, Russia)

Рассмотрены собственные колебания столба жидкости в вертикальной нефтяной скважине при закрытой[1] и открытой верхней границе[2]. Колебания возникают при резком закрытии или открытии насосов скважины (гидроударе). Период колебаний, интенсивность затухания колебаний определяются протяженностью столба жидкости, ее реологическими свойствами, а также коллекторскими характеристиками призабойной зоны пласта. На основе математической модели, описывающей движение столба жидкости в скважине и фильтрацию в призабойной зоне, подверженной ГРП, получены решения задачи о собственных затухающих колебаниях столба жидкости в скважине. Получили характеристическое уравнение для определения собственной частоты колебаний.

Также рассматривается обсаженная горизонтальная скважина длиной l , которая сообщается с пластом посредством радиальных трещин ГРП, расположенных равномерно вдоль скважины. В работе получено трансцендентное уравнение из которого определяются комплексные собственные частоты, по которым находят частота колебаний, коэффициент затухания, амплитуда колебаний и другие характеристики, описывающие собственные колебания жидкости в горизонтальной скважине с системой трещин, перпендикулярных стволу скважины. Построены графики зависимостей собственной частоты, коэффициента затухания и декремента затухания от проводимости трещины, проницаемости пласта и количества трещин на единицу длины. Из графиков сделаны выводы о том как влияют изменения ширины трещины, количества трещин и проницаемость пласта на собственные частоты.

Показано, что акустическая диагностика основанная на анализе собственных колебаний в скважине может служить действенным инструментом для диагностики призабойной зоны скважины.

Литература

1. *R. A. Bashmakov, D. A. Nasyrova, Z. R. Khakimova* Natural Vibrations of Fluid in a Well Connected with the Reservoir by a System of Radial Fractures // *Fluid Dynamics*, (2024), 291-292
2. *P. A. Башмаков, Д. А. Насырова, В. Ш. Шагапов* Собственные колебания жидкости в скважине, сообщаемой с пластом, при наличии трещины ГРП // *Прикладная математика и механика*, (2022), 88-104.

**ОЦЕНКА ТЕМПОРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ
ФРАКТАЛИЗАЦИИ СТЕКЛОУГЛЕРОДА В УСЛОВИЯХ
ВОЛЬТАМПЕРОМЕТРИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПО
МЕТОДУ ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ**

**Р.Р. Нигматуллин, З.А. Баширова, Э.И. Максютова,
А.Р. Бурганова, Г.А. Игнатьева, Г.К. Будников
renigmat@gmail.com, bashirova2903@gmail.com,
maksyutovaelza@gmail.com, burganova.a.r@yandex.ru,
IgnatevaGA@mail.ru, Herman.Budnikov@kpfu.ru**

УДК 517.518

В данной работе предлагается новый метод описания эволюции вольтамперограмм во времени в форме темпоральных кривых. Будучи проинтегрированными они оказываются самоподобными, что позволяет предложить подгоночную функцию, которая выводится из принципа самоподобия и позволяет параметризовать эти случайные кривые.

Ключевые слова: самоподобие, темпоральная кривая, подгоночная функция.

Assessment of the temporal structure of glass carbon fractalization under conditions of voltammetric analysis using the principal component method

This paper proposes a new method for describing the evolution of voltammograms over time in the form of temporal curves. When integrated, they turn out to be self-similar, which makes it possible to propose a fitting function that is derived from the principle of self-similarity and allows parameterizing these random curves.

Keywords: self-similarity, temporal curve, fitting function.

Нигматуллин Равиль Рашидович, д.х.н., профессор, КАИ (Уфа, Россия); Ravil Nigmatullin (Kazan National Research Technical University, Ufa, Russia)

Баширова Зейна Анваровна, аспирант, УУНИТ (Уфа, Россия); Zeina Bashirova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Максютова Эльза Ильдусовна, к.х.н., ведущий инженер, АО "УАП "Гидравлика" (Уфа, Россия); Elsa Maksutova (JSC UAP Hydraulics, Ufa, Russia)

Бурганова Алина Рустамовна, зав. лаб., УУНИТ (Уфа, Россия); Alina Burganova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Игнатьева Галина Анатольевна, MAOY Лицей № 6 (Уфа, Россия); Galina Ignatieva (Lycium No. 6, Ufa, Russia)

Будников Герман Константинович, д.х.н., профессор, КФУ (Уфа, Россия); Herman Budnikov (Kazan Federal University, Ufa, Russia)

Для описания темпоральной эволюции вольтамперограмм и их параметризации в стиле общепринятой амплитудно-частотной характеристики (АЧХ), вначале необходимо понять, как можно параметризовать самоподобные кривые, имеющие четко выраженный тренд. Если какая-либо кривая самоподобна $S(z)$ (где z – произвольная переменная действительная или комплексная), то она удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$S(z\xi) = S(z). \quad (1)$$

и имеет решение вида

$$S(z) = Pr\left(\frac{lnz}{ln\xi}\right) = \sum_{k=0}^{K \gg 2} \left[Ac_k \cos\left(2\pi k \frac{lnz}{ln\xi}\right) + As_k \sin\left(2\pi k \frac{lnz}{ln\xi}\right) \right]. \quad (2)$$

Легко убедиться в том, что это решение – вырожденное. Действительно, запишем уравнение (1) в виде

$$E_\xi S(z) = S(z\xi), \quad (3)$$

В реальности эта разность не равна нулю, а имеет некоторую малую величину ε . Поэтому запишем два уравнения

$$S(z\xi^2) - S(z\xi) = S(z\xi) - S(z) = \varepsilon_1, \quad (4)$$

$$(E_\xi - 1)^2 S(z) = (E_\xi - 1)\varepsilon_1 \approx \varepsilon_2. \quad (5)$$

Повторяя этот процесс K -раз, считая что разность $S(z\xi^K) - S(z) \approx \varepsilon_1$ примерно одинакова для всех $k = 1, 2, \dots, K$, нетрудно получить следующее уравнение

$$S(z) \approx Y_k(z) \left(\sum_{k=0}^{K-1} \left(\frac{lnz}{ln\xi}\right)^k \right) Pr\left(\frac{lnz}{ln\xi}\right). \quad (6)$$

Для практических целей и обеспечения необходимой точности достаточно ограничиться случаем $K = 2$ и учесть флуктуации или ошибки подгона до второго порядка. Тогда подгоночная функция, которая будет использована для параметризации данных, может быть записана в виде:

$$Y_2(z) \approx A_0 + Pr_1\left(\frac{lnz}{ln\xi}\right) + \left(\frac{lnz}{ln\xi}\right) Pr_2\left(\frac{lnz}{ln\xi}\right). \quad (7)$$

Подгоночная функция (7) содержит только один нелинейный подгоночный параметр $ln\xi$, остальные параметры линейны и находятся с помощью МНК. Нелинейный параметр $ln\xi$ находится из минимизации ошибки подгонки.

Таким образом, опираясь на полученные выше формулы можно разработать алгоритм параметризации трех интегральных кривых, которые описывают эволюцию вольтамперограмм по всем колонкам исходной матрицы $N \times M$, где N – число строк матрицы, M – число столбцов, соответственно. Алгоритм параметризации эволюционных кривых строится следующим образом. Из каждой колонки берутся только три инвариантные точки/кривые (максимальная, минимальная и

средняя), которые не меняются при перестановке всех остальных. Если проинтегрировать эти три распределения $Y_{mx}(m)$, $Y_{mp}(m)$ и $Y_{min}(m)$ ($m=1,2,3,\dots,M$) по всем колонкам, то образуются три накопленные (кумулятивные) кривые $Jq(m)$, $q=cp, mp, dp$, которые могут быть параметризованы по формуле (7) в соответствии с принципом самоподобия.

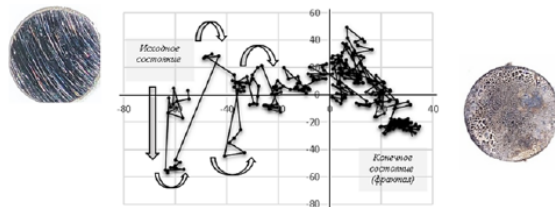


Рис. 1: График счетов МГК-моделирования вольтамперометрического поведения стеклоуглеродного дискового электрода в условиях непрерывной циклической развертки потенциалов (слева – фотография поверхности электрода в начале эксперимента, справа – фотография поверхности электрода по завершении 2000 циклов окисления/восстановления материала электрода).

Литература

1. *Nigmatullin R.R., Budnikov H.C., Khamzin A.A., Sidelnikov A.V., Maksyutova E.I.* Temporal multi-sensor system for voltammetric recognition of L- and D-tryptophan enantiomers based on generalized principal component analysis // *New Journal of Chemistry*, 2018. V. 42. № 1. P. 465-475.

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕТЬЕЙ
НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДРОБНЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ**

**А.Г. Омарова
asya89.89@mail.ru**

УДК 519.63

Исследована начально-краевая задача для нагруженного дифференциального уравнения теплопроводности с композицией дробной производной Римана-Лиувилля и Капуто-Герасимова и с граничными условиями первого и третьего рода. С помощью метода энергетических неравенств получена априорная оценка в разностной форме. Полученные неравенства означают единственность решения и непрерывную зависимость решения от входных данных задачи. Построена разностная схема, аппроксимирующая исходную задачу с порядком $O(\tau + h^{2-\beta})$.

Ключевые слова: краевая задача, априорная оценка, метод энергетических неравенств, аппроксимация, дробная производная Капуто-Герасимова, дробная производная Римана-Лиувилля.

Numerical solution of the third initial-boundary value problem for the nonstationary heat heat conduction equation with fractional derivatives

An initial boundary value problem for a loaded differential heat equation with a composition of the fractional derivative of Riemann-Liouville and Caputo-Gerasimov and with boundary conditions of the first and third kind is studied. Using the method of energy inequalities, an a priori estimate in difference form was obtained. The resulting inequalities mean the uniqueness of the solution and the continuous dependence of the solution on the input data of the problem. A difference scheme is constructed that approximates the original problem with an order $O(\tau + h^{2-\beta})$.

Keywords: boundary value problem, a priori estimate, method of energy inequalities, Caputo-Gerasimov fractional derivative, Riemann-Liouville fractional derivative.

Омарова Асият Гамзатовна, аспирант, Дагестанский государственный университет (Махачкала, Россия); Asiyat Omarova (Dagestan State University, Makhachkala, Russia)

Краевые задачи для дифференциальных уравнений с композицией дробных производных Капуто-Герасимова рассмотрены в исследованиях [3,4], здесь рассматривается дифференциальное уравнение с композицией дробной производной Римана-Лиувилля и Капуто-Герасимова.

В области $D = \{0 \leq x \leq L, 0 < t \leq T\}$ исследуем начально-краевую задачу:

$$\partial_{0t}^\alpha u(x, t) = {}^{RL}D_{0x}^\beta (\partial_{0x}^\beta u(x, t)) + r(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - q(x, t) u(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

$${}^{RL}D^{\beta-1} (\partial_{0x}^\beta u(0, t)) = b_1(t) u(0, t) - \mu_1(t), \quad (2)$$

$$- {}^{RL}D^{\beta-1} (\partial_{0x}^\beta u(l, t)) = b_2(t) u(l, t) - \mu_2(t), \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

где $\partial_{0t}^\alpha u(x, t)$, $\partial_{0x}^\beta u(x, t)$ — частные дробные производные Капуто-Герасимова [1], ${}^{RL}D_{0x}^\beta (\partial_{0x}^\beta u(x, t))$ — композиция дробной производной Римана-Лиувилля и Капуто-Герасимова, $0 < \alpha < 1$, $1/2 < \beta < 1$,

$$|q(x, t)|, \quad |r(x, t)|, \quad |b_1(t)|, \quad |b_2(t)| \leq c, \quad (5)$$

$c = const > 0$ — зависящая от входных данных.

Построим численное решение (1)–(4), для этого на рассматриваемой области введем по переменной x и t равномерную сетку с шагом h по x и τ по t :

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau \{ (x_m, t_n), \quad x_m = mh, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad Mh = L, \\ t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad N\tau = T \}.$$

Точное решение задачи (1)–(4) обозначим через $u_m^n = u(x_m, t_n)$, а приближенное решение обозначим через $y_m^n = y(x_m, t_n)$. Дифференциальной задаче (1)–(4) поставим в соответствие разностную схему порядка $O(h^{2-\beta} + \tau)$

$$\Delta_{0t}^\alpha y = D^\beta \Delta_{0x}^\beta y + r^+ y_{\bar{x}} + r^- y_x - q(y_{m_0}^- + y_{m_0+1}^+) + \varphi, \quad (6)$$

$$D^{\beta-1} \Delta_{0x}^\beta y_0 = b_1 y_0^n - \mu_1, \quad (7)$$

$$-D^{\beta-1} \Delta_{0x}^\beta y_M = b_2 y_M^n - \mu_2, \quad (8)$$

$$y_m^0 = u_0(x_m), \quad 0 \leq x_m \leq l, \quad (9)$$

где

$$\Delta_{0t}^\alpha y = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau} \sum_{k=0}^n (t_{n-k+1}^{1-\alpha} - t_{n-k}^{1-\alpha}) \Delta y(x_m, t_k),$$

$$\Delta_{0x}^\beta y = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)h} \sum_{k=0}^{m+1-j} (x_{m-j-k+2}^{1-\beta} - x_{m-j-k+1}^{1-\beta}) \Delta y(x_k, t_n),$$

$$D^\beta (\Delta_{0x}^\beta y) = b_m \Delta_{0x}^\beta y_0 + \sum_{j=0}^m a_j \Delta_{0x}^\beta y,$$

$$\Delta_{0x}^\beta y_0 = \frac{y_1^n - y_0^n}{\Gamma(2 - \beta)h^\beta}, \quad y_{\bar{x}} = \frac{y_{m+1}^n - y_m^n}{h}, \quad y_x = \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h},$$

$$r^-(\bar{x}, t_n) = r, \quad |r| = r^+ - r^-, \quad r^+ = 0.5(r + |r|) \geq 0,$$

$$r^- = 0.5(r - |r|) \leq 0, \quad y = y_m^n, \quad \varphi = f(\bar{x}, t_n), \quad q = q(\bar{x}, t_n), \quad b_i = b(t_n),$$

$$\mu_i = \mu(t_n), \quad i = 1, 2, \quad x_{m_0}^- = \frac{x_{m_0+1} - x_0}{h}, \quad x_{m_0}^+ = \frac{x_0 - x_{m_0}}{h}.$$

Исследуем устойчивость разностной схемы (6)–(9) с помощью метода энергетических неравенств. Введем скалярное произведение и норму в виде [2]

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \quad (u, v] = \sum_{i=1}^N u_i v_i h,$$

$$(u, u) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i^2 h = \|u\|_0^2, \quad (u, u] = \sum_{i=1}^N u_i^2 h = \|u\|_0^2.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (5), тогда разностная задача (6)–(9) устойчива при $\tau \leq \tau_0$ и для ее решения справедлива априорная оценка (10)

$$\|y^{i+1}\|_0^2 \leq M \left(\|y^0\|_0^2 + \max_{0 \leq i' \leq i} \left(\|\varphi^{i'}\|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right) \right), \quad (10)$$

где $M = \text{const} > 0$, которая не зависит от τ и h .

Из априорной оценки (10) следует единственность и устойчивость решения задачи (6)–(9) по начальным данным и правой части.

Литература

1. Бейбалаев В.Д. Математические модели динамических процессов во фрактальных и пористых средах: монография. — Махачкала: Издательство ДГУ, 2022. — 278.
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. — Москва: Наука, 1973. — 415.
3. Омарова А.Г. Численное решение краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто-Герасимова // Труды ИСА РАН, 74:2 (2024), 3-10
4. Омарова А.Г. Об устойчивости и сходимости разностной схемы, аппроксимирующей краевую задачу для одного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто-Герасимова // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки, 1 (2022), 23-27

РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СХОДЯЩИХСЯ ТЕЧЕНИЙ ПОЛИМЕРНЫХ СИСТЕМ

Ю.А. Павлюк, Г.В. Пышнограй

pawlyk1996@yandex.ru, pyshnograi@mail.ru

УДК 532.135

Изучаются двухмерные течения расплавов полимеров различной структуры в каналах с прямоугольным сечением и с внезапным сужением. Исследуется влияние температуры полимерного расплава на размеры вихревой зоны. Анализируются профили продольной и поперечной скорости в различных сечениях. В качестве математической модели использовалась математическая модель Виноградова-Покровского.

Ключевые слова: реология, вязкость, расплавы полимеров, вихревое течение, метод конечных элементов.

RHEOLOGICAL MODEL FOR DESCRIPTION OF CONVERGING FLOWS OF POLYMER SYSTEMS

Two-dimensional flows of polymer melts of various structures in channels with rectangular cross-section and with sudden narrowing are studied. Influence of polymer melt temperature on vortex zone dimensions is investigated. Profiles of longitudinal and transverse speed in different sections are analyzed. The mathematical model of Vinogradov-Pokrovsky was used as a mathematical model.

Keywords: rheology, viscosity, polymer melts, vortex flow, finite element method.

С использованием реологической модели Виноградова-Покровского проведено исследование течения полимерного расплава в прямоугольном канале с резким сужением.

Определены компоненты продольной и поперечной составляющих вектора скорости [1] и выполнено сравнение с экспериментальными данными [2,3]. Исследовано влияние молекулярной структуры полимера на особенности течения. Обнаружено, что при течении полимера с разветвлённой структурой возникает вторичный поток, отсутствующий при течении линейного полимера. Основной фактор, определяющий этот эффект — время релаксации полимерного образца. Течение разветвлённого полимера также отличается непараболическим профилем скорости, который более выражен по сравнению с линейным полимером.

Павлюк Юрий Алексеевич, аспирант, АлтГПУ (Барнаул, Россия); Yuri Pawlyk (Altai State Pedagogical University, Barnaul, Russia)

Пышнограй Григорий Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, АлтГТУ имени И.И.Ползунова (Барнаул, Россия); Grigori Pyshnograi (Altai State Technical University, Barnaul, Russia)

Проведено сравнение гидродинамических свойств полимерных расплавов при различных температурах в сходящемся канале с прямоугольным сечением. Показано, что при резком сужении канала образуется вихревой поток, размер которого увеличивается при повышении температуры расплава, что подтверждается экспериментами [4].

Также изучено изменение размеров вихревой области в зависимости от расходных характеристик. Установлено, что повышение объемного расхода полимерного расплава до достижения точки максимума приводит к более быстрому затуханию вихря. Однако, несмотря на то, что размеры вихря уменьшаются с увеличением температуры, скорость этого уменьшения замедляется при увеличении расхода [4].

Исследовано влияние параметров наведенной анизотропии на профиль продольной скорости. Нулевые значения соответствуют течению ньютоновской жидкости. Однако, при увеличении значений параметров анизотропии поведение жидкости всё больше отклоняется от параболического профиля.

Таким образом, полученные результаты подтверждают эффективность реологической модели Виноградова-Покровского для описания течений полимерных расплавов в областях со сложной геометрией. Разработанная модель может стать основой для будущих исследований.

Литература

1. Капустина Л.В., Павлюк Ю.А., Пышиноград Г.В. Гидродинамическая структура вторичных потоков расплавов полимеров в каналах с изменением геометрии // Южно-Сибирский научный вестник, №6 (52), (2023), 101–105. DOI: 10.25699/SSSB.2023.52.6.012
2. Merten A., Schwetz M., Munstedt H. Laser-Doppler velocimetry – a powerful tool to investigate the flow behavior of polymer melts // International Journal of Applied Mechanics and Engineering, Vol. 8, (2003), 283-288.
3. Hertel D., Valette R., Munstedt H. Three-dimensional entrance flow of a low-density polyethylene (LDPE) and a linear low-density polyethylene (LLDPE) into a slit die // J. Non-Newtonian Fluid Mech, Vol. 153, (1964), 82–94. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2007.11.010
4. Вайцель Д.Э., Павлюк Ю.А., Пышиноград Г.В., Рудаков Г.О. Влияние реологических свойств полимерного расплава на гидродинамические характеристики вихревого течения в сходящемся канале // Инженерно-физический журнал, Т. 96, № 5, (2023), 1186–1194.

НОЛЬ-МЕРНАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПАРОГРАВИТАЦИОННОГО ДРЕНАЖА

О.Н. Пичугин, М.И. Амерханов, К.М. Федоров,
А.Я. Гильманов, А.П. Шевелёв

o.pichugin@agni-rt.ru, ami@tatneft.ru, k.m.fedorov@utmn.ru,
a.y.gilmanov@utmn.ru, a.p.shevelev@utmn.ru

УДК 536.76

Применение перспективного теплового метода увеличения нефтеотдачи – парогравитационного дренажа требует предварительного математического моделирования для определения эффективных параметров процесса. Сформулированный в работе ноль-мерный подход к моделированию такого процесса позволяет получать быстрые решения, применимые при принятии оперативных решений. В основе модели лежат балансовые соотношения массы фаз и энергии. Показана возможность воспроизведения динамики процесса с удовлетворительной точностью.

Ключевые слова: парогравитационный дренаж, интегральная модель, математическое моделирование, тепловые методы увеличения нефтеотдачи, высоковязкая нефть, параметрический анализ.

Zero-dimensional integral model of steam-assisted gravity drainage

The application of a promising thermal enhanced oil recovery method – steam-assisted gravity drainage requires preliminary mathematical modeling to determine the effective parameters of the process. The zero-dimensional approach to modeling such a process formulated in the paper allows to obtain quick solutions that are applicable for operational decisions. The model is based on the balance ratios of phase mass and energy. The possibility of reproducing the dynamics of the process with satisfactory accuracy is shown.

Пичугин Олег Николаевич, к.ф.-м.н., заместитель директора, АГТУ ВШН (Альметьевск, Россия); Oleg Pichugin (Almetyevsk State Technical University, Almetyevsk, Russia)

Амерханов Марат Инкилапович, к.т.н., начальник управления, ПАО "Татнефть" (Альметьевск, Россия); Marat Amerkhanov (PJSC Tatneft, Almetyevsk, Russia)

Федоров Константин Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, ТюмГУ (Тюмень, Россия) и АГТУ ВШН (Альметьевск, Россия); Konstantin Fedorov (University of Tyumen, Tyumen, Russia and Almetyevsk State Technical University, Almetyevsk, Russia)

Гильманов Александр Янович, к.ф.-м.н., доцент, ТюмГУ (Тюмень, Россия); Alexander Gilmanov (University of Tyumen, Tyumen, Russia)

Шевелёв Александр Павлович, к.ф.-м.н., профессор, ТюмГУ (Тюмень, Россия) и АГТУ ВШН (Альметьевск, Россия); Alexander Shevelev (University of Tyumen, Tyumen, Russia and Almetyevsk State Technical University, Almetyevsk, Russia)

Keywords: steam-assisted gravity drainage, integral model, mathematical modeling, thermal enhanced oil recovery methods, high viscosity oil, parametric analysis.

Существенную долю запасов нефтегазового комплекса России составляют высоковязкие нефти. Эксплуатация таких месторождений на промышленном уровне невозможна без привлечения методов увеличения нефтеотдачи. Среди таких методов всё более перспективным становится парогравитационный дренаж. Эффективное использование этой технологии требует предварительного этапа физико-математического моделирования этого процесса. Использование коммерческих симуляторов, хотя и позволяет учесть значительное количество физических эффектов, требует неоправданно высоких временных затрат и задания большого объёма входной информации об объекте разработки, которая зачастую в полной мере не известна. Поэтому целью работы является создание простой ноль-мерной интегральной модели процесса парогравитационного дренажа, позволяющей проводить оперативные прогнозы эффективных параметров этого процесса.

В основе модели лежат уравнения сохранения массы воды, нефти и пара в паровой камере, имеющей форму призмы треугольного сечения, уравнение притока тепла в паровую камеру и закон сохранения импульса в виде соотношений расходов нагнетаемого и добываемого флюидов, определяемых по закону Дарси. Замыкающими уравнениями являются соотношение насыщенных фаз и скоростей роста паровой камеры в вертикальном и горизонтальном направлениях, отношение коэффициентов теплоотдачи в этих направлениях определяются по формуле Эдмундса-Петерсона. При этом один из коэффициентов определяется на основе лабораторных исследований или эмпирических корреляций. Начальные условия соответствуют заданию нулевого объёма паровой камеры и максимальной нефтенасыщенности.

Рассчитана динамика коэффициента извлечения нефти, парнефтяного отношения и обводнённости добываемой продукции. Проведена валидация полученных решений путём сопоставления с промышленными данными по месторождению Senlac. Показана возможность воспроизведения динамики процесса с удовлетворительной точностью.

Литература

1. *Butler R.M., McNab G.S., Lo H.Y.* Theoretical studies on the gravity drainage of heavy oil during in situ steam heating // *Canadian Journal of Chemical Engineering*, **59**, (1981), 455-460.
2. *Шандрыгин А.Н., Нухаев М.Т., Тертычный В.В.* Разработка залежей тяжёлой нефти и природного битума методом парогравитационного дренажа (SAGD) // *Нефтяное хозяйство*, **7**, (2006), 92-96.
3. *Амерханов М.И., Зарипов А.Т., Береговой А.Н., Князева Н.А., Васильев Э.П.* Комплекс технологических решений для повышения

эффективности разработки месторождений сверхвязкой нефти ПАО
«Татнефть» // Нефтяное хозяйство. **1**, (2020), 60-65.

РЕКОНСТРУКЦИЯ 2D ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ПО ЛУЧЕВЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ ЕГО МОМЕНТОВ

И.Е. Светов, А.П. Полякова

svetovie@math.nsc.ru, apolyakova@math.nsc.ru

УДК 517.44:517.95

Предложены и обоснованы алгоритмы восстановления векторного поля по известным продольным или поперечным лучевым преобразованиями его моментов.

Ключевые слова: векторное поле, лучевое преобразование моментов, дифференциальное свойство лучевых преобразований, алгоритм реконструкции.

Reconstruction of a 2D vector field from ray transforms of its moments

The algorithms for reconstructing a vector field from known longitudinal or transverse ray transforms of its moments are proposed and justified.

Keywords: vector field, ray transform of moments, differential property of ray transforms, reconstruction algorithm.

Лучевым преобразованиям моментов тензорных полей в последние несколько лет посвящено довольно много работ (см., например, [1]–[4]), в большей части которых исследуются традиционные вопросы реконструкции тензорных полей, заданных на римановых многообразиях или евклидовых пространствах, по их известным продольным лучевым преобразованиям моментов. Существенно меньше работ, в которых предлагаются формулы или процедуры обращения, конструктивные методы и алгоритмы решения задач восстановления тензорных полей по лучевым преобразованиям их моментов. В недавней работе [5] предложены относительно простые подходы восстановления векторного поля по лучевым преобразованиям моментов обоих типов — продольным или поперечным.

В докладе предложены и обоснованы алгоритмы восстановления векторного поля по известным продольным или поперечным лучевым

Работа осуществлена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-00200).

Светов Иван Евгеньевич, к.ф.-м.н., Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет (Новосибирск, Россия); Ivan Svetov (Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

Полякова Анна Петровна, к.ф.-м.н., Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет (Новосибирск, Россия); Anna Polyakova (Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

преобразованиям его моментов. Исследованы свойства нескольких алгоритмов в зависимости от дискретизации данных, уровня и характера шума, гладкости векторного поля. Эксперименты показали хорошие результаты восстановления векторных полей по лучевым преобразованиям их моментов.

Работа осуществлена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-00200).

Литература

1. *Krishnan V.P., Manna R., Sahoo S.K., Sharafutdinov V.A.* Momentum ray transforms // *Inverse Probl. Imaging.*, **13**:3 (2019), 679-701.
2. *Abhishek A., Mishra R.K.* Support theorems and an injectivity result for integral moments of a symmetric m -tensor field // *J. Fourier Anal. Appl.*, **25**:4 (2019), 1487-1512.
3. *Mishra R.K.* Full reconstruction of a vector field from restricted Doppler and first integral moment transforms in \mathbb{R}^n // *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, **28**:2 (2020), 173-184.
4. *Mishra R.K., Sahoo S.K.* Injectivity and range description of first $(k + 1)$ integral moment transforms over m -tensor fields in \mathbb{R}^n // *SIAM J. Math. Anal.*, **53**:1 (2021), 253-278.
5. *Деревцов Е.Ю.* Лучевые преобразования моментов планарных тензорных полей // *Сиб. журн. индустр. математики*, **26**:3 (2023), 26-41.

**КОРРЕКТНАЯ ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ
НА ГРАНИЦЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

А.А. Потапков, a_potapkov@ugrasu.ru

УДК 517.518

В данной работе рассматриваются обратные задачи восстановления коэффициента теплопередачи на границе по интегральным измерениям. Коэффициент теплопередачи фигурирует в условиях передачи тепла для неидеального контакта. Он представляется в виде конечной части ряда Фурье с временно-зависимыми коэффициентами.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, обратная задача, коэффициент теплопередачи.

The Well-Posed Identification of the Interface Heat Transfer Coefficient Using an Inverse Heat Conduction Model

In this work, the inverse problems of recovering the heat transfer coefficient at the interface of integral measurements are considered. The heat transfer coefficient occurs in the transmission conditions of an imperfect contact type. This is representable as a finite part of the Fourier series with time-dependent coefficients.

Keywords: differential equations, inverse problem, heat transfer coefficient.

В работе рассматривается параболическое уравнение

$$Mu = u_t - Lu = f, \tag{1}$$

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(t,x) u_{x_j} - \sum_{i=1}^n a_i(t,x) u_{x_i} - a_0(t,x) u, \quad x \in G.$$

где $G \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей Γ класса C^2 , $t \in (0, T)$. Пусть $Q = (0, T) \times G$, $S = (0, T) \times \Gamma$. Предположим, что область G разделена на два открытых множества G^+ и G^- , $\bar{G}^- \subset G$, $\bar{G}^+ \cup \bar{G}^- = \bar{G}$, $G^+ \cap G^- = \emptyset$. Пусть $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$, $S_0 = \Gamma_0 \times (0, T)$. Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$B(t,x)u|_S = g, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

Потапков Алексей Александрович, аспирант, ФГБОУ ВО ЮГУ (Ханты-Мансийск, Россия); Potapkov Alexey (Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russia)

где $Bu = \frac{\partial u}{\partial N} + \beta u$ или $Bu = u$, $\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_j}(t,x)\nu_i$, где $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ — внешняя единичная нормаль к S , и условиями сопряжения

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(t,x) - \sigma(t,x)(u^+(t,x) - u^-(t,x)) = g^+(t,x), \quad (t,x) \in S_0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial N}(t,x) = \frac{\partial u^+}{\partial N}(t,x), \quad (t,x) \in S_0, \quad (4)$$

где $\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(t,x_0) = \lim_{x \in G^\pm, x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}\nu_j$, $u^\pm(t,x_0) = \lim_{x \in G^\pm, x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0} u(t,x)$, а ν — единичная внешняя нормаль к ∂G^- . Условия переопределения имеют вид:

$$\int_G u(t,x)\varphi_k(x)dx = \psi_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Обратная задача заключается в нахождении решения u для задачи (1)-(4) и функции $\sigma = \sum_{i=1}^m q_i(t)\Phi_i(t,x)$, где функции q_i являются неизвестными, а $\Phi_i(t,x)$ — некоторыми базисными функциями.

Условия сопряжения (3), (4) согласуются с обычным условием неидеального контакта на границе раздела [1]. В этом случае σ является коэффициентом теплопередачи. В случае $\sigma \rightarrow \infty$ мы приходим к задаче дифракции [2] с условиями вида $u^+ = u^-$ и $\frac{\partial u^+}{\partial N} = \frac{\partial u^-}{\partial N}$ на S_0 .

В настоящее время существует множество публикаций, посвященных численному решению задач типа (1)-(5) в различных постановках. Наиболее применимая предусматривает точечные дополнительные измерения, в этом случае условие (5) заменяется на условия $u(t,b_j) = \psi_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Часто коэффициент σ зависит только от времени или пространственных переменных. В статье [3] осуществляется численное определение коэффициента теплопередачи по измерениям на доступной части внешней границы области.

В данной работе мы изучаем вопросы корректности задачи (1)-(5) и устанавливаем теоремы существования и единственности решений данной задачи локально по времени.

Литература

1. *Baehr H.D., Stephan K.* Heat and Mass Transfer // Докл. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, Germany, 2006.
2. *Ladyzhenskaya, O.A.; Solonnikov, V.A.; Uraltseva, N.N.* Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type // American Mathematical Society: Providence, RI, USA, 1968.
3. *Abreu, L.A.S.; Colaco, M.J.; Alves, C.J.S.; Orlande, H.R.B.; Kolehmainen, V.; Kaipio, J.* A comparison of two inverse problem techniques for the identification of contact failures in multi-layered composites. // 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013), November 3-7, 5422–5432.

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ МЕДИЦИНСКИХ ИНСТРУМЕНТОВ С БИОЛОГИЧЕСКОЙ ТКАНЬЮ

П.А. Пья, Ю.В. Григорьев
pyap@student.bmstu.ru, grigoryev@bmstu.ru

УДК 531.8:519.2

В статье рассмотрены особенности нелинейного взаимодействия ультразвуковых медицинских инструментов с биологической тканью и численный метод расчёта амплитудно-частотной характеристики торсионного волновода-концентратора с учетом нелинейного момента взаимодействия с обрабатываемой поверхностью.

Ключевые слова: нелинейный момент, численный метод, амплитудно-частотная характеристика, биологическая ткань, ультразвуковой медицинский инструмент.

Nonlinear interaction of ultrasonic medical instruments with biological tissue

The article considers the features of the nonlinear interaction of ultrasonic medical instruments with biological tissue and a numerical method for calculating the amplitude-frequency response of a torsional waveguide concentrator, taking into account the nonlinear moment of interaction with the treated surface.

Keywords: nonlinear moment, numerical method, amplitude-frequency response, biological tissue, ultrasound medical instrument.

Распределенный момент взаимодействия ультразвуковых медицинских инструментов с биологической тканью $m_{тр}$ (рис. 1а) с учетом качества обработки поверхности волновода и движения жидкой фазы в зазоре между вращающимся рабочим окончанием и зажимом описывается нелинейной зависимостью:

$$m_{тр} = \frac{\rho\lambda\pi d^4}{16} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 + b(z) \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad (1)$$

где d – диаметр рабочего окончания волновода; λ – коэффициент сопротивления трению; φ – угол поворота сечения волновода; $b(z)$ – коэффициент вязкого сопротивления.

Пья Пью Аунг, аспирант, МГТУ им. Н.Э. Баумана, (Москва, Россия); Pyae Phyo Aung (Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia).

Григорьев Юрий Всеволодович, к.т.н., доцент, МГТУ им. Н.Э. Баумана, (Москва, Россия); Grigoryev Yuri Vsevolodovich (Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia)

Уравнение крутильных колебаний с учетом полученного распределенного момента трения (1) и внешнего распределенного момента $m_0(z) \cos(\omega t)$ запишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[GI(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] + \rho I(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + b(z) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\pi \rho \lambda d^4}{16} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 H(z-l) = m_0(z) \cos(\omega t). \quad (2)$$

где $H(z - l_{\text{тр}})$ – функция Хевисайда.

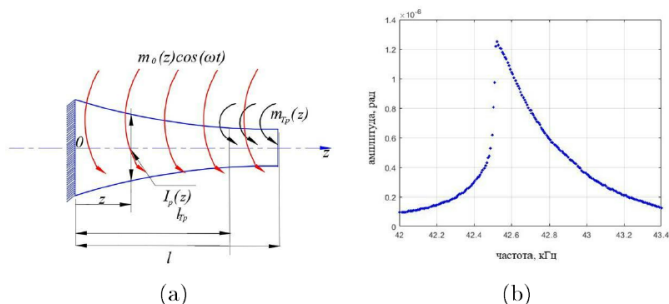


Рис. 1: (а) Схема взаимодействия рабочего окончания торсионного волновода-концентратора с биологической тканью, (б) АЧХ рабочего окончания волновода в окрестности резонансной частоты

В работе выполнен анализ нелинейного взаимодействия ультразвуковых медицинских инструментов с биологической тканью. Выведено нелинейное уравнение вынужденных колебаний рабочего окончания торсионного УЗМИ. Численным интегрированием получена амплитудно-частотная характеристика рабочего окончания сложного торсионного волновода, состоящего из цилиндрического, конического и экспоненциального участков.

Литература

1. Бутаев Д.А., Калмыкова З.А., Подвидз Л.Г., Сборник задач по машиностроительной гидравлике: пособие для машиностроительных вузов. Москва: Машиностроение, 1981. 464 с.
2. Ларионов В.М., Филиппов С.Е., Введение в гидродинамику. Учебное пособие: курс лекций, решение задач. Казань: КГУ, 2010. 108 с.

ИЗМЕНЕНИЕ ФОРМЫ ГАУССИАНА ФУНКЦИИ БРОСКА ИГРОВЫХ КОСТЕЙ НА ПРИМЕРЕ ИГРЫ CATAN

К.С. Рябов

ksriabov@edu.hse.ru

УДК 518.794

В статье рассматривается изменение формы гауссиана функции броска игровых костей на примере игры Catan. Автор анализирует реализацию функции выбора случайного числа из заданного диапазона и соотношение полученных данных с реальным экспериментом. Результаты исследования могут быть полезны для разработчиков и игроков настольных игр, стремящихся улучшить баланс и сделать игру более интересной и захватывающей.

Ключевые слова: математика, функция Гаусса, настольные игры
changing the shape of the gaussian dice roll function using the example of the Catan game

The article discusses the change in the shape of the Gaussian of the dice roll function using the example of the Catan game. The author analyzes the implementation of the function of selecting a random number from a given range and the ratio of the data obtained with a real experiment. The results of the study may be useful for developers and board game players seeking to improve balance and make the game more interesting and exciting.

Keywords: mathematics, Gauss function, board games

Изменение формы гауссиана функции броска игровых костей - это одна из важных концепций, которая может повлиять на результаты игры и стратегию в игре "Catan". "Catan это стратегическая настольная игра, которая включает в себя элементы управления ресурсами, торговли и поселенчества на вымышленном острове.

Игровые кости в "Catan" являются ключевым механизмом, определяющим количество и тип ресурсов, которые игроки получают на каждом ходу. Обычно в каждом ходу игроки бросают две шестигранные кости, результаты которых определяют, какие ресурсы будут получены.

Однако форма гауссиана функции броска игровых костей означает, что некоторые числа имеют более высокую вероятность выпадения, чем другие. Например, число 7 имеет самую высокую вероятность выпадения при броске двух шестигранных костей, что делает его особенно важным для игроков.

Рябов Кирилл Сергеевич, студент магистратуры НИУ ВШЭ - Нижний Новгород, (Нижний Новгород, Россия); Kirill Ryabov (Higher School of Economics, Nizhniy Novgorod, Russia)

Изучение и понимание изменения формы гауссиана функции броска игровых костей может помочь игрокам лучше распределять свои ресурсы, предсказывать вероятность получения нужных ресурсов и разрабатывать более эффективную стратегию для достижения победы в игре.

В данной статье мы рассмотрим примеры гауссиана функции броска игровых костей в игре "Catan" и обсудим, какие стратегии и тактики могут быть использованы игроками, чтобы использовать это знание в свою пользу. Мы также обсудим важность понимания и применения концепции изменения формы гауссиана функции броска игровых костей для создания более успешных игровых стратегий в игре "Catan".

Литература

1. . *Parent, M. Morin, P. Lavigne* Propagation of super-Gaussian field distributions // Optical and quantum electronics. — 1992. — № 9.
2. *L. M. B. C. Campos.* Evaluation of Integrals of Gaussian Functions // Generalized Calculus with Applications to Matter and Forces. — Boca Raton: CRC Press, 2014. — 823 с.
3. *Catan Studio and Catan GmbH* Catan base game rules and almanac 3/4 players (5th edition) 2020.
4. *C. R. Popa* Current-mode Analog Nonlinear Function Synthesizer Structures. — Springer Switzerland, 2013. — С. 59. — 198 с
5. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика. — М.: Наука, 1990. — 416 с
6. *Колмогоров А. Н., Юшкевич А. П.* Математика XIX века. Т. 1. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей. — М.: Наука, 1978.

РЕШЕНИЕ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКИ

Е.И. Саввина

lena.savvina09@mail.ru

УДК 514.8

Получено частное решение изопериметрической задачи для подвижной границы двух сред. В качестве физического аналога задачи выбрана тонкая плёнка жидкости, границы которой с воздухом образованы гибкой нитью конечной длины, свободно огибающей вершины произвольного невыпуклого многоугольника.

Ключевые слова: изопериметрическая задача, границы сред, невыпуклая оболочка.

Solution of the isoperimetric problem for a non-convex hull

A particular solution of the isoperimetric problem for a moving boundary of two media is obtained. A thin film of liquid is chosen as a physical analogue of the problem, the boundaries of which with air are formed by a flexible thread of finite length, freely enveloping the vertices of an arbitrary non-convex polygon.

Keywords: isoperimetric problem, boundaries of media, non-convex hull.

Рассмотрим границу двух подвижных сред, например, тонкой жидкой плёнки и газа, образованной нитью ограниченной длины, свободно огибающей вершины a_i , $i = \overline{1, n}$, произвольного невыпуклого n -угольника.

Стремление плёнки принять конфигурацию с наименьшей поверхностью (что соответствует минимуму поверхностной энергии [1,2] приводит к формированию её границ, имеющих в соответствии общим решением изопериметрической задачи [3,4] формул дуг m_1, \dots, m_n окружностей с некоторыми радиусами R_1, \dots, R_n и центрами в точках O_1, \dots, O_n .

Ставится задача аналитического доказательства равенств $R_1 = R_2, \dots, R_1 = R_n$, выполняющихся при произвольных длинах b_1, \dots, b_n сторон невыпуклого многоугольника.

Введём обозначения: P – площадь n -угольника; S – площадь плёнки; P_i – площадь сегмента, образованного хордой ℓ_i и дугой m_i ; ϕ_i – угол сектора $O_i m_i$; Λ_{m_i} – длина дуги m_i .

Из геометрических изображений получим выражения для введённых величин:

Саввина Елена Игоревна, студент, ВГТУ (Воронеж, Россия); Elena Savvina (Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia)

$$R_i(\phi_i) = \frac{\ell_i}{2 \sin(\frac{\phi_i}{2})};$$

$$P_i(\phi_i, R_i) = \frac{\phi_i R_i^2}{2} - \frac{R_i^2 \sin \phi_i}{2}.$$

Сформулируем задачу поиска минимума площади плёнки:

$$S = P - \sum_{i=0}^n P_i \rightarrow \min. \quad (1)$$

Поскольку конфигурация плёнки ограничена заданными угольником с $P = \text{const}$, и нитью длиной $D = \text{const}$, то решаемую задачу поставим в виде задачи математического программирования с ограничением равенством:

$$\sum_{i=0}^n P_i \rightarrow \max, \quad \sum_{i=0}^n \Lambda_{m_i} = D. \quad (2)$$

Для аналитического решения задачи (2) составим функцию Лагранжа:

$$L(\phi_1, \dots, \phi_n, \alpha) = \sum_{i=0}^n P_i + \alpha(D - \sum_{i=0}^n \Lambda_{m_i}) \rightarrow \max. \quad (3)$$

Решение уравнений, составляющих необходимое условие для выполнения (3)

$$\nabla L(\phi_1, \dots, \phi_n, \alpha) = 0 \quad (4)$$

даёт искомую конфигурацию подвижной среды:

$$\phi_i = \arctg \frac{\ell_i}{\sqrt{4\alpha^2 - \ell_i^2}}; \quad (5)$$

$$R_i(\phi_i) = \alpha; \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{D}{\sum_{i=0}^n \phi_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Заметим, что полученное решение справедливо при $4\alpha^2 > \ell_i^2$, т. е.:

$$R_i > \frac{\ell_i}{2},$$

и не зависит от длины нити D .

Литература

1. Reddy, J. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. — CRC Press, 2006 — 59.
2. Reddy, J. An Introduction to CONTINUUM MECHANICS with Applications. — Cambridge University Press, 2007 — 244.

3. *Sagan, H., Hadwiger, H.* Vorlesungen ueber Inhalt, Oberflaeche und Isoperimetrie // The American Mathematical Monthly, **65**:4 (1958), 300

4. *Протасов В. Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии // М.: МЦ-НМО, Библиотека «Математическое просвещение», **31** (2005), 56

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В СТЕКЛОПАКЕТАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

П.А. Сомова, Е.И. Гурина

polina.somova01@yandex.ru, elena.gyrina@mail.tsu.ru

УДК 519.6, 532

В настоящей работе рассматривается актуальная задача моделирования тепловых потерь в составной конструкции теплоизоляционного окна с наполнением межстекольного пространства однокамерного и двухкамерного стеклопакетов осушенным воздухом.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, имитационное моделирование, метод конечных разностей, ANSYS Fluent, однокамерные стеклопакеты, двухкамерные стеклопакеты, цифровая модель.

Study of the heat transfer process in double-glazed windows using mathematical and computer modeling

The actual problem of modeling heat losses in the composite structure of a heat-insulating window with filling the interstitial space of single-glazed and double-glazed windows with dried air is considered in this paper.

Keywords: the equation of thermal conductivity, simulation modeling, finite difference method, Ansys Fluent, double-glazed windows, digital model.

Введение. В свете постоянного развития новых строительных материалов и технологий, исследования закономерностей теплопереноса и повышение энергоэффективности зданий становятся приоритетными задачами современного строительства [1].

Физическая постановка задачи. В работе анализируется пространство тепла в составной конструкции теплоизоляционного окна, в наружной и внутренней створках которого установлены однокамерный и двухкамерный стеклопакеты. Величина воздушного промежутка между стеклопакетами - 200 мм. На первом этапе моделировался процесс распространения тепла внутри однокамерного (4M1-16-4M1) и двухкамерного (4M1-14-4M1-14-4M1) стеклопакетов с наполнением межстекольного пространства осушенным воздухом (Рис.1).

Сомова Полина Анатольевна, аспирант, ММФ ТГУ (Томск, Россия); Polina Somova (Tomsk State University, Tomsk, Russia)

Гурина Елена Ивановна, к.ф.-м.н., доцент, ММФ ТГУ (Томск, Россия); Elena Gurina (Tomsk State University, Tomsk, Russia)

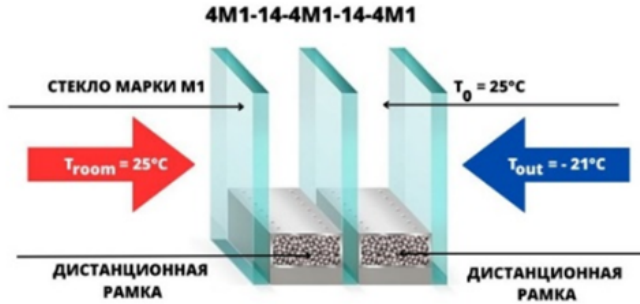


Рис. 1: Физическая постановка задачи для двухкамерного стеклопакета

С математическими постановками задач для однокамерного и двухкамерного стеклопакетов можно подробно ознакомиться в [2, 3]. На третьем этапе проводилось моделирование процесса распространения тепла внутри всей составной конструкции теплоизоляционного окна по формуле остекления 4M1-16-4M1-200-4M1-14-4M1-14-4M1. Численное моделирование распространения тепла в девятислойной пластине (1 слой - стекло, 2 слой - осушенный воздух, 3 слой - стекло, 4 слой - осушенный воздух, 5 слой - стекло, 6 слой - осушенный воздух, 7 слой - стекло, 8 слой - осушенный воздух, 9 слой - стекло) проводилось с помощью метода конечных разностей на основе явной разностной схемы с дальнейшей численной реализацией на языке программирования C++ с помощью пакета вычислительной гидрогазодинамики ANSYS Fluent. Толщина каждого из слоёв конструкции стеклопакета принята следующей: 1 слой - 0.004 м.; 2 слой - 0.016 м.; 3 слой - 0.004 м.; 4 слой - 0.2 м.; 5 слой - 0.004 м.; 6 слой - 0.014 м.; 7 слой - 0.004 м.; 8 слой - 0.014 м.; 9 слой - 0.004 м.

Математическая постановка задачи. В первом приближении к анализу теплопередачи в составной конструкции окна не учитываются теплотери за счёт конвекции:

$$\rho_i C_{\rho_i} \frac{\partial T_i}{\partial t} = \lambda_i \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} \right), L_{i-1} < x < L_i, 0 < y < H; i \in \overline{1, 9},$$

где $L_0 = 0, L_9 = L = 264$ мм - общая ширина конструкции, $H = 1470$ мм - высота конструкции, $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_7 = \lambda_9 = 1,15$ (Вт/м · °C); $\rho_1 = \rho_3 = \rho_5 = \rho_7 = \rho_9 = 2560$ (кг/м³); $C_{\rho_1} = C_{\rho_3} = C_{\rho_5} = C_{\rho_7} = C_{\rho_9} = 670$ (Дж/кг · °C) – параметры стекла марки М1; $\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_6 = \lambda_8 = 0,0257$ (Вт/м · °C); $\rho_2 = \rho_4 = \rho_6 = \rho_8 = 1,186$ (кг/м³); $C_{\rho_2} = C_{\rho_4} = C_{\rho_6} = C_{\rho_8} = 1005$ (Дж/кг · °C) – параметры осушенного воздуха.

В начальный момент времени в каждой точке расчетного домена принимается значение температуры $T_0 = 25^{\circ}C$. На левой и правой границах рассматривается граничное условие III рода. Граничные условия IV рода действуют в зонах контактов стекла и межстекольного пространства [4].

Результаты численного моделирования и верификация.

Верификация полученных численных результатов на C++ на основе метода конечных разностей с использованием явной разностной схемы проводилась с данными, полученными в результате компьютерного моделирования процесса теплопередачи в конструкции теплоизоляционного окна в пакете ANSYS Fluent. Для оценки теплофизических свойств однокамерного и двухкамерного стеклопакетов в работе была использована гипотетическая модель, в которой стеклопакеты были установлены между небольшой комнатой и помещением большего размера.

Литература

1. *ГОСТ 24700-99*. Блоки оконные деревянные со стеклопакетами. ТУ. — М.: Госстрой России; ГУП ЦПП, 2000. — 52 с.
2. *Натаров А.Н., Гурина Е.И., Сомова П.А.* Математическое моделирование влияния теплофизических свойств на эффективность стеклопакетов. Ч.1 // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики», 15-18 мая 2023 года: сборник статей. Томск, 2023. С. 65-76.
3. *Сомова П.А., Гурина Е.И.* Численное моделирование теплообмена в стеклопакетах // Всероссийская конференция по математике и механике. Посвящается 145-летию Томского государственного университета и 75-летию механико-математического факультета, 2-5 октября, 2023 г., г. Томск: сб. мат. конф. Томск: STT, 2023. С. 136-143.
4. *Кузнецов Г.В., Шеремет М.А.* Разностные методы решения задачи теплопроводности. — Томск: Изд-во ТПУ, 2007. — 172 с.

О ПРИМЕНЕНИИ TSP-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ АНАЛИЗЕ МНОГОКРАТНЫХ НЕРАВНОТОЧНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

А.В. Степанов, А.Г. Чуновкина
stepanov17@yandex.ru, annchun13@gmail.com

УДК 519.25, 520.88

Изучен вопрос о влиянии закона распределения на статистические критерии проверки точности результатов неравноточных измерений. Получены оценки максимального правдоподобия для параметра положения на основе выборки неравноточных данных, распределенных по законам из семейства TSP. Выполнено сопоставление с оценками, полученными в предположении о нормальности законов распределений.

Ключевые слова: статистическое моделирование, распределение случайной величины, неопределенность измерения, метод максимального правдоподобия, метод Монте-Карло.

On the use of the TSP distribution in the analysis of multiple heterogeneous measurement results

The question of the influence of the distribution law on the statistical criteria for checking the accuracy of the results of heterogeneous measurements has been studied. Maximum likelihood estimates for the location parameter are obtained for data distributed according to laws from the TSP family. A comparison was made with estimates obtained under the assumption of normal distribution laws.

Keywords: statistical modeling, random variable distribution, measurement uncertainty, maximum likelihood, Monte Carlo method.

Стандартные процедуры обработки результатов многократных неравноточных измерений (например, результатов сличений [1]) предполагают нормальность законов их распределения. Оценка измеряемой величины при этом вычисляется как средневзвешенное значение, с весами, обратно пропорциональными квадратам неопределенностей измерений. Критерий подтверждения точности каждого результата основан на непревышении отклонением каждого результата от оценки

Степанов Александр Владимирович, к.ф.-м.н., вед.н.с., ВНИИМ им. Д.И. Менделеева (Санкт-Петербург, Россия); Aleksandr Stepanov (D.I. Mendeleev Institute for Metrology (VNIIM), Saint Petersburg, Russia)

Чуновкина Анна Гурьевна, д.т.н., профессор, ГУАП (Санкт-Петербург, Россия); Anna Chunovkina (Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Russia)

измеряемой величины, отнесенным к его неопределенности, соответствующего критического значения (полученного, как правило, в предположении о нормальности закона).

В работе рассмотрен вопрос об отклонении (от заданного уровня доверия) вероятностей подтверждения заявленных неопределенностей по стандартной процедуре, когда распределение измеряемой величины для одного и более измерений отлично от нормального. В качестве модельного распределения для них рассмотрено двустороннее степенное (TSP) распределение [2] (симметричный и асимметричный случаи). Оценка проводилась методом Монте-Карло для различных значений параметров модельных распределений, числа измерений и соотношений их весов. Если отличие от нормального закона распределения предполагается лишь для одного измерения, то отклонения указанных вероятностей относительно невелики; тем не менее, распределение значений оценки измеряемой величины может быть (в случае асимметричного модельного TSP-распределения) заметно асимметричным. В этом случае может оказаться целесообразным перейти к построению асимметричного интервала охвата как меры расширенной неопределенности измеряемого значения. По аналогии с работой [3], изучен вопрос о влиянии выбросов.

Во второй части работы исследуются свойства оценок максимального правдоподобия для неравноточных результатов измерений, имеющих распределения из семейства TSP. Показано, в частности, что результирующее распределение оценки, полученное при этом, может иметь меньшую дисперсию, чем распределение, полученное при помощи стандартной процедуры. Реализовано соответствующее программное обеспечение.

Литература

1. CIPM MRA. Bureau International des Poids et Mesures, 1999
2. Kotz S., Van Dorp J.R. Beyond beta: Other Continuous Families of Distributions with Bounded Support and Applications. World Scientific Publishing, 2004. 289 p.
3. Chunovkina A., Stepanov A. Confirmation of uncertainties declared by KC participants in the presence of an outlier // Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing XI. 2018. PP. 9-19

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СРЕДЕ, ОПИСЫВАЕМОЙ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛЬЮ ЗИНЕРА

М.Ф. Султанов, С.Ю. Лукашук
sultanov.murat.far@gmail.com, lsu@ugatu.su

УДК 517.958

На основе дробно-дифференциального обобщения реологической модели Зинера записывается система уравнений движения изотропной вязкоупругой среды с памятью. Предлагается эффективный алгоритм ее численного решения, вычислительная сложность которого не возрастает с увеличением номера временного слоя.

Ключевые слова: дробная производная, волновой процесс, численный алгоритм.

A numerical algorithm for wave propagation simulation in a medium modeled by fractional Zener's law

We present the equations of motion for a viscoelastic medium with memory obtained based on a time-fractional generalization of Zener's rheological model. An efficient numerical algorithm is proposed for solving this system. The computational cost of the algorithm does not increase with modeling time.

Keywords: fractional derivative, wave process, numerical algorithm.

Работа посвящена разработке эффективного алгоритма численного моделирования волновых процессов в вязкоупругой среде с памятью, описываемой дробно-дифференциальной моделью Зинера [1]:

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha [\sigma_{ij}] + \frac{1}{\tau^\alpha} \sigma_{ij} = \delta_{ij} \left[\pi \frac{\tau_p}{\tau} - 2\mu \frac{\tau_s}{\tau} \right] {}_0^C D_t^\alpha [\varepsilon_{kk}] + \\ + 2\mu \frac{\tau_s}{\tau} {}_0^C D_t^\alpha [\varepsilon_{ij}] + \delta_{ij} \frac{\pi - 2\mu}{\tau^\alpha} \varepsilon_{kk} + 2\mu \frac{1}{\tau^\alpha} \varepsilon_{ij}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\sigma_{ij}(t)$ и $\varepsilon_{ij}(t)$ — тензоры напряжения и деформации, τ , τ_p , τ_s — времена релаксаций напряжения и деформаций (положительные постоянные), μ — модуль сдвига, π — объемный модуль,

$${}_0^C D_t^\alpha [f](t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{f}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau.$$

— дробная производная Герасимова–Капуто [2] порядка $\alpha \in (0, 1)$ по временной переменной t .

Султанов Мурат Фаритович; Murat Sultanov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Лукашук Станислав Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, УУНИТ (Уфа, Россия); Stanislav Lukashchuk (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

На основе (1) записывается полная система дифференциальных уравнений, описывающая распространение волн в линейной вязкоупругой изотропной среде с памятью. Сложность ее численного решения обусловлена наличием дробных производных, классические аппроксимации которых требуют хранения решения на всех временных слоях [2]. В результате скорость расчетов существенно замедляется с увеличением номера временного слоя. Для решения этой проблемы предлагается использовать быструю L1 схему [3], которая подразумевает хранение решения на фиксированных N_{exp} временных шагах.

На текущем временном слое $t = t_n$ выполняется декомпозиция

$${}_0^C D_t^\alpha f(t_n) = C_l(t_n) + C_h(t_n),$$

где локальная часть аппроксимируется L1 схемой [2]

$$C_l(t_n) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{f'(s)}{(t_n-s)^\alpha} ds \approx \frac{1}{\Delta t^\alpha} \frac{f(t_n) - f(t_{n-1})}{\Gamma(2-\alpha)},$$

где Δt — шаг по времени, а влияние памяти рассчитывается по формуле

$$C_h(t_n) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_{n-1}} \frac{f'(s)}{(t_n-s)^\alpha} ds \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f(t_{n-1})}{\Delta t^\alpha} - \frac{f(t_0)}{t_n^\alpha} - \alpha \sum_{i=1}^{N_{exp}} \omega_i \int_0^{t_{n-1}} e^{-(t_n-\tau)s_i} f(\tau) d\tau \right],$$

где s_i, ω_i — параметры алгоритма.

Литература

1. *Mainardi F.* Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. — London: Imperial College Press, 2010.
2. *Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trujillo J.J.* Fractional Calculus: Models and Numerical Methods. — Singapore: World Scientific, 2012.
3. *Jiang S., Zhang J., Zhang Q., Zhang Z.* Fast Evaluation of the Caputo Fractional Derivative and its Applications to Fractional Diffusion Equations // Communications in Computational Physics, **21**:3 (2017), 650–678.

О МОДЕЛИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ЭКОЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ С ВМЕШАТЕЛЬСТВОМ ХИЩНИКОВ И ИНФЕКЦИЯМИ

Ж.О. Takhirov , В.В. Anvarjonov

@prof.takhirov@yahoo.com, @bunyodbek.anvarjonov@bk.ru

УДК 517.956

Краткая аннотация. Исследуется динамика модели со свободной границей хищник-жертва с болезнью в популяции жертвы и темпом роста жертвы, сниженным страхом перед хищником. Доказано существование, единственность и оценки глобального решения, а также поведение компонентов решения и неизвестной границы на больших временных интервалах. Результаты эффекта страха жертвы и поведения неизвестной границы обеспечивают сосуществование хищников и жертвы.

Ключевые слова: модель, свободная граница, априорные оценки, поведение решения.

On a free boundary model of eco-epidemiological interactions with predator intervention and infections

Abstract. The dynamics of a free-boundary predator-prey model with a disease in the prey population and a prey growth rate, reduced fear of the predator are investigated. The existence, uniqueness and estimates of the global solution, as well as the behavior of the components of the solution and the unknown boundary on large time intervals are proven. The results of the effect of prey fear and the behavior of the unknown boundary ensure the coexistence of predators and prey.

Keywords: model, free boundary, a priori estimates, solution behavior.

Introduction.

The dynamic relationship between predators and their prey is one of the dominant topics in theoretical ecology due to its ubiquity and importance. Predator-prey interactions are modified by various ecological factors. In many well-known models, predators affect prey population density only through direct killing. A new point of view is that the presence of predators

Тахиров Жозил Остонович, д.ф.-м.н., профессор, ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АН РУз (Ташкент, Узбекистан); Jozil Takhirov (Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan)

Анваржонов Бунёдбек Баходирович, базовая докторантура, ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АН РУз (Ташкент, Узбекистан); Bunyodbek Anvarjonov (Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan)

can also change the behavior and physiological characteristics of prey to some extent, affecting the prey population density, and its effect is even greater than the effect of direct killing. The authors of [1] were the first to introduce the fear factor $F(k, w)$, which takes into account the cost of defense against a predator due to fear, into the predator-prey system. On the other hand, in the natural world, a species does not exist by itself, and more and more studies show that competition for resources and space between populations, as well as infectious diseases, affect population growth.

Mathematical model.

In [2] an eco-epidemic ODE model of one predator and one prey with a disease in the prey population is proposed, including a fear factor ($F(k, w) = 1/(1 + kw)$) for the predator, under certain assumptions. To investigate the impact of spatial dynamics on this model, we extend it by including spatially random diffusion and unknown boundaries that represent the predator's spread front

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_{xx} + \frac{a}{1+kw}u - du - bu(u+v) - \beta uv, t > 0, -l < x < l, \\
 d_2(v)v_t &= v_{xx} + \beta uv - pvw - \delta v, t > 0, -l < x < l, \\
 d_3(w)w_t &= w_{xx} + cpvw - \mu w, t > 0, g(t) < x < h(t), \\
 w(t, x) &= 0, t > 0, x \notin (g(t) < x < h(t)), \\
 u_x(t, -l) &= u_x(t, l) = v_x(t, -l) = v_x(t, l) = 0, t > 0, \\
 g'(t) &= -\mu w_x(t, g(t)), t > 0, h'(t) = -\beta w_x(t, h(t)), t > 0, \\
 u(0, x) &= u_0(x), v(0, x) = v_0(x), -l < x < l, \\
 w(0, x) &= w_0(x), -h_0 < x < h_0, h(0) = -g(0) = h_0 < l.
 \end{aligned}$$

where $u(t, x), v(t, x)$ and $w(t, x)$ are the density of the uninfected (susceptible) prey, the infected prey and the predator, respectively.

References

1. Wang X., Zanette L., and Zou X. Modelling the fear effect in predator-prey interactions, J. Math. Biol., 2016. —73(5):1179–1204
2. Sharma S., Samanta G.P. A Leslie-Gower predator-prey model with disease in prey incorporating a prey refuge, Chaos, Solit. Fract., 2015. — 70:69–84

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТРУКТУРЫ СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ В ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ

М.А. Толстых, physicisto@yandex.ru

УДК 519.6:316.472.45

Предлагается модель распространения информации в социальных сетях на основе диффузионных процессов механики сплошных сред. Решается тестовая задача идентификации пространственной функции, описывающей структуру сети в виде направленного графа пользователей. Оптимальная идентификация реализовывалась прямым экстремальным подходом. Продемонстрирована высокая точность идентификации.

Ключевые слова: математическая модель, социальные сети, идентификация

Identification of the social network structure in the diffusion model

A model of information dissemination in social networks based on diffusion processes of continuum mechanics is proposed. The test problem of identifying a spatial function describing the network structure in the form of a directed graph of users is solved. Optimal identification was implemented by a direct extreme approach. High identification accuracy has been demonstrated.

Keywords: mathematical model, social networks, identification

Существует большое разнообразие моделей распространения информации в социальных сетях. Обычно это или стационарные пространственно-распределённые, или динамические сосредоточенные процессы. В работе [1] предлагается идентифицировать динамическую пространственно-распределённую модель диффузионной логистики [2] в частных производных.

В настоящей работе предлагается модификация указанной модели, в предположении, что потоки информации в сетях подчиняются физическим законам диффузии. При этом параметры модели приобретают понятную смысловую и количественную оценку. А именно: пропускная способность (структура) социальной сети (h — количество пользователей в графе сети); популярность информации (p — скорость диффузии информации); активность пользователей (r — изменение потока информации).

Исследование выполнено при финансовой поддержке Азово-Черноморского математического центра (Соглашение от 29.02.2024 № 075–02–2024–1446).

Толстых Маргарита Анатольевна, аспирант, ДонГУ (Донецк, Россия); Tolstykh Margarita (Donetsk State University, Donetsk, Russia)

Дискретные процессы в сети аппроксимируются физическими процессами механики сплошных сред. Посредством прямого экстремального подхода [3] решается тестовая задача идентификации распределённой функции $h(x)$ градиентным методом.

Предлагаемая модель состояния потока информация v в сети описывается параболическим уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial t} - p \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rh\theta(v - \varepsilon) = 0, \quad x, t \in \Omega = (x_a, x_b) \times (t_0, t_1),$$

где x — это расстояние от первоисточника новости в графе сети, измеряемое минимальным набором рёбер, по которым может быть передана информация, например, в виде количества репостов единичной новости $v(x, t)$, возникшей в x_a в момент t_0 , θ — тэта-функция Хэвисайда, которая отлична от нуля, когда в точке $x \in (x_a, x_b)$ в любое время появляется достаточно значимая величина информации $v(x, t) \geq \varepsilon$, где ε — порог значимости. Член $rh\theta(v - \varepsilon)$ — возможные внешние источники информации.

Функции $r(t)$, и число p считаются известными в данной работе. Необходимо идентифицировать оптимальную функцию $h(x)$. Её целочисленное представление на целочисленном расстоянии x , может дать достоверную структуру направленного (из источника новости) графа сети.

Критерий качества идентификации задавался функционалом

$$J(h) = \iint_{\Omega} (v - v_e)^2 dxdt \rightarrow \min,$$

где v_e — экспериментально наблюдаемая (тестовая) информация в сети.

Был найден градиент

$$\nabla J = - \int_{x_a}^{x_b} fr\theta(v - \varepsilon) dx,$$

где f — сопряжённое состояние, удовлетворяющее уравнению:

$$-\frac{\partial f}{\partial t} - p \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - fhr\delta(v - \varepsilon) + 2(v - v_e) = 0,$$

где $\delta(v - \varepsilon)$ — дельта-функция Дирака.

Градиентный метод для прямой минимизации $J(h)$:

$$h^{k+1}(x) = h^k(x) - b^k \nabla J(h^k; x), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где параметр шага b^k выбирался адаптивно [3]. Итерации заканчивались при $\|h^{k+1} - h^k\| / \|h^k\| \leq 10^{-5}$. Решение получено за $k = 475$ итераций. Найденная функция на графике визуально полностью совпала с точным значением.

Тестовая задача идентификации распределённой пропускной способности в предложенной модификации диффузионной модели социальной сети продемонстрировала возможность применения прямого экстремального подхода для достаточно точного восстановления структуры сети. На расстоянии каждого ребра в графе сети, когда $x = 1, 2, 3, \dots$ мы имеем идентифицированное количество пользователей $h(x)$.

Литература

1. Толстых В.К., Толстых М.А. Необходимое условие оптимальности параметрической идентификации для распределенной модели социальных сетей // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Серия Г. Технические науки. № 3. 2021, 63-68.
2. Wang H., Wang F., Xu K. Modeling Information Diffusion in Online Social Networks with Partial Differential Equations — Springer Nature, 2020.
3. Толстых В.К. Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределенными параметрами. — Донецк : «Юго-Восток», 1997.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЗАЛИВКИ И ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ЛИТЫХ ЗАГОТОВОК ТОПОЛОГИЧЕСКИ ОПТИМИЗИРОВАННЫХ ДЕТАЛЕЙ

В.А. Уфимская, Д.О. Пустовалов

К.В. Шаров, Т.Р. Абляз

vasya.ufimskaya@mail.ru., ksharov@yandex.ru,

dopustovalov@yandex.ru, lowrider11-13-11@mail.ru

УДК 538.91

Разработаны методические рекомендации по использованию системы компьютерного моделирования литейных процессов «PoligonSoft» (СКМ ЛП «PoligonSoft»). Проведен анализ возможных мест образования дефектов усадочного характера сразу после нанесения припусков на механическую обработку. Удалось сократить время на проектирование литниковой питающей системы, за счет подбора мест подвода металла и мест установки прибылей для компенсации усадочных процессов в тепловых узлах отливки. Определены зоны возможного образования дефектов усадочного характера и их преобразование и распределение в теле отливки. Получены рекомендации, позволяющие обеспечить отсутствия дефектов усадочного характера в теле литой заготовки.

Ключевые слова: топологическая оптимизация, литье по выжигаемым моделям, усадочные дефекты, моделирование, PoligonSoft, метод конечных элементов.

Modeling of the electrical discharge machining process of materials based on the temperature problem

Methodological recommendations for the use of the computer modeling system for foundry processes «PoligonSoft» (CMS LP «PoligonSoft») have been developed. An analysis of possible locations of shrinkage defects formation immediately after applying allowances for mechanical processing was carried out. The time for designing the gating feed system was reduced by selecting metal supply locations

Материалы получены в рамках программы развития передовой инженерной школы «Высшая школа авиационного двигателестроения» ПНИПУ г. Пермь (федеральный проект «Передовые инженерные школы»).

Уфимская Василиса Алексеевна, студент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Vasilisa Ufimskaja (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Пустовалов Дмитрий Олегович, старший преподаватель, ПНИПУ (Пермь, Россия); Dmitriy Pustovalov (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Шаров Константин Владимирович, старший преподаватель, ПНИПУ (Пермь, Россия); Konstantin Sharov (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

Абляз Тимур Ризович, к.т.н., доцент, ПНИПУ (Пермь, Россия); Timur Ablyaz (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

and riser installation locations to compensate for shrinkage processes in the casting heat units. The zones of possible formation of shrinkage defects and their transformation and distribution in the casting body are determined. Recommendations have been obtained to ensure the absence of shrinkage defects in the body of the cast blank.

Keywords: topology optimization, investment casting, shrinkage defects, modeling, PoligonSoft, finite element method.

Снижение металлоёмкости деталей авиастроения является важной научно-практической задачей. Снизить материалоемкость, а, следовательно, массу деталей, помогает топографическая оптимизация. Однако изготовление таких деталей традиционными методами из-за нестандартных форм и низкой технологичности является сложной задачей. Перспективным считается получения опытных литых заготовок методом литья по выжигаемым моделям, изготовленным по технологии 3d-печати фотополимерными смолами [1, 2]. Такой метод позволяет получить заготовку без изготовления сложной и дорогостоящей оснастки [3]. Тем не менее, низкая технологичность вызывает и проблему обеспечения получения плотной отливки: необходимо обеспечить питание всех тепловых узлов, а также проливаемость всех частей отливки. В связи с этим актуальной является задача моделирования процесса заливки и затвердевания отливки и оценки вероятности получения дефектов усадочного характера.

В данной работе в качестве опытной детали выбрано изделие типа кронштейн. Данная деталь устанавливается в хвостовом отсеке самолета и служит для изменения движения от командного органа к исполнительному. Степень точности поверхностей изделий данного типа равна 7, такую точность поверхности можно получить при литье по выжигаемым моделям. Материал заготовки: титановый сплав ВТ5Л ГОСТ 19807-74. Для моделирования процесса заливки изделия использовалась программа СКМ ЛП «PoligonSoft».

Температура заливаемого расплава 1760°C; температура формы 900 °C; параметр охлаждения системы: охлаждения на воздухе при 20°C; скорость заливки 0,6 м/с. Теплофизические параметры заливаемого металла были сгенерированы внутренним модулем СКМ ЛП Полигон. Теплофизические параметры материала формы, принятой «разовая керамическая форма». Расчетные параметры двухмерной поверхности сетки для последующего формирования тетрагональной объемной сетки задавались как треугольник с гранью 2 мм для отливки, и треугольник с гранью 5 мм для формы. Далее можно переходить к наладке процесса динамической проверке изделия, задав некоторые условия.

Первым шагом выявлялись зоны образования усадочных дефектов в теле заготовки. Полученные данные позволили определить первичное расположение прибыльных частей. Затем было проведено вторичное моделирование затвердевания отливки, которое выявило, что система

прибылей позволила компенсировать усадочные дефекты и сократить зоны их возникновения, но не позволила из полностью вывести в прибыли. Исходя из полученных данных, было принято решение дополнить систему прибылей на местах образования дефектов усадочного характера. По результатам моделирования дефекты усадочного характера выявлены небыли.

Исходя из полученных данных процесса моделирования затвердевания литой заготовки «Кронштейн», можно сделать вывод, что спроектированная система прибылей является жизнеспособной и позволяет получить ее без дефектов усадочного характера.

Литература

1. *Hopkinson N.* Rapid Manufacturing: An Industrial Revolution for the Digital Age. — New Jersey, USA, 2006.
2. *Морозов В.В.* Исследование и разработка технологических режимов изготовления отливок по выжигаемым моделям, полученных методом лазерной стереолитографии. — Москва, Россия, 2005.
3. *Зленко М.А., Попович А.А., Мутылина И.Н.* Аддитивные технологии в машиностроении: учеб. пособие. — Санкт-Петербург, Россия, 2013.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ СОСТОЯНИЕМ, СО СМЕШАННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

М.Э. Файрузов, fairuzov@mail.ru

УДК 517.977.56

Настоящая работа посвящена постановке и исследованию на корректность задачи оптимального управления для эллиптической системы с нелинейным состоянием, со смешанными граничными условиями.

Ключевые слова: задача оптимального управления, эллиптическая система уравнений, смешанная краевая задача, разрешимость задачи оптимального управления.

On one optimal control problem for an elliptic system with a nonlinear state and a mixed boundary condition

This work is devoted to the formulation and study of the correctness of the optimal control problem for an elliptic system with a nonlinear state, with mixed boundary conditions.

Keywords: optimal control problem, elliptic system of equations, mixed boundary value problem, solvability of the optimal control problem.

Характер конкретных постановок задач оптимального управления для распределенных систем существенно зависит от того, куда входят управления (в свободные члены уравнений состояния или в коэффициенты уравнений), линейными или нелинейными дифференциальными уравнениями математической физики (УМФ) описываются состояния систем управления (см. [1]-[4]), а также зависит от того, какой гладкостью обладают входные данные систем управления. В настоящее время наиболее полно исследован случай таких систем управления, когда управления входят в линейные уравнения состояния и линейные предельные условия, а также когда входные данные и функции состояния систем являются достаточно гладкими. Характерной особенностью задач оптимального управления нелинейного типа является то, что отображение из множества допустимых управлений в пространство состояний является нелинейным. Нелинейные задачи оптимального управления для УМФ относятся к наиболее сложному классу задач оптимизации. Проблема численного решения задач оптимального управления приводит к необходимости их аппроксимации задачами более простой природы – «конечномерными задачами оптимизации» (см. [1]).

Файрузов Махмут Эрнстович, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Mahmut Fairuzov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

При исследовании многих процессов в движущихся средах в качестве основных можно выделить диффузионный перенос той или иной субстанции и перенос, обусловленный движением среды, то есть конвективный перенос (см. [4]). Задачи конвекции-диффузии являются типичными для математических моделей механики жидкости и газа. Так, распределение тепла, примесей может происходить не только за счет диффузии, но и быть обусловленным движением среды. Принципиальные особенности физико-химических процессов в механике жидкости и газа могут быть порождены именно учетом движения сред под действием тех или иных сил. Конвективный-диффузионный процесс может играть определяющую роль при моделировании самых разнообразных процессов. В частности, важное значение приобретают экологические проблемы, связанные с описанием процессов распределения примесей в атмосфере и водоемах, с моделированием загрязнения грунтовых вод. В газо- и гидродинамике в качестве базовых моделей многих процессов выступают краевые задачи как для стационарных, так и нестационарных уравнений конвекции-диффузии – эллиптические или параболические уравнения второго порядка с младшими членами. В настоящее время в теории численных методов решения задач УМФ и задач оптимального управления наиболее глубокие результаты получены при рассмотрении процессов с самосопряженными операторами. Это относится как к методам, базирующимся на конечно-разностных аппроксимациях состояния, так и к методам на основе конечно-элементных аппроксимаций.

Настоящая работа посвящена постановке и исследованию на корректность задачи оптимального управления для эллиптической системы с нелинейным состоянием, со смешанными граничными условиями.

Литература

1. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. — Москва: Наука, 1981. — 400с.
2. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — Москва: Мир, 1972. — 414с.
3. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. — Москва: Наука, 1975. — 480с.
4. *Лубышев Ф. В.* Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. — Уфа: БашГУ, 1999. — 244с.

ПОДХОДЫ ДЛЯ ГЕНЕРАЦИИ ДАННЫХ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ СОЦИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Н.С. Фот, А.А. Винарский

fotikolay222@gmail.com, vinarskii.aa@phystech.edu

УДК 311.213

В настоящее время значительное число выпускников выбирает карьерные пути, не соответствующие их компетенциям. Одной из причин данного явления является неверный выбор специальности, обусловленный нехваткой мест в учебных заведениях. Для решения этой проблемы целесообразно проводить прогнозирование потребности в бюджетных местах. Однако такие инструменты требуют анализа данных, которые не представлены в открытых источниках. Это подчеркивает необходимость применения математических методов, позволяющих генерировать человекоподобные данные.

Ключевые слова: математика, машинное обучение, математическая статистика.

Approaches to the generation of data during processing of sociological research

Currently, a significant number of graduates choose career paths that do not align with their acquired competencies. One of the reasons for this phenomenon is the initial incorrect choice of specialty, driven by a lack of places in educational institutions. To address this issue, it is advisable to forecast the demand for budgetary places. However, such tools require data analysis that is not available in open sources. This highlights the need to apply mathematical methods that allow for the generation of human-like data.

Keywords: mathematics, machine learning, mathematical statistics.

Для создания подобного инструмента были собраны, обработаны и скомпонованы релевантные данные из открытых источников: программы вузов, средние зарплаты после выпуска из вузов, города, и др. Учитывая малый размер последних, применение алгоритмов машинного обучения невозможно, поэтому необходимо применять классические подходы теории вероятностей и математической статистики – проверки статистических гипотез о характере распределения данных.

Фот Николай Сергеевич, студент, ОГУ (Оренбург, Россия); Nikolay Fot (Orenburg State University, Orenburg, Russia)

Винарский Александр Анатольевич, студент, МФТИ (НИУ) (Москва, Россия); Alexander Vinarsky (Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia)

Для применения классических подходов теории вероятностей и математической статистики были выбраны инструменты Matplotlib (инструмент для визуализации и анализа данных), NumPy (инструмент для работы и обработки данных), Scipy (инструмент для работы с научными и инженерными расчётами) и Pandas (инструмент для работы с большими данными) – популярные библиотеки в среде Python, с хорошо проработанной документацией.

Посредством критерия Пирсона, на уровне значимости 0.05, была подтверждена гипотеза о нормальности распределения реальных данных по оценкам ОГЭ по математике [1]. На основе предположения о нормальности распределения этих данных, был реализован алгоритм генерации посредством инструмента «Scipy».

Применяя данный подход и к другим исследуемым показателям (пол, возраст, результаты ОГЭ и ЕГЭ, зарплата, семейное положение, здоровье и прочее), были получены выборки, так же подчиняющиеся нормальному закону распределения.

Таким образом, рассматриваемый подход может стать полноценным инструментом для решения проблемы отсутствия данных в сфере социологических исследований путем генерации человекоподобных параметров.

Литература

1. *Черняева М.А.* Результаты ГИА-2023 и планируемые изменения КИМ ОГЭ 2024 года по предмету «Математика» // Московский Центр Качества Образования, (2023)

МАКСИМИЗАЦИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЯ ПРИ ОБНОВЛЕНИИ СРЕДСТВ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИОННЫХ АКТИВОВ

А.И. Эгамов, П.Н. Бурого
albert810@yandex.ru, burago.pasha@yandex.ru

УДК 519.863

Рассматривается задача максимизации эффективности предприятия во время планового обновления его средств защиты информационных активов. Посредством преобразования весовой матрицы ее математическая модель сводится к классической задаче о назначениях.

Ключевые слова: задача о назначениях, средства защиты информации, эффективность.

The enterprise effectiveness maximization in the updating of information asset protection tools

The problem of maximizing the efficiency of an enterprise during a planned upgrade of its information asset protection tools is considered. By converting the weight matrix, its mathematical model is reduced to the classical assignment problem.

Keywords: the assignment problem, information security tools, effectiveness.

Предположим, есть некая организация, у которой имеется n различных групп информационных активов, которые являются объектами защиты и подвержены различным видам информационных угроз. Занумеруем их от 1 до n . Расчет эффективности всех групп информационных активов предприятия (потенциальной прибыли на следующий месяц, получаемой за счет работы этой группы активов) осуществляется раз в месяц (для определенности, например, первого числа) на основании данных о прибыли компании, полученной от финансового подразделения в предыдущем месяце. Предположим, стоимость потенциальной прибыли в случае отсутствия киберугроз для i -ой группы активов в j -ый месяц равна c_{ij} рублей, $i = \overline{1, n}$.

Обновление средств защиты производится раз в месяц только для одного информационного актива. Если для соответствующего информационного актива покупка средств защиты совершена, то считается,

Эгамов Альберт Исмаилович, к.ф.-м.н., доцент, ННГУ им. Н.И.Лобачевского (Нижний Новгород, Россия); Albert Egamov (Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia)

Бурого Павел Николаевич, аспирант, НГТУ им. Р.Е.Алексеева (Нижний Новгород, Россия); Pavel Burago (Nizhny Novgorod State Technical University, Russia)

что этот информационный актив полностью защищен и его эффективность равна 100 процентов. Если в j -ый месяц обновление для i -го информационного актива не установлено, то его эффективность вследствие возможных кибератак равна $\chi_i \cdot 100$ процентов, а стоимость его потенциальной прибыли равна $\chi_i c_{ij}$, $\chi_i \in [0; 0.5]$.

Предположим, что покупка и установка новых средств защиты для i -го актива осуществляется в $\sigma(i)$ -ый месяц, где σ — перестановка чисел от 1 до n . Таким образом, за n месяцев определяется квадратная матрица C порядка n , а стоимость возможной прибыли информационного комплекса организации за n месяцев будет вычисляться по формуле

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^n (\chi_i \sum_{k=1}^{\sigma(i)-1} c_{ik} + \sum_{k=\sigma(i)}^n c_{ik}). \quad (1)$$

Если $\sigma(i) = 1$, то слагаемое $\chi_i \sum_{k=1}^{\sigma(i)-1} c_{ik}$ равно нулю. Необходимо максимизировать функцию (1) за счет выбора перестановки σ .

Нетрудно видеть, что поставленная задача сводится к классической задаче о назначениях с весовой квадратной матрицей D порядка n с элементами

$$d_{ij} = \chi_i \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} + \sum_{k=j}^n c_{ik}$$

и целевой функцией

$$f(\sigma) = \sum_{i=1}^n d_{i\sigma(i)}$$

Таким образом, к поставленной задаче применимы методы, которые используются при решении задачи о назначениях, например, описанные авторами настоящей статьи в [2].

Литература

1. *Burkard R.E., Dell'Amico M., Martello S.* Assignment problems. Society for Industrial and Applied Mathematics — USA, Philadelphia. 2009.
2. *Khranilov V.P., Burago P.N., Egamov A.I.* Mathematical Model DDS for Information Security Management of the Organization // E3S Web of Conferences. — 2024. 537. — 09009.

PORTFOLIO OPTIMIZATION WITH TURNOVER MODELING

Nikita Chadromtsev
nick.chadromtsev@gmail.com

УДК 51.77

This research explores portfolio management with transaction costs proportional to turnover. We compare turnover estimation models $f(x)$ to optimize the after-cost Sharpe Ratio (SR). Simplified models balance efficiency and performance well, while Disciplined Convex Programming (DCP) achieves strong results without complicating the optimization.

Keywords: Algorithmic Portfolio Management, Portfolio Optimization, Disciplined Convex Programming.

First Experiment: 2-Alphas Case. In the first experiment, we used two alphas and formulated a straightforward optimization problem: maximize SR with different models for cost estimation:

$$\text{minimize} \quad - \frac{x^T E[R] - f(x) \cdot \text{fee}}{\sqrt{x^T \text{Var}(R)x}}, \quad \text{subject to } x \geq 0, \quad x^T \mathbf{1} = 1,$$

where x is the vector of portfolio weights, $E[R]$ is the expected return vector, and $\text{Var}(R)$ is the covariance matrix of the returns, and $f(x)$ is a specific formula for cost estimation (or a precise calculation). Table of Models and Formulas is below:

Model	Formula
Naive	$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \tau_i$
Honest	$f(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{i=1}^n x_i \left w_i^{t+1} - w_i^t \frac{\text{price}_i^{t+1}}{\text{price}_i^t} \right $
Kakushadze & Liew [1]	$f(x) = \frac{1+\rho}{2} (x_1 \tau_1 + x_2 \tau_2) + \frac{1-\rho}{2} x_1 \tau_1 - x_2 \tau_2 $
Equal W.	N/A
Model 2	$f(x) = (x_1 \tau_1 + x_2 \tau_2) \frac{\sqrt{\frac{x_1 \sigma_1}{x_2 \sigma_2} + 2\rho + \frac{x_2 \sigma_2}{x_1 \sigma_1}}}{4}$
No costs	$f(x) = 0$
Model 1	$f(x) = \left(\frac{\tau_1}{\sigma_1} + \frac{\tau_2}{\sigma_2} \right) \frac{\sqrt{x_1^2 \sigma_1^2 + 2\rho \sigma_1 \sigma_2 x_1 x_2 + x_2^2 \sigma_2^2}}{4}$

Таблица 2: Models and Formulas for Turnover Estimation

Since the problem was neither convex nor concave, convergence was not guaranteed. To address this, we ran Monte Carlo simulations 1,000 times

This work was supported by the grant of the state program of the «Sirius» Federal Territory «Scientific and technological development of the «Sirius» Federal Territory». Chadromtsev Nikita, Sirius, Russia

starting from random initial points. The errors were negligible, and the distribution of the models on the IS and OS periods remained similar. The results on the OS data are shown in the table below:

Model	SR (no costs)	SR (with costs)	Turnover	Time
Naive	1.74	1.28	0.13	3.9
Honest	1.73	1.27	0.13	139.0
Kakushadze & Liew [1]	1.63	0.87	0.14	69.0
Equal W.	1.55	0.61	0.15	N/A
Model 2	1.41	0.22	0.16	37.2
No costs	1.19	-0.29	0.17	3.7
Model 1	1.19	-0.29	0.17	45.3

Таблица 3: Portfolio Statistics on OS with models for cost estimation (1st Experiment).

The Naive model shows the highest post-cost SR and requires one of the smallest computation time.

Second Experiment: 30 Alphas and DCP. In the second experiment, we developed 30 alphas based on the 101 Formulaic Alphas [2] and applied a DCP [3] approach. The objective function is concave, ensuring convergence.

$$\text{maximize } x^T E[R] - \gamma_1 x^T \text{Var}(R)x - \gamma_2 f(x) \cdot \text{fee}, \quad \text{sub. to } x \geq 0, \quad x^T \mathbf{1} = 1,$$

where γ_i are parameters forming the grid. Optimization problem is solved at the each point on the grid. Using the solutions, SR values were calculated. We first found γ_1 to maximize pre-cost SR, then used models from the table as $f(x)$ to optimize post-cost SR on the γ_2 grid. Also, we took γ_1 and $f(x) = 0$ such that the corresponding after-costs SR is the highest. We refer to this approach as *Post-cost* γ_1 . *Post-cost* γ_1 led to the only positive SR on the OS data and took relatively small time for calculations.

Model	SR (no costs)	SR (with costs)	Turnover	Time
Post-cost γ_1	1.04	0.41	0.14	9
Equal W.	0.59	-0.30	0.06	N/A
Kakushadze [4]	0.86	-0.50	0.08	9
Honest	0.60	-0.80	0.09	767
Naive	0.56	-0.82	0.09	9
No costs	0.24	-1.65	0.13	9

Таблица 4: Portfolio Statistics on OS with models for cost estimation (2nd Experiment).

The research, in collaboration with I. Shnurnikov and A. Kuliga, compared various turnover estimation models and their effects on portfolio performance. We found that simplified models, like the Naive approach, strike a good balance between efficiency and performance. Additionally, DCP, used in the second experiment, achieves strong results without over complicating the optimization problem.

References

1. Kakushadze Z., Liew J.K.-S. Is It Possible to OD on Alpha? // The Journal of Alternative Investments, **18**:2 (2015), 39–49

2. *Kakushadze Z.* 101 formulaic alphas. // Wilmott, 2016, 72-81.
3. *Grant M., Boyd S., Ye Y.* Disciplined convex programming. // Springer US, 2006
4. *Kakushadze Z.* Spectral model of turnover reduction. // *Econometrics*, **3**:3 (2015), 577-589

**РСА-ТЕМПОРАЛЬНЫЙ ОНЛАЙН АНАЛИЗ
ВОЛЬТАМПЕРОМЕТРИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ
СЛИВОК В УСЛОВИЯХ ИХ РАЗБАВЛЕНИЯ
ДИСТИЛЛИРОВАННОЙ ВОДОЙ**

**Л.Д. Шарипова, Е. С. Ганиева, Е. А. Сидельникова,
Н.А. Васенина, А. А. Халимов, А. А. Денисова**
lilyadamirovna98@mail.ru, GanievaES@yandex.ru,
Artsid2000@gmail.com, zhiber.na@gmail.com,
aunwavingkh@mail.ru, burganova.a.r@yandex.ru

УДК 517.518

Работа направлена на разработку и практическое применение цифровых аналитических методов контроля производственных процессов для пищевой промышленности и контроля качества продуктов питания в онлайн режиме производства. Актуальность работы связана с возрастающей потребностью повышения качества продуктов питания и контроля пищевой ценности в условиях широкого распространения способов искусственного модифицирования питательных свойств и «жизненного цикла» продуктов питания производителями.

Ключевые слова: хемотрика, теория перколяции, кластер.

RSA-temporal online analysis of the voltammetric behavior of cream under conditions of dilution with distilled water

The work is aimed at the development and practical application of digital analytical methods for controlling production processes for the food industry and food quality control in online production mode. The relevance of the work is related to the increasing need to improve the quality of food and control nutritional value in conditions of widespread methods of artificial modification of nutritional properties and the "life cycle" of food by manufacturers.

Keywords: chemometrics, percolation theory, cluster.

Шарипова Лилия Дамировна, аспирант, УУНиТ (Уфа, Россия); Lilia Sharipova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Ганиева Екатерина Сергеевна, к.х.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Ekaterina Ganieva (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Сидельникова Екатерина Артемовна, студент, УУНиТ (Уфа, Россия); Ekaterina Sidelnikova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Васенина Наталья Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Natalia Vasenina (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Халимов Артур Айратович, студент, УУНиТ (Уфа, Россия); Artur Halimov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Денисова Альбина Анасовна, ведущий инженер, УУНиТ (Уфа, Россия); Albina Denisova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Темпоральные способы основаны на непрерывном функционировании сенсорных систем с целью накопления малых по интенсивности сигналов на фоне больших, их усилении для фиксирования присутствия микрокомпонентов и повышения селективности откликов при распознавании сложных по составу продуктов питания. В качестве основного индикаторного процесса в данной работе использовали электрохимическую адсорбцию органических веществ (белков, жиров) на поверхности электродов. В результате в практическом аналитическом аспекте с помощью методов машинного обучения, в частности метода главных компонент (МГК или с англ. PCA), обеспечивается высокая чувствительность и специфичность мониторинга эволюции электрохимической системы электрод/раствор продукта. Сравнивая близкие по составу продукты, выявляются искусственно измененные образцы – подделки (Рис. 1)



Рис. 1: ПЛС-диаграмма распределения параметра насыщенности загрязненными вещества атмосферы жилого воздуха жилой зоны.

плоскости главных компонент PC1-PC2. Основной вывод: мульти-сенсорная система чувствительна к разбавлению и способна отличать фальсификаты по данному фактору подделки. На рис. 2 представлены PCA-динамические кривые дрейфа латентных сигналов вольтамперометрической базы данных, регистрируемых в течение 16 часов искусственного скисания продукта с содержанием жира 10 %.

Смещение точек вдоль первой главной компоненты обусловлено изменением общего сопротивления электрохимической системы в результате модифицирования электродной поверхности, адсорбции компонентов, изменением в составе исследуемого раствора, частичным анодным растворением материала электрода и т.п. Наблюдаются перегибы, участки с временной кластеризацией точек, скачкообразно смещающиеся относительно друг друга в ходе эксперимента. На языке теории динамических систем фазовые портреты исследуемых молочных объектов с различным химическим составом отличаются между собой. Для количественного описания вольтамперометрического поведения и более глубокого факторного анализа требуются особенные методы матема-

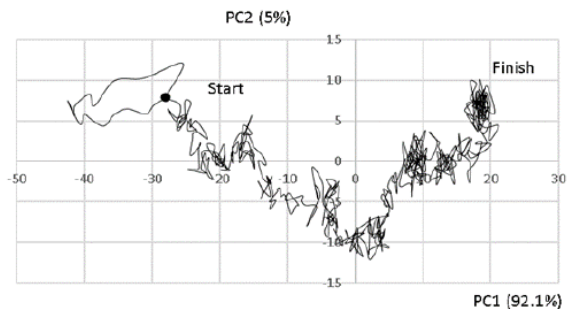


Рис. 2: Динамические кривые дрейфа токов, преобразованные по методу главных компонент на плоскости PC1-PC2 на фоне 10% сливок

тического моделирования темпоральных баз данных с использованием теории фракталов, перколяции.

Литература

1. *Nigmatullin R.R., Budnikov H.C., Khamzin A.A., Sidelnikov A.V., Maksyutova E.I.* Temporal multi-sensor system for voltammetric recognition of L- and D-tryptophan enantiomers based on generalized principal component analysis // *New Journal of Chemistry*, 2018. V. 42. № 1. P. 465-475.
2. *Nigmatullin R.R., Budnikov H.C., Sidelnikov A.V.* New approach for voltammetry near limit of detection: integrated voltammograms and reduction of measurements to an “ideal” experiment // *Electroanalysis*, 2015. V. 27. № 6. P. 1416-1426.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

С.А. Шморган

s_shmorgan@ugrasu.ru

УДК 517.9

Мы рассматриваем вопрос об определении правой части в уравнении

$$Mu = u_t - Lu = u_t - \operatorname{div}(c(x, t)\nabla u) + b(x, t)\nabla u + a(x, t)u = f_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i(t)\delta(x - b_i)$$

$$b(x, t) = (b_1(x, t), \dots, b_n(x, t))^T, \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T, n = 2, 3 \quad (1)$$

которое рассматривается в области $Q = G \times (0, T)$. Считаем, что пространственная область имеет вид $G = \Omega \times (0, Z)$ в случае $n = 3$ и G - прямоугольник в случае $n = 2$. Здесь $\delta(x - b_i)$ дельта-функция Дирака. Рассмотрим случай $n = 2, G = (0, X) \times (0, Y)$. Положим $\Gamma = \partial G, S = (0, T) \times \Gamma$. При решении обратной задачи имеются дополнительные измерения вида

$$u(y_i, t) = \psi_i(t), i = 1, 2, \dots, r, y_i \in G. \quad (2)$$

Начально-краевые условия:

$$u|_{t=0} = u_0(x), u|_S = 0 \quad (3)$$

Определению подлежат решение u и неизвестные функции α_i из правой части рассматриваемого уравнения. Задача возникает при нахождении мощностей точечных источников (источников загрязнения). В случае распределенных источников эта задача при естественных условиях на данные корректна в пространствах Соболева и Гельдера и имеются многочисленные работы, посвященные как теоретическим результатам, так и численным алгоритмам ее решения. В нашем случае задача является некорректной по Адамару, теоретические результаты о существовании и единственности решений получены только в простейших случаях (см., например, [1]). Имеется ряд подходов к численному решению задачи с помощью сведения задачи к задаче управления и минимизации соответствующего функционала. Однако, как показывают примеры, такой способ построения решения не всегда корректен. Наш численный метод основан на методе конечных элементов (по пространственным переменным) и методе конечных разностей (по времени). При построении решений также используется метод регуляризации Тихонова. Проведен ряд численных экспериментов с различными входными данными. Они показали хорошую сходимость алгоритма и

его устойчивость к случайным возмущениям данных. Описаны результаты численных экспериментов, подтверждающие корректность полученного алгоритма. Мы взяли идею построения алгоритма из работы [2].

Литература

1. *Пятков С. ., Неустрובה Л. В.* О разрешимости обратных задач об определении точечных источников // Математические заметки СВФУ. 2022, Т. 22. С. 31-43.

2. *Шергин С.Н.* On Some Inverse Coefficient Problems with the Pointwise Overdetermination for Mathematical Models of Filtration / S. N. Shergin, E. I. Safonov, S. G. Pyatkov // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2019. Vol. 12, No. 1. P. 82-95.

МОДЕЛИ ДЛЯ ОБОРОТА ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ КОВАРИАЦИЙ ДОХОДНОСТЕЙ

И.Н. Шнурников, shnurnikov.in@talantiuspeh.ru

УДК 51.77

Инвестиционный портфель является линейной комбинацией n алгоритмических торговых стратегий (АТС), каждая из которых является вектором длины N . Какушадзе и Лью предложили модель, в которой оборот портфеля приближенно выражается через матрицу ковариаций доходностей и обороты АТС. В данной работе формализована модель Какушадзе и Лью и получено условие ее корректности.

Ключевые слова: алгоритмические торговые стратегии, матрица ковариаций доходностей, оценки оборота, взаимное сокращение торговых операций

Covariance of returns based models for investment portfolio turnover

An investment portfolio is a linear combination of n algorithmic trading strategies (alphas), each of which is a vector of size N . Kakushadze and Liew proposed to estimate portfolio turnover via covariance matrix of returns and alphas turnovers. We formalize Kakushadze and Liew model and get a condition for its correctness.

Keywords: algorithmic trading strategies, returns covariance matrix, turnover estimations, crossing of trading operations

Алгоритмической торговой стратегией (АТС) называется программа, которая к определенным моментам времени вычисляет вектор позиций, которые нужно занять по N инструментам биржевого рынка. *Инвестиционный портфель* является линейной комбинацией n АТС, для каждой из которых выделен определенный капитал — l_1 норма вектора позиций. *Оборотом* АТС (или портфеля) называется l_1 норма разности векторов позиций в последовательные моменты времени. Исполнение портфеля таково, что противоположные по знаку торговые операции (покупка/продажа) одного актива у разных стратегий сокращаются. Как следствие, оборот портфеля оказывается меньше, чем линейная комбинация оборотов АТС с теми же коэффициентами. *Доходность* i -й АТС будем рассматривать как случайную величину

Результаты получены в рамках реализации государственной программы федеральной территории «Сириус» «Научно-технологическое развитие федеральной территории «Сириус».

Шнурников Игорь Николаевич, к.ф.-м.н., доцент, НТУ «Сириус» (Сочи, Россия); Igor Shnurnikov (Sirius University of Science and Technology, Sochi, Russia)

α_i , для которой уже получена выборка на исторических данных, и по прошествии торгового интервала к выборке добавляется очередное значение.

Данная постановка возможна и принята в крупных хедж-фондах, занимающихся алгоритмической торговлей на фондовом, срочном и крипто рынках. Хедж-фонд в упрощенном виде состоит из десятков специалистов (quantitative researchers) и нескольких портфолио менеджеров. Специалисты создают большое количество АТС, портфолио менеджеры объединяют их в портфели, используя методы оптимизации. Оптимизация часто осуществляется с учетом транзакционных издержек и влияния на рынок, которые можно считать функциями от оборота портфеля.

Предположение модели Какушадзе и Лью, [1,2]. Средний оборот портфеля приближенно выражается через средние обороты входящих в него АТС и матрицу ковариаций их доходностей.

В данной работе формализована модель Какушадзе и Лью и получено условие ее корректности, вытекающее из теоремы 1.

При $n \geq 2$ назовем n -мерный случайный вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) *допустимым*, если дисперсия $D\alpha_i = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$ и ненулевая линейная комбинация компонент вектора не может равняться константе почти наверное. Через $V(\alpha)$ обозначим линейное пространство линейных комбинаций $\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$, $x_i \in \mathbb{R}$. Будем считать, что доходности АТС образуют допустимый вектор. Тогда соответствие между АТС и их доходностями продолжается по линейности до взаимно однозначного соответствия между портфелями и пространством $V(\alpha)$. Функция $f(v) : V \rightarrow \mathbb{R}$ на линейном пространстве V называется *абсолютно однородной*, если $f(\lambda v) = |\lambda|f(v)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v \in V$. Заметим, что оборот портфеля является абсолютно однородной функцией на $V(\alpha)$. Через C и D обозначим матрицу ковариаций и дисперсию соответственно.

Теорема 1. Пусть α — это допустимый случайный вектор и $f : V(\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ — это абсолютно однородная функция. Тогда существуют функции F , для которой

$$f(\xi_1 + \xi_2) = F(C(\xi_1, \xi_2), f(\xi_1), f(\xi_2)) \quad \text{для всех } \xi_1, \xi_2 \in V(\alpha)$$

равносильно существованию константы f_0 , такой что $f(\xi) = f_0 \sqrt{D(\xi)}$ для всех $\xi \in V(\alpha)$.

Условие корректности. Модель Какушадзе и Лью корректна, если обороты АТС, отнормированных к единичной дисперсии доходностей, совпадают.

Работа совместная с А.В. Кулигой и Н.Д. Чадромцевым. Мы предложили оценки для оборота портфеля, точные при условии корректности. А.В. Кулига провел численные эксперименты, сравнивающие качество оценивания оборота в рамках подхода из [1,2] и нашего. В част-

ности, при приближенном выполнении условия корректности точность оценивания оборота повышалась. Н.Д. Чадромцев провел численные эксперименты по применимости оценок на обороты для оптимизации инвестиционных портфелей с учетом транзакционных издержек. Мною выполнена формализация модели Какушадзе и Лью и найдено условие, при котором ее предположение корректно.

Портфолио менеджеры могут использовать предложенные нами оценки оборота для оптимизации портфелей с учетом транзакционных издержек и влияния на рынок. А условие корректности использовать для проверки того, насколько точны наши оценки (и оценки Какушадзе и Лью).

Литература

1. *Kakushadze Z., Liew J.K.-S.* Is it possible to od on alpha? // The Journal of Alternative Investments, **18**:2 (2015), 39-49
2. *Kakushadze Z.* Spectral model of turnover reduction // Econometrics, **3**:3 (2015), 577-589.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ СЛИТКА ПРИ РАЗНОЙ ФОРМЕ СТенок СЛЯБОВОГО КРИСТАЛЛИЗАТОРА МНЛЗ

И.М. Ячиков, Т.И. Шафиков

iachikovim@susu.ru, asp21sti028@susu.ac.ru

УДК 621.746.27:047

Разработана математическая модель теплового состояния формирующегося стального слитка в кристаллизаторах с разной формой углов узких стенок в слябовой машине непрерывного литья заготовок (МНЛЗ). Создана компьютерная программа для мониторинга процесса формирования корочки слитка и его усадки для выбранной марки стали и заданных параметров разливки.

Ключевые слова: математическая модель, тепловое состояние слитка со скошенными и закругленными углами, метод расщепления по координатам, метод прогонки.

Mathematical modeling of the thermal state of ingot with different shape of walls of slab crystallizer of CCM

mathematical model of the thermal state of a forming steel ingot in crystallizers with different shapes of narrow wall angles in a continuous slab casting machine (CCM) has been developed. A computer program has been created to monitor the process of ingot crust formation and shrinkage for a selected steel grade and specified casting parameters.

Keywords: mathematical model, thermal state of an ingot with beveled and rounded corners, coordinate splitting method, run method.

В кристаллизаторе МНЛЗ процесс образования твердой стальной корочки происходит за счет охлаждения поверхности формируемого слитка при передаче тепла от расплавленного металла к охлаждающей воде, протекающей в каналах медных стенок кристаллизатора. При этом на выходе из кристаллизатора прямоугольного сечения в углах наблюдается переохлаждение слитка и разнотолщинность корочки, что способствует и стимулирует возникновение термических напряжений и трещин в процессе непрерывной разливки, кратно увеличивает

Работа выполнена при финансовой поддержке РФ Минобрнауки России (№ 075-15-2022-1243).

Ячиков Игорь Михайлович, д.т.н., профессор кафедры ИНИТ, ЮУрГУ (Челябинск, Россия); Igor Yachikov (South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia)

Шафиков Тимур Ильдусович, аспирант кафедры ИНИТ, ЮУрГУ (Челябинск, Россия); Timur Shafikov (South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia)

брак при дальнейшей листовой прокатке слитка, а также увеличивает износ нижней части медных стенок. Для компенсации нормальной составляющей силы воздействия на стенку кристаллизатора и приближения толщины корочки в углах, к толщине по периметру горизонтального сечения слитка, была модернизирована конструкция узких медных стенок кристаллизатора путем добавления торцевых скосов или использования торцевого закругления [1].

Для составления математической модели теплового состояния слитка в кристаллизаторе МНЛЗ использовалась квазиравновесная теория затвердевания [2]. Движение сляба происходит с постоянной скоростью v по вертикали в полости кристаллизатора сверху вниз, при котором происходит его охлаждение и затвердевание. В модели использована декартова система координат и принят ряд допущений и ограничений. Считалось, что тепловой режим квазистационарный, то есть температура в каждой точке слитка не меняется, использовалось стационарное уравнение энергии, учитывающее фазовый переход. Рассматривая систему координат, связанную с произвольным движущимся объемом металла, учитывая соотношение и используя подстановку, уравнение становится нестационарным и его можно записать как

$$c \cdot \rho \cdot v \frac{\partial T}{\partial z} - \rho \cdot L \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (1)$$

где ψ — доля твердой фазы ($\psi|_{T=T_S} = 1, \psi|_{T=T_L} = 0$); T_L, T_S — температуры ликвидуса и солидуса стали соответственно; L — теплота плавления; теплофизические свойства стали представляется кусочно-непрерывными функциями теплоемкости $c(T)$, коэффициента теплопроводности $\lambda(T)$ и плотности $\rho(T)$. Для решения уравнения (1) были сформулированы краевые условия. Начальная температура слитка во всех точках расчетной области соответствует температуре металла в проковше. В связи с симметричностью формы слитка с прямыми, скошенными или закругленными углами в качестве рабочей области расчета рассматривалась его четверть, и задавались граничные условия 2 рода. Плотность теплового потока направленного по нормали от кристаллизующегося металла $q(z, v)$ к рабочей поверхности кристаллизатора задавалась с использованием эмпирической зависимости.

Для решения (1) использовался метод расщепления по координатам. Уравнения по осям x и y были приведены к виду трехдиагональной матрицы. Каждая из полученных систем линейных алгебраических уравнений решалась методом прогонки. Полученная расчетная схема локально-одномерная и безусловно устойчивая.

На основе созданной математической модели и предложенного алгоритмов решения краевой задачи и линейной усадки слитка создана компьютерная программа [3]. Установлена адекватность созданной компьютерной модели была на основе сопоставления с промышленными данными.

Литература

1. *Ячиков И.М., Дрозин А.Д., Точилкин В.В. и др.* Кристаллизатор машины непрерывного литья заготовок // Патент на ПМ № 217042 U1, 15.03.2023.
2. *Ячиков И.М., Шафиков Т.И.* Мониторинг теплового состояния слитка со скошенными углами в слябовом кристаллизаторе МНЛЗ // В сборнике: Цифровая Индустрия: Состояние и Перспективы Развития 2023 (ЦИСП'2023). Сборник научных статей. Челябинск, 2024. С. 562–571.
3. *Ячиков И.М., Шафиков Т.И.* Моделирование теплового состояния и линейной усадки слитка в кристаллизаторе слябовой МНЛЗ. //Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2024662494.

Предметный указатель

- Аббас Х.Х., 5
Абляз Т.Р., 252, 317
Абушахмина Г.Р., 206
Александров П.Н., 255
Александрова Е.А., 198
Альпов А.В., 260
Амерханов М.И., 290
Аминова А.В., 9
Арабов М.К., 200
Артыкбаева Ж., 14
Артисевич А.Е., 12
Авилтай Н., 7
Баймурзин Д.А., 275
Байзаев С., 20, 22
Баротов Р.Н., 20
Баширова З.А., 206, 208, 272, 282
Башмаков Р.А., 198
Бавшин Т.Р., 202
Баззаев А.К., 17
Бегимкулов Ф. Х., 80
Бегматов А.Х., 24, 26, 29, 211, 214
Белова А.С., 32
Бижанова Г.Г., 206, 208
Богатырева Ф.Т., 34
Богданова А.П., 217, 275
Болтачев А.В., 36
Борисов Д.И., 38
Будников Г.К., 206, 282
Бугров В.О., 221, 223
Бураго П.Н., 324
Бурганова А.Р., 282
Бутерин С.А., 39
Черданцев И. Ю., 247
Черепанова Е.А., 173
Черкашин Д.А., 227
Черняева Е. Ю., 208
Чуновкина А.Г., 308
Денисова А. А., 329
Джабраилов А.Л., 58
Джамалов С.З., 61, 171
Евхута Н.А., 70
Евсеев Ф.А., 234
Евтина Д.С., 67
Эгамов А.И., 324
Файрузов М.Э., 320
Фармонов Ш.Р., 165
Федоров К.М., 290
Федоров В.Е., 52, 117, 153, 169,
191
Филин Н.В., 169
Фот Н.С., 322
Габдрахманов Р.И., 54
Галиакбарова Э.В., 177
Галиакбарова Э.В., 229
Галина Г.К., 231
Галлямов В.В., 269
Ганиев М.Ш., 179
Ганиева Е. С., 329
Гапонов Д.Н., 236
Гареев И. А., 231, 247
Гебресласи Х.Ф., 43
Гильманов А.Я., 244, 250, 290
Горохов А.Ю., 252
Гребенникова И.В., 56
Григорьев Ю.В., 298
Гурина Е.И., 305
Хакимов Д.Р., 9
Хакимов Р.И., 123
Хакимова З.Р., 229
Халимов А. А., 329
Харламова Ю. А., 231
Харук Н.В., 78
Хитров Е.Г., 202
Хуан Ж., 50
Ибрагимова Л.С., 195
Игнатъева Г.А., 282
Исламова А.И., 177
Исмоилов А.С., 26, 29, 211, 214
Иванов А.В., 78
Изместьев И.В., 98
Иззатуллоев Д., 179
Кадиркулов, Б. Ж., 80
Кайырбек Ж.А., 88
Кайрат Г., 82
Калинин А.В., 86
Каменских А.А., 217, 252, 275

Кангужин Б.Е., 88
Канонирова Е.П., 244
Каримов К.Т., 90
Кашникова А.П., 242
Казакбаева К.Б., 84
Ким А.С., 250
Клевцова Ю.Ю., 92
Кризский В.Н., 255
Кропанев Н.А., 252
Кудрявцев К.Н., 98
Кузенков О.А., 113
Квятковская А. С., 247
Лебедев К. О., 231
Леднов А.П., 101
Лискина Е.Ю., 260
Лукащук С.Ю., 105, 310
Максимов В.П., 109
Максютова Э.И., 272, 282
Мальгина А.С., 265
Малютин В.Б., 267
Маматов А.Р., 111
Манакова Н.А., 128
Мажгихова М.Г., 107
Медведев А.В., 113
Мелехина Д.В., 117
Мышеловка Л.В., 278
Мифтахов Э.Н., 242
Мингазов Д. Л., 231
Миратов С.К., 151
Морозкин Н.Д., 269
Морозкин Н.Н., 269
Мухамадиев Э.М., 119
Мухаметшин А.Н., 275
Мухсинов Е.М., 123
Мустафин А.Г., 272
Мустафина М.О., 88
Нагаева З.М., 198
Насыров Ф.С., 125
Насырова Д.А., 280
Нигматуллин Р.Р., 206, 282
Николаева Н.Г., 128
Носов Ю.О., 217, 275
Нуров И.Д., 119
Нуржанов Б.О., 267
Охунзода Н.К., 139
Олими А.Г., 139
Омарова А.Г., 285
Орипов Т.С., 143
Пангаева А.О., 229
Павлючик П.Б., 130
Павлюк Ю.А., 288
Пышноград Г.В., 265, 288
Пичугин О.Н., 290
Подклетнова С.В., 134
Похачевский В.А., 137
Полякова А.П., 293
Потапков А.А., 295
Проневич А.Ф., 130
Пья П.А., 298
Пустовалов Д.О., 317
Рассадин А.Э., 221, 223
Раутиан Н.А., 145
Россовский Г.Л., 147
Рубцов М.И., 221, 223
Рябов К.С., 300
Сабитов К.Б., 149
Сабурова Ю.Б., 272
Сафаров Д.С., 151
Савин А.Ю., 5
Саввина Е.И., 302
Сидельников А.В., 206
Сидельникова Е. А., 329
Скрипка Н.М., 153
Смольникова О. Г., 208
Сомова П.А., 305
Спеле В.В., 105
Степанов А.В., 308
Сухов А.С., 202
Сулейманов Р.Р., 38
Султанаев Я.Т., 155
Султанов Г. Р., 208
Султанов М.Ф., 310
Светов И.Е., 293
Сякаев Р.С., 272
Шабалин П.Л., 175
Шафиков Т.И., 337
Шамматова А.А., 177
Шамсудинов Ф.М., 179
Шарипов Р.А., 187
Шарипова Л.Д., 247, 329

Шаров К.В., 317
Шаршуков В.А., 183
Шевелёв А.П., 244, 250, 290
Шишацкая П.С., 191
Шлыков Е.С., 252
Шморган С.А., 193, 332
Шнурников И.Н., 334
Шоикров А.М., 90
Шокирова М.М., 22
Тимергалиев С.Н., 159
Толстых М.А., 314
Турсунов Ф.Р., 161
Тюхтина А.А., 86
Уфимская В.А., 317
Утеулиев Н.У., 29, 214
Валеев Н.Ф., 155
Васенина Н.А., 48, 208, 231, 247,
329
Васильев В.Б., 43
Васильева О.А., 46, 225
Великанов П.Г., 50
Вершинина Д.А., 52
Винарский А.А., 322
Вирченко Ю.П., 227, 278
Владов М.Л., 255
Ячиков И.М., 337
Юмагулов М.Г., 195, 272
Зайнуллин Р.Г., 73
Зеркина А. В., 247
Зверева М.Б., 76

Жабко А.П., 67, 236, 238
Жабко Н.А., 238

Халхаджаев Б.Б., 171
Шакиров А.А., 61

Anvarjonov B.B., 312
Ashurov R.R., 15

Chadromtsev Nikita, 326

Dusanova U.Kh., 63

Korzyuk V.I., 95
Kovalevsky A.A., 93
Kuliga Andrew, 257

Litvinov V. L., 262
Litvinova K. V. , 262

Nuraliyeva N.Sh., 15

Rudzko J.V., 95

Sultanaev Ya.T., 157

Takhirov J.O., 312

Valeev N.F., 157

Yeskermessuly A., 157

Научное издание

Материалы международной
научной конференции
УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2024

Том 2

В авторской редакции

Подписано в печать 26.09.2024 г. Формат 60x90/16.

Печать: цифровая. Гарнитура: СМУ

Усл. печ. л. 20,00. Тираж 500. Заказ 2200.



Отпечатано в редакционно-издательском отделе

НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА «АЭТЕРНА»

450076, г. Уфа, ул. Пушкина 120

<https://aeterna-ufa.ru>

info@aeterna-ufa.ru

+7 (347) 266 60 68