БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА»

Уфа, Россия, 16-19 октября 2019 г.

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Уфа
Издательство Башкирского государственного университета
2019

Благодарим компании, оказавших поддержку проведению конференции

УДК 517.9
ББК 22

Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 16-19 октября 2019 г.): Тезисы докладов. Уфа: Изд-во БашГУ, 2019. - 279 с.

В сборнике представлены тезисы докладов участников Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 16-19 октября 2019 г.). Целью конференции являлось детальное обсуждение новейших результатов и открытых проблем в спектральной теории, нелинейном и комплексном анализе, вычислительной математике, математическом моделировании. Материалы сборника предназначены для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся указанными проблемами.

Печатается по решению Ученого совета факультета математики и информационных технологий Башкирского государственного университета.

Организаторы конференции: Башкирский государственный университет, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (г. Уфа, Россия), Самаркандский государственный университет (г. Самарканд, Узбекистан).

Финансовая поддержка: ООО «Парус-Башкортостан» (директор Зиятдинов Р.Р.), ООО «Винтех» (директор ИП Сайфуллин И.Г.), ООО Компания права «Респект» (директор Одиноков О.В.).

Сотрудничество математиков – специалистов в спектральной теории, нелинейном и комплексном анализе, вычислительной математике, математическом моделировании принимает все более активные формы. Важную роль в этой работе играют математики Башкирского государственного университета и Института математики с ВЦ УФИЦ РАН, которые участвуют в совместных научных проектах, поддерживаемых РФФИ, Минобрнауки РФ и др., сотрудничают с коллегами из многих научных центров России и зарубежья. В последние годы особо активным стало сотрудничество в указанных областях математики с учеными из ряда научных и образовательных организаций Узбекистана, Казахстана и Таджикистана. Со многими организациями заключены соответствующие Договора о научном сотрудничестве. Особо тесными являются научные контакты с учеными из механико-математического факультета Самаркандского государственного университета: проводятся совместные научные исследования, осуществляются взаимные визиты ведущих ученых, проводятся онлайн-лекции и др.

Научная программа конференции охватывает следующие направления:

- спектральная теория операторов;
- комплексный и функциональный анализ;
- нелинейные уравнения;
- вычислительная математика;
- математическое моделирование.

Важное место в работе школы занимают обзорные лекции ведущих ученых для аспирантов и молодых ученых.

СМЕШАННАЯ ПРОЕКЦИОННАЯ СЕТОЧНАЯ СХЕМА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

О. Абдуллаев, К.А. Филипосян, И.А. Хужамиёров
abdullaev2006@inbox.ru, fka1988@gmail.com, xujamiyorov1990@mail.ru

УДК 517.984

Для решения двумерных задач теории упругости применяется смешанная схема метода конечных элементов. Исследована корректность и сходимость смешанных аппроксимаций.

Ключевые слова: смешанный метод конечных элементов, смешанная апроксимация, теория обобщенных функций

Mixed projection grid scheme of the finite element method for solving linear problems of the theory of elasticity.

In the paper in order to solve two-dimensional problems of the elasticity theory, a mixed scheme of the finite elements method is used. It is investigated the well-definiteness mixed approximations for deformations and displacement.

Keywords: mixed finite element method, mixed approximation, theory of generalized functions

Метод СМКЭ (смешанного МКЭ) дает возможность уменьшить погрешность аппроксимации напряжений и деформаций. Так же есть возможность точного удовлетворения статистических граничных условий. Еще одно преимущество заключается в том, что смешанные схемы МКЭ дают возможность аппроксимации не только для перемещений, но и для напряжений и деформаций. Не смотря на преимущества СМКЭ не получили широкого применения.

Обобщенная постановка краевой задачи теории упругости заключается в следующем: рассматриваемое тело занимает область $\Omega \in \mathbb{R}^n, (n = 2, 3)$ и имеет регулярную границу Γ на части границы Γ_u заданы перемещения, а на оставшейся части Γ_σ поверхностная нагрузки. Считаем, что примещения U удовлетворяют на Γ_u однородными граничным условиям, напряжения полная и начальная деформации описываются тензорными функциями σ, ε, ξ соответственно. Связь между перемещениями и деформациями есть:

$$\varepsilon = Bu \tag{1}$$

где B - линейный дифференциальный оператор. Область определения B обозначим через $-U$, а область значения через Y. U и Y , будем рассматривать как замкнутые линейные подпространства гильбертовых пространств V и X со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_V$ и $(\cdot,\cdot)_X$ соответственно. Соотношения между напряжениями и деформациями представим в виде

$$\sigma = \mathcal{D}(\varepsilon - \xi) \tag{2}$$

Абдуллаев Обид, к.ф.-м.н., доцент, СамГУ (Самарканд, Узбекистан); Obid Abdullayev (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Филипосян Камо Аркадьевич, ассистент, СамТУИТ (Самарканд, Узбекистан); Filiposyan Kamo Arkadyevich (Samarkand branch of Tashkent university of information technologies, Samarkand, Uzbekistan)

Хужамиёров Ислом Абдумаликович, преподаватель ДГПИ (Джизак, Узбекистан); Xujamiyorov Islom Abdumalikovich (Jizzakh State Pedagogical Institute, Jizzakh, Uzbekistan)

где $\mathcal{D}$ – линейный оператор, связанный с физической природной упругой среды. Соотношение $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{D}}$ и $(\cdot,\cdot)_X$ индуцирует норму на пространстве X, причем существуют два вещественных положительных числа m и M такие, что

$$\sqrt{m}\cdot\|\cdot\|_X \leq \|\cdot\|_{\mathcal{D}} \leq \sqrt{M}\cdot\|\cdot\|_X \tag{3}$$

Обозначим через U^* пространство, сопряженное к U, и определим $\varrho(\nu)$ как значение непрерывного линейного функционала $\varrho \in U^*$ на элементе $\nu \in U$. Используя вариационного уравнения Лагранджа, (1) статические соотношения запишем в виде

$$(\sigma, B_u)_X = \varrho(\nu)\forall\nu \in U \tag{4}$$

Используя уравнения (1), (2), (4) сформулируем обобщенную краевую задачу теории упругости в перемещениях.

$$(B_u, B_v)_{\mathcal{D}} = \varrho(\nu) + (\xi, Bv)_{\mathcal{D}}\forall\nu \in U \tag{5}$$

Существование и единственность обобщенного решения (5) следует из свойств коэрцитивности и непрерывности симметричной билинейной формы $a(\cdot,\cdot): U \times U \to \mathbb{R}$ определяемый соотношением

$$a(\cdot,\cdot) = (B\cdot, B\cdot)_{\mathcal{D}} \tag{6}$$

С помощь. неравенств (3) получаем

$$m\cdot\|v\|_U^2 \leq a(v,v) \leq M\cdot\|v\|_U^2, \forall v \in U \tag{7}$$

Следовательно, краевая задача, описываемая уравнением (5), однозначно разрешима при любых $\varrho \in U^*$ и $\xi \in X$.

Уравнения (5) представляет формулировку МКЭ в перемещениях. Это приводит к ухудшению сходимости аппроксимации для деформации и напряжений. Альтернативный подход состоит в измерении обобщенной постановки краевой задачи так, что деформации являлись ее аргументами, а не определялись на основы решении задачи в перемещениях. Таким образом сформулируем обобщенную постановку краевой задачи теории упругости относительно перемещений и деформаций.

$$(\varepsilon,\eta)_{\mathcal{D}} = (Bu,\eta)_{\mathcal{D}}, \forall\eta \in X(\varepsilon, Bv)_{\mathcal{D}} = \varrho(v) + (\xi, Bv)\mathcal{D}, \forall\xi \in U \tag{8}$$

Построение проекционно-сеточной схемы базируется на дискретизации исходной континуальной задачи (8). Пространства $U \times X$ аппроксимируется пространством $U_h \times X_h$, где h – определяющий параметр семейства конечномерных пространств, стремящийся в пределе к нулю. Найти пару $(u_h, \varepsilon_h) \in U_h \times X_h$ такую, что $(\varepsilon_h, \eta_h)_{\mathcal{D}} = (Bu_h, \eta_h)_{\mathcal{D}}, \forall\eta_h \in X_h$ и $(\varepsilon_h, Bv_h)_{\mathcal{D}} = \varrho(v_h) + (\xi, Bv_h)\mathcal{D}, \forall v_h \in U_h$ Эта система определяет смешанную проекционно-сеточную постановку задачи теории упругости в перемещениях и деформациях. Вначале устанавливается соответствие между подпространствами $X_h \subset X$ и $Y_h \subset Y$, где Y_h - множество значений оператора B, т.е. $Y_h = BU_h$.

Литература

1. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике – М.: Наука, 1988-336с.

2. *Ладыжнева О.А.* Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа - М: Наука, 1973- 576с.

О ЧИСЛЕННОМ ПОСТРОЕНИИ ЯЗЫКОВ АРНОЛЬДА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.В. Абдуллин
a.v.abdullin@gmail.com

УДК 517.518

Языки Арнольда - это множества с рационально синхронизированными соотношениями параметров системы, которым отвечают циклы определенных периодов. В докладе обсуждаются вопросы о численном построении этих множеств в основных резонансах.

Ключевые слова: динамические системы, периодические решения, языки Арнольда, численное построение

Arnold tongues of discrete dynamical systems

Arnold's languages are many with rational synchronized relationships of system parameters, which perform cycles of certain periods. Discussed in the future questions about the plural construction of these sets in the main resonances

Keywords: dynamical systems, periodic solutions, Arnold tongue, numerical construction

Рассматривается двумерная дискретная динамическая система:

$$x_{n+1} = f(x_n, \alpha, \beta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $x_n \in R^2$, (α, β) - двумерный параметр. Предполагается, что при всех (α, β) система (1)имеет точку равновесия $x = 0$. Положим $A(\alpha, \beta) = f'_x(0, \alpha, \beta)$. Пусть матрица $A(\alpha, \beta)$ имеет вид: $A(\alpha, \beta) = (1 + \alpha)Q(\beta)$, где

$$Q(\beta) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi(\theta_0 + \beta) & -\sin 2\pi(\theta_0 + \beta) \\ \sin 2\pi(\theta_0 + \beta) & \cos 2\pi(\theta_0 + \beta) \end{bmatrix};$$

здесь $\theta_0 = \frac{p}{q}$ - рационально. Языки Арнольда системы (1) возникают при значениях (α, β), близких к точке $(0, 0)$.

Предлагаются схемы численного построения языков Арнольда системы (1). Используются результаты и формулы из [1, 2].

Литература

1. *Арнольд В.И* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Регулярная и хаотичная механика. — Ижевск, 2000.

2. *Юмагулов М.Г.* Локализация языков Арнольда дискретных динамических систем // Уфимский математический журнал, **5**:2 (2013), 109-131.

Абдуллин Айрат Валиевич, магистрант БашГУ (Уфа, Россия)

ПРИМЕНЕНИЕ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

М.А. Абрамчук
rita1abramchuk@yandex.ru

УДК 518

В работе представлены теоретические аспекты применения методов математической статистики для анализа демографических показателей.

Ключевые слова: прогнозирование, регрессионный анализ, демографическое прогнозирование, регрессионная модель, демографические показатели

APPLICATION OF REGRESSION ANALYSIS FOR FORECASTING DEMOGRAPHIC INDICATORS

The paper presents theoretical aspects of the application of mathematical statistics methods for the analysis of demographic indicators.

Keywords: forecasting, regression analysis, demographic forecasting, regression model, demographic indicators

Во многих практических задачах прогнозирования, изучая различного рода связи, необходимо на основании экспериментальных данных выразить зависимую переменную в виде некоторой математической функции от независимых переменных – регрессоров, то есть построить регрессионную модель.

Суть регрессионного анализа заключается в нахождении наиболее важных факторов, которые влияют на зависимую переменную.

Регрессионный анализ позволяет:

- производить расчет регрессионных моделей путем определения значений параметров – постоянных коэффициентов при независимых переменных – регрессорах;
- проверить гипотезу об адекватности модели имеющимся наблюдениям;
- использовать модель для прогнозирования значений зависимой переменной при новых или ненаблюдаемых значениях независимых переменных [1].

В регрессионном анализе рассматривается односторонняя зависимость переменной Y (функция отклика, результативный признак) от одной или нескольких независимых переменных X (объясняющие или предсказывающие переменные, факторные признаки)[1].

Регрессионный анализ применяется для прогнозирования демографических показателей. Например, для прогнозирования численности населения. Прогнозирование с помощью регрессионных моделей, которые отражают зависимость численности населения от выбранных предикторов, позволяют включать в прогноз любые факторы, характеризующиеся корреляционной взаимосвязью. Она может быть представлена в виде линейной и нелинейной функции с одним или несколькими предикторами. Отметим, что в практике прогнозирования динамики численности населения наиболее часто встречаются нелинейные модели [2].

Абрамчук Маргарита Андреевна, студент 4 курса., БашГУ (Уфа, Россия); Margarita Abramchuk (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Для прогнозирования общего уровня рождаемости может применяться метод множественной регрессии. Суть этого подхода состоит в том, что на основании многолетних данных о величинах рождаемости и ряда социально-экономических показателей (напр., душевого дохода доли занятых среди женщин, душевого дохода среди женщин, коэффициента брачности, и т.д. и т.п.) строится уравнение множественной регрессии, связывающее значения рождаемости с уровнями перечисленных факторов.[3]

Регрессионный анализ является распространённым методом прогнозирования миграции населения. Он позволяет в наглядной форме проверить гипотезы о зависимости миграции от факторов, ее обусловливающих, представить эту зависимость в виде уравнений, выполнить прогноз. Таким образом, основные положения различных экономических и социологических концепций миграции получают количественное выражение [4].

Среди регрессионных моделей миграции преобладают те, в которых в качестве объясняющих переменных берутся различные экономические показатели. В большинстве регрессионных моделей, построенных в России, исследовалась зависимость миграции от характеристик экономического развития и условий жизни населения отдельных территорий. В качестве переменных использовались показатели:

1) уровня доходов, возможности трудоустройства, обеспеченности жильем, торгового, медицинского, бытового обслуживания, образования и культуры населения;

2) состояния экономики (рост капитальных вложений, промышленного производства и т.д.);

3) численности и структуры населения (доля городского населения и т.д.);

4) природных условий (средняя температура января и т.д.) [4].

К достоинствам регрессионных моделей прогнозирования можно отнести простоту, гибкость, а также единообразие их анализа и проектирования. При использовании линейных регрессионных моделей результат прогнозирования может быть получен быстрее, чем при использовании остальных моделей. Кроме того, достоинством является прозрачность моделирования, т. е. доступность для анализа всех промежуточных вычислений.

Основным недостатком нелинейных регрессионных моделей является сложность определения вида функциональной зависимости, а также трудоемкость определение параметров модели. Недостатками линейных регрессионных моделей являются низкая адаптивность и отсутствие способности моделирования нелинейных процессов.

Литература

1. *Зандер Е.В.* Эконометрика: Учебно-методический комплекс. Красноярск: Рио КрасГУ, 2003 - с. 17.

2. *Шубат О.М.* Методы прогнозирования численности населения: опыт критического анализа // Проблемы моделирования социальных процессов: Россия и страны АТР. Материалы Второй всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Владивосток: Дальневосточный федеральный университет, 2016. - с. 328-331.

3. *Медков В.М.* Демография: Учебное пособие. Ростов-на-Дону: "Феникс 2002 - с.343.

4. *Бабич Т.Н.* Прогнозирование и планирование в условиях рынка: Учебное пособие, Москва: ИНФРА-М, 2012 - с. 236.

УСТОЙЧИВОСТЬ СВОЙСТВА СЛАБОЙ ЛОКАЛИЗУЕМОСТИ ГЛАВНОГО ПОДМОДУЛЯ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ НУЛЕВОГО МНОЖЕСТВА ПОРОЖДАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Н.Ф. Абузярова

abnatf@gmail.com

УДК 517.538.2, 517.984.26, 517.547

Изучается вопрос о сохранении главным подмодулем в алгебре Шварца свойства слабой локализуемости при возмущениях нулевого множества порождающей этот подмодуль функции.

Ключевые слова: целые и субгармонические функции, локальное описание идеалов и подмодулей

The stability of the weak localizability property for a principal submodule under zero set perturbation of its generator

We study the question on the preserving of the weak localizability property by a principal submodule in the Schwartz algebra under zero set perturbation of this submodule's generator.

Keywords: entire and subharmonic functions, local descriptions of ideals and submodules

Пусть $[a_1; b_1] \Subset [a_2; b_2] \Subset \dots$ – последовательность отрезков, исчерпывающая $\mathbb{R}$, P_k – банахово пространство, состоящее из всех целых функций φ, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(2+|z|)^k \exp(b_k y^+ - a_k y^-)}, \quad y^\pm = \max\{0, \pm y\}, \quad z = x + \mathrm{i}y.$$

Обозначим через $\mathcal{P}$ индуктивный предел последовательности $\{P_k\}$. В пространстве $\mathcal{P}$ операция умножения на независимую переменную z непрерывна, поэтому $\mathcal{P}$ — топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$. Более того, $\mathcal{P}$ — топологическая алгебра над кольцом $\mathbb{C}[z]$.

Хорошо известно, что алгебра $\mathcal{P}$ есть образ пространства Шварца $(C^\infty(\mathbb{R}))'$ при линейном топологическом изоморфизме, осуществляемом преобразованием Фурье-Лапласа. Также известно, что всякая функция φ из алгебры $\mathcal{P}$ принадлежит классу Картрайт. Поэтому, если $\varphi(0) = 1$, то

$$\varphi(z) = e^{-\mathrm{i}c_\varphi z} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right),$$

где $c_\varphi = (h(-\pi/2) + h(\pi/2))/2$, h — индикатор функции φ, $\Lambda_\varphi = \{\lambda_j\}$ — нулевое множество функции φ,

$$0 < |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \dots$$

Предположим, что Λ_φ удовлетворяет двум условиям:
$(Z1)$: $\limsup\limits_{j\to\infty} \frac{|\mathrm{Im}\,\lambda_j|}{\ln|\lambda_j|} < +\infty$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

Абузярова Наталья Фаирбаховна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Natalia Abuzyarova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

$(Z2)$: число точек $\lambda_j \in \Lambda_\varphi$ таких, что $|\mathrm{Re}\,\lambda_j - x| \le 1$, есть величина $O(\ln|x|)$, $|x| \to \infty$.

Обозначим $\mathcal{J}_\varphi$ главный подмодуль, порожденный в $\mathcal{P}$ функцией φ, то есть $\mathcal{J}_\varphi$ — это замыкание в топологии $\mathcal{P}$ множества $\{p\varphi\}$, где $p \in \mathbb{C}[z]$.

Напомним, что главный подмодуль с образующей φ *слабо локализуем*, если он содержит *все* функции $\Phi \in \mathcal{P}$ с индикаторами $h_\Phi = h_\varphi$, обращающиеся в нуль на Λ_φ (см. [1]–[3]).

Свойство слабой локализуемости главных подмодулей играет важную роль при исследовании вопросов (слабого) спектрального синтеза и представления дифференциально-инвариантных подпространств в пространстве $C^\infty(a;b)$ (см. [1]–[3]).

Здесь мы изучаем вопрос о сохранении главным подмодулем свойства слабой локализуемости при возмущениях нулевого множества порождающей функции.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in \mathcal{P}$ порождает слабо локализуемый главный подмодуль $\mathcal{J}_\varphi$ и нулевое множество $\Lambda = \{\lambda_j\}$ этой функции удовлетворяет условиям $(Z1)$ и $(Z2)$.*

Если последовательность $\mathcal{M} = \{\mu_j\} \subset \mathbb{C}$ такова, что

$$\mathrm{Re}\,(\mu_j - \lambda_j) = O(1), \quad \mathrm{Im}\,(\mu_j - \lambda_j) = O(\ln|\lambda_j|), \quad j \to \infty,$$

то формула

$$\psi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\mu_j| \le R} \left(1 - \frac{z}{\mu_j}\right)$$

корректно определяет целую функцию $\psi \in \mathcal{P}$, и главный подмодуль $\mathcal{J}_\psi$, порожденный этой функцией, слабо локализуем.

Литература

1. *Абузярова Н.Ф.* Некоторые свойства главных подмодулей в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси // Уфимск. матем. журн., **8**:1 (2016), 3-14.

2. *Абузярова Н.Ф.* Спектральный синтез для оператора дифференцирования в пространстве Шварца // Матем. заметки, **102**:2 (2017), 163–177.

3. *Абузярова Н.Ф.* Главные подмодули в модуле целых функций, двойственном к пространству Шварца, и слабый спектральный синтез в пространстве Шварца // Комплексный анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНИТИ РАН, М., **142** (2017), 14–27.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЛЯПУНОВСКИХ ВЕЛИЧИН В ЗАДАЧЕ О БИФУРКАЦИИ РОЖДЕНИЯ ЦИКЛА В МОДЕЛЯХ “РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ”

Г.Р. Абушахмина
abushahmina_g@mail.ru

УДК 517.91

В докладе рассматриваются вопросы определения точек бифуркации Андронова-Хопфа в моделях типа “реакция-диффузия”, а также вопросы вычисления соответствующих ляпуновских величин.

Ключевые слова: Бифуркация Андронова-Хопфа, периодические решения, устойчивость, реакция-диффузия

The report addresses the issues of determining points Andronov-Hopf bifurcations in reaction-diffusion models, as well as questions of calculating the corresponding Lyapunov quantities.

Keywords: Andronov-Hopf bifurcation, periodic solutions, stability, reaction-diffusion

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{dt} = A(\mu)w + Dw''_{xx} + h(w), \tag{1}$$

где μ - скалярный параметр, $w = \begin{bmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{bmatrix}$, $A(\mu) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} k_{11}(\mu) & k_{12}(\mu) \\ k_{21}(\mu) & k_{22}(\mu) \end{bmatrix}$. Предполагаются выполненными граничные условия Неймана

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(\pi,t) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Нелинейность $h(u,v)$ предполагается аналитической, такой что $\|h(w)\| = O(\|w\|^2)$ при $\|w\| \to 0$.

Система (1) имеет точку равновесия $w = 0$ при всех μ. Одним из интересных явлений в системе (1) является бифуркация Андронова-Хопфа (см., например, [1]). В докладе обсуждаются достаточные признаки бифуркации Андронова-Хопфа для системы (1), а также вопросы построения соответствующих ляпуновских величин.

Литература

1. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла: Пер. с англ. 1985. — 280.

Абушахмина Гульфия Ринатовна, старший преподаватель, БГМУ (Уфа, Россия); Gulfiya Abushakhmina (Bashkir State Medical University, Ufa, Russia)

О ЗАДАЧЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ

О.В. Агеев, Р.А. Шарипов
ageev-ufa@yandex.ru, r-sharipov@mail.ru

УДК 517.518

Трёхмерная задача цилиндрической регрессии — это задача нахождения цилиндра, который наилучшим образом аппроксимирует группу точек трёхмерного евклидова пространства. Обычно слова «наилучшим образом аппроксимирует» понимаются в смысле минимума среднеквадратичного отклонения точек от поверхности цилиндра. В такой формулировке задача не имеет аналитического решения. После замены квадратичного усреднения некоторым специальным биквадратным усреднением у задачи появляется почти аналитическое решение. В данной работе это почти аналитическое решение воспроизведено в бескоординатной форме.

Ключевые слова: задача регресии

On cylindrical regression problem

The three-dimensional cylindrical regression problem is a problem of finding a cylinder best fitting a group of points in three-dimensional Euclidean space. The words best fitting are usually understood in the sense of the minimum root mean square deflection of the given points from a cylinder to be found. In this form the problem has no analytic solution. If one replaces the root mean square averaging by a certain biquadratic averaging, the resulting problem has an almost analytic solution. This solution is reproduced in the present paper in a coordinate-free form.

Keywords: regression problem

Всякий круговой цилиндр задаётся своим радиусом и осью. Ось цилиндра — это прямая линия, которую можно задать уравнением $[\mathbf{r},\mathbf{a}]=\mathbf{b}$, где вектор $\mathbf{a}$ — направляющий вектор прямой и $\mathbf{b}\perp\mathbf{a}$ (см. [1]). В [2] задачу цилиндрической регрессии удалось свести к нахождению минимума некоторой формы четвёртой степени $D(\mathbf{a})$ относительно компонент вектора $\mathbf{a}$, ограниченного условием $|\mathbf{a}|=1$. Эта форма четвёртой степени задаётся формулой

$$D(\mathbf{a})=4\,Q(\mathbf{c},\mathbf{c})-4\,(\mathbf{L},\mathbf{c})+M, \tag{1}$$

где $\mathbf{c}=Q^{-1}\,\mathbf{L}/2$, а через $Q(\mathbf{c},\mathbf{c})$ обозначена квадратичная форма, определяемая формулами

$$Q(\mathbf{c},\mathbf{c})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_{\mathrm{cm}},\mathbf{c})^2,\qquad \mathbf{r}_{\mathrm{cm}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i, \tag{2}$$

и Q — симметричный оператор, соответствующий этой форме. Через $\mathbf{r}_i$ а (2) обозначены радиус-векторы точек, для которых строится аппроксимирующий цилиндр. Вектор $\mathbf{L}$ в (1) и (2) определяется формулой

$$\mathbf{L}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i\,|[\mathbf{r}_i,\mathbf{a}]|^2-\biggl(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i\biggr)\biggl(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|[\mathbf{r}_i,\mathbf{a}]|^2\biggr). \tag{3}$$

Агеев Олег Владимирович, индивидуальный предприниматель(Уфа, Россия); Oleg Ageev (self-employed individual, Ufa, Russia)

Шарипов Руслан Абдулович, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Ruslan Sharipov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Скаляр M в формуле (1) вычисляется по формуле

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|[\mathbf{r}_i, \mathbf{a}]|^4 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|[\mathbf{r}_i, \mathbf{a}]|^2\right)^2. \tag{4}$$

После нахождения единичного вектора $\mathbf{a}$ из условия минимизации формы (1), вектор $\mathbf{c}$ вычисляется по формуле $\mathbf{c} = Q^{-1}\,\mathbf{L}/2$. Затем вектор $\mathbf{b}$ в уравнении оси цилиндра вычисляется по формуле

$$\mathbf{b} = -\frac{[\mathbf{a}, \mathbf{c}]}{|\mathbf{a}|^2}. \tag{5}$$

После этого определяются расстояния ρ_i от точек $\mathbf{r}_i$ до оси цилиндра и вычисляется радиус цилиндра:

$$\rho_i = |[\mathbf{r}_i, \mathbf{a}] - \mathbf{b}|, \qquad\qquad \rho = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho_i^2}. \tag{6}$$

Решение задачи цилиндрической регрессии, даваемое приведёнными выше формулами (1)–(6), является оптимизированным бескоординатным представлением решения этой задачи, которое мы обнаружили в работе [3]. Аналогичное оптимизированное бескоординатное представление найденного в [4] решения задачи линейной регрессии даётся в работе [5]. Задача регрессии для окружности была решена в том же ключе многими годами ранее в работе [6].

Литература

1. *Шарипов Р. А.* Курс аналитической геометрии. — БашГУ: Уфа, 2010, см. также e-print **arXiv:1111.6521**.

2. *Ageev O. V., Sharipov R. A.*, On cylindrical regression in three-dimensional Euclidean space, e-print **arXiv:1908.02215**.

3. *Eberly D.*, Least squares fitting of data by linear or quadratic structures, online resource **LeastSquaresFitting.pdf** at **geometrictools.com**, July 1999, February 2019.

4. *Jacquelin J.*, Regressions et trajectoires en 3D, online resource at **scribd.com**, 2002, 2011.

5. *Ageev O. V., Sharipov R. A.*, On linear regression in three-dimensional Euclidean space, e-print **arXiv:1907.06009**.

6. *Sharipov R. A.*, Algorithms for laying points optimally on a plane and a circle, e-print **arXiv:0705.0350**.

THE SURJECTIVITY CRITERIA FOR CONVOLUTION OPERATORS ON WEIGHTED SPACES OF FUNCTIONS HOLOMORPHIC IN BOUNDED CONVEX DOMAINS

T.M. Andreeva
metzi@yandex.ru

УДК 517.5

The weighted spaces of functions with prescribed growth near the boundary of bounded convex domains are investigated under certain restrictions on weight sequences. The analytic description of conjugated spaces is provided. The continuity and surjectivity problems of the convolution operator defined on these weighted spaces are studied.

Keywords: convolution operator, weighted spaces, surjectivity of operators

Let G be a domain in $\mathbb{C}$ and $H(G)$ the space of all holomorphic functions in G. For a continuous function (a weight) $v : G \to \mathbb{R}$ define the Banach space

$$H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : ||f||_v := \sup_{z\in G} |f(z)|e^{-v(z)} < \infty \right\}.$$

For an increasing sequence of weights $V = (v_n)$ define the inductive limit $\mathcal{V}H(G) := \mathrm{ind} H_{v_n}(G)$.

Let μ be an analytic functional on $\mathbb{C}$ carried by a convex compact set K. With some restrictions on weight sequence which are equal to those used by V.V. Napalkov [1] we study the continuity and surjectivity problem of the convolution operator

$$\mu * f(z) : f \mapsto \mu_w f(z+w)$$

that maps $\mathcal{V}H(G+K)$ into (onto) $\mathcal{V}H(G)$. We establish the surjectivity criteria for convolution operator in terms of its Laplace (Fourier-Borel) transform $\hat{\mu}(\zeta) := \mu_z e^{\langle z \cdot \rangle}$ via the appropriate description of functional weighted spaces that are conjugated to $\mathcal{V}H(G+K)$ and $\mathcal{V}H(G)$.

The main results are the following:

1) We obtain a criterion of continuity for the convolution operator

$$\mu * : \mathcal{V}H(G+K) \to \mathcal{V}H(G);$$

2) We establish a functional criterion of surjectivity for convolution operator in terms of the closure of an image of the multiplication operator $f \mapsto \hat{\mu} f$ that is conjugate to $\mu *$;

3) For the case $v_n(z) = n|z|^\alpha, \alpha > 0$ we find out the criterion of surjectivity for convolution operator in terms of regular growth of $\hat{\mu}$ (the lower estimate on $|\hat{\mu}|$ outside some exceptional sets).

Similar research was presented in [2] for the spaces of functions that are holomorphic in convex domains and have a polynomial growth near the boundary (the weight sequence $v_n(z) = n \ln(1 + |z|)$).

The research was supported by the Presidential Program for Support of Young Candidates of Sciences under grant MC-1056.2018.1 (Agreement №075-02-2018-433).

Andreeva Tatiana Mikhailovna, assistant, Southern Federal University (Rostov-on-Don, Russia); junior researcher, Southern Mathematical Institute of VSC RAS (Vladikavkaz).

Литература

1. *Napalkov V. V.* Spaces of analytic functions of prescribed growth near the boundary //Math. USSR-Izv., **30**:2 (1988), 263–281.

2. *Abanin A. V., Ishimura R., Khoi L. H.* Convolution operators in $A^{-\infty}$ for convex domains //Arkiv för matematik. - 2012. - T. 50. - №1. - P. 1–22.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ СЦЕНАРИЕВ БИФУРКАЦИИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М.К. Арабов

cool.araby@mail.ru

УДК 517,925

Исследуется задачи о локальных бифуркациях в окрестностях точек равновесия кусочно-линейных динамических систем. Найдены условия возникновения различных сценариев буфуркации в окрестности состояния равновесия.

Ключевые слова: негладкие динамические системы, бифуркация, нелинейность, состояние равновесия.

RESEARCH OF MAJOR SCENARIOS BIFURCATIONS OF PIECE-LINEAR DYNAMIC SYSTEM

We study the problems of local bifurcations in the neighborhood of points equilibrium piecewise linear dynamic systems. Found conditions for the emergence of various bumping scenarios neighborhood of equilibrium.

Keywords: nonsmooth dynamical systems, bifurcation - nonlinearity, state of equilibrium.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$x' = A(\mu)x + b(x,\mu) + \varphi(x,\mu)\,, \quad x \in R^N\,, \tag{1}$$

правая часть которого зависит от скалярного параметра μ. Здесь:

– $A(\mu)$ – квадратная матрица порядка N с непрерывно дифференцируемыми элементами;

– $b(x,\mu)$ – кусочно-линейная вектор-функция, определяемая равенством

$$b(x,\mu) = \begin{bmatrix} b_{11}(\mu)|x_1| + ... + b_{1N}(\mu)|x_N| \\ \cdots \\ b_{N1}(\mu)|x_1| + ... + b_{NN}(\mu)|x_N| \end{bmatrix},$$

в котором $b_{ij}(\mu)$ – непрерывно дифференцируемые функции;

– $\varphi(x,\mu)$ – непрерывная по совокупности переменных вектор-функция, удовлетворяющая по x условию Липшица и соотношению:

$$\varphi(x,\mu) = o(\|x\|^2) \qquad \text{при} \quad \|x\| \to 0$$

Арабов Муллошараф Курбонович, к.ф.-м.н., доцент, РТСУ (Душанбе, Таджикстан); Mullosharaf Arabov (Russian-Tajik Slavonic University, Dushanbe, Tajikistan)

равномерно по μ. В частности, $\varphi(x, \mu)$ также может содержать функции типа модуля.

Рассмотрим теперь задачу о локальных бифуркациях[3-5] в окрестности точки равновесия $x = 0$ негладкого уравнения (1) [2] в предположении, что матрица $A_0 = A(\mu_0)$ имеет нулевое или чисто мнимое собственное значение [1].

На первом этапе рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка вида:

$$y'' + a(\mu)y' + b(\mu)y + c(\mu)|y - \mu| = 0. \tag{2}$$

где $a(\mu), b(\mu), c(\mu)$ – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям: $a(\mu_0) = c(\mu_0) = 0, b(\mu_0) \neq 0$, а $\mu-$ скалярный параметр. Уравнение (2) стандартным способом сводится к системе вида (1).

Уравнение (2) можно свести в системному виду (1).

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -a(\mu)x_2 - b(\mu)x_1 - c(\mu)|x_1 - \mu|. \end{cases}$$

где $y = x_1, y' = x_2$.

Теорема 1. *Пусть* $b'(\mu_0) \cdot c'(\mu_0) \cdot (b(\mu_0)^2 - c(\mu_0)^2) \neq 0$. *Тогда*

1. *Если* $|b'(\mu_0)| < |c'(\mu_0)|, b'(\mu_0) \cdot c'(\mu_0) > 0$. *Тогда значение* μ_0 *параметра* μ *является точкой типа вилки бифуркации уравнения (2)*
2. *Если* $|c'(\mu_0)| < |b'(\mu_0)|$. *Тогда значение* μ_0 *параметра* μ *является точкой транскритической бифуркации уравнения (2).*
3. *Если* $|b'(\mu_0)| < |c'(\mu_0)|, b'(\mu_0) \cdot c'(\mu_0) < 0$. *Тогда значение* μ_0 *параметра* μ *является точкой седло-узловая бифуркации уравнения (2).*

Теперь рассмотрим уравнения второго порядка

$$y'' + a(\mu)y' + b(\mu)y + c(\mu)|y' - \lambda| + g(y, y', \mu) = 0, \tag{3}$$

где $a(\mu), b(\mu), c(\mu)$ – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям: $a(\mu_0) = c(\mu_0) = 0, b(\mu_0) \neq 0$, а нелинейность $g(y_1, y_2, \mu)$ удовлетворяет соотношению: $g(y_1, y_2, \mu) = o(\sqrt{y_1^2 + y_2^2})$ при $y_1^2 + y_2^2 \to 0$ равномерно по μ. Уравнение (3) стандартным способом сводится к системе вида (1).

Имеет место следующие утверждения:

Теорема 2. *Пусть*

$$a'(\mu_0) \neq 0, \qquad b'(\mu_0) = 0 \quad \textit{и} \quad 4b(\mu_0) > \{|a'(\mu_0)| + |c'(\mu_0)|\}^2.$$

Тогда значение μ_0 *параметра* μ *является точкой бифуркации Андронова-Хопфа уравнения (3).*

Литература

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука. 1985. - 224 с.

2. *Мухамадиев Э.М., Нуров И.Д., Халилова М.Ш.* Предельные циклы кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка. // Уфимский математический журнал, (2014), т. 6 № 1, 84-93.

3. *Kozjakin V. S., Krasnosel'skii M. A.* The method of parameter functionalization in the Hopf bifurcation problem. - Nonlinear Analysis, Theory. Methods and Application, Vol. 11, № 2, (1987), 149-161.

4. *Юмагулов М.Г.* Введение в теорию динамических систем: учебное пособие. СПб.: Из-во «Лань». 2015. 272 с

5. *Юмагулов М.Г., Арабов М.К.* Признаки бифуркации Андронова-Хопфа для динамических систем, содержащих негладкие нелинейности // Известия академии наук РТ, отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, №2 (163), (2016), 31-39.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ СРАВНЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОТРАЕКТОРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО МНОГОМЕРНОГО ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА.

А. С. Асылгареев
arthur@asylgareev.ru

УДК 519.2

Доказаны теоремы сравнения для стохастических дифференциальных уравнений (далее — СДУ) относительно многомерного винеровского процесса. Полученные результаты были применены для исследования потраекторной устойчивости возмущённых решений СДУ относительно многомерного винеровского процесса.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, интеграл Стратоновича, теоремы сравнения, потраекторная устойчивость, многомерный винеровский процесс

Application of comparison theorems to the study of trajectory stability of stochastic differential equations with respect to the multidimensional Wiener process.

Comparison theorems for stochastic differential equations are proved (further — SDU) with respect to the standard multidimensional Wiener process. The obtained results were applied to the study of the trajectory stability for SDU.

Keywords: stochastic differential equations, Stratonovich integral, comparison theorems, trajectory stability, multidimensional Wiener process.

Рассмотрим два СДУ с интегралами Стратоновича относительно многомерного винеровского процесса $\overline{W}_t^{(n)} = \left(W_t^{(1)}, \ldots, W_t^{(n)}\right)$, заданного на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, F, (F_t)_{t\geqslant 0}, P)$.

$$d\xi_k^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{kj}^{(n)}\left(t, \xi_k^{(n)}(t)\right) * dW_t^{(j)} + b_k^{(n)}\left(t, \xi_k^{(n)}(t)\right) dt,\ k = 1, 2. \qquad (1)$$

Первая цель данной работы, основанной на результатах исследования [1], заключается в доказательстве теорем сравнения для уравнений (1).

Асылгареев Артур Салаватович УГАТУ (Уфа, Россия); Arthur Asylgareev (Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia)

Одна из первых теорем сравнения для СДУ была доказана Скороходом [2] для одномерных уравнений с интегралом Ито. Результаты Скорохода в дальнейшем были распространены в работе Гейба и Мантея [3] на СДУ Ито относительно многомерного винеровского процесса, но в работе [3], как и в оригинальном исследовании Скорохода, авторы требовали, чтобы коэффициенты диффузии исследуемых уравнений при соответствующих составляющих многомерного винеровского процесса совпадали. В настоящей работе рассматривается случай, когда как коэффициенты диффузии, так и коэффициенты сноса СДУ могут быть различными.

Предлагаемый подход основан на том, что решения данных уравнений представимы в виде [4]:

$$\xi_k^{(n)}(t) = \widehat{D}_k^{(n)}\left(t, W_t^{(n)} + D_k^{(n-1)}(t, \overline{W}_t^{(n-1)})\right),$$

где функции $\widehat{D}_k^{(n)}(t,u)$ — детерминированные, а функции $\xi_k^{(n-1)}(t) = D_k^{(n-1)}(t, \overline{W}_t^{(n-1)})$ являются решениями СДУ относительно $(n-1)$-мерного винеровского процесса.

Теорема 1. *Пусть при всех $t \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$ справедливы соотношения:*

(a) $\widehat{D}_2^{(j)}(t,u) \geqslant \widehat{D}_1^{(j)}(t,u)$ для всех $u \in R$,

(b) $\sigma_{2j}^{(j)}(t,v) > 0$ при всех $v \in R$,

(c) $D_2^{(0)}(t) \geqslant D_1^{(0)}(t)$ с вероятностью 1.

Тогда $\xi_2^{(n)} \geqslant \xi_1^{(n)}$ для всех $t \geqslant 0$ п.н.

Второй целью текущего исследования является вывод достаточных условий потраекторной устойчивости. Рассмотрим следующее СДУ относительно многомерного винеровского процесса:

$$d\xi^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{(n)}\left(t, \xi^{(n)}(t)\right) * dW_t^{(j)} + b^{(n)}\left(t, \xi^{(n)}(t)\right) dt,\ \xi^{(n)}(0) = x_0, \quad (2)$$

где $\sigma_j^{(n)}(t,0) = b^{(n)}(t,0) \equiv 0$ при всех $t \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Определение 1. Возмущенное решение $\xi^{(n)}(t)$ уравнения (2) с начальным условием $\xi^{(n)}(0) = x_0$ *потраекторно устойчиво* относительно тривиального решения, если при п.в. ω для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, \omega) > 0$ такое, что для всякого x_0, для которого $|x_0| < \delta$, решение $\xi^{(n)}(t)$ удовлетворяет неравенству $|\xi^{(n)}(t)| < \varepsilon$ при всех $t > 0$.

Теорема 2. *Решение уравнения*

$$d\zeta_t^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} t \cdot \zeta_t^{(n)} * dW_t^{(j)} - a(t)\zeta_t^{(n)} dt,\ t \geqslant 0,\ \zeta_t^{(n)}\big|_{t=0} = \zeta_0^{(n)},$$

является потраекторно устойчивым при $a(t) = nt^{\frac{1}{2}+\alpha}$, где $\alpha > 0$.

Покажем, как достаточные условия потраекторной устойчивости СДУ могут быть получены через сравнение исследуемого процесса с потраекторно устойчивым процессом.

Следствие 1. *Пусть для всех $t \geqslant 0$ с вероятностью 1 выполнено неравенство $|\xi^{(n)}(t)| \leqslant K\zeta^{(n)}(t)$, где $K = const > 0$. Тогда возмущённое решение $\xi^{(n)}(t)$ СДУ (2) потраекторно устойчиво.*

Литература

1. *Асылгареев А. С.* О применении теорем сравнения к исследованию устойчивости с вероятностью 1 стохастических дифференциальных уравнений // Уфимск. матем. журн., **10**:3 (2018), 3-10.

2. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. — К.: Изд-во Киевского Университета, 1961.

3. *Geib C., Manthey R.* Comparison theorems for stochastic differential equations in finite and infinite dimensions // Stochastic Processes and their Applications, **53**:1 (1994), 23–35.

4. *Насыров Ф. С.* Об интегрировании систем стохастических дифференциальных уравнений // Математические труды, **19**:2 (2016), 158-168.

DEVELOPMENT OF SOFTWARE IN THE PROBLEMS OF MATHEMATICAL MODELING OF CHEMICAL REACTIONS

A.I. Akhmetyanova

ai-albina@mail.ru

УДК 517.518

Almost any industrial process is closely associated with chemical reactions, which in turn are associated with a change in the arrangement of atoms in the molecules of the starting materials compared with the location of the same atoms in the molecules of the reaction products. Thermodynamic analysis of the reacting system often helps to find out the necessary conditions for obtaining a particular product.

Keywords: thermodynamic analysis, chemical reactions, enthalpy formation, free energy

The Republic of Bashkortostan is one of the leading petrochemical regions of our country. The largest oil refining, petrochemical and chemical enterprises are concentrated here, including most of the main processes for obtaining the most important large-tonnage products of petroleum origin.

Industrial processes are based on specific chemical reactions, technological techniques and methods. The conditions of the reaction [5], the volume of existing industries, technological schemes and the main areas of use of the resulting products are important.

The task of the chemical industry is the most complete and appropriate use of feedstock by conversion into certain chemical compounds, which can be both intermediate and end products of the process. Since chemical reactions are associated with a change in the arrangement of atoms in the molecules of the starting materials compared with the location of the same atoms in the molecules of the reaction products, the chemist-technologist is faced with the task of carrying out a chemical transformation under conditions (pressure, temperature, etc.) that contributed to the predominant course of the reaction under consideration with

---

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-07-00584 A.)

Ахметьянова Альбина Ильшатовна, магистрант 2-го года обучения, БашГУ (Уфа, Россия); Albina Akhmetyanova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

the formation of the desired products [1, 2]. Thermodynamic analysis of the reacting system often helps to find out the necessary conditions for obtaining a particular product, allows you to establish which reactions are impossible, and draws attention to feasible reactions. The feasibility of such an analysis is determined by the presence of sufficiently reliable basic thermodynamic properties of substances, however, even in the absence of all the necessary data it is often possible to make some reasonable assumptions about the reaction products. With the accumulation of relevant data, the use of thermodynamic analysis in modern research is becoming more widespread.

All technological processes carried out at chemical enterprises of Bashkortostan are accompanied by the release or absorption of energy, therefore, the thermal characteristics of any process are necessary to create a scientifically based technological schedule.

Thermodynamic calculations allow you to solve, without resorting to experience, many of the most important tasks encountered in production, design and research work. Organic chemists working in industry begin to search energetically for the most favorable synthesis paths, since such processes will also produce the maximum economic effect [3, 4]. In chemical technology, the exact values of the enthalpy of formation are important for solving the question of the possibility of spontaneous occurrence of a particular reaction under given conditions and determining the numerical values of the equilibrium constants. The knowledge of the enthalpies of formation is important for solving a number of theoretical problems related to the determination of the binding energy, resonance energy, and the nature of the chemical bond [1,2,3].

The results of fundamental research of this work are in demand in the implementation of technological calculations of the rational conduct of industrial chemical processes, which is directly related to resource conservation, solving urgent environmental problems, and reducing production costs.

Литература

1. *Ziganshina F.T., Akhmetyanova A.I., Ismagilova A.S., Khursan S.L., Akhmerov A.A.* Graph-theoretic method for determining homodesmic reactions for cyclic chemical compounds // Control Systems and Information Technologies. — 2018. — №4(74). — pp. 72-77.

2. *Khursan S.L., Ismagilova A.S., Spivak S.I.* A graph theory method for determining the basis of homodesmic reactions for acyclic chemical compounds // Doklady Physical Chemistry. — 2017. — T. 474. — № 2. — pp. 99-102.

3. *Khursan S. L., Ismagilova A. S., Akhmerov A. A. , Spivak S. I.* Constructing homodesmic reactions for calculating the enthalpies of formation of organic compounds // Russian Journal of Physical Chemistry A . — 2016. — Volume 90 — Issue 4 —pp. 796-802.

4. *Khursan S.L., Ismagilova A.S., Akhmetyanova A.I.* Determining the Basis of Homodesmotic Reactions of Cyclic Organic Compounds by Means of Graph Theory // Russian Journal of Physical Chemistry A. — July 2018. — Volume 92. — Issue 7. — pp 1312-1320.

5. *Khursan S.L.* Comparative analysis of theoretical methods for determining the thermochemical characteristics of organic compounds // Bulletin of the Bashkir University. — 2014. — T.19. — №2. — pp. 395–401.

РАЗНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ОДНИМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕМ

А.М. Ахтямов
AkhtyamovAM@mail.ru

УДК 517.518

Показано, что существуют целые классы разных задач, имеющих одинаковый характеристический определитель. Причем, соответствующие задачи могут иметь различные порядки дифференциальных уравнений. Они могут быть заданы как на отрезках, так и на геометрических графах.

Ключевые слова: спектральная задача, спектр, характеристический определитель

Different spectral problems with the same characteristic determinant

It is shown that there are entire classes of different problems that have the same characteristic determinant. Moreover, the corresponding problems can have different orders of differential equations. They can be specified both on segments and on geometric graphs.

Keywords: spectral problem, spectrum, characteristic determinant

В работе [1] Н.Ю. Капустин приводит две разные краевые задачи с одинаковым характерестическим уравнением. Эти задачи таковы:

$$\begin{array}{l} x\,y''(x)+y'(x)+\lambda\,x\,y(x)=0, \quad 0<a<x<b, \\ y(a)=0, \quad y'(b)-\lambda\,d\,y(b)=0, \end{array}$$

и

$$\begin{array}{l} x\,y''(x)+y'(x)+\left(\lambda\,x-\frac{1}{x}\right)\,y(x)=0, \quad 0<a<x<b, \\ a\,y'(a)+y(a)=0, \quad d\,b\,y'(b)+(d+b)\,y(b)=0. \end{array}$$

Между тем, придумать задачи с одинаковым характеристическим уравнением не представляет особого труда.

Теорема 1. *Задачи, спектр которых заполняет всю плоскость, имеют общий характерисический определитель.*

smallskip

Теорема 2. *Задачи Коши, для которых выполнено условие*

$$y_i^{(k-1)}(0,s)=\begin{cases} 1, & \text{при } i=k \\ 0, & \text{при } i\neq k \end{cases}$$

имеют общий характеристический определитель.

Так, характеристический определитель $\Delta(\lambda)\equiv 0$ имеют как спектральные задачи с дифференциальным уравнением четного порядка и краевыми условиями

$$U_j(y)=y^{(j-1)}(0)+(-1)^{j-1}\,y^{(j-1)}(1)=0, \quad j=1,2,\ldots,n,$$

Работа выполнена с использованием средств государственного бюджета по госзаданию на 2019-2022 годы (№ 0246-2019-0088).

Ахтямов Азамат Мухтарович, д.ф.-м.н., профессор, ИМех УФИЦ РАН, БашГУ (Уфа, Россия); Azamat Akhtyamov (Mavlyutov Institute of Mechanics, Bashkir State University, Ufa, Russia)

так и спектральные задачи с дифференциальным уравнением нечетного порядка и краевыми условиями [2]

$$y(0)+a_0\, y(1) = 0, \quad y'(0)+a_1\, y'(1) = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0)+a_{n-1}\, y^{(n-1)}(1) = 0,$$

где

$$a_0 = e^{\pi\, i+2\pi\, \frac{(k+1)i}{n}}, \quad a_1 = e^{\pi\, i+2\pi\, \frac{(k+2)i}{n}}, \dots, \quad a_{n-1} = e^{\pi\, i+2\pi\, \frac{(n-1)i}{n}}.$$

Такой же характеристический определитель имеет задача Штурма-Лиувилля, заданная на звездообразном графе с тремя ребрами и краевым условиями [3]

$$\begin{aligned} &y_1(l) + y_3(l) + C_1\, y_2'(l) = 0,\\ &y_2(l) - C_2\, y_2'(l) = 0,\\ &y_1'(l) - C_3\, y_2'(l) + y_3'(l) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично, задачи Коши, как для дифференциальных уравнений четного, так и для нечетного порядков, для которых выполнено условие

$$y_i^{(k-1)}(0,s) = \begin{cases} 1, \text{ при } i = k \\ 0, \text{ при } i \neq k \end{cases}$$

имеют общий характеристический определитель $\Delta(\lambda) \equiv 1$.

Литература

1. *Капустин Н.Ю.* О двух спектральных задачах с одним характеристическим уравнением // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 7. С. 962–964.

2. *Ахтямов А.М.* О спектре дифференциального оператора нечетного порядка // Матем. заметки, 2017, Т. 101, № 5. С. 643-646.

3. *Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М.* Вырожденные краевые условия для задачи Штурма-Лиувилля на геометрическом графе // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 514–52.

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕУПРУГИХ ЗАКРЕПЛЕННИЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ

А.М. Ахтямов, Дж.А. Пардаев

akhtyamovam@mail.ru, pardayev.jasurhon@mail.ru

УДК 517.984

Рассматривается кольцевая пластина. Показано, что один из 16 неупругих видов закреплений пластины на двух краях (внешнем и внутреннем) определяется на этих краях однозначно по одной собственной частоте. Случай кольцевой пластины отличается от случая трубопровода, где для определения одного из 16 неупругих видов закреплений трубопровода с точностью до перестановок закреплений на его концах помимо одной собственной частоты нужна еще и информация о том, является ли нулевое значение собственным.

Ключевые слова: кольцевая пластина, неупригие виды закреплений пластины

Азамат Мухтарович Ахтямов, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Azamat Mukhtarovich Akhtyamov, (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Пардаев Джасур Абдужалилович, ст. пр. ДжГПИ им. А. Кадири (Джизак, Узбекистан); Pardayev Jasur Abdujalilovich (Dzhizak State Pedagogical Institutt, Dzhizak, Uzbekistan)

About identification of inelastic fastening of an annular plate

An annular plate is considered. It is shown that one of the 16 inelastic types of plate anchoring at two edges (external and internal) is uniquely determined at these edges by one eigenfrequency. The ring plate is different from the case of the pipeline, where to determine one of the 16 types of non-elastic anchoring of the pipeline with the accuracy up to permutations of the pins at its ends beyond one of the natural frequencies and need more information about whether a zero value of its own.

Keywords: ring plate, non-rigid types of plate fixings

Первые систематические исследования по идентификации краевых условий начались в 90-х годах 20 века в работах З.Б. Оганисяна (см., например, [1], [2], [3]). З.Б. Оганесяном исследовались несколько задач идентификации условий закрепления распределенных механических систем: задача идентификации краевых условий круговой пластины [1], задача идентификации краевых условий прямоугольной пластины [2] задача идентификации краевых условий на обоих концах стержня [3]. В них восстанавливались канонические краевые условия. В [4], [5] изучалась идентификация краевых условий, в которых неизвестны все их коэффиценты. Подобные задачи впервые начали изучаться в этих работах и сводятся к идентификации (с точностью до линейных преобразованиий строк) матрицы из коэффициентов краевых условий по ее минорам. Настоящая работа посвящена идентификации неупругих видов закреплений внешнего и внутреннего крайов кольцевой пластины. Ранее было показано [5], что общие краевые условия на внутреннем и внешнем крайах кольцевой пластины могут быть однозначно определены по 15 собственным частотам. В настоящей работе показано, что для однозначного определения неупругих видов закреплений на внутреннем и внешнем крайах кольцевой пластины достаточно одной собственной частоты. Кольцевые пластины являются деталями многих механизмов и конструкций. Поиску собственных частот кольцевых пластин было посвящено много работ (см., например, [6], [7], [8], [9]).

Если пластины недоступны для непосредственного осмотра или же доступ к ним является дорогостоящим, требующим разборки всей конструкции, то единственным источником установления их надежного закрепления является звучание колебаний пластины. Возникает задача определения закрепления пластины по ее звучанию или же с помощью специальных приборов, определяющих первые собственные частоты.

Задача об осесимметрических колебаниях тонкой кольцевой пластины сводится [6] к следующей спектральной задаче:

$$\frac{d^4y}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3y}{dr^3} - \frac{1}{r^3}\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{dy}{dr} - \lambda^4 y,$$

$$U_i(y) = \textstyle\sum_{j=1}^{4} a_{ij}L_j y = 0, \quad i = 1,2$$
$$U_i(y) = \textstyle\sum_{j=1}^{4} b_{ij}L_4 + jy = 0, \quad i = 3,4$$

Здесь $y(r)$ — функция прогиба пластины; L_j — линейные формы, характеризующие закрепление пластины на внутреннем и внешнем краях:

$$
\begin{aligned}
&L_1 y = y(a),\\
&L_2 y = \left[\frac{dy(r)}{dr}\right]_{r=a},\\
&L_3 y = \left[\frac{d^2y(r)}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dy(r)}{dr}\right]_{r=a},\\
&L_4 y = \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2y(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dy(r)}{dr}\right)\right]_{r=a},\\
&L_5 y = y(b),\\
&L_6 y = \left[\frac{dy(r)}{dr}\right]_{r=b},\\
&L_7 y = \left[\frac{d^2y(r)}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dy(r)}{dr}\right]_{r=b},\\
&L_8 y = \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2y(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dy(r)}{dr}\right)\right]_{r=b};
\end{aligned}
$$

$\lambda = \left(\frac{\rho h \omega^2}{D}\right)^{\frac{1}{4}}$; ω — частотый параметр; D — цилиндрическая жесткость пластины; ν — отношение Пуассона; h — толщина; ρ — плотность. Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{ij} форм $U_1(y)$ и $U_2(y)$, через A, а матрицу, составленную из коэффициентов b_j форм $U_3(y)$ и $U_4(y)$, через B

$$
A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{matrix} \right\|.
$$

Миноры второго порядка матриц A и B будем для краткости обозначать через A_{ij} и B_{ij}:

$$
A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix} \text{ и } B_{ij} = \begin{vmatrix} b_{1i} & b_{1j} \\ b_{2i} & b_{2j} \end{vmatrix}, \quad i,\, j = 1, 2, 3, 4.
$$

Для внешнего края кольцевой пластины виды закрепления такие же как и для круговой пластины. А матрицы $\|a_{ij}\|$ и $\|b_{ij}\|$ имеют следующий вид:

1. заделка $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$;

2. свободное опирание $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$;

3. свободный край $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$;

4. плавающая заделка $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

Общим решением задачи (1) является (см. [9]) функция

$$
y(r) = y(r, \lambda) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4
$$

где через $y_i (i = 1, 2, 3, 4)$ обозначены цилиндрические функции:

$$y_1 = J_0(\lambda r), \quad y_2 = I_0(\lambda r), \quad y_3 = Y_0(\lambda r), \quad y_4 = K_0(\lambda r).$$

Для определения констант C_1, C_2, C_3, C_4 используют краевые условия $U_i(y) = 0\,, i = 1, 2, 3, 4$. Собственными значениями задачи являются корни характеристических определителей:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_i y_1 & L_i y_2 & L_i y_3 & L_i y_4 \\ L_j y_1 & L_j y_2 & L_j y_3 & L_j y_4 \\ L_k y_1 & L_k y_2 & L_k y_3 & L_k y_4 \\ L_l y_1 & L_l y_2 & L_l y_3 & L_l y_4 \end{vmatrix}$$

где $i = 1, 4, j = 2, 3, k = 5, 8 j = 6, 7$.

Литература

1. *Гнуни В.Ц.* Оганисян З.Б. Определение граничных условий круглой кольцевой пластинки по заданным частотам собственных колебаний, Известия НАН РА, серия «Механика». Т. 44. № 5, 9-16 (1991).

2. *Оганисян З.Б.* Об одной задаче восстановления граничных условий на краях пластинки при заданном спектре частот собственных поперечных колебаний // Ученые записки ЕГУ. 1991, № 1. С.45-50

3. *Оганисян З.Б.* Об одной задаче восстановления граничных условий на концах стержня при заданном спектре частот собственных поперечных колебаний, «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем» (научные труды конференции), Ереван. 159-162 (1997).

4. *Akhtyamov A.M., Mouftakhov A.V.* Identification of boundary conditions using natural frequencies // Inverse Probl. Sci. and Eng-ng. 2004. V. 12. $<$ 4. P. 393-408.

5. *Ахтямов А. М.* Диагностирование закрепления кольцевой пластины по собственным частотам ее колебаний // Известия РАН. МТТ. 2003. № 6. С. 137-147.

6. *Стрэтт Дж. В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1940.

7. *Сахаров И. Е.* Частоты собственных колебаний кольцевых пластинок // Известия АН СССР, ОТН. 1957. № 5. С. 107-110.

8. *Гонткевич В. С.* Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев: Наукова думка, 1964. 288 с.

9. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

ГОЛОМОРФНЫЕ МИНОРАНТЫ ПЛЮРИСУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Т. Ю. Байгускаров, Б. Н. Хабибуллин
t.bayguskarov@gmail.com, khabib-bulat@mail.ru

УДК 517.55, 517.576, 517.987.1

Holomorphic minorants of plurisubharmonic functions

Let φ be a plurisubharmonic function on a pseudoconvex domain $D \subset \mathbb{C}^n$. We show that there exists a nonzero holomorphic function f on D such that some local mean value of φ with logarithmic additional terms majorizes $\log|f|$. A similar problem is discussed for a locally integrable function on D in terms of balayage of positive measures.

Keywords: holomorphic function, plurisubharmonicity, minorant, balayage, Jensen inequality, mean value in the ball

Пусть D — область в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $n \geq 1$. Через $\operatorname{psh}(D)$ и $\operatorname{sbh}(D)$, а также $\operatorname{Hol}(D)$ обозначаем классы соответственно плюрисубгармонических и субгармонических, включая функцию $-\infty$, тождественно равную $-\infty$ на D, а также голоморфных в D функций соответственно; $B(z,r) := \bigl\{z' \in \mathbb{C}^n : |z'-z| < r\bigr\}$ — открытый шар с центром $z \in \mathbb{C}^n$ радиуса $r > 0$. Через $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ обозначаем функции евклидова расстояния между парами точек, между точкой и множеством, а также между множествами в $\mathbb{C}^n$.

Наиболее глубокий результат о существовании ненулевой функции $f \in \operatorname{Hol}(D)$, в некотором смысле минорирующей $\varphi \in \operatorname{psh}(D)$, — доказанная методом Л. Хёрмандера в модификации Э. Бомбьери [1; Existence Theorem]

Теорема HB ([2; Theorem 4.2.7]) *Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — псевдовыпуклая область, $\varphi \in \operatorname{psh}(D)$,*

$$I^2_\varphi(z_0,r) := \int_{B(z_0,r)\cap D} e^{-2\varphi}\, d\lambda, \quad \text{где } \lambda \text{ — мера Лебега на } \mathbb{C}^n. \tag{1}$$

Тогда для каждого числа $a > 0$ найдётся функция $f_a \in \operatorname{Hol}(D)$ с $f_a(z_0) = 1$ и

$$I^2_\varphi(z_0;f_a) := \int_D \frac{\bigl|f_a(z)\bigr|^2 e^{-2\varphi(z)}}{\bigl(1+|z-z_0|^2\bigr)^{n+a}}\, d\lambda(z) \leq$$

$$\leq \left(2 + \frac{(1+r^2)^2(n+1)^2}{ar^{2n+2}}\right) \cdot I^2_\varphi(z_0,r). \tag{2}$$

Поскольку при $-\infty \neq \varphi \in \operatorname{psh}(D)$ для любой точки $z_0 \notin \{z \in \mathbb{C} \colon \varphi(z) = -\infty\}$ найдётся число $r > 0$, для которого в (1) $I^2_\varphi(z_0,r) < +\infty$ [3; Следствие 5.11], справедливо

Байгускаров Тимур Юлаевич, БашГУ (Уфа, Россия); Timur Baiguskarov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Хабибуллин Булат Нурмиевич, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Bulat Khabibullin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Следствие НВ. *В условиях Теоремы НВ для каждого $a>0$ найдутся $z_0\in D$ и ненулевая $f_a\in \mathrm{Hol}(D)$ с $I^2_\varphi(z_0;f_a)\overset{(2)}{<}+\infty$. В частности, для достаточно малого числа $b>0$*

$$\log\bigl|bf_a(z)\bigr|\leq \sup_{z'\in B(z,r)}\varphi(z')+n\log\frac{1}{r}+(n+a)\log\bigl(1+|z|+r\bigr) \tag{3}$$

для всех $z\in D$

Вывод (3) из конечности $I^2_\varphi(z_0;f_a)$ элементарен, поскольку использует лишь субгармоничность функции $|f_a|^2$ $\bigl($см., например, [4; Лемма 9.1]$\bigr)$, но находит весьма широкие применения в теории функций комлексных переменных и её приложениях. В случае $n=1$ и/или специальных областей $D\subset\mathbb{C}$ известны и более тонкие выводы, развивающие (3) и отчасти учитывающие как субгармоничность функций $\log|f_a|$ и φ, так и $f_a\in\mathrm{Hol}(D)$:

[1991 г.] *при $D=\mathbb{C}$ для $r=1$ в правой части* (3) *можно оставить лишь* $\sup_{z'\in B(z,1)}\varphi(z')$ [5; доказательство Основной Теоремы, 2а)–2б)], [4; Предложение 9.2];

[1992 г.] *для непрерывной ограниченной сверху функции $r\colon D\to(0,+\infty)$ в области $D\subset\mathbb{C}$, когда $r(z)<dist(z,\mathbb{C}\setminus D)$, $\sup\bigl\{r(z)/r(z')\colon z,z'\in D, |z-z'|\leq r(z)+r(z')\bigr\}<+\infty$ и $-\log r\in sbh(D)$, правую часть в* (3) *можно усилить усреднением φ, заменив её на*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\bigl(z+r(z)e^{i\theta}\bigr)\,d\theta+\log\frac{1}{r(z)}+4\log\bigl(1+|z|\bigr) \qquad \bigl(\text{см. [6; Лемма]}\bigr).$$

[2015 г.] *при $D=\mathbb{C}$ для любого числа $r\in(0,1]$ при достаточно малом $b>0$ правую часть в* (3) *можно заменить на усреднение* $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(z+re^{i\theta})\,d\theta$ [7; Теорема 2].

Теорема 1. *Для псевдовыпуклой области $D\subset\mathbb{C}^n$ при $-\infty\neq\varphi\in psh(D)$ для любого числа $a>0$ найдётся ненулевая функция $f\in Hol(D)$, удовлетворяющая оценке*

$$\log\bigl|f(z)\bigr|\leq\frac{n!}{\pi^n r^{2n}}\int_{B(z,r)}\varphi\,d\lambda+n\log\frac{1}{r}+(n+a)\log\bigl(1+|z|+r\bigr) \text{ для всех } z\in D$$

и всех $0<r<dist(z,\mathbb{C}^n\setminus D)$, где $\frac{n!}{\pi^n r^{2n}}=\frac{1}{\lambda\bigl(B(0,r)\bigr)}$, т. е. первое слагаемое в правой части — усреднение φ в шаре $B(z,r)$ по мере Лебега λ.

Литература

1. *Bombieri E.* Algebraic values of meromorphic maps. // Invent. Math., **10**, 248–263 (1970).

2. *Hörmander L.* Notions of Convexity. Birkhäser, Boston, 1994.

3. *Лелон П., Груман Л.* Целые функции многих комплексных переменных. — Москва: Мир, 1989.

4. *Хабибуллин Б. Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II // Изв. РАН. сер. матем., **65** (2001), № 5, 167–190.

5. *Хабибуллин Б. Н.* Множества единственности в пространствах целых функций одной переменной // Изв. РАН. сер. матем., **55** (1991), № 5. 1101–1123.

6. *Епифанов О. В.*О разрешимости неоднородного уравнения Коши–Римана в классах функций, ограниченных с весом и системой весов // Матем. заметки, **51** (1992), № 1. 83–92.

7. *Байгускаров Т. Ю., Талипова Г. Р., Хабибуллин Б. Н.* Подпоследовательности нулей для классов целых функций экспоненциального типа, выделяемых ограничениями на их рост // Алгебра и анализ, **28**:2 (2016), 1–33.

К ТЕОРИЮ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

С. Байзаев
sattorbayzoev@rambler.ru

УДК 517.95

Доклад посвящен вопросам нахождения решений переопределенных систем уравнений с частными производными в конкретных функциональных пространствах, нахождению и изучению условий полной разрешимости таких систем.

Ключевые слова: переопределенные системы уравнений с частными производными, условия полной разрешимости, многообразия решений.

To the theory of overdetermined systems of partial differential equations

The report focuses on finding solutions to roverdetermined systems of partial differential equations in specific function spaces, finding and studying conditions full solvability of such systems.

Keywords: overdetermined systems of partial differential equations, conditions of full solvability, manifold solutions.

Переопределенные системы уравнений с частными производными встречаются во многих прикладных задачах (см., например, [1,2]). Как правило, для нахождения решения таких систем предполагаются выполненными условия полной разрешимости (у.п.р.). Эти условия обычно пишутся в виде тождеств, справедливых для всех значений независимых переменных и искомых функций системы из некоторого множества.

При исследовании переопределенных систем уравнений с частными производными в конкретных функциональных пространствах у.п.р. образуют системы уравнений в частных производных или матричных уравнений, которых можно дополнительно изучать.

В докладе будут приведены некоторые результаты относительно выше названных вопросов (см., например [3 – 5])

Исследование переопределенной системы вида

$$\begin{cases} u_x + a(x,y)u = f(x,y), \\ u_y + b(x,y)u = g(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

Байзаев Саттор, профессор, ТГУПБП (Худжанд, Таджикистан); Bayzaev Sattor (Tajik State University of law, business and politics, Khujand, Tajikistan) с коэффициентами и правыми частями из $C(R^2)-$ пространства непрерывных и ограниченных на всей плоскости R^2 функций показало, что критерие однозначной разрешимости в $C(R^2)$ пишутся через так называемые обобщенные средние значения коэффициентов. Оказалось, что из у.п.р. одна из правых частей системы однозначно определяется через другую правую часть и коэффициенты этой системы.

Аналогичные результаты получены и для ситуации, когда система (1) рассматривается в классе $P_N(\Pi_+)$ функций $u(x,y)$, непрерывных в правой полуплоскости Π_+ и удовлетворяющих условию

$$|u(x,y)| \leq K(1 + x^N + |y|^N), \quad (x,y) \in \Pi_+,$$

где $K-$ положительная постоянная, зависящая от $u(x,y), N-$ целое неотрицательное число.

Для переопределенных систем комплексных уравнений в частных производных с постоянными матричными коэффициентами у.п.р. обычно пишутся в виде матричных равенств. Например, для системы вида

$$w_{\overline{z}} = A\overline{w}, \quad w_z = B\overline{w}, \tag{2}$$

где $w \in C^n, A, B-$ постоянные комплексные матрицы, равенство $A\overline{A} = B\overline{B}$ является необходимым и достаточным у.п.р. При выполнении этого условия общее решение системы (2) зависит от одного произвольного вектора из C^n и даётся в виде степенного ряда по z и $\overline{z}$.

В случае системы

$$w_{\overline{z}} = Aw, \quad w_z = B\overline{w}, \tag{3}$$

перестановочность матрицы A с матрицами $\overline{A}, B$ и $\overline{B}$ являются необходимыми у.п.р. и при $detB \neq 0$ все вектор-функции $w(z) = \overline{B}^{-1}e^{A\overline{z}+\overline{A}z}c$, где $c-$ вектор, удовлетворяющий условию $A\overline{c} = Bc$, будут решениями этой системы.

Для системы с двумя независимыми переменными

$$w_{\overline{z}_1} = A\overline{w}, \quad w_{\overline{z}_2} = B\overline{w}, \tag{4}$$

равенства $A\overline{A}B = B\overline{A}A, A\overline{B}B = B\overline{B}A$ являются необходимыми у.п.р. и при $detB \neq 0$, если существуют такие числа μ_j, что $\overline{B}\overline{c}_j = \mu_j c_j$, где c_j-собственные векторы матрицы $\overline{A\overline{B}}^{-1}$, соответствующие собственным значениям λ_j, то все вектор-функции вида

$$w(z_1, z_2) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j(\lambda_j z_1 + z_2)\overline{B}^{-1} c_j, \alpha_j \in R$$

будут решениями этой системы, здесь функции $\varphi_j(z)$ являются решениями следующих уравнений $u_{\overline{z}} = \mu_j \overline{u}$ соответственно; если же вектора c_j и $\overline{B}\overline{c}_j$ линейно независимы, то система (4) имеет только нулевое решение. Система (4) также изучена в пространстве Шварца.

Литература

1. *Аккерман В.Б., Зайцев М.Л.* Снижение размерности в уравнениях гидродинамики // ЖВМ и МФ, 2011. Т.51. №8.

2. *Гайшун И.В.* Линейные уравнения в полных производных // - Минск: Наука и техника, 1989. 273 с.

3. *Байзаев С., Рахимова М.А.* О необходимых и достаточных условиях существования ограниченных решений переопределенных систем уравнений с частными производными // Учёные записки ХГУ, серия естественные и экономические науки. — Худжанд: Нури маърифат, 2017. №3(42). 3 - 12.

4. *Байзаев С., Рахимова М.А.* О некоторых функциональных уравнениях в пространствах Шварца и их приложениях // Уфимский математический журнал. 2018. Том 10. №1. 3 - 13.

5. *Байзаев С., Рахимова М.А.* Об общем решении одной многомерной переопределенной комплексной системы уравнений с частными производными // Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами и краевые задачи теории функций: материалы международной научной конференции, посвященной 90-летию академика Л.Г. Михайлова. Душанбе. 2018. 32 - 33.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В СТРАХОВАНИИ ЖИЗНИ

Э. Ф. Басимова

elvina.basimova.98@mail.ru

УДК 518

В работе представлены теоретические аспекты применения математических моделей в страховании жизни и здоровья.

Ключевые слова: страхование жизни, тарифные ставки, актуарные расчеты.

MATHEMATICAL MODELS IN LIFE INSURANCE

The paper presents the theoretical aspects of the application of mathematical models in life and health insurance.

Keywords: life insurance, tariff rates, actuarial calculations

Страхование жизни – это проверенный способ решения множества непростых задач, которые могут встать перед любым человеком. Это и освобождение семьи от материальных проблем в случае ухода из жизни одного из ее членов, и накопление необходимой суммы в требуемый срок без риска того, что с деньгами или кормильцем семьи может что-то случиться .

Расчеты тарифных ставок по страхованию жизни производятся с помощью специальных математических методов с использованием данных о средней продолжительности жизни лиц различного возраста и доходности по инвестициям временно свободных средств страховых резервов. В отличие от рисковых видов при страховании жизни случайной величиной является не величина убытка, а продолжительность жизни конкретного застрахованного человека, которая может быть количественно оценена по таблицам продолжительности жизни, или, как их обычно называют в страховании,

(№ 19-01-00000).

Басимова Эльвина Фагимовна, студент 4 курса, БашГУ (Уфа, Россия); Elvina Basimova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

таблицам смертности. Величина тарифной ставки по договору страхования жизни определяется с учетом средней продолжительности жизни застрахованного, срока договора, периодичности уплаты страхового взноса и инвестиционной доходности (нормы доходности). Как правило, величина премии по страхованию жизни лишь немногим меньше страховой суммы [1].

Тарифная ставка по страхованию жизни определяет, каким должен быть взнос каждого из страхователей в общий страховой фонд с единицы страховой суммы. Особенности страхования жизни накладывают отпечаток на построение тарифов, которые проявляются в следующем: 1) расчеты производятся с использованием демографической статистики и теории вероятностей; 2) при расчетах применяются способы долгосрочных финансовых вычислений; 3) тарифная ставка состоит из нескольких частей, каждая из которых призвана сформировать страховой фонд по одному из видов страховой ответственности, включенных в условия договора страхования [2].

Обязательной частью любого вида страховой деятельности являются актуарные расчеты - расчёты тарифных ставок страхования на основе методов математической статистики. Широкое применение в актуарной практике получил подход, основанный на теории марковских процессов. Здесь для описания состояния застрахованного лица используется модель поведения системы со многими состояниями.

Чтобы рассмотреть простейшую ситуацию, можно выделить два состояния застрахованного лица: «жив» и «умер», а для описания состояния человека обычно используется модель, которая включает три состояния: «здоров», «болен», «умер» . Вероятность выздоровления по основным классам болезней мала, поэтому переход из состояния Болен — >Здоров можно игнорировать.

Для построения математических моделей и расчета вероятности состояний используются дифференциальные уравнения Колмогорова, в которых будут находиться застрахованное лицо в определенный момент времени. А статистика численности, заболеваемости и смертности по основным классам причин смерти могут помочь вычислить интенсивность перехода из состояния в состояние [3].

Литература

1. *Д. В. Денисов* «Актуарная математика» Москва 2000 - с. 71-75.

2. *А. П. Архипов* Страховой андеррайтинг.: учебник и практикум. – М.: Юрайт, 2015 - с. 138.

3. *Р. Абдюшева, Р.Р. Арсланова* Математические модели в страховании жизни и здоровья. Часть I – с. 107-109.

О ПРИМЕНЕНИИ ФОРМУЛЫ КЕЛДЫША - СЕДОВА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА

Р.А. Башмаков, О.Г. Коробчинская, А.А. Махота
bashmakov_rustem@mail.ru, allarum@mail.ru, korobchinskaya@mail.ru

УДК 51-72

В работе рассматривается задача о применении классической формулы Келдыша – Седова для нахождения длины трещины в зависимости от давления, создаваемого на скважине, возникающей в нефтяном или газовом пласте при применении технологии гидроразрыва.

Ключевые слова: гидроразрыв пласта, формула Келдыша-Седова, методы комплексного анализа.

About Keldysh-Sedov formula applications for finding the crack lengh of self-indused hydraulic fractute

We consider the problem of applying the classical Keldysh-Sedov formula to find the length of a fracture depending on the pressure generated at the well that occurs when hydraulic fracturing technology used in oil or gas reservoir.

Keywords: hydraulic fracturing, Keldysh-Sedov formula, methods of complex analysis.

Рассмотрим вертикальную трещину, которая образуется при гидроразрыве пласта. Через скважину в пласт под большим давлением закачивается жидкость. В результате этого в пласте образуется вертикальная трещина. При увеличении давления длина трещины увеличивается, при уменьшении давления происходит ее смыкание [1]. Будем считать, что распределение давления и напряжений в пласте не зависит от глубины, то есть все рассматриваемые величины зависят лишь от двух пространственных координат (x, y). Поместим скважину в начало координат, трещину направим вдоль вещественной оси. Пусть трещина представляет из себя отрезок $[-l, l]$ на оси абсцисс. При закачивании жидкости в скважину давление в трещине равно $P(x)$, где x принимает значения от $-l$ до l. Считаем, что на скважине давление равно P_c, а на концах трещины давление равно P_0. Перейдем к комплексному потенциалу $\Phi(z)$ $(z = x + iy)$.

$$\mathrm{Re}\ \Phi(x) = \frac{1}{2}p(x),\ x \in [-l, l]\,,\ \mathrm{Im}\,\Phi(x) = 0,\ x \in (-\infty, -l) \cup (l, \infty).$$

При данной постановке возможно свести задачу о нахождении распределения напряжения в пласте к формуле Келдыша-Седова [2]. Дополнительно предположим, что в конце трещины (участок $[l, l+d]$) породы находятся в пластическом состоянии и нормальное напряжение τ постоянно и равно пределу текучести σ_τ. Пусть

$$l_* = l + d$$

Башмаков Рустэм Абдрауфович, кандидат физико-математических наук, доцент БашГУ.

Коробчинская Ольга Геннадьевна, кандидат физико- математических наук, доцент БашГУ.

Махота Алла Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент БашГУ.

и распределение давления по трещине при значениях x от –l до l задается формулой (см. [3])

$$p(x) = p_c - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{x}{l_*} (p_c - p_0)$$

Тогда для коэффициента интенсивности напряжений от усилий, которые действуют на контур

$$K_1 = 2\sqrt{\frac{l_*}{\pi}} \left[\int\limits_0^l p(t) \frac{dt}{\sqrt{l^2{}_* - t^2}} + \int\limits_l^{l_*} \sigma_\tau \frac{dt}{\sqrt{l^2{}_* - t^2}} \right]$$

. получим:

$$K_1 = 2\sqrt{\frac{l_*}{\pi}} \left[\int\limits_0^l (p_c - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{t}{l_*} (p_c - p_0)) \frac{dt}{\sqrt{l_*^2 - t^2}} + \int\limits_l^{l_*} \sigma_\tau \frac{dt}{\sqrt{l_*^2 - .t^2}} \right].$$

Отсюда получаем формулу для опрделения длины трещины

$$l = \frac{d \sin \left(\frac{\pi((p_c - \sigma_\tau) + \sqrt{(p_c - \sigma_\tau)^2 + 2(p_c - p_0)(\sigma_\tau - \beta\gamma H)})}{2(p_c - p_0)} \right)}{1 - \sin \left(\frac{\pi((p_c - \sigma_\tau) + \sqrt{(p_c - \sigma_\tau)^2 + 2(p_c - p_0)(\sigma_\tau - \beta\gamma H)})}{2(p_c - p_0)} \right)}.$$

где β– коэффициент бокового распора, γ – удельный вес горных пород, H - глубина.

Литература

1. *Perkins T.K., Kern LR.* Widths of hydraulic fracturing // J. Petrol. Technol. – 1961.– N 9.– P. 937–949.

2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. – М.: Физматгиз, 1962 – 599 с.

3. *Шагапов В. Ш., Нагаева З. М.* К теории фильтрационных волн давления в трещине, находящейся в пористой проницаемой среде. // Прикладная механика и техническая физика. – 2017 – Т. 58, № 5 (345). – С. 121 – 130

4. *Хапилова Н.С, Залётов В.В, Шепеля А.П.* Экспресс методы оценки длины трещины гидроразрыва. – Труды ИПММ НАН Украины, Т. 17, 2008 – С. 197-205.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО РОДА: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

А.Х. Бегматов
akrambegmatov@mail.ru

УДК 517.946

В докладе рассматриваются новые классы задач интегральной геометрии. Приводятся полученные теоремы единственности и устойчивости, выводятся формулы обращения и доказываются теоремы существования для слабо некорректных задач.

Ключевые слова: Задача интегральной геометрии, слабая и сильная некорректность, единственность и устойчивость

The report discusses new classes of problems of integral geometry. The obtained uniqueness and stability theorems are given, inversion formulas are derived, and existence theorems for weakly ill-posed problems are proved.

Keywords: ill-posed problems, integral geometry problems, existence theorem

Задача интегральной геометрии – это задача определения функции через известные от нее интегралы по заданным кривым или поверхностям. Примером такого типа задач является известная задача Радона - отыскания функции через интегралы по всевозможным прямым.

Интегральная геометрия - эта актуальная и бурно развивающаяся область современной математики тесно связана с теорией дифференциальных уравнений и математической физикой, геометрическим анализом и имеет многочисленные приложения при математическом исследовании проблем сейсморазведки, интерпретации данных геофизических и аэрокосмических наблюдений, при решении обратных задач астрофизики и гидроакустики. Разработанные здесь методы являются основой для решения проблем из области медицинской и промышленной томографии.

Намы получены теоремы единственности, получены формулы обращения и доказаны теоремы существования для новых классов задач восстановления функции по известным интегралом от нее. Эти результаты изложены в работах [2-10].

Разработан метод, позволяющий определить, является ли поставленная задач слабо или сильно некорректной [1].

Литература

1. *Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.* Теория операторов и некорректные задачи. - Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 1999. - 702 с.

2. *Бегматов Акрам Хасанович* “Задачи интегральной геометрии и специальные операторные уравнения типа Вольтерра”, ДАН СССР, 234:4 (1992), 727–729

3. *Бегматов Акрам Х.* Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа // Доклады РАН. Т. 349, № 3. Москва. 1996 г.

4. *Бегматов Акр.Х.* Задачи интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершинах // Доклады РАН. 1998. Т. 358. № 2. С. 151-153.

Бегматов Акрам Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Akram Begmatov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

5. *Бегматов Акрам Х.* Задачи интегральной геометрии в трехмерном пространстве по конусам и образующим // Доклады РАН. Т. 358, № 6. Москва. 1998 г.

6. *Бегматов Акрам Х.* О двух новых классах задач интегральной геометрии // Доклады РАН. Т. 360, № 5. Москва. 1998 г.

7. *Бегматов Акрам Х.* О некоторых задачах интегральной геометрии в полосе и задаче обращения лучевого преобразования с неполными данными // Доклады РАН, 1999. Т. 368, № 3.

8. *Бегматов Акрам Х.* Теоремы существования решения двух слабо некорректных задач интегральной геометрии // Доклады РАН. Т. 386, № 6, 2002.

9. *Бегматов Акрам Х., Очилов З.Х.* Задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией // Доклады РАН. Москва, 2009. Т. 429. № 3. С. 295-297.

10. *Бегматов Акрам Х., Очилов З.Х.* Отображения Даламбера для одного класса симметричных областей // Доклады РАН, 2009, том 427.

СЛАБО НЕКОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

А.Х. Бегматов, А.С. Исмоилов

akrambegmatov@mail.ru, alisher_8778@mail.ru

УДК 517.946

В настоящей работе рассмотрена задача восстановления функции по семейству парабол в верхней полуплоскости с весовой функцией, имеющей особенность. Доказана теорема единственности решения уравнение и выведена формула обращения. Показано что решение поставленной задачи слабо некорректно, то есть получены оценки устойчивости в пространствах конечной гладкости.

Ключевые слова: Слабо некорректные задачи, преобразование Фурье, теоремы единственности, весовая функция

In this work we consider the problem of reconstructing a function from a family of parabolas in the upper half-plane with a weight function having a singularity. The uniqueness of theorem for the solution of equation is proved and the inversion formula is derived. It is shown that the solution of the problem posed is weakly ill-posed, that is, stability estimates are obtained in spaces of finite smoothness.

Keywords: ill-posed problems, integral geometry problems, integral transforms, inversion formula, uniqueness, existence theorem, weak instability, perturbation

В работе исследуются вопросы существования и единственности, получения оценок устойчивости и аналитических форму обращения для новых

Бегматов Акрам Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Akram Begmatov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Исмоилов Алишер Сидикович, аспирант, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Alisher Ismoilov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

классов задач интегральной геометрии в полосе. Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи интегральной геометрии на семействе парабол, имеющих особенность, в классе гладких финитных функций с носителем в полосе. Нами выведены формылы обращения, которые дают возможность судить о характере неустойчивости поставленной задачи. Затем рассматриваются задачи интегральной геометрии с возмущением. Удалось доказать теорему единственности и получить оценки устойчивости ее решения в классе гладких финитных функций с носителем в полосе.

Мы используем определение задачи интегральной геометрии, данное в работе [1]. Единственность широкого класса задач интегральной геометрии в полосе была установлена В.Г. Романовым [2]. Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровс-кого типа с весовыми функциями, имеющими особенность исследовались в работах [3].

Теоремы единственности, оценки устойчивости и формулы обращения слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривым и поверх-ностям с особенностями вершинах получены в [4,5].

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ известна для всех $(x,y) \in \bar{\Omega}$. Тогда решение задачи 1 в классе U единственно и имеет место представление*

$$u(x,y) = \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_2(x-\xi, y-\eta) \left(E + \frac{\partial^4}{\partial \eta^4} \right) \left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \right) f_1(\xi,\eta) d\xi d\eta$$

и выполняется неравенство

$$||u(x,y)||_{L_2(\Omega)} \le C_0 ||f_1||_{W_2^{4,4}(\Omega)},$$

где C_0 - некоторая постоянная.

Литература

1. *Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.* Теория операторов и некорректные задачи. - Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 1999. - 702 с.

2. *М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский.* Некорретные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.

3. *Бегматов Акр.Х.* Два класса слабо некорректных задач интегральной геомет-рии на плоскости // Сиб. мат. журнал. 1995. Т. 36. № 2. С. 243-247.

4. *Бегматов Акр.Х.* Задачи интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершинах // Доклады РАН. 1998. Т. 358. № 2. С. 151-153.

5. *Akram H. Begmatov, M.E. Muminov, Z.H. Ochilov* The Problem of Integral Geometry of Volterra Type with a Weight Function of a Special Type.// Horizon Research Publishing (HRPUB) Corporation, USA, Mathematics and statistics. Vol 3, No 5. 2015. P. 113-120.

ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ВОЛЬТЕРОВСКОГО ТИПА С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.Х. Бегматов, З.Х. Очилов

akrambegmatov@mail.ru, zarifjonochilov@mail.ru

УДК 517.946

В работе рассматривается новый класс задач интегральной геометрии вольтерровского типа с весовой функцией специального вида. Доказана теорема единственности, получены оценки устойчивости в пространствах Соболева, тем самым показана слабая некорректность и доказана теорема о существовании решения задачи интегральной геометрии.

Ключевые слова: Задача интегральной геометрии, слабая и сильная некорректность, единственность и устойчивость

We study new problem of reconstruction of a function in a strip from their given integrals with known weight function along polygonal lines. We obtained two simply inversion formulas for the solution to the problem. We prove uniqueness and existence theorems for solutions and obtain stability estimates of a solution to the problem in Sobolev's spaces and thus show their weak ill-posedness.

Keywords: ill-posed problems, integral geometry problems, integral transforms, inversion formula, uniqueness, existence theorem, weak instability, perturbation

Основная задача компьютерной томографии является задачей интегральной геометрии[1].

В.Г. Романов в [2] исследовал вопросы единственности и устойчивости решения задач интегральной геометрии в случае, когда многообразия, по которым ведется интегрирование, имеют вид параболоидов, весовые функции и многообразия инва-рианты относительно группы всех движений вдоль фиксированной гиперплоскости.

Слабо некорректные задача интегральной геометрии вольтеровского типа с весовыми функциями, имеющими особенность исследовались в работах [3-6].

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ известна для всех (x,y) из полосы $\bar{\Omega}$. Тогда решение задачи 1 в классе U единственно и имеет место представление если $m = 4k, k = 0,1,2,...$*

$$u(x,y) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty I_2(x-\xi, y-\eta)\left[\frac{\partial^{n+2}}{\partial\eta^{n+2}} + \frac{\partial^{n+m+4}}{\partial\xi^{m+2}\partial\eta^{n+2}}\right] f(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

если $m = 4k+2, k = 0,1,2,...$

$$u(x,y) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty I_2(x-\xi, y-\eta)\left[\frac{\partial^{n+2}}{\partial\eta^{n+2}} - \frac{\partial^{n+m+4}}{\partial\xi^{m+2}\partial\eta^{n+2}}\right] f(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

Бегматов Акрам Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Akram Begmatov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Очилов Зарифжон Хусанович, к.ф.-м.н., доцент, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Zarifjon Ochilov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

кроме того выполняется неравенство

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C_0 \|f\|_{W_2^{m+2,n+2}(\Omega)}$$

где C_0−некоторая постоянная.

Литература

1. *Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.* Теория операторов и некорректные задачи. - Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 1999. - 702 с.

2. *М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский.* Некоретные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.

3. *Akram H. Begmatov.* On a class of Weakly ill-posed problems of integral geometry in three-dimensional space. //J. Inverse and Ill-Posed problems. 1995. Vol. 3. No 3. P. 231-235.

4. *Акб.Х. Бегматов.* О единственности решения задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости. // ДАН. 2009. Т.427. No 2. С. 439-441.

5. *Акр.Х. Бегматов, З.Х. Очилов.* Задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией. // Доклады РАН. 2009. No 3. С.

6. *Akram H. Begmatov, M.E. Muminov, Z.H. Ochilov.* The Problem of Integral Geometry of Volterra Type with a Weight Function of a Special Type. Horizon Research Publishing (HRPUB) Corporation, USA, Mathematics and statistics. Vol 3, No 5. 2015. p. 113-120.

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЛОКАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЙ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

А.С. Белова

89177662488@mail.ru

УДК 517.925.51, 517.925.52, 517.938

В работе рассматриваются задачи об основных сценариях локальных бифуркаций периодических гамильтоновых систем, зависящих от малого параметра. Изучение этих задач базируется на новых формулах теории возмущений линейных гамильтоновых операторов.

Ключевые слова: бифуркация, динамические системы, гамильтоновы системы, устойчивость

On sufficient conditions for local bifurcations in Hamiltonian dynamical systems

In the work we consider basic scenarios of local bifurcations of periodic Hamiltonian systems, depending on a small parameter. The study of these problems is based on new formulas of the perturbation theory of linear Hamiltonian operators.

Keywords: bifurcation, dynamical systems, Hamiltonian systems, equilibrium point, stability.

Белова Анна Сергеевна, аспирант, БашГУ (Уфа, Россия); Anna Belova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Рассматривается гамильтонова система

$$\frac{dx}{dt} = [JA_0 + JS(t,\varepsilon)]\,x + a(x\,,t\,,\varepsilon)\,, \quad x \in R^{2N}\,, \tag{1}$$

зависящая от скалярного или векторного параметра ε . Здесь J – кососимметрическая блочная матрица размерности $2N \times 2N$, A_0 и $S(t,\varepsilon)$ – симметрические блочные матрицы размерности $2N \times 2N$, при этом $S(t,\varepsilon)$ – T-периодическая по t и удовлетворяет условию: $S(t,0) \equiv 0$; $a(x\,,t\,,\varepsilon) = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \to 0$. Система (1) имеет точку равновесия $x = 0$ при всех значениях параметра ε.

Пусть матрица JA_0 имеет собственное значение 0 кратности 2 или пару простых комплексно-сопряженных собственных значений $\pm\omega_0 i$, тогда значение $\varepsilon = 0$ является точкой бифуркации в окрестности $x = 0$ системы (1).

В докладе предлагаются новые формулы вычисления мультипликаторов линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = [JA_0 + JS(t,\varepsilon)]\,x\,, \quad x \in R^{2N}\,. \tag{2}$$

Эти формулы получаются с использованием методов теории возмущения [1] и развитием некоторых результатов, полученные в [2]. В качестве основного приложения рассматривается задача об основных сценариев локальных бифуркаций системы (1).

Литература

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1975. 740 с.

2. *Юмагулов М. Г., Ибрагимова Л. С., Белова А. С.* Методы исследования устойчивости линейных периодических систем, зависящих от малого параметра, Дифференциальные уравнения, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 163, ВИНИТИ РАН, М., 2019, 113–126.

МЕТОД ДЕРЕВЬЕВ ОТКАЗОВ ДЛЯ АНАЛИЗА И ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ РИСКОВ

А.А. Боброва

nastya-324@mail.ru

УДК 518

В работе представлены результаты исследований, посвященных оценке производственных рисков с помощью дерева отказов.

Ключевые слова: риск, производственные риски, методы оценки риска, дерево отказов.

FAILURE TREE METHOD FOR ANALYSIS AND EVALUATION OF THE IMPACT OF PRODUCTION RISKS

The paper presents results of studies on the estimation of production risk using fault tree.

Keywords: risk, production risks, methods of risk estimation, fault tree.

Боброва Анастасия Александровна, магистрант 2 г.о., БашГУ (Уфа, Россия); Anastasia Bobrova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Производственный риск — это риск, характерный для производственной деятельности и связанный с убытками от остановки производства по различным причинам, а также в некорректном использовании техники и технологии, основных и оборотных фондов, производственных ресурсов и рабочего времени. Этот вид риска наиболее чувствителен к изменению намеченных объемов производства и реализации продукции, плановых материальных и трудовых затрат, к изменению цен, браку, дефектности изделий и др. [3].

Более сильные загрязнения исходят от нефтеперерабатывающей промышленности, поэтому для исследования производственных рисков было рассмотрено именно нефтеперерабатывающие предприятие.

На данном предприятии имеется бак для хранения воспламеняющейся жидкости. Установка состоит из автоцистерны, бака, оборудованного предохранительным клапаном давления, системой управления давлением, датчиками максимума и минимума и насосом. Бак спроектирован так, чтобы удерживать воспламеняющуюся жидкость под слабым давлением азота. Система управления контролирует давление. Кроме этого, бак защищен с помощью клапана, который перекрывается в аварийных ситуациях. Жидкость питает бак через автоцистерну. Насос перекачивает воспламеняющуюся жидкость для дальнейшей переработки.

Несмотря на то, что бак оборудован предохранительным клапаном давления, для обеспечения безопасности процесса, может произойти событие, при котором случится взрыв. В простейшем случае к такой ситуации может привести увеличение давления в баке, во время которого предохранительный клапан не сработает.

Для оценки риска берётся метод построения деревьев отказов. Событие взрыва - вершина дерева, а пять событий, которые могут привести к взрыву, это ветви дерева. Все ветви не взаимосвязаны между собой, любое из этих событий может привести установку к взрыву [1].

Полное дерево строится из блоков 2-х видов: событий и логических блоков “И”, “ИЛИ”.

Основное воздействие на почвы, а также поверхностные и подземные воды при эксплуатации объекта возможно при аварийных разливах, поэтому стояла задача, посчитать экологическое влияние нежелательного события в случае, если оно произойдет. Все показатели рассчитывались по максимуму. Задача: Был рассмотрен бак на 80% заполненный бензолом объёмом 760м3, диаметр бака 10,4 м. При этом следует учитывать время испарения с поверхности розлива, ограниченной обвалованием бака, будет происходить только в течение первых 4 часов. И время окончанию аварии 6 часов. Первым шагом оценивали масштабы экологического ущерба. Это площадь разлива, количество паров исправившихся в атмосферу и количество паров исправившихся в атмосферу в результате пожара [2].

Нахождение и выбор оптимального пути не избавляют предприятие от предотвращения иных рисков. Замена изношенных или неисправных деталей, наблюдение за корректной работой всех запущенных программ, поддержание чистоты и всех установок являются неотъемлемыми частями для отлаженной и правильной работы всей системы. По проделанным расчетам можно сказать, что примерно одинаковые снижения риска различных исходных событий могут давать не одинаковое снижение риска главного события. При анализе дерева отказов необходимо учитывать все факторы, так или иначе влияющие на вероятность наступления главного события.

Литература

1. *Абдюшева С.Р., Боброва А.А.* ДЕРЕВО ОТКАЗОВ КАК МЕТОД ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ РИСКОВ // Математическое моделирование процессов и систем. Материалы VII Международной молодежной научно-практической конференции. Уфа, 2017 г. Часть I – с. 35-40.

2. ГОСТ 27.301-95. Надежность в технике. Расчет надежности. Основные положения. – М.: Издательство стандартов – 15 с.

3. *Мамаева, Л.Н.* Управление рисками: Учебное пособие / Л.Н. Мамаева. - М.: Дашков И К, 2013. - 256 с.

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛНЯЕМОГО КОДА, ГЕНЕРИРУЕМОГО НЕКОТОРЫМИ КОМПИЛЯТОРАМИ

А.М. Болотнов, С.Р. Гарифуллина, Э.А. Нурисламова

BolotnovAM@mail.ru, Sveta_K81@mail.ru, Elnara-Nur@rambler.ru

УДК 519.7

Проведено сравнение эффективности кода, сгенерированного некоторыми компиляторами. Алгоритмы тестов реализованы на языках C++, Fortran, Go, D, Pascal, Oberon-2 и Zonnon.

Ключевые слова: компиляторы, исполняемый код

About the effectiveness of executable code generated by some compilers

A comparison of the effectiveness of the code generated by some compilers has been made. The test algorithms are implemented in the languages of the C++, Fortran, Go, D, Pascal, Oberon-2, and Zonnon.

Keywords: compilers, executable code

Эффективность исполняемого кода является одной из важнейших характеристик языков программирования (ЯП) и компиляторов. Встречаются работы с результами сравнения ЯП на примере единственной задачи [1]. Для объективной картины необходим анализ эффективности компиляторов на примерах нескольких задач со своими алгоритмическими особенностями, и на компьютерах различных платформ.

Получены усредненные по пяти расчетам оценки времени выполнения шести алгоритмов, реализованных на семи ЯП с использованием девяти компиляторов. Расчеты проводились на двух персональных компьютерах (ПК): 1) Note Book 64 AMD Phenom II Quad-Core 2.0 ГГц; 2) IBM 64 Intel(R) Core(TM) i5 CPU 3.2 ГГц. Для C++ использован компилятор MinGW GCC; для Фортрана – GNU Fortran; для D – Digital Mars Compiler; Паскаль протестирован в трех реализациях: Free Pascal, GNU Pascal и PascalABC.NET;

Болотнов Анатолий Миронович, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Anatoly Bolotnov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Гарифуллина Светлана Ринатовна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Svetlana Garifullina (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Нурисламова Эльнара Айдаровна, магистрант, БашГУ (Уфа, Россия); El'nara Nurislamova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

для GO использован компилятор go-1.13; для Oberon-2 – BlackBox Component Builder; для ЯП Zonnon – Zonnon Builder.

По каждому тесту на двух ПК расчет проводился пять раз; среднее время из пяти расчетов фиксировалось как абсолютное время ($t_{i,j,k}$) выполнения задачи. Здесь $i = 1, 2, \dots, 6$ – номер теста; $j = 1, 2$ – номер ПК; $k = 1, 2, \dots, 9$ – номер компилятора. Относительное время ($\tau_{i,j,k}$) вычислялось как отношение абсолютного времени выполнения к минимальному:

$$\tau_{i,j,k} = \frac{t_{i,j,k}}{t_{i,j,min}}; i = 1, 2, ..., 6; j = 1, 2.$$

Среднее относительное время выполнения на двух ПК i-го теста j-м компилятором вычислялось по формуле:

$$\tau_{i,S,j} = \frac{\tau_{i,1,j} + \tau_{i,2,j}}{2}.$$

Тест 1. Решается краевая задача для уравнения Лапласа с нелинейными граничными условиями методом последовательных приближений [2]. Особенностью алгоритма является: а) отсутствие массивов; б) наличие функций пользователя с многократными вызовами. Лучший результат во всех тестовых примерах показывает C++. В данном случае на втором месте оказался Фортран (с коэффициентом k=1.44); на третьем – Zonnon (k=2.22); на последнем – GNU Pascal (k=6.90).

Тест 2. Алгоритм упорядочивания одномерного массива с 200000 элементами типа double. Здесь Zonnon переместился с третьего места на последнее (k=13.8); GNU Pascal – с девятого на пятое (k=1.45); GO (k=1.31) уступил только C++ и Фортрану. Видно, что эффективность кода для различных компиляторов во многом зависит от специфики решаемой задачи.

Тест 3. Перемножение матриц размером 1000*1000 по схеме «строка-на-столбец». GO на втором месте (k=1.86), уступив только C++; PascalABC (k=7.10) – на восьмом. Известно, что Фортран размещает в ОЗУ элементы двумерных массивов по столбцам, а все остальные рассматриваемые компиляторы – по строкам. Эта особенность учтена в следующем тесте.

Тест 4. Задача та же. В программе на Фортране первая матрица транспонируется, затем происходит перемножение по схеме «столбец-на-столбец»; для остальных компиляторов транспонируется 2-я матрица, после чего происходит перемножение «строка-на-строку». Абсолютное время расчета во всех случаях уменьшилось в 2-3 раза по сравнению с тестом-3. GO (k=2.94) – лучший после C++ и Фортрана; D (k=7.05) на шестом месте; Zonnon (k=64.7) – на последнем.

Тест 5. Решение СЛАУ (N = 1400) методом Гаусса с выбором ведущего элемента по столбцу. Эффективность GO здесь почти совпадает с эффективностью языка C++ (k=1.10).

Тест 6. Решается та же СЛАУ методом вращений. Абсолютное время выполнения программ увеличивается в 2-3 раза, при этом последовательность показателей эффективности сохраняется.

На основании соотношения

$$\tau_{0,S,k} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\tau_{i,S,k},$$

получены результаты, определяющие для каждого из 9-ти компиляторов среднее значение относительного суммарного времени выполнения 6-ти тестовых задач на 2-х ПК. Понимая под показателем эффективности обратную величину от $\tau_{0,S,k}$, приведем последовательность компиляторов в порядке убывания их эффективности: C++ – 1; GO – 0.39; Free Pascal – 0.38; GNU Pascal – 0.31; GNU Fortran – 0.24; D – 0.22; Oberon-2 – 0.21; PascalABC – 0.20; Zonnon – 0.044.

Литература

1. *Иванов С.О., Ильин Д.В., Большаков И.Ю.* Сравнительное тестирование языков программирования // Вестник Чувашского университета. 2017. № 3. С. 222–227.

2. *Болотнов А.М., Хисаметдинов Ф.З.* Применение компьютерного моделирования для интерпретации данных контрольных измерений в системах катодной защиты трубопроводов // Вестник Башкирского университета. 2015. Т. 20. № 3. С. 786–789.

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПУЧКА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Н.П. Бондаренко

bondarenkonp@info.sgu.ru

УДК 517.984

В работе исследуется пучок интегро-дифференциальных операторов типа Штурма-Лиувилля с краевыми условиями, одно из которых имеет полиномиальную зависимость от спектрального параметра. Решена обратная задача восстановления сверточного ядра и одного из многочленов в краевом условии по спектру. Доказана единственность решения и получены необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи.

Ключевые слова: обратные задачи, интегро-дифференциальные операторы, полиномиальная зависимость от спектрального параметра

An inverse spectral problem for the pencil of integro-diffferential operators of the second order

In this paper, a pencil of the Sturm-Liouville-type integro-differential operators is studied. One of the boundary conditions of the considered pencil has a polynomial dependence on the spectral parameter. An inverse problem of recovering the convolution kernel and one of the boundary condition polynomials from the spectrum is solved. Uniqueness of solution is proved, and necessary and sufficient conditions of solvability are obtained for the inverse problem.

Keywords: inverse problems, integro-differential operators, polynomial dependence on the spectral parameter

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01193).

Бондаренко Наталья Павловна, к.ф.-м.н., доцент, Саратовский государственный университет (Саратов, Россия), Самарский университет (Самара, Россия); Natalia Bondarenko (Saratov State University, Saratov, Russia; Samara National Research University, Samara, Russia)

Рассмотрим краевую задачу $L = L(M, A_1, A_2, A_3)$ для интегро-дифференциального уравнения второго порядка:

$$-y''(x) + \int_0^x M(x-t)y'(t)\,dt = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \tag{1}$$
$$y(0) = 0, \quad A_1(\lambda)y'(\pi) + A_2(\lambda)y(\pi) + A_3(\lambda)y'(0) = 0,$$

где λ — спектральный параметр, $M(x)$ — комплекснозначная функция, $(\pi - x)M(x) \in L_2(0, \pi)$,

$$A_j(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_{jk}\lambda^k, \quad j = \overline{1,3},$$

$a_{jk} \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,3}$, $k = \overline{0,n}$, $a_{1n} = 1$, $a_{3n} = 0$.

В работе доказана единственность, получен конструктивный алгоритм решения, а также необходимые и достаточные условия разрешимости следующей обратной задачи.

Обратная задача 1. *По спектру Λ краевой задачи L и многочленам $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$ построить $M(x)$ и многочлен $A_3(\lambda)$.*

Обратные спектральные задачи для уравнения (1) с краевыми условиями, не зависящими от спектрального параметра, изучены в [1, 2]. В работах [3-5] исследованы обратные задачи для некоторых классов интегро-дифференциальных пучков.

Основными результатами данной работы являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Спектр задачи L представляет собой счетное множество собственных значений $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \cup \{\tilde{\lambda}_j\}_{j=1}^{n}$, пронумерованных с учетом кратностей и имеющих асимптотику*

$$\lambda_k = \left(k - \tfrac{1}{2} + \varkappa_k\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \qquad \{\varkappa_k\} \in l_2. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \cup \{\tilde{\lambda}_j\}_{j=1}^{n}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих (2), $A_j(\lambda)$, $j = 1, 2$, — многочлены степени n с произвольными комплексными коэффициентами $\{a_{jk}\}_{j=1,2,\,k=\overline{0,n-1}} \cup \{a_{2n}\}$ и $a_{1n} = 1$. Тогда существует единственная комплекснозначная функция $M(x)$ и единственный многочлен $A_3(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{3k}\lambda^k$, такие что $(\pi - x)M(x) \in L_2(0, \pi)$ и задача $L = L(M, A_1, A_2, A_3)$ имеет спектр Λ.*

Доказательство Теоремы 2 основано на конструктивном решении обратной задачи 1, приведенном в [5].

Литература

1. *Buterin S.A.* On an inverse spectral problem for a convolution integro-differential operator // Results in Mathematics, **50**:3–4 (2007), 73–181.

2. *Buterin S.A., Choque Rivero A.E.* On inverse problem for a convolution integrodifferential operator with Robin boundary conditions // Applied Mathematics Letters **48** (2015), 150–155.

3. *Bondarenko N.P.* An inverse problem for an integro-differential equation with a convolution kernel dependent on the spectral parameter // Results in Mathematics **74**:148 (2019), URL: https://doi.org/10.1007/s00025-019-1073-0.

4. *Bondarenko N.P.* An inverse problem for an integro-differential pencil with polynomial eigenparameter-dependence in the boundary condition // Analysis and Mathematical Physics (2019), URL: https://doi.org/10.1007/s13324-019-00332-8.

5. *Bondarenko N.P.* An inverse problem for the second-order integro-differential pencil, Tamkang Journal of Mathematics **50**:3 (2019), 223–231.

ОБ ЭКСТРЕМУМАХ ЗОННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Д.И. Борисов

borisovdi@yandex.ru

УДК 517.958

Работа посвящена построению примеров периодических дифференциальных операторов на плоскости со следующим свойством: края лакун достигаются зонными функции во внутренних точках зоны Бриллюэна.

Ключевые слова: периодический оператор, края лакун, зонные функции

On extrema of band functions for some two-dimensional periodic operators

The work is devoted to constructing examples of periodic differential operators on a plane possessing the following properties: the edges of the gaps are attained by the band functions in internal points of the Brillouin zone.

Keywords: periodic operator, edges of gaps, band functions

В настоящей работе предлагается пример двумерного периодического дифференциального оператора, в спектре которого имеются лакуны со следующим свойством: края лакун достигаются зонными функции во внутренних точках зоны Бриллюэна. Оператор строится как Лапласиан с двумя возмущениями. Первое из них – это добавление потенциала вида

$$\epsilon^{-\frac{3}{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} V\left(\frac{x_2 - na_2}{\epsilon}\right),$$

где $V = V(t)$ – некоторая гладкая финитная функция, a_2 – некоторое фиксированное число, период оператора по переменной x_2. Второе возмущение имеет вид $\epsilon^{\alpha} L$, где L – симметричный периодический дифференциальный оператор второго порядка определённого вида, период по переменной x_2 равен a_2, по переменной x_1 – некоторому числу a_1. Показано, что при достаточно малых ϵ спектр рассматриваемого оператора обладает лакунами с указанным свойством. Меняя при этом периоды a_1, a_2, удается создать в спектре оператора любое наперед заданное число таких лакун.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00046).

Борисов Денис Иванович, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Denis Borisov, (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Center, RAS, Ufa, Russia)

Работа выполнена в соавторстве с Павлом Экснером (Pavel Exner, Nuclear Physics Institute, Czech Academy of Sciences).

О РАЗРЕШИМОСТИ ФОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е.И. Бравый
bravyi@perm.ru

УДК 517.929.7

Получены неулучшаемые условия однозначной разрешимости фокальных краевых задач для линейных функционально-дифференциальных уравнений высших порядков при интегральных ограничениях на положительный функциональный оператор.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, краевые задачи, однозначная разрешимость, фокальная краевая задача

On solvability of focal boundary value problems for functional differential equations

Sharp solvability conditions for focal boundary value problems for functional diffeential equations are obtained under integral restrictions on functional operators.

Keywords: functional differential equations, focal boundary value problem, unique solvability

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} (-1)^{(n-k)} x^{(n)}(t) + (Tx)(t) = f(t), \quad t \in [0,1], \\ x^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, \ldots, k-1, \\ x^{(j)}(1) = 0, \quad j = k, \ldots, n-1, \end{cases} \tag{1}$$

где $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $n \geq 2$, $T : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$ — линейный ограниченный оператор, $\mathbf{C}[0,1]$ и $\mathbf{L}[0,1]$ — пространства непрерывных и суммируемых вещественных функций соответственно (со стандартными нормами).

Вопрос о разрешимости различных фокальных краевых задач для линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и функционально-дифференциальных уравнений возникает при исследовании многих физических, химических, биологических процессов [1–5].

Задача

$$\begin{cases} (-1)^{(n-k)} x^{(n)}(t) = f(t), \quad t \in [0,1], \\ x^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, \ldots, k-1, \\ x^{(j)}(1) = 0, \quad j = k, \ldots, n-1, \end{cases}$$

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки РФ (проект № 1.5336.2017/8.9) при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00332).

Бравый Евгений Ильич, д.ф.-м.н., с.н.с., ПНИПУ (Пермь, Россия); Evgenij Bravyi (Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia)

имеет единственное решение $x(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)\,ds$, $t \in [0,1]$, где неотрицательная непрерывная функция Грина $G(t,s)$ определена равенством [1]

$$G(t,s) = \frac{1}{(n-k-1)!}\frac{1}{(k-1)!}\int_0^{\min(t,s)} (s-\tau)^{n-k-1}(t-\tau)^{k-1}\,d\tau, \quad t,s \in [0,1].$$

Следующее простое утверждение получено с помощью принципа сжимающих отображений.

Утверждение 1. *Если* $\|T\|_{\mathbf{C}\to\mathbf{L}} < (n-1)(n-k-1)!(k-1)!$, *то задача (1) однозначно разрешима.*

Работа посвящена ослаблению условий разрешимости для положительного (отображающего неотрицательные функции из $\mathbf{C}[0,1]$ в почти всюду неотрицательные функции из $\mathbf{L}[0,1]$) оператора T. Норма такого оператора определена равенством $\|T\|_{\mathbf{C}\to\mathbf{L}} = \int_0^1 (T\mathbf{1})(t)\,dt$, где $\mathbf{1}$ — единичная функция.

Теорема 1. *Пусть задано неотрицательное число* $\mathcal{T}$. *Задача (1) однозначно разрешима при всех линейных положительных операторах* $T : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$ *с нормой* $\mathcal{T}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{T} \le \min_{0<t<1,\ 0<s<1} \frac{G(t,1) + G(1,s) + 2\sqrt{G(t,s)G(1,1)}}{G(t,s)G(1,1) - G(t,1)G(1,s)}.$$

Теорема 2. *Пусть задано неотрицательное число* $\mathcal{T}$ *и* $n = 2k$. *Задача (1) однозначно разрешима при всех линейных положительных операторах* $T : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$ *с нормой* $\mathcal{T}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{T} \le \frac{2\left((n/2-1)!\right)^2}{\max\limits_{0<t<1}\left(\frac{t^{(n-1)/2}}{n-1} - \int_0^t (t-\tau)^{n/2-1}(1-\tau)^{n/2-1}\,d\tau\right)}.$$

Следствие 1. *Пусть* $n = 2k$ *и линейный оператор* $T : \mathbf{C}[0,1] \to \mathbf{L}[0,1]$ *положителен. Если*

$$\|T\|_{\mathbf{C}\to\mathbf{L}} \le e^2(n-3)^3\left((n/2-1)!\right)^2, \tag{2}$$

то задача (1) однозначно разрешима.

Замечание 1. В достаточном условии следствия 1 константа e^2 и показатели степени, вообще говоря, не могут быть увеличены. Неравенство (2) значительно улучшает условие разрешимости утверждения 1 (константа в условиях разрешимости увеличивается примерно в $(en)^2$ раз при больших n).

Литература

1. *Keener M.S., Travis C.C.* Positive cones and focal points for a class of n-th order differential equations // Trans. Amer. Math. Soc., **237** (1978), 331–351.

2. *Agarwal R. P.* Focal boundary value problems for differential and difference equations. — Kluwer, Academic Publishers: Dordrecht, 1998.

3. *Wong P.J.Y., Agarwal R.P.* Multiple positive solutions of two-point right focal boundary value problems // Mathematical and Computer Modelling, **28**:3 (1998), 41–49.

4. *Mukhigulashvili S., Puzha B.* The focal boundary value problem for strongly singular higher-order nonlinear functional-differential equations // Boundary Value Problems, **28** (2015).

5. *Alves M.J., Labovskiy S.* On monotone solutions and a self-adjoint spectral problem for a functional-differential equation of even order // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., **59** (2019), 1–14.

АЛГОРИТМЫ СТЕПЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.Д. Брюно, А.Б. Батхин
abruno@keldysh.ru, batkhin@me.com

УДК 517.55, 517.9, 512.77

Предлагается цикл из 5 лекций. 1. Геометрии по Клейну: Евклидова, Аффинная, Проективная, Алгебраическая и др. 2. Степенная геометрия и её основные задачи: вычисления (а) многогранника Ньютона, (б) степенные преобразования. 3. Степенные преобразования с унимодулярной матрицей. Двумерный случай. Цепная дробь. 4. Многомерный случай. 5. Нахождение приближённых корней многочлена. Ломанная Адамара.

Ключевые слова: степенная геометрия, алгебраическое уравнение, особенность

Algorithms of power geometry for algebraic equations

We propose five talks. 1. Geometries by Klein: Euclidean, Affine, Projective, Algebraic and other. 2. Power geometry and its main tasks: computations (a) of Newton polyhedron, (b) of power transformations. 3. Power transformations with unimodular matrix. Two dimensional case. Continued fraction. 4. Multidimensional case. 5. Finding of approximate roots of a polynomial. Hadamard open polygon.

Keywords: power geometry, algebraic equation, singularity

Предлагается цикл из пяти лекций.

Лекция 1. Геометрии согласно эрлангенской программе Ф.Клейна: Евклидова, Аффинная, Проективная, Алгебраическая и др. Геометрия — это совокупность множества и группы преобразований, действующей на ней. Изучаются инварианты этой группы и способы упрощения уравнений. Каждая следующая геометрия включает в себя предыдущую, ибо имеет большую группу преобразований. Цель цикла — описать алгоритмы, позволяющие разрешать любые особенности алгебраических уравнений.

Лекция 2. Аффинная геометрия крупным планом. Вычисление выпуклых многогранников, как оболочек заданного дискретного множества точек, и нормальных конусов их обобщённых граней. Упрощённые матрицы линейных преобразований, переводящих d-мерную грань в d-мерное координатное

Брюно Александр Дмитриевич, д.ф.-м.н., профессор, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН (Москва, Россия); Alexander D. Bruno (KIAM, Moscow, Russia)

Батхин Александр Борисович, к.ф.-м.н., доцент, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия); Alexander Batkhin (KIAM, Moscow, Russia)

пространство. Вырожденные ситуации, когда заданное множество лежит в подпространстве.

Лекция 3. Целочисленная аффинная геометрия, когда заданное множество состоит из целочисленных точек и линейные преобразования имеют унимодулярные матрицы. Способ вычисления таких матриц в двумерном случае с помощью разложения в цепную дробь. Способы вычисления унимодулярных матриц в n-мерном случае.

Лекция 4. Поиск особенностей алгебраического уравнения. Алоритмы их разрешения, построение многогранника Ньютона и нормальных конусов его граней. Разбиение особенностей на несколько первых приближений и их решения. Вычисление дальнейших приближений параметрического разложения решений.

Лекция 5. Большой пример таких вычислений в трёхмерном пространстве.

Литература

1. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979.
2. *Брюно А.Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Наука, 1998.
3. *Брюно А.Д., Батхин А.Б.* Асимптотическое решение алгебраического уравнения // ДАН, **440**:3 (2011), 295–300.
4. *Батхин А.Б., Брюно А.Д., Варин В.П.* Множества устойчивости многопараметрических систем Гамильтона // ПММ, **76**:1 (2012), 80–133.
5. *Брюно А.Д., Батхин А.Б.* Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии // Программирование, **38**:2 (2012), 12–30.
6. *Брюно А.Д., Батхин А.Б.* Исследование одной вещественной алгебраической поверхности // Программирование, **41**:2 (2015), 7–17.
7. *Брюно А.Д.* Алгоритмы решения алгебраического уравнения // Программирование, **45**:1 (2019), 59–72.
8. *Брюно А.Д.* Нормальная форма системы Гамильтона с периодическим возмущением // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 57.

ИССЛЕДОВАНИЕ БИФУРКАЦИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОРТРЕТОВ ДИНАМИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.

Т.Э. Буриев, Я. Мухторов

tolibjonb@yahoo.com, ya-muxtarov@rambler.ru

Представляемая работа посвящена качественно-численному исследованию математических динамических моделей модели описывающие биологические (химические экономические и другие) процессы.Рассматривается проблемы построения параметрического портрета динамических систем зависящих от множества параметров.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения , система, бифуркация, фазовый портрет, параметрический портрет.

–Буриев Толибжон Эргашевич, к.-ф.-м.н., доцент, Самаркандский Госуниверситет, механико-математический факультет,кафедра «Алгебры и Геометрии

Мухторов Я.

The presented work prolongation of a series of reseaches dedicated qualitatively – numerical reseaches of dynamics of three populations interacting by a principle predator-prey.Investigations the problem of constraction parametric portrait system.

Keywords: mathematics, differential equations, bifurcations theory, parametric portrait.

Как правило динамические математические модели представляющие биологические процессы (а также каталитические химические реакции, процессы (болезни, эпидемии) экономические процессы и другие) описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений зависящие от множества параметров. Следовательно, основной задачей полного качественного исследования динамических моделей является разбиение пространства параметров на области т.е. построение параметрического (так называемого структурного портрета) портрета системы и построения фазового портрета системы для каждой из областей пространства параметров. Когда число параметров системы не больше двух построение структурного портрета системы в большинство случаев не представляют особой трудности. Если число параметров больше, то при построение структурного портрета возникают существенные аналитические трудности и геометрическое изображение невозможно. Для решения этих задач мы применяем методику построения структурного портрета динамических систем зависящих от множества параметров в виде двумерных срезов (проекций) пространства в параметрической плоскости. Во –первых, изучая рассматриваемый процесс необходимо установить иерархию всех параметров системы и вначале выбираем два существенных параметра, имеющие существенную роль в развитии процесса. Фиксируем остальные параметры (т.е придадим определенные значения) и построим двумерный структурный портрет системы при этих фиксированных значениях остальных параметров.Затем мы выбираем следующий параметр и исследуем бифуркации построенного двумерного структурного портрета при изменениях этого параметра. В результате мы получим различные двумерные портреты при всех различных значениях введенного параметра. Итак, мы построим трехмерный структурный портрет системы в виде двумерных срезов.Далее мы продолжим исследования по порядку вводя остальные параметры и в итоге получим полный структурный портрет системы в виде двумерных срезов. Этот метод построения структурного портрета нами применены в исследованиях динамических моделей популяционной динамики, моделей каталитических химических реакций .

Литература

1. *Bazikin A. D.* Mathematical Biophysics of Interacting Populations — Moscow, Science 1985, 185p.

2. *Базыкин А.Д., Березовская Ф.С., Буриев Т.Э.* Динамика системы хищник-жертва с учетом насыщения и конкуренции. – В кн.: Факторы разнообразия в математической экологии и популяционной генетике. Пущино (Московская обл.) 1980 г. С. 6-33.

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ОБРАТНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С НЕПОЛНЫМИ ДАННЫМИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Н.Ф. Валеев, Я.Ш. Ильясов
valeevnf@yandex.ru,ilyasov02@gmail.com

УДК 517.518

Доклад посвящен исследованию нового класса обратных спектральных задач для самосопряженных полуограниченных дифференциальных операторов (как в частных, так и обычных производных) , в которых задаются лишь неполные спектральные данные, например, первые m собственных значений $\lambda_1(q) < ... < \lambda_m(q)$. Такие задачи, как правило, имеют неединственное решение и некорректны, но неполноту спектральных данных можно дополнить вполне разумными и содержательными (с физической или геометрической точки зрения) условиями, которые в итоге приводят к новым постановкам задач. Эти задачи тесно связаны с теорией нелинейных дифференциальных операторов.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные операторы, обратные спектральные задачи и их приложения

Keywords: Inverse spectral problem; System of nonlinear differential equations

В докладе обсуждается новая постановка обратной спектральной задачи для самосопряженных дифференциальных операторов (как в обычных, так и в частных производных). Основные идеи нового подхода продемонстрируем на примере оператора Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим малые линейные колебания струны в упругой среде , с коэффициентом упругости $q(x)$. Собственные формы и соответствующие собственные колебания описываются оператором Штурма-Лиувилля $L(q)$, порожденным дифференциальным выражением вида

$$l_q y := -y'' + q_0(x)y, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

с краевыми условиями Дирихле $y(0) = y(1) = 0$, Спектр оператора $L(q)$ состоит из собственных значенний(собственные частоты колебаний струны): $\lambda_1(q) < \lambda_2(q) < ... < \lambda_m(q) < ...$ Применительно к введенному выше оператору Штурма - Лиувилля $L(q)$ мы сформулируем следующий вариант оптимизационной обратной спектральной задачи:

($\mathcal{P}^0$) *Пусть заданы* $\lambda_1^* < \lambda_2^* < ... < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$- *спектральные данные задачи, вещественная функция* $q_0 \in L^2(0,1)$. *Требуется найти вещественный потенциал* $\hat{q} \in L^2(0,1)$ *такой, что:*

$$\lambda_k(\hat{q}) = \lambda_k^*, \quad k = 1, 2, .., m; \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00000).

Валеев Нурмухамет Фуатович, к.ф.-м.н.,доцент, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Nurmukhamet Valeev (Institute of Mathematics of UFRC RAS, 45008, 112, Chernushevskogo, Ufa, Russia;)

Ильясов Явдат Шавкатович, д.ф.-м.н., проф. Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Yavdat Ilyasov (Institute of Mathematics of UFRC RAS, 45008, 112, Chernushevskogo, Ufa, Russia;)

и $||q_0-\hat{q}||_{L^2} =$

$$= \min\{||q_0-q||_{L^2}: \ \lambda_k^* = \lambda_k(q), \quad k=1,2,..,m; \ q\in L^2(0,1)\}. \qquad (3)$$

В общем случае, в нашей постановке обратной спектральной задачи в качестве спектральных данных с.с. оператора $L(q_1,q_2,..,q_n)$, (где $q_1,q_2,..,q_n$ коэффициенты соответствующего дифференциального выражения) берется лишь часть спектра - конечное число собственных значений: $\lambda_1^* < \lambda_2^* < ... < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$

По этим спектральным данным $\lambda_1^* < \lambda_2^* < ... < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$ требуется найти новые коэффициенты $\hat{q}_1,\hat{q}_2,..,\hat{q}_n$ наименее удаленные (в какой- либо метрике) от заданных $q_1,q_2,..,q_n$ так, чтобы

$$\lambda_k(L(\hat{q}_1,\hat{q}_2,..,\hat{q}_n)) = \lambda_k^*, \ k=1,..,m.$$

Далее такие задачи будем называть "оптимизационными обратными спектральными задачами с неполными данныму сокращенно -ООСЗ.

Нам удалось найти и обосновать подходы к решению оптимизационных обратных спектральных задач с неполными данными для эллиптических дифференциальных операторов. При этом мы обнаружили нетривиальную связь между оптимизационными обратными спектральными задачами и свойствами (разрешимость, гладкость решений, единственность и др.) нелинейных дифференциальных операторов.

Оказалось , что каждая оптимизационная обратная спектральная задача с неполными данными эквивалентна вполне определенному нелинейному дифференциальному оператору.

Теорема 1. *Пусть задана функция потенциала $q_0 \in L^2(0,1)$ и произвольный упорядоченный набор чисел $\lambda_1^* < \lambda_2^* < ... < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$- спектральные данные задачи. Тогда существует функция $\hat{q} \in L^2(0,1)$ такая, что:*

$$L(\hat{q})u_k = -u_k'' + \hat{q}(x)u_k = \lambda_k^* u_k, \ u_k(0)=u_k(1)=0, k=1,.,m;$$

$$||q_0-\hat{q}||_{L^2} = \min\{||q_0-q||_{L^2}: \ \lambda_k^* = \lambda_k(q), k=1,.,m; \ q\in L^2(0,1)\}.$$

решение ООСЗ $\hat{q}$ выражается формулой

$$\hat{q}(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k^2(x)$$

Литература

1. *Y. Sh. lIyasov,N. F. Valeev* On nonlinear boundary value problem corresponding to N -dimensional inverse spectral problem // J. Differ. Equations, 266:8 (2019), 4533-4543 .

2. *N. F. Valeev, Ya. Sh. Il'yasov* On an Inverse Optimization Spectral Problem and a Corresponding Nonlinear Boundary-Value Problem// Math. Notes, 104:4 (2018), 601–605

3. *Ya. Il'yasov, N. Valeev* On inverse spectral problem and generalized Sturm nodal theorem for nonlinear boundary value problems // Ufa Math. J., 10:4 (2018), 122–128

4. *Zhang M.* Extremal values of smallest eigenvalues of Hill's operators with potentials in L^1 balls.// J. Diff. Eq., 246(11) 4188-4220.

5. *Qi J., Chen S.* Extremal norms of the potentials recovered from inverse Dirichlet problems. Inverse Problems, 32(3),2016, 035007.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПОТЕНЦИАЛОВ В КРИСТАЛЛИЧЕСКОМ ПОЛУПРОВОДНИКЕ

К.В. Васючкова
vasiuchkovakv@susu.ru

УДК 517.9

Построена математическая модель оптимального регулирования распределением потенциалов в кристаллическом полупроводнике на основе одного уравнения соболевского типа. Показано существование слабого обобщенного решения исследуемой модели с начальным условием Шоуолтера – Сидорова и найдены достаточные условия существования решения задачи оптимального управления.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, задача оптимального управления; математическая модель распределения потенциалов в кристаллическом полупроводнике.

Investigation of a mathematical model of optimal control by the distribution of potentials in a crystalline semiconductor

A mathematical model of optimal control by the distribution of potentials in a crystalline semiconductor based on one Sobolev type equation is constructed. The existence of a weak generalized solution of the model under study with the initial Showalter – Sidorov condition is shown, and sufficient conditions for the existence of a solution to the optimal control problem are found.

Keywords: Sobolev type equation; optimal control problem; mathematical model of the distribution of potentials in a crystalline semiconductor.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим нелинейное уравнение соболевского типа, описывающее распространение потенциалов в кристаллическом полупроводнике

$$(\lambda - \Delta)x_t - a_1\Delta x - a_2\mathrm{div}(|\nabla x|^2\nabla x) = u \tag{1}$$

с начально-краевыми условиями

$$(\lambda - \Delta)(x(s,0) - x_0(s)) = 0, \quad s \in \Omega, \tag{2}$$

$$x(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Здесь функция $x = x(s,t)$ описывает потенциал электрического поля, заданная функция $f = f(s,t)$ характеризует внешнее воздействие, например, внешнее электрическое поле, параметры $\lambda \in \mathbb{R},\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$. Математическая модель физического процесса распределения потенциалов в полукристаллическом полупроводнике представлена в работе [1]. Причем, в случае $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ было показано, что при наличии источников тока свободных зарядов или отрицательности дифференциальной проводимости существует пробой полупроводников (вследствие того, что потенциальная энергия системы превосходит кинетическую). В работе [2] исследовано обобщенное уравнение вида

Васючкова Ксения Владимировна, аспирант, ЮУрГУ (Челябинск, Россия); Ksenia Vasiuchkova (South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)

$$(\lambda-\Delta)x_t - a_1\Delta x - a_2 \mathrm{div}(|\nabla x|^2\nabla x) + a_3|x|^{p-2}x = f, \quad p \geq 2,$$

где $\lambda \in \mathbb{R},\ a_1\ a_2 \in \mathbb{R}, a_3 \in \{0\} \cup \mathbb{R}_+$ и показано существование квазистационарных полутраекторий данного уравнения на основе метода фазового пространства. В данной работе будет исследовано уравнение (1), которое принадлежит классу полулинейных уравнений соболевского типа с p-коэрцитивным и s-монотонным оператором в случае, когда коэффициенты уравнения $\lambda \in \mathbb{R},\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$.

Положим $\mathfrak{N} = \overset{\circ}{W}{}_4^1(\Omega)$, $\mathfrak{B} = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$, определенные в области Ω. Через $\mathfrak{B}^*$ и $\mathfrak{N}^*$ обозначим сопряженные пространства к $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{N}$, относительно скалярного произведения $< \cdot, \cdot >$ в $\mathcal{H}$, соответственно.

Нас интересует задача оптимального управления

$$J(x,u) = \frac{1}{4}\int_0^T \parallel x(t) - x_f(t) \parallel_{\mathfrak{N}}^4 dt + \frac{3}{4}\int_0^T \parallel u(t) \parallel_{\mathfrak{N}^*}^{\frac{4}{3}} dt \to inf,\ u \in U_{ad} \quad (4)$$

решения задачи $(1)-(3)$, U_{ad} – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $U = \mathfrak{N}$. Физический смысл задачи оптимального управления заключается в том, чтобы под действием внешнего воздействия $u(s,t)$ с наименьшими затратами было достигнуто необходимое распределение потенциала $x_f(s,t)$ в кристаллическом полупроводнике.

Построим множество $\mathrm{coim} L = \{x \in \mathfrak{B} : \ < x, \varphi >= 0 \quad \forall \varphi \in \ker\ L \setminus \{0\}\}$ и рассмотрим пространство $\mathfrak{X} = \{x \mid x \in L_\infty(0,T;\mathrm{coim} L) \cap L_4(0,T;\mathfrak{N})\}$.

Определение 1. *Вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$ при $T \in \mathbb{R}_+$ назовем слабым обобщенным решением уравнения (1), если она удовлетворяет*

$$\int_0^T \varphi(t)\left[\int_\Omega (\lambda x_t\omega + \nabla x_t \cdot \nabla\omega + a_1\nabla x\cdot\nabla\omega + a_2(|\nabla x|^2\nabla x\cdot\nabla w))ds\right]dt =$$

$$= \int_0^T \left[\varphi(t)\int_\Omega u\omega ds\right]dt, \qquad \forall\omega \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad \forall\varphi \in L_2(0,T).$$

Определение 2. *Пару $(\hat{x},\hat{u}) \in \mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}$ будем называть решением задачи (1) – (4), если*

$$J(\hat{x},\hat{u}) = \min_{(x,u)} J(x,u),$$

и пары $(\hat{x},\hat{u})$ удовлетворяют задаче (1) – (3) в слабом обобщенном смысле.

Теорема *Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$, тогда при любых $y \in L_{\frac{4}{3}}(0,T;\mathfrak{N}^*)$ существует решение задачи* $(1)-(4)$.

Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.

Литература

1. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-Up in Nonlinear Sobolev Type Equations.* Berlin, Walter de Gruyter, 2011. DOI:10.1134/S001226610603013X

2. Манакова Н.А., Васючкова К.В. Исследование одной математической модели распределения потенциалов в кристаллическом полупроводнике // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование, **12**:2 (2019), 150-157.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АГРЕГАЦИИ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.Ф. Вильданова
gilvenera@mail.ru

УДК 517.954

В гиперболическом пространстве рассматривается задача Коши для уравнения агрегации. Неотрицательная начальная функция ограничена и суммируема. Доказано существование слабого решения на малом интервале времени.

Ключевые слова: уравнение агрегации, существование решения, гиперболическое пространство

Existence of a solution to the Cauchy problem for the aggregation equation in hyperbolic space

In hyperbolic space, we consider the Cauchy problem for the aggregation equation. Non-negative initial function limited and summable. The existence of a weak solution is proved on small time interval.

Keywords: the aggregation equation, solution existence, hyperbolic space

В цилиндрической области $Q^T = \mathbb{H}^n \times [0,T)$, где $\mathbb{H}^n$ – гиперболическое пространство рассматривается задача Коши для уравнения агрегации

$$u_t = \mathrm{div}_g(|\nabla_g A(u)|_g^{p-2}\nabla_g A(u) - u\mathcal{G}(u)) \qquad (1)$$

с ограниченной начальной функцией $u_0 \in L_1(\mathbb{H}^n)$:

$$u(x,0) = u_0, \;\; u_0(x) \geq 0, \;\; x \in \mathbb{H}^n. \qquad (2).$$

Здесь нижний индекс g у операторов div_g, ∇_g на многообразии $\mathbb{H}^n$ будет отличать их от соответствующих операторов в $\mathbb{R}^n$. Интегральный оператор $\mathcal{G}(v)$, определяется формулой

$$\mathcal{G}(v) = \int\limits_{\mathbb{H}^n} X(y)v(y)d\nu,$$

где $d\nu$ – элемент объема в $\mathbb{H}^n$.

Будем предполагать, что $A(u) \in C^1[0,\infty)$, $A(0) = 0$, и

$$A'(u) > 0, \;\; u > 0. \qquad (3)$$

Условия на ядро оператора $\mathcal{G}(v)$ следующие: $X(y) \in \chi^1(P)$, $P = \mathbb{H}^n \setminus \{y\}, y \in B_1$,

$$|d_x X_x(y)|_g + |X_x(y)| \leq C(|x|)(1 + |x-y|^{-\lambda}), \quad \lambda \in (0,n), \quad x,y \in B_1, \qquad (4)$$

где $C(r)$ – неубывающая функция.

Целью работы является доказательство существования решения задачи Коши для уравнения агрегации (1), (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00428а).

Вильданова Венера Фидарисовна, к.ф.-м.н., доцент, БГПУ им. М.Акмуллы (Уфа, Россия); Venera Vil'danova (Bashkir State Pedagogical University of M. Akmulla, Ufa, Russia)

Теорема 1. *Пусть* $0 \le u_0(x) \le M_0$, $u_0 \in L_1(\mathbb{H}^n)$ *и выполнены условия (3), (4). Тогда существует слабое решение задачи (1), (2) в цилиндре* Q_r^T *малой высоты* T.

Литература

1. *Punzo F.* Well-posedness of the Cauchy problem for nonlinear parabolic equations with variable density in the hyperbolic space// Nonlinear Differential Equations and Applications. **19** (2011), 485–501.

ВЫСШИЕ ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА ОДНОГО КЛАССА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Г. Воронова, А.В. Жибер
mihaylovaj@mail.ru, zhiber@mail.ru

УДК 517.9

В работе с использованием инвариантов Лапласа описан специальный класс нелинейных гиперболических уравнений, обладающих y–интегралом первого порядка и x–интегралами второго и третьего порядков. Приведена структура x–интегралов. Рассмотрен класс гиперболических уравнений с y–интегралом второго порядка, сводящихся дифференциальной подстановкой к уравнениям с y–интегралом первого порядка.

Ключевые слова: инварианты Лапласа, x– и y–интегралы, дифференциальные подстановки

Higher Laplace invariants of a class of hyperbolic equations

In the paper using Laplace invariants a special class of nonlinear hyperbolic equations with y–integral of the first order and x–integrals of the second and third orders is described. The structure of x – integrals is given. A class of hyperbolic equations with y–integral of the second order reduced by differential substitution to equations with y–integral is considered first order.

Keywords: Laplace invariants, x - and y-integrals, differential substitutions

В работе описан класс нелинейных гиперболических уравнений

$$u_{xy} = p_x + p_u u_x, \quad p = p(x, y, u), \tag{1}$$

обладающих x–интегралом второго и третьего порядков с использованием высших инвариантов Лапласа.

Известно (см. [1]), что уравнения вида

$$u_{xy} = \frac{p - \varphi_u}{\varphi_{u_y}} u_x + \frac{q}{u_y}\sqrt{u_x}, \tag{2}$$

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 15-11-2007).

Воронова Юлия Геннадьевна, к.ф.-м.н., старший преподаватель, УГАТУ (Уфа, Россия); Julia Voronova (Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia)

Жибер Анатолий Васильевич, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Anatoly Zhiber (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, Russia)

обладающие y–интегралом второго порядка дифференциальной подстановкой сводятся к уравнениям вида (1). Отметим (см. [2]–[4]), что известные уравнения Лэне содержатся в классе уравнений (2).

Литература

1. *Zhiber A.V., Yur'eva A.M.* Special Class of Liouville-Type Hyperbolic Equations // J. Math. Sci. (N. Y.), 236:6 (2019), 594–602.

2. *Жибер А.В., Юрьева А.М.* Об одном классе гиперболических уравнений с интегралами второго порядка // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2018, том 152, 46-52.

3. *Laine M. E.* Sur l'application de la methode de Darboux aux equations s = f(x, y, z, p, q) // Comptes rendus. V.182, 1926. — 1126–1127.

4. *Капцов О.В.* О проблеме классификации Гурса // Программирование. — 2012. № 2. — 68–71.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА ЗАДАЧИ ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА ДЛЯ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АВТОКАТАЛИТИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ С ДИФФУЗИЕЙ

О.В. Гаврилова

gavrilovaov@susu.ru

УДК 517.9

Исследовано фазовое пространство модели автокаталитической реакции с диффузией. Выявлены условия существования и единственности решений задачи Шоуолтера – Сидорова в зависимости от параметров системы.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, брюсселятор, условие Шоуолтера – Сидорова, уравнения реакции-диффузии

Study of the phase space of solutions of the Showalter – Sidorov problem for one mathematical model of autocatalytic reaction with diffusion

The phase space of the autocatalytic reaction model with diffusion is investigated. The conditions for the existence and uniqueness of solutions to the Showalter–Sidorov problem are revealed depending on the parameters of the system.

Keywords: Sobolev type equations, Brusselator, Showalter – Sidorov problem, reaction-diffusion equations

Рассмотрим вырожденную систему уравнений распределенного брюсселятора в цилиндре $Q = \Omega \times \mathbb{R}_+$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей класса C^∞:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_t = \alpha \Delta v + \gamma - (\delta + 1)v + v^2 w, \\ 0 = \beta \Delta w + \delta v - v^2 w, \end{array} \right. \quad v = v(s,t), w = w(s,t), \qquad (1)$$

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление №2011 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011).

Гаврилова Ольга Витальевна, аспирант, ЮУрГУ (Челябинск, Россия); Gavrilova Olga (South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)

с граничными условиями

$$v(s,t)=0,\ w(s,t)=0,\ (s,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}_+, \tag{2}$$

и начальным условием Шоуолтера – Сидорова

$$v(0)=v_0. \tag{3}$$

Задача (1) – (3) может быть исследована в рамках абстрактной задачи Шоуолтера – Сидорова

$$L(u(0)-u_0)=0 \tag{4}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}=Mu+N(u),\ \ker L\neq\{0\} \tag{5}$$

в специальным образом построенных функциональных пространствах. Основным методом исследования задачи (1) – (3) является метод фазового пространства [1]. Задача Шоуолтера – Сидорова для уравнений соболевского типа может иметь несколько решений в случаях, когда фазовое пространство уравнения (5) лежит на гладком банаховом многообразии, имеющем особенности, такие, как сборки Уитни [2].

Положим $\mathfrak{U}_M=\mathfrak{U}_{M_1}\times\mathfrak{U}_{M_2}=(\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))^2$, $\mathfrak{U}=(L_2(\Omega))^2$. $\mathfrak{U}_M$ – рефлексивное банахово пространство, плотно и непрерывно вложенное в $\mathfrak{U}$. Пространство $\mathfrak{U}$ – гильбертово со скалярным произведением $[u,\zeta]=\langle v,\xi\rangle+\langle w,\eta\rangle$, где $u=(v,w),\zeta=(\xi,\eta)$, а через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначим скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Через $\mathfrak{F}$ обозначим сопряженное к $\mathfrak{U}$ пространство относительно двойственности $[\cdot,\cdot]$. Построим линейные операторы $L,M:\mathfrak{U}\to\mathfrak{F}$

$$[Lu,\zeta]=\langle v,\xi\rangle,\ u,\zeta\in\mathfrak{U},$$

$$[Mu,\zeta]=-\alpha\langle v_{s_i},\xi_{s_i}\rangle-\beta\langle w_{s_i},\eta_{s_i}\rangle,\ u,\zeta\in\mathfrak{U},\ \text{где}\ \operatorname{dom}M=\mathfrak{U}_M$$

и нелинейные оператор

$$[N(u),\zeta]=\langle\gamma-(\delta+1)v+v^2w,\xi\rangle+\langle\delta v-v^2w,\eta\rangle$$

и $\operatorname{dom}N=L_4(\Omega)\times L_4(\Omega)=\mathfrak{U}_N$. По построению оператор $L\in\mathcal{L}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, $M\in\mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Лемма 1. *При любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$ оператор M $(L,0)$-секториален.*

Построим вспомогательное интерполяционное пространство $\mathfrak{U}_\alpha$ такое что $\mathfrak{U}_M\hookrightarrow\mathfrak{U}_\alpha\hookrightarrow\mathfrak{U}_N\hookrightarrow\mathfrak{U}$, тогда оператор $N\in C^\infty(\mathfrak{U}_\alpha;\mathfrak{F})$.

Определение. *Вектор-функцию $u\in C^1((0,\tau);\mathfrak{U})\cap C((0,\tau);\mathfrak{U}_N)$, удовлетворяющую уравнению (4), назовем решением уравнения. Решение $u=u(t)$ уравнения (4) назовем решением задачи (4), (5), если* $\lim\limits_{t\to0+}||L(u(t)-u_0)||_{\mathfrak{F}}=0$.

Построим

$$\mathfrak{M}=\{u\in\mathfrak{U}_\alpha:\langle\beta w_{s_i},\eta_{s_i}\rangle+\langle\delta(v-v^2w),\eta\rangle=0\}$$

и отметим, что все решения системы уравнений (1), удовлетворяющие граничным условиям (2) будут лежать в этом множестве как траектории.

Теорема 1. *Пусть* $\beta, \delta \in \mathbb{R}_+$ *и для них справедливо* $\langle \beta w_{s_i}, \eta_{s_i} \rangle + \langle \delta v_0^2 w, \eta \rangle \neq 0$ *для всех* $w \in \mathfrak{U}_{M_2}$ *при всех* $t \in (0, \tau)$. *Тогда фазовым пространством уравнения (1) служит множество* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{M}$ *является простым банаховым* C^∞*-многообразием.*

Теорема 2. *Пусть точка* $u_0 = (v_0, w_0) \in \mathfrak{M}$, $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{R}_+$, *причем для них справедливо* $\langle \beta w_{s_i}, \eta_{s_i} \rangle + \langle \delta v_0^2 w, \eta \rangle \neq 0$ *и при всех* $w \in \mathfrak{U}_{M_2}$ *для всех* $t \in (0, \tau)$. *Тогда существует единственное решение* (v, w) *задачи (1) – (3).*

Литература

1. *Sviridyuk G.A.* Phase Portraits of Sobolev-Type Semilinear Equations with a Relatively Strongly Sectorial Operator // St. Petersburg Mathematical Journal, **6**:5 (1995), 1109-1126.

2. *Бокарева Т.А., Свиридюк Г.А.* Сборки Уитни фазовых пространств некоторых полулинейных уравнений типа Соболева // Математические заметки, **55**:3 (1994), 3-10.

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОГО ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

О.Г. Гайдамак, А.Р. Сагитова, Е.В. Силова

gajdamakog@yandex.ru, mohlesnoy@yandex.ru, veavolis@inbox.ru

УДК 517.518

Доказана дискретность спектра квадратичного пучка дифференциальных операторов и получена асимптотическая формула для функции распределения собственных значений этого пучка

Ключевые слова: математика, дифференциальные уравнения, спектральная теория

Asymptotic behavior of the distribution function of one bundle 0f differential operators

Keywords: mathematics, differential equations, spectral theory

Для приложений большой интерес представляют задачи, в которых спектральный параметр λ входит полиномиальным образом. Такие задачи называются операторными пучками. В работе рассмотрен квадратичный операторный пучек

$$L(\lambda) = A + \lambda B - \lambda^2 I. \tag{1}$$

где A - самосопряженный дифференциальный оператор, порожденный в $H = L_2(-\infty, +\infty)$ дифференциальным выражением $Ay = y^{(4)} + q(x)\, y$ с положительной функцией $q(x)$, B – самосопряженный оператор, порожденный в H выражением $By = i[p(x)\, y' + (p(x)\, y)']$, где $p(x)$ - непрерывно дифференцируемая положительная функция.

Гайдамак Ольга Григорьевна, к.ф.-м.н., доцент БашГУ (Уфа, Россия); Olga Gaydamak (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Сагитова Айгуль Рашитовна, к.ф.-м.н., доцент БашГУ (Уфа, Россия); Aigul Sagitova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Силова Елена Викторовна, к.ф.-м.н., доцент БашГУ (Уфа, Россия); Elena Silova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Предположим, что функции $p\,(x)$ и $q\,(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$q\,(x) \to +\infty \quad \text{при} \quad |x| \to +\infty, \tag{2}$$

$$p\,(x) \le Cq^{\frac{1}{4}-\varepsilon_1}(x), \quad \text{где} \quad \varepsilon_1 > 0, \tag{3}$$

$$\begin{array}{l} |p\,(x) - p\,(y)\,| \le Cp\,(x)\,|x-y|, \\ |q\,(x) - q\,(y)\,| \le Cq^{\frac{5}{4}-\varepsilon_2}|x-y|, \end{array} \quad \text{при} \quad |x-y|\,r(y) \le 1\,, \tag{4}$$

где $r\,(y) = q^{\frac{1}{4}-\varepsilon_3}(y)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{q^{\frac{1}{2}}(x)} < \infty\,. \tag{5}$$

При выполнении этих условий спектр пучка $L\,(\lambda)$ дискретен, состоит из двух серий вещественных собственных значений, уходящих в $+\infty$ и $-\infty$. Обозначим через $\lambda_{\pm 1}, \lambda_{\pm 2}, \lambda_{\pm 3}$ собственные значения пучка $L\,(\lambda)$, расположенные в порядке возрастания их абсолютных величин и положим

$$N_+\,(\lambda) = \sum_{0<\lambda_n<\lambda} 1, \qquad \lambda > 0,$$

$$N_-\,(\lambda) = \sum_{\lambda<\lambda_n<0} 1, \qquad \lambda < 0.$$

Нами исследовано поведение этих функций при $\lambda \to \pm\infty$. Видно, что если $L\,(\lambda)\,y = 0$, то $L\,(-\lambda)\,\overline{y} = 0$. Это означает, что спектр пучка $L\,(\lambda)$ симметричен, поэтому функции $N_+\,(\lambda)$ и $N_-\,(\lambda)$ совпадают.

Рассмотрим функцию

$$N\,(\lambda) = \begin{cases} N_+\,(\lambda)\,, & \lambda > 0, \\ -N_-\,(\lambda)\,, & \lambda < 0 \end{cases}$$

$N\,(\lambda)$- функция распределения собственных значений пучка $L\,(\lambda)$.

Обозначим через $\psi(\lambda)$ функцию

$$\psi\,(\lambda\,) = \frac{1}{\pi}\int_{q(x)<\lambda^2} (\lambda^2 - q\,(x))^{\frac{1}{4}}\,dx, \quad \psi\,(-\lambda\,) = -\psi\,(\lambda\,)\,,\ \lambda > 0.$$

Показано, что что при $\lambda \to \pm\infty$

$$N\,(\lambda) \sim \psi\,(\lambda\,)\,.$$

Литература

1. *Гайдамак О.Г.*«Спектральные свойства квадратичных операторных пучков»; Автореферат диссертация кандидата физико-математических наук, Уфа: БашГУ, 1995 г. 2. *Костюченко А.Г., Саргсян И.С.* «Распределение собственных значений»; М.: Наука, 1979 г.

3. *Отелбаев М.* «Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n», Труды МИ АН СССР CLXI 1983.

4. *Гайдамак О.Г., Султанаев Я.Т.*Об асимптотике спектра одного квадратичного пучка дифференциальных операторов, Доклады Академии наук, 1996, т. 351, №3, с.297-298

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА СТЕПЕНИ МИНИМАЛЬНОСТИ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ

А.М. Гайсин
gaisinam@mail.ru

УДК 517.53

Получены количественные оценки минимальности системы экспонент в $C[0,\,\delta]$ при $\delta \to 0$. Показано, что если показатели экспонент удовлетворяют условию Левинсона, то эти оценки существенно точнее.

Ключевые слова: неквазианалитический класс Карлемана, минимальная система экспонент, условие Фейера, условие Левинсона

Asymptotic estimate of the degree of minimality of the system of exponentials

We obtained quantitative estimates of the minimality of the system of exponentials in $C[0,\,\delta]$ as $\delta \to 0$ and showed that if the exponents satisfy the Levinson condition, then these estimates are more exact.

Keywords: nonquasianalytic Carleman class, minimal system of exponentials, Fejer condition, Levinson condition

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\Lambda_k = \Lambda \backslash \{\lambda_k\}$, $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $\rho_\delta(\lambda_k)$ — расстояние от экспоненты $e^{\lambda_k z}$ до замыкания линейной оболочки системы $e_\Lambda = \{e^{\lambda z}\}_{\lambda \in \Lambda}$ в $C[0,\,\delta]$, $0 < \delta \le 1$. Как известно, $\rho_\delta(\lambda_k) > 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие Фейера. В этом случае система e_Λ называется минимальной (или свободной).

В [1] доказаны асимптотические оценки для $\rho_\delta(\lambda_k)$ при $\delta \to 0$ в следующих случаях:

1) Λ удовлетворяет условию Фейера;

2) Λ подчинена условию Левинсона.

Отметим, что условие Левинсона жестче, чем условие Фейера. Естественно ожидать, что в случае 2) оценка для $\rho_\delta(\lambda_k)$ будет гораздо точнее, чем в случае 1). Оказывается, дело обстоит именно так, о чем и будет идти речь в докладе. Но оценки в обоих случаях являются не только более общими, чем известный результат В. Люксембурга и Дж. Коревара (см. в [2]), но и более тонкими, ибо учитывают длину отрезка $[0,\,\delta]$. Из них можно вывести следующий результат Кларксона–Эрдеша и Шварца: при условии Фейера любая функция f из замыкания линейной оболочки системы степеней x^{λ_n} ($\lambda_n \in \mathbb{N}$) в $C[0,\,1]$ аналитически продолжается в единичный круг с центром в нуле и, тем самым, имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \quad z = x + iy, \quad |z| < 1.$$

Литература

1. *Гайсин А.М.* Экстремальные задачи в неквазианалитических классах Карлемана. Приложения // Матем. сб., **209**:7 (2018), 44-70.

2. *Luxemburg W.A.J., Korevaar J.* Entiry functions and Müntz–Szasz type approximation // Trans. Amer. Math. Soc., **157** (1971), 23-37.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-41-020070_а).

Гайсин Ахтяр Магазович, д. ф.-м. н., зав. отделом ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Akhtyar Gaisin (Institute of Mathematics with Computing Centre — Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Science, Ufa, Russia)

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ СЛАБО РАВНОМЕРНОЙ ЖОРДАНОВОЙ ОБЛАСТИ

Р.А. Гайсин
rashit.gajsin@mail.ru

УДК 517.53

Построен пример слабо равномерной области, где соответствующий класс Карлемана не является квазианалитическим. Эта область не равномерна, хотя для нее выполнено естественное условие типа «хорда-дуга». Данный пример демонстрирует, что и второе геометрическое условие в определении равномерной области является существенным.

Ключевые слова: равномерная область, квазикруг, квазиокружность, класс Карлемана

One example of the weakly uniform Jordan domain

We construct example of the weakly uniform domain for which appropriate Carleman class is not quasianalytic. This domain is not uniform although for it chord-arc type natural condition holds. Given example illustrates that second geometric condition in the definition of uniform domain is essential.

Keywords: uniform domain, quasidisk, quasicircle, Carleman class

Понятие равномерной области введено в работе O. Lehto [1]. Как известно, односвязная ограниченная область $G \subset \mathbb{C}$ называется *равномерной*, если существуют постоянные a и b, такие, что любую пару точек $z_1, z_2 \in G$ можно соединить дугой $\alpha \subset G$ со свойствами:

1^0. $|\alpha| \le a\,|z_1 - z_2|$ $\quad(|\alpha|$ — длина $\alpha)$;

2^0. для любого $z \in \alpha$

$$\min(|\alpha_1|, |\alpha_2|) \le b\; d(z, \partial G),$$

где α_1 и α_2 — компоненты множества $\alpha \setminus \{z\}$, а $d(z, \partial G) = \inf\limits_{\xi \in \partial G} |z - \xi|$.

Любую область $G \subset \mathbb{C}$ $(G \ne \mathbb{C})$, обладающую только (или по крайней мере) свойством 1^0, будем называть *слабо равномерной*. Так что всякая равномерная область является слабо равномерной.

Слабо равномерные области D обладают следующим свойством: для класса Карлемана

$$H(D, M_n) = \{f \in H(D) : \sup_{z \in D} \left|f^{(n)}(z)\right| \le c_f A^n M_n \quad (n \ge 0)\}$$

все производные $f^{(n)}$ $(n \ge 0)$ каждой функции $f \in H(D, M_n)$ продолжаются до непрерывных в $\overline{D}$ функций (см. в [2]).

В докладе будет обсуждаться пример слабо равномерной области, для которой условие 2^0 не выполнено. Такой пример строится в виде астроиды, которая явно определяется через некорую весовую функцию, удовлетворяющую условию Левинсона. Показывается, что граница построенной области

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00095 А).

Гайсин Рашит Ахтярович, к.ф.-м.н., инженер-исследователь, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Rashit Gaisin (Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, Russia)

не является квазиокружностью, и потому сама область не является равномерной (см. [3; гл.1, утв.A]). Данный пример показывает, что требование 2^0 в определении равномерной области вызвано существом дела.

Литература

1. *Lehto O.* Univalent Functions and Teichmuller Spaces. — New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1987.

2. *Гайсин Р.А.* Универсальный критерий квазианалитичности для жордановых областей // Матем. сборник, **209**:12 (2018), 57-74.

3. *Андриевский В.В., Белый В.И., Дзядык В.К.* Конформные инварианты в конструктивной теории функций комплексного переменного. — Киев: Наукова думка, 1998.

ПОРЯДОК РЯДА ЭКСПОНЕНТ: СВЯЗЬ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ РАЗЛОЖЕНИЯ

Г.А. Гайсина

gaisinaga@mail.ru

УДК 517.53

Ранее были доказаны необходимые и достаточные условия на показатели (или на показатели и коэффициенты) ряда Дирихле, абсолютно сходящегося в полуплоскости и имеющего конечный порядок, при выполнении которых порядок суммы ряда вычисляется по формуле, явно зависящей от коэффициентов. Здесь получены точные двусторонние оценки для порядка ряда экспонент в ограниченной выпуклой области с гладкой границей в терминах коэффициентов и опорной функции области.

Ключевые слова: ряды Дирихле, выпуклая область, порядок ряда экспонент

The order of a series of exponentials: relationship with decomposition coefficients

Earlier we proved the necessary and sufficient conditions for the exponents (or exponents and coefficients) of the Dirichlet series, absolutely converging in the half-plane and having a finite order, under which the order of the sum of the series is calculated by a formula that depends on the coefficients. Here we obtained exact two-sided estimates for the order of a series of exponentials in a bounded convex domain with a smooth boundary in terms of the coefficients and the support function of the domain.

Keywords: Dirichlet series, convex domain, order of a series of exponentials

Для функций $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, аналитических и неограниченных в единичном круге $\{z\colon |z| < 1\}$, порядок

$$\rho = \varlimsup_{r\uparrow 1} \frac{\ln\ln M_f(r)}{-\ln(1-r)}, \quad M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

Гайсина Галия Ахтяровна, аспирант, БашГУ (Уфа, Россия); Galiya Gaisina (Bashkir State University, Ufa, Russia)

может быть вычислен по известной формуле Говорова–Мак-Лейна–Шереметы

$$\frac{\rho}{\rho+1}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln n},\quad a^+=\max(a,\,0). \tag{1}$$

Для рядов Дирихле $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-\lambda_n s}$, абсолютно сходящихся в полуплоскости $\{s=\sigma+it\colon \sigma>0\}$ и имеющих конечный порядок

$$\rho_F=\overline{\lim_{\sigma\downarrow 0}}\frac{\ln\ln M_F(\sigma)}{-\ln\sigma},\quad M_F(\sigma)=\sup_{|t|<\infty}|F(\sigma+it)|,$$

в [1] указаны необходимые и достаточные условия на показатели λ_n (или на показатели λ_n и на коэффициенты a_n), при выполнении которых порядок суммы ряда Дирихле вычисляется по формуле

$$\frac{\rho_F}{\rho_F+1}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln^+\ln^+|a_n|}{\ln\lambda_n}. \tag{2}$$

Если же рассмотреть произвольную аналитическую в некоторой области G функцию f, то ее порядок естественно определить следующим образом:

$$\rho_f=\overline{\lim_{z\to\partial G}}\frac{\ln^+\ln^+|f(z)|}{-\ln d(z)},\quad d(z)=\inf_{\xi\in\partial G}|z-\xi|.$$

Пусть $\Lambda_0=\{\lambda_k\}$ $(\lambda_k\in\mathbb{C})$ — последовательность, имеющая нулевую плотность, Q — четная целая функция экспоненциального типа, имеющая вид

$$Q(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right),$$

для которой λ_k $(k=1,\,2,\,...)$ — простые нули, причем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|\lambda_n|}\ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right|=0.$$

Для каждой ограниченной выпуклой области G рассмотрим класс $H(G,\,\Lambda_0)$ аналитических в G функций, представимых в данной области рядом экспонент

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{\lambda_n z}. \tag{3}$$

Пусть G — область сходимости ряда (3). Как известно (см. [2]), в сделанных ограничениях на показатели G совпадет с областью регулярности суммы ряда (3).

Теорема 1. *Если область G имеет гладкую границу, то порядок ρ_f любой функции $f\in H(G,\,\Lambda_0)$ удовлетворяет точным двусторонним оценкам*

$$\frac{\rho_f}{\rho_f+1}\le\beta\le\max\left(\frac{\rho_f}{\rho_f+1},\,q_0\right), \tag{4}$$

где q_0 зависит только от показателей λ_n, а *β — от коэффициентов a_n и опорной функции $K(\varphi)$ области G (более подробно об обозначениях см. в [3]).*

Формально из (4) вытекает формула (2) для порядка в полуплоскости, а из нее — упомянутая в самом начале формула (1) Говорова–Мак-Лейна–Шереметы.

Литература

1. *Гайсина Г.А.* Об одном обобщении формулы Н.В. Говорова–Мак-Лейна–М.Н. Шереметы для вычисления порядка // Вестник Башкирского университета, **21**:3 (2016), 556-559.

2. *Леонтьев А.Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.

3. *Гайсин А.М., Гайсина Г.А.* Поведение коэффициентов ряда экспонент конечного порядка роста вблизи границы // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **162** (2019), 15-24.

MODIFICATIONS OF THE ITO-NARITA-BOGOYAVLENSKY EQUATION

R.N. Garifullin, R.I. Yamilov

rustem@matem.anrb.ru, RvlYamilov@matem.anrb.ru

УДК 517.518

We consider five-point differential-difference equations. Our aim is to find integrable modifications of the Ito-Narita-Bogoyavlensky equation related to it by non-invertible discrete transformations. We enumerate all modifications associated to transformations of the first, second and third orders. As far as we know, such a classification problem is solved for the first time in the discrete case. We analyze transformations obtained to specify their nature.

A number of new integrable five-point equations and new transformations have been found. Moreover, we have derived one new completely discrete equation. There are a few non-standard transformations which are of the Miura type or are linearizable in a non-standard way.

Keywords: Miura transformation; integrable differential-difference equation; Ito-Narita-Bogoyavlensky equation

We consider differential-difference equations of the form:

$$\dot{v}_n = f(v_{n+2}, v_{n+1}, v_n, v_{n-1}, v_{n-2}), \tag{1}$$

where $v_n = v_n(t)$ is an unknown function of the continuous time t and discrete integer variable n, $\dot{v}_n$ denotes the time derivative of v_n, and f is a function of five variables. The oldest and the most famous integrable example of this class is the Ito-Narita-Bogoyavlensky (INB) equation:

$$\dot{u}_n = u_n(u_{n+2} + u_{n+1} - u_{n-1} - u_{n-2}). \tag{2}$$

RIY gratefully acknowledges the financial support from Russian Science Foundation grant (project 15-11-20007)

Гарифуллин Рустем Наилевич, к.ф.-м.н., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Rustem Garifullin (Institute of Mathematics UFRS RAS, Ufa, Russia)

Ямилов Равиль Исламович, д.ф.-м.н., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Ravil Yamilov (Institute of Mathematics UFRS RAS, Ufa, Russia)

Lately, equations of this class have been intensively studied by the generalized symmetry method, see e.g. [1-4]. However, the problem of description of all integrable equations of this class is far from complete. To find new integrable equations, we apply here an alternative approach using non-invertible discrete transformations.

More precisely, we use non-invertible transformations of the following special form:

$$u_n = g(v_{n+k_1}, v_{n+k_1-1}, \dots, v_{n+k_2+1}, v_{n+k_2}), \quad k_1 > k_2, \tag{3}$$

relating (1) and (2). They transform any solution v_n of (1) into a solution u_n of (2). Such a transformation is explicit in one direction and can be called the discrete substitution by analogy with differential substitutions in the continuous case, see e.g. [5], where such transformations were studied. Numerous examples of transformations of the form (3) can be found in [6] for the Volterra and Toda type equations and in [3-4] for the five-point equations (1).

Equation (2) is one of the key equations of lists of integrable equations found in [3-4] as a result of the generalized symmetry classification of an important subclass of (1). Here we enumerate all modifications of the INB equation (2), which are associated with transformations (3) of the orders $k = 1, 2, 3$, where $k = k_1 - k_2$. As the result, we find 5 examples of the first order, 9 examples of the second order and 15 examples of the third order. As far as we know, a classification problem of this kind is solved for the first time in the discrete case.

We also prove that the order of a possible transformation in this problem is restricted by the number five: $k \le 5$.

Theorem 1. *An equation of the form (1) cannot be transformed into the INB equation (2) by a transformation of the form (3) for any order $k > 5$.*

This estimate is accurate in the sense that there exist transformations for all orders $1 \le k \le 5$.

As a result of the classification we obtain a number of new integrable equations and transformations. The most interesting examples with corresponding transformations read:

$$\dot z_n = 4(z_n^2 - 1)(2\Omega_n + (z_{n-1} - 1)\Omega_{n-1} - (z_1 + 1)\Omega_{n+1}),$$

$$\Omega_n = \frac{1}{[(z_{n+1} + 1)(z_n - 1) + 4][(z_n + 1)(z_{n-1} - 1) + 4]}$$

$$u_n = \frac{4(z_{n+2} + 1)(z_{n+1}^2 - 1)(z_n - 1)}{[(z_{n+3} + 1)(z_{n+2} - 1) + 4][(z_{n+2} + 1)(z_{n+1} - 1) + 4][(z_{n+1} + 1)(z_n - 1) + 4]}$$

and

$$\dot z_n = -z_n(\Theta_{n+1} + \Theta_n + \Theta_{n-1}) \quad \Theta_n = \frac{z_n}{(z_{n+1} - z_n)(z_n - z_{n-1})}$$

$$u_n = \frac{z_{n+2} z_{n+1}}{(z_{n+3} - z_{n+2})(z_{n+2} - z_{n+1})(z_{n+1} - z_n)}$$

More details are given in [7].

Литература

1. *V. E. Adler*, Necessary integrability conditions for evolutionary lattice equations, Teoret. Mat. Fiz., **181**(2) (2014), 276–295 [in Russian]; English transl. in Theoretical and Mathematical Physics, **181**(2) (2014), 1367–1382.

2. *V. E. Adler*, Integrable Möbius-invariant evolutionary lattices of second order, Funktsional. Anal. i Prilozhen., **50**:4 (2016), 13–25 [in Russian]; English transl. in Funct. Anal. Appl., **50**:4 (2016), 257–267.

3. *R. N. Garifullin, R. I. Yamilov and D. Levi*, Classification of five-point differential-difference equations. J. Phys. A: Math. Theor., **50** (2017), 125201, 27pp.

4. *R. N. Garifullin, R. I. Yamilov and D. Levi*, Classification of five-point differential-difference equations II. J. Phys. A: Math. Theor., **51** (2018), 065204, 16pp.

5. *V. V. Sokolov*, On the symmetries of evolution equations, Uspekhi Mat. Nauk, **43**:5(263) (1988), 133–163 [in Russian]; English transl. in Russian Math. Surveys, **43**:5 (1988), 165–204.

6. *R. Yamilov*, Symmetries as integrability criteria for differential difference equations, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006), R541–R623.

7. *R. N. Garifullin, R. I. Yamilov*, Integrable Modifications of the Ito-Narita-Bogoyavlensky Equation, SIGMA, **15** (2019), 62 , 15 pp.

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE BARENBLATT–ZHELTOV–KOCHINA MODEL ON THE SEGMENT WITH WENTZELL BOUNDARY CONDITIONS

Н.С. Гончаров

Goncharov.NS.krm@yandex.ru

УДК 519.63

In terms of numerical investigation, we study Barenblatt–Zheltov–Kochina model, which describes dynamics of pressure of a filtered fluid in a fractured-porous medium with general Wentzell boundary conditions. Based on the theoretical results associated with Galerkin method, we developed an algorithm and implementation for the numerical solution of the Cauchy–Wentzell problem on the segment $[0, 1]$. In particular, we examine the asymptotic approximation of the spectrum of the one-dimensional Laplace operator and present result of a computational experiment. In the paper, these problems are solved under the assumption that the initial space is a contraction of the space $L^2(0, 1)$.

Keywords: Barenblatt–Zheltov–Kochina equation, Wentzell boundary conditions, numerical investigation, Galerkin method

Let us consider the Cauchy–Wentzell problem

$$\begin{aligned} &u(x,0) = v_0(x),\ x \in [0,1] \\ &u_{xx}(0,t) + \alpha_0 u_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) = 0, \\ &u_{xx}(1,t) + \beta_0 u_x(1,t) + \beta_1 u(1,t) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

for the Barenblatt–Zheltov–Kochina equation on the segment $[0, 1]$

$$\lambda u_t(x,t) - u_{txx}(x,t) = \alpha u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

Гончаров Никита Сергеевич, магистрант, ЮУрГУ (Челябинск, Россия); Goncharov Nikita (South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)

which describes dynamics of pressure of a filtered fluid in a fractured-porous medium. Here α and λ are the material parameters characterizing the environment; the parameter $\alpha \in \mathbb{R}_+$; the function $f = f(x,t)$ plays the role of external loading.

The purpose of this work is to show new approach for resolvability of problem (1)–(2) with Wentzell boundary conditions. Namely, according to the modified Galerkin method, describe the solution of the Cauchy–Wentzel problem.

Литература

1. *Goncharov N.S.* The Barenblatt–Zheltov–Kochina model on the segment with Wentzell boundary conditions // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, **12**:2 (2019), 136-142.

2. *Favini A., Goldstein G.R., Goldstein J.A., Romanelli S.* The Heat Equation with Generalized Wentzell Boundary Condition // Journal of Evolution Equations, **2** (2002), 1-19.

3. *Favini A., Goldstein G.R., Goldstein J.A.* The Laplacian with Generalized Wentzell Boundary Conditions // Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, **55** (2003), 169-180.

4. *Favini A., Goldstein G.R., Goldstein J.A., Romanelli S.* Classification of General Wentzell Boundary Conditions for Fourth Order Operators in One Space Dimension // Journal of Mathematical Analysis and Applications, **333**:1 (2007), 219-235.

5. *Giuseppe M.Coclite., Favini A., Gal Ciprian G., Goldstein G.R.* The Role of Wentzell Boundary Conditions in Linear and Nonlinear Analysis // Tubinger Berichte, **132** (2008), 279-292.

6. *Gal Ciprian G.* Sturm–Liouville Operator with General Boundary Conditions // Electronic Journal of Differential Equations, **2005**:120 (2005), 1-17.

7. *Wentzell A.D.* Semigroups of Operators Corresponding to a Generalized Differential Operator of Second Order // Doklady Academii Nauk SSSR, **111** (1956), 269-272.

8. *Feller W.* Generalized Second Order Differential Operators and Their Lateral Conditions // Illinois Journal of Mathematics, **1**:4 (1957), 459-504.

9. *Wentzell A.D.* On Boundary Conditions for Multidimensional Diffusion Processes // Theory of Probability and its Applications, **4** (1959), 164-177.

10. *Kitaeva O.G., Shafranov D.E. and Sviridyuk G.A.* Exponential dichotomies in Barenblatt–Zheltov–Kochina model in spaces of differential forms with 'Noise' // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software, **12**:2 (2019), 47-57.

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Г.Э.Гришанина, Э.М.Мухамадиев
emuhamadiev@rambler.ru, anora66@mail.ru

УДК 517.9

Изучается вопрос о необходимых и достаточных условиях существования классического решения неоднородного бигармонического уравнения.

Ключевые слова: математика, дифференциальные уравнения в частных производных

On the conditions for the existence of a classical solution of the inhomogeneous biharmonic equation

We study the question of the necessary and sufficient conditions for the existence of a classical solution of an inhomogeneous biharmonic equation.

Keywords: mathematics, partial differential equations

Рассмотрим задачу о существовании классического решения неоднородного бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(x,y) = f(x,y),\ (x,y) \in G, \tag{1}$$

где Δ- оператор Лапласа, G- ограниченная область в R^2, $f(x,y)-$ непрерывная в G функция. Напомним [1,2], что функция $u(x,y)$ называется классическим решением уравнения (1), если она имеет в области G все непрерывные частные производные до 4-го порядка включительно и удовлетворяет уравнению (1).

Очевидно, что если уравнение (1) имеет классическое решение, то функция $f(x,y)$ является непрерывной функцией. Однако существуют непрерывные функции, для которых уравнение (1) не имеет классических решений. Возникает вопрос о том, каким дополнительным условиям, кроме непрерывности, должна удовлетворять функция $f(x,y)$ для того, чтобы уравнение (1) имело классическое решение. Подобные задачи для уравнения Пуассона и неоднородной системы Коши-Римана были изучены в работах [3,4].

Отметим, что установление наличия гладкости решения важно не только для качественной теории дифференциальных уравнений, но имеет практические приложения, например, при приближенном построении решения дифференциального уравнения и оценке точности приближенного решения.

Определим множество $\widetilde{G} = \{(x,y,s) : M = (x,y) \in G, |s| < \rho(M, \partial G)\}$, где $\rho(M,\partial G)$ - расстояние от точки M до границы ∂G области G, и функцию

$$g(x,y,s,\varphi) = f(x + s\cos\varphi,\ y + s\sin\varphi)$$

на $\widetilde{G}\times[0,2\pi]$. Функция g непрерывна по совокупности переменных. Поэтому комплекснозначная функция

$$F_k(x,y,s) = \int_0^{2\pi} g(x,y,s,\varphi)\exp(ik\varphi)d\varphi, \quad k = \pm 1, \pm 2, ...$$

Гришанина Гульнара Эргашевна, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики Государственного университета "Дубна"(Дубна, Россия); Gulnara Grishanina (Dubna State University, Dubna, Russia)

Мухамадиев Эргаш Мирзоевич, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия); Ergashboy Muhamadiev (Vologda State University, Vologda, Russia)

определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$ и $F_k(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in G$. Определим функции

$$f_k(x,y,r) = \int_r^{r_1} F_k(x,y,s)\,\frac{ds}{s}, \quad 0 < r \leq r_1(x,y) \equiv \frac{1}{2}\rho(M,\partial G).$$

Назовем непрерывную функцию $f(x,y)$ *k-усиленно непрерывной*, если $f_k(x,y,r)$ имеет непрерывное продолжение на подмножестве $\{(x,y,0) : (x,y) \in G\}$ множества $\widetilde{G}$. Непрерывная по Гельдеру функция является k-усиленно непрерывной для любого k. Более общее достаточное условие k-усиленной непрерывности функции $f(x,y)$ дает наличие оценки для функции $F_k(x,y,r)$:

$$|F_k(x,y,r)| \leq C(1 + |\ln r|)^{\nu}, \quad \nu < -1, \quad C > 0, \quad 0 < r \leq r_1(x,y).$$

Теорема 1. *Если уравнение (1) имеет в области G классическое решение, то функция $f(x,y)$ k-усиленно непрерывна при $k = 2$ и $k = 4$ в этой области.*

Предположим, что непрерывная функция $f(x,y)$ интегрируема в области G (например, ограничена: $|f(x,y)| \leq M$, $(x,y) \in G$). Тогда функция

$$u_0(x,y) = \frac{1}{8\pi}\int\int_G f(\xi,\eta) r^2 \ln r d\xi d\eta, \quad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$$

имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно и является обобщенным решением уравнения (1).

При этих предположениях о функции $f(x,y)$ необходимые условия существования классического решения уравнения (1) являются и достаточными, а именно справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема и k-усиленно непрерывна при $k = 2$ и $k = 4$ в области G. Тогда функция $u_0(x,y)$ является классическим решением уравнения (1).*

Рассмотрим более общее уравнение вида

$$\Delta^2 u(x,y) + \sum_{0 \leq i+j \leq 3} a_{ij}(x,y)\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = f(x,y),\ (x,y) \in G, \tag{2}$$

где коэффициенты $a_{ij}(x,y)$ и $f(x,y)$ непрерывные функции. Функцию $u(x,y)$, имеющую непрерывные частные производные до третьего порядка включительно в области G назовем обобщенным решением уравнения (2), если для любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x,y)$ с компактным носителем в области G имеет место равенство

$$\int u(x,y)\Delta^2\varphi(x,y)dxdy + \int \sum_{0 \leq i+j \leq 3} a_{ij}(x,y)\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j}\varphi(x,y)dxdy =$$
$$= \int f(x,y)\varphi(x,y)dxdy.$$

Теорема 3. *Пусть коэффициенты $a_{ij}(x,y)$ и $f(x,y)$ k-усиленно непрерывны при $k = 2$ и $k = 4$ в области G. Тогда обобщенное решение $u(x,y)$ уравнения (2) является классическим решением.*

Литература

1. *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский* Уравнения математической физики. М: Наука, 1977. 735 с.

2. *Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер* Уравнения с частными производными. М: Мир, 1966. 351 с.

3. *Э. М. Мухамадиев, Г. Э. Гришанина, А. А. Гришанин* О применении метода регуляризации к построению классического решения уравнения Пуассона.// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2015, том 21, № 4, с. 1-16

4. *С. Байзаев, Г. Э. Гришанина, Э. Мухамадиев* О необходимых и достаточных условиях существования классического решения неоднородной системы Коши-Римана.// Дифференциальные уравнения, 2018, том 54.№ 2, с.1-13.

ОПЫТ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕФТЕДОБЫЧИ, НЕФТЕПЕРЕРАБОТКИ И НЕФТЕХИМИИ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕКИХ МОДЕЛЕЙ. КАРБОНАТНЫЕ КОЛЛЕКТОРА, РИФОРМИНГ БЕНЗИНОВ, ПИРОЛИЗ ПРОПАНА

И.М. Губайдуллин

irekmars@mail.ru

УДК 517.977.58

В работе излагается результаты применения методов математического моделирования и вычислительной математики в решение промышленно важных технологических задач - численное моделирование массопереноса в трещиноватых коллекторах с применением высокопроизводительных вычислений, оптимизация реакторного блока каталитического риформинга на основе математической модели с учётом изменения реакционного объёма, разработка компактной кинетической модели пиролиза пропана методами анализа чувствительности.

Ключевые слова: компактная кинетическая модель, технологические задачи, каталитических риформинг, оптимизация реактороного блока

EXPERIENCE OF SOLVING THE PROBLEMS OF OIL PRODUCTION, OIL REFINING AND PETROCHEMISTRY BASED ON MATHEMATICAL MODELS. CARBONATE COLLECTORS, REFORMING PETROLES, PROPANE PYROLISIS

The paper presents the results of applying mathematical modeling methods and computational mathematics to solving industrially important technological problems - numerical simulation of mass transfer in fractured reservoirs using high-performance calculations, optimization of the catalytic reforming reactor unit based on a mathematical model taking into account changes in the reaction volume, development of a compact kinetic model of propane pyrolysis sensitivity analysis methods.

Keywords: compact kinetic model, technological problems, catalytic reforming, reactor block optimization

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-07-00341

Губайдуллин Ирек Марсович, д.ф.-м.н., ИНК УФИЦ РАН (Уфа, Россия), УГНТУ (Уфа, Россия); Irek Gubaydullin (Institute of petrochemistry and catalysis RSA, Ufa, Russia, Ufa State Technological Petroleum University, Ufa, Russia)

При разработки математической модели процесса тепломассопереноса в коллекторе трещиновато-порового типа решены следующие задачи: построена математическая модель тепломассопереноса в системе «сеть трещин - матрица»; проведён анализ чувствительности параметров модели к входным параметрам; осуществлен выбор метода для численной реализации модели, обладающий точностью и скоростью расчетов, необходимых для использования программного комплекса при решении обратной задачи тепломассопереноса в трещиноватом коллекторе; разработана методика проведения исследования и интерпретации данных термогидродинамических исследований на добывающих и нагнетательных скважинах методами кривой восстановления/падения давления в коллекторе трещиновато-порового типа. Данная методика позволяет определять фильтрационно-емкостные параметры пласта как призабойной, так и удаленной зоны пласта, а также пластовое давление. Результаты моделирования могут внести большой вклад при разработке и мониторинге трещиновато-поровых коллекторов [1,2].

Создана групповая кинетическая модель процесса каталитического риформинга, основанная на анализе существующих моделей и их симбиозе. Описание кинетики обратных реакций проводилось по аналогии с описанием прямых реакций, в то время как подавляющее большинство описывают через константу равновесия. Для определения энергий активации обратной реакции использовалась зависимость энергий активации прямой и обратной стадий и теплового эффекта химической реакции. На основе многоцелевой оптимизации определены области технологических параметров способствующих подбору таких значений параметров, которые обеспечат снижение содержание ароматических углеводородов без потери октанового числа с максимальным выходом риформата. На основе ранее разработанной математической модели реакторного блока каталитического риформинга, была показана возможность проведения многокритериальная оптимизация работы реакторного блока каталитического риформинга с использованием генетического алгоритма оптимизации. Подобран температурный режим каскада реакторов, обеспечивающий снижение содержания суммы ароматических углеводородов, при этом уменьшение октанового числа было незначительно. При решении поставленной оптимизационной задачи использовался генетический алгоритм, а именно его разновидность Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II (NSGA-II) [3,4].

Разработана методика упрощения схемы химической реакции, основанная на анализе чувствительности функционала модели к изменению ее кинетических параметров. Методика позволяет получить схему химической реакции компактного размера, адекватно описывающую процесс в заданном диапазоне условий. Построена кинетическая модель реакции газофазного пиролиза пропана, позволяющая описать процесс низкотемпературного (820-980 K) пиролиза пропана при атмосферном давлении и приемлемая для проведения газодинамических расчетов в программных комплексах 3D-моделирования. Проведено комплексное исследование пиролиза пропана в неравновесных условиях проточного реактора: исследована кинетика реакции и проведены расчеты динамики газового потока пиролиза пропана в лабораторном реакторе с учетом процессов диффузии, химических реакций и их тепловых эффектов в программном пакете ANSYS Fluent с включением компактной схемы реакции. Разработанная методика позволяет получать схемы компактного размера, адекватно описывающие процесс в заданном диапазоне условий, приемлемые для проведения газодинамических расчетов в программных комплексах 3D-моделирования. Разработанная методика может быть применена для анализа широкого класса химических реакций. Результаты моделирования и методы создания компактной схемы пиролиза пропана могут составить основу для описания пиролиза пропана в объеме реактора под воздействием лазерного излучения [5,6].

Литература

1. *Бобренёва Ю.О., Губайдуллин И.М.* Математическая модель двухфазной фильтрации жидкости в средах с двойной пористостью // В книге: Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ материалы VII Всероссийской научной молодежной школы-семинара имени Е.В. Воскресенского с международным участием. 2016. С. 19.

2. *Bobreneva Y.O., Mazitov A.A., Gubaydullin I.M.* Mathematical modelling of fluid flow processes in the fracture-porous reservoir // В сборнике: Journal of Physics: Conference Series electronic edition. (2018), С. 012187.

3. *Р. З. Зайнуллин, К. Ф. Коледина, А. Ф. Ахметов, И. М. Губайдуллин* Кинетика каталитического риформинга бензина // Кинетика и катализ. (2017) **58**:3. С. 1–12.

4. *Koledina K.F., Gubaydullin I.M., Vovdenko M.K., Koledin S.N., Karpenko A.P.* Multi-objective optimization of chemical reaction conditions based on a kinetic model // Journal of Mathematical Chemistry. (2019) **57**:2, 484-493.

5. *Нурисламова, Л. Ф.* Редукция детальных схем химических превращений окислительных реакций формальдегида и водорода на основании результатов анализа чувствительности математической модели / Л. Ф. Нурисламова, И. М. Губайдуллин // Вычислительные методы и программирование. (2014) **15**:4,685-696.

6. *Nurislamova, L. F.* Few-Step Kinetic Model of Gaseous Autocatalytic Ethane Pyrolysis and Its Evaluation by Means of Uncertainty and Sensitivity Analysis / L. F. Nurislamova, O. P. Stoyanovskaya, O. A. Stadnichenko, I. M. Gubaidullin, V. N. Snytnikov, A. V. Novichkova // Chemical Product and Process Modeling. (2014) **9**:2, 143-154.

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Э.В. Давыдова
markwella@inbox.ru

УДК 517.51

Рассматривается плоская ограниченная эллиптическая задача трех тел. Изучаются спектральные свойства треугольных точек либрации в зависимости от параметра масс.

Ключевые слова: задача трёх тел, точки либрации, устойчивость, топологический тип

The study of the spectral properties of triangular points librations of the three-body problem

A plane bounded elliptic three-body problem is considered. Spectral properties are studied. triangular libration points depending on the mass parameter.

Keywords: three-body problem, libration points, stability, topological type

Движение тела малой массы в плоской ограниченной эллиптической задаче трех тел (см. [1]) описывается дифференциальным уравнением

$$z" + 2iz' = \rho\left(z - \mu + \frac{\mu-1}{|z|^3} - \frac{\mu}{|z-1|^3} - \frac{\mu}{|z-1|^3}z\right), \tag{1}$$

в котором $\mu = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}$ – параметр масс, $\rho = \dfrac{1}{1+\varepsilon\cos t}$, ε – эксцентриситет. Уравнение (1) имеет пять постоянных решений, два из которых - это треугольные точки либрации $z_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ и $\overline{z_0} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Следуя классическим обозначениям, эти точки будем обозначать также как L_4 и L_5.

В зависимости от значений параметров μ и ε точки либрации L_4 и L_5 могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. В докладе обсуждается вопрос о топологическом типе этих точек, играющем основную роль в задаче исследования их устойчивости.

Собственные значения соответствующей линеаризованной задачи являются корнями характеристического уравнения:

$$\lambda^4 + \lambda 2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0\,,$$

т.е. числами

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}\,, \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-27\mu(1-\mu)}}\,.$$

Проведенное исследование показало, при $1 - 27\mu(1-\mu) \geqslant 0$ топологический тип точек либрации L_4 и L_5 равен (0,4,0), а при $1 - 27\mu(1-\mu) < 0$ он равен (2,0,2). Проведен также анализ соответствующих собственных значений (свойства кратности и порядка).

Давыдова Эмилия Владимировна, магистрант 1-го года обучения ФМиИТ, БашГУ (Уфа, Россия); Emiliya Davydova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Литература

1. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978, 312 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ТЕРМОДЕСТРУКЦИИ ТОНКОСТЕННЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Ю.И. Димитриенко, А.Ф. Хузин
dimit.bmstu@gmail.com, aidarfanuzovich8@gmail.com

УДК 539.3

Полимерные композиционные материалы (ПКМ) при высоких температурах, находят широкое применение в ракетно-космической и авиационной технике. В связи со сложностью явления термодеструкции разрабатывается метод для моделирования термомеханического поведения ПКМ, который основывается он на методе асимптотического осреднения.

Ключевые слова: термодеструкция, тепломассоперенос, метод асимптотического осреднения

The design of process of deformation and thermodestruction of the thin-walled composite plates on the basic of asymptotic theory

The polymer composite materials at high temperatures find the wide application in aerospace, rocket and aeronautical engineering. In connection with the complexity of the phenomenon of thermodestruction new method was developed for modeling the thermomechanical behavior of PCM. It is based on the method asymptotic averaging method.

Keywords: thermodestruction, heat-and-mass transfer, asymptotic averaging method

Рассматривается многослойная пластина постоянной толщины. Вводится малый параметр $\kappa = h \ / \ L << 1$. Вводятся характерные величины.

Для пластины сформулирована трёхмерная задача тепломассопереноса и термомеханики и записывается в безразмерном виде следующим образом

Димитриенко Юрий Иванович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой "Вычислительная математика и математическая физика"МГТУ им.Н.Э. Баумана (Москва, Россия); Yuri Dimitrienko (Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia)

Хузин Айдар Фанузович, аспирант, МГТУ им. Баумана (Москва, Россия); Aydar Khuzin (Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia)

$$\begin{cases} \nabla_j(\sigma_{ij} - \varphi_g p\delta_{ij}), \\ \rho c\dfrac{\partial\theta}{\partial t} = -\nabla_i\, q_i - c_g\, \nabla_i\, \theta \cdot \rho_g\varphi_g\vartheta_{gi} - J \bigtriangleup e^0, \\ \dfrac{\partial\rho_g\varphi_g}{\partial t} + \nabla_i \cdot \rho_g\varphi_g\vartheta_{gi} = J\Gamma, \\ \rho_b\dfrac{\partial\varphi_g}{\partial t} = -J, \\ \varepsilon_{ij} = \dfrac{1}{2}(\nabla_j u_i + \nabla_i u_j). \end{cases} \qquad (1)$$

В задачу (1) входят уравнение равновесия, уравнение теплопереноса в термодеструктирующем композите, уравнение фильтрации газов в порах композиционного материала, уравнение изменения массы полимерной фазы матрицы, соотношение Коши.

Решение ищется в виде асимптотических разложений по параметру в виде функций, зависящих от глобальных и локальной координат:

$$\begin{aligned} u_k &= u_k^{(0)}(x_I) + \kappa u_k^{(1)}(x_I,\xi) + \kappa^2 u_k^{(2)}(x_I,\xi) + \kappa^3 u_k^{(3)}(x_I,\xi) + ..., \\ \theta &= \theta^{(0)}(x_I) + \kappa\theta^{(1)}(x_I,\xi) + \kappa^2\theta^{(2)}(x_I,\xi) + \kappa^3\theta^{(3)}(x_I,\xi) + ..., \\ \rho_g &= \rho_g^{(0)}(x_I) + \kappa\rho_g^{(1)}(x_I,\xi) + \kappa^2\rho_g^{(2)}(x_I,\xi) + \kappa^3\rho_g^{(3)}(x_I,\xi) + ..., \\ \varphi_g &= \varphi_g^{(0)}(x_I) + \kappa\varphi_g^{(1)}(x_I,\xi) + \kappa^2\varphi_g^{(2)}(x_I,\xi) + \kappa^3\varphi_g^{(3)}(x_I,\xi) + ..., \end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь и далее индексы, обозначенные заглавными буквами I, J, K, L и принимают значения 1, 2, а индексы i, j, k, l - значения 1,2,3.

Подставкой разложений (2) в уравнения системы (1) формулируются локальные задачи нулевого, первого, второго, третьего приближений, при этом используется правило дифференцирования функций локальных координат:

$$\partial/\partial x_i \longrightarrow \partial/\partial x_i + (1/\kappa)\delta_{i3}\partial/\partial\xi$$

Далее после решения локальных задач производится операция осреднения уравнений системы (1), в ходе которого происходит поиск полей перемещений, деформаций и напряжений с учётом эффекта термодеструкции.

Заключение. Разработан метод асимптотического осреднения для процессов деформирования и термодеструкции тонких композитных пластин. Сформулированы локальные задачи.

После осреднения уравнений планируется решить задачу термомеханического поведения ПКМ при локальном нагреве и провести численный анализ полученного аналитического решения. Далее сравнить полученные результаты с результатами точного численного моделирования.

Литература

1. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984, -352 с.

2. *Димитриенко Ю.И.* Механика композиционных материалов при высоких температурах.- М.:Машиностроение. 1997. -362 с.

3. *Димитриенко Ю.И.* Основы механики твердого тела/ Механика сплошной среды.Т.4.-Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана. 2013. -624 с.

О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА БЕЗ ОТДЕЛЕНИЯ МЕР НА МНИМОЙ ОСИ

А.Е. Егорова, Б.Н. Хабибуллин

anegorova94@bk.ru, khabib-bulat@mail.ru

УДК 517.518

Основная цель данной работы — описать условия существования ненулевой целой функции экспоненциального типа (пишем *ц.ф.э.т.*) $f \neq 0$ на *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, обращающейся в нуль на заданной последовательности точек $\mathsf{Z} = \{\mathsf{z}_k\} \subset \mathbb{C}$, с ограничениями на ее рост вдоль прямой.

Ключевые слова: целая функция, комплексная плоскость, мнимая ось, нули функции

The main tasks of mathematics

The main goal of this paper is to describe the conditions for the existence of a nonzero entire function of exponential type (we write *c.ph.et.*.) $f \neq 0$ on the it complex plane $\mathbb{C}$, vanishing on a given sequence of points $\mathsf{Z} = \{\mathsf{z}_k\} \subset \mathbb{C}$, with restrictions on its growth along a straight line.

Keywords: whole function, complex plane, imaginary axis, zeros of a function

Пусть $S \subset C_\infty$. Классы $Hol(S)$ и $sbh(S)$ состоят из сужений на S функций, соотв. *голоморфных* и *субгармонических* в каком-либо открытом множестве, включающем в себя S Тождественную $-\infty$ или $+\infty$ на S обозначаем соотв. $-\boldsymbol{\infty} \in \ sbh(S)$ или $+\boldsymbol{\infty} \in -sbh(S) \subset \delta - sbh(S)$; $sbh_*(S) := sbh(S) \setminus \{-\boldsymbol{\infty}\}$, $\delta - sbh_*(S) := \delta - sbh(S) \setminus \{\pm\boldsymbol{\infty}\}$.

Функция $v \in \ sbh(C)$ *конечного типа* (при порядке 1), если

$$type_1[v] := \ type_1^\infty[v] \limsup_{r\to+\infty} \frac{M_v(r)}{r} < +\infty. \tag{1}$$

$Meas(S)$ всех *счетно-аддитивных функций борелевских подмножеств борелевского множества* $S \subset C_\infty$ *со значениями в* $R_{\pm\infty}$, *конечных на компактах из* S. Элементы из $Meas(S)$ называем *зарядами,*

Заряд $\nu \in Meas(C)$ *конечной верхней плотности* (при порядке 1), если

$$type_1[\nu] := \ type_1^\infty[\nu] := \limsup_{r\to+\infty} \frac{|\nu|^{\ rad}(r)}{r} < +\infty. \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-11-00002).

Булат Нурмиевич Хабибуллин, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Bulat Habibullin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Анна Евгениевна Егорова, аспирант 2го года обучения, БашГУ (Уфа, Россия); Anna Egorova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Для $\nu \in Meas(C)$ используем и *функцию распределения* ν^R сужения $\nu\bigm|_R$ заряда ν *на* R :

$$\nu^R(x) := \begin{cases} -\nu\bigl([x,0)\bigr) & \text{при } x < 0, \\ \nu\bigl([0,x]\bigr) & \text{при } x \geq 0, \end{cases} \tag{3}$$

а также *функцию распределения* ν^{iR} сужения $\nu\bigm|_{iR}$ заряда ν *на* R:

$$\nu^{iR}(y) := \begin{cases} -\nu\bigl([iy,0)\bigr) & \text{при } y < 0, \\ \nu\bigl([0,iy]\bigr) & \text{при } y \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Для открытого $Q \subset C_\infty$ *меру Рисса* функции $v \in sbh_*(\mathcal{O})$ обозначаем как $\nu_v := \frac{1}{2\pi}\Delta v \in \ Meas^+(Q)$ или μ_v и т. п., где оператор Лапласа Δ действует в смысле теории обобщённых функций.

Последовательности $\mathsf{Z} = \{\mathsf{z}_k\} \subset C$ сопоставляем *экспоненциальную систему* $Exp^{\mathsf{Z}} \subset Hol_*(C)$ *с последовательностью показателей* Z:

$$\begin{aligned} Exp^{\mathsf{Z}} := \bigl\{ z \mapsto z^p e^{\mathsf{z}_k z} \colon z \in C,\ p \in N_0, \\ 0 \leq p \leq n_{\mathsf{Z}}\bigl(\{\mathsf{z}_k\}\bigr) - 1 = \mathsf{Z}(\mathsf{z}_k) - 1 \bigr\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть для мер* $\nu, \mu \in \ Meas^+(\mathbb{C})$ *имеет место*

$$\sum_k \Bigl| \frac{1}{\mathsf{z}_k^0} - \frac{c}{m_k} \Bigr| < +\infty.$$

Тогда следующие два утверждения эквивалентны.

1. *Для любой функции* $M \in \delta - sbh_*(\mathbb{C})$ *конечного типа с мерой Рисса* $\mu_M \geq \mu$*, для любой функции* $u \in sbh_*(\mathbb{C})$ *с мерой Рисса* $\upsilon_u = \nu$*, для любых чисел* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+_*$ *и* $p \in \mathbb{R}^+$ *найдётся такая целая функция* $f \in Hol_*(\mathbb{C})$*, что имеет место* $u + \log|f| \in \ sbh_*(\ CC)$ *и*

$$u(iy) + \log\bigl|f(iy)\bigr| \leq B_M\Bigl(iy, \frac{1}{(1+|y|)^p}\Bigr) + \varepsilon|y| \ \text{при всех } y \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

2. *Для любого числа* $\varepsilon \in \mathbb{R}^+_*$ *найдется постоянная* $C_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$*, для которой*

$$l_\nu(r,R) \leq l_\mu(r,R) + \varepsilon \log\frac{R}{r} + C_\varepsilon \quad \text{при всех } 1 \leq r < R < +\infty, \tag{7}$$

где l_ν *и/или* l_μ *можно заменить соотв. на* $\bar{l}_\nu$ *и/или* $\bar{l}_\mu$ *из*

$$\bar{l}_\mu(r,R) := \max\left\{ \int_r^R \frac{\mu(t;\cos^-)}{t^2}\ dt, \int_r^R \frac{\mu(t;\cos^+)}{t^2}\ dt \right\}$$

Литература

1. *Б.Н. Хабибуллин* О малости роста на мнимой оси целых функций экспоненциального типа с заданными нулями // Матем. заметки, **43**:5 (1988), 644–650.

2. *Б.Н. Хабибуллин* О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси// Докл. Акад. Наук СССР, (1988) 270–273.

3. *Б.Н. Хабибуллин* О росте вдоль прямой целых функций экспоненциального типа с заданными нулями — Analysis Math, (1991) 239–256.

4. *P. Koosis* The logarithmic integral. I —Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1988).

АНАЛИЗ КОРРОЗИОННЫХ РЕАКЦИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ АЛЮМИНИЯ

М.Р. Еникеев
enikeev.marat.rus@gmail.com

УДК 54.062, 620.193.4, 004.67, 004.932.2

Рассмотрены реакции коррозии на поверхности алюминия в 0.1 М растворе NaCl. Разработан алгоритм для поиска коррозионной трещины и детектирования пузырьков водорода Реализован алгоритм и найдена кинетика изменения радиуса пузырька водорода после погружения образца алюминия в 0.1 М NaCl (pH 10.8).

Ключевые слова: гистограмма ориентированных градиентов, контурный анализ, компьютерное зрение, коррозия металлов, метод опорных векторов, обработка изображений

ANALYSIS OF CORROSION REACTIONS ON THE SURFACE OF ALUMINUM

Corrosion reactions on the surface of aluminum in a 0.1 M NaCl solution are considered. An algorithm for searching for a corrosion crack and detecting hydrogen bubbles is developed. An algorithm is implemented and the kinetics of changing the radius of a hydrogen bubble after immersing an aluminum sample in 0.1 M NaCl (pH 10.8) is found.

Keywords: oriented gradient histogram, contour analysis, computer vision, metal corrosion, reference vector method, image processing

Процессы коррозии необратимы и часто приводят к отказам различных машин и аппаратов, металлоконструкций, в связи с этим их необходимо обнаруживать на ранних стадиях, давать количественную оценку коррозионного повреждения, прогнозировать опасность развития в случае непринятия мер по усилению коррозионной защиты.

Компьютерное зрение можно определить как теорию и технологию создания машин, которые могут производить обнаружение, слежение и классификацию объектов. В задаче исследования коррозионных поражений наибольший интерес представляют такие задачи, как распознавание коррозионных эффектов на изображении и движение, то есть изменение коррозионных эффектов во времени, их пространственное изменение (площадь, положение центра) [1].

Основными операциями, производимыми при проведении операции распознавания, являются:

– предварительная обработка изображения – сглаживание, фильтрация помех, повышение контраста;

– бинаризация изображения и выделение контуров объектов;

Еникеев Марат Рустемович, УГНТУ (Уфа, Россия); Marat Enikeev (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

– начальная фильтрация контуров по периметру, площади, коэффициенту формы, фрактальности и так далее.

Для исследования использовали образцы цилиндрической формы, изготовленные из алюминия (Al – 99.99 %) с рабочей площадью 1.77 см^2. В качестве рабочего электролита использовался раствор 0.1 M NaCl, pH которого доводили до нужного значения добавлением рассчитанного объема 0.1 M NaOH. Диапазон используемых значений pH составлял 10 - 11.4. Использованные в работе реактивы (NaCl, NaOH) имели марку «ч.д.а.». Все растворы готовили на дистиллированной воде.

Коррозию алюминия изучали с использованием in situ оптической микроскопии с одновременным измерением величины потенциала свободной коррозии.

Для поиска пузырька на изображении использовался метод Histogram of Oriented Gradients (HOG, гистограмма ориентированных градиентов) [2]. Для того, чтобы отличать шум от интересующих нас объектов (пузырьков) использовался метод опорных векторов (SVM) [3].

Литература

1. *Еникеев М.Р., Малеева М.А., Губайдуллин И.М.* Исследование механизма развития коррозионных поражений с использованием компьютерного зрения // Журнал Средневолжского математического общества, **15**:3 (2013), 70-75.

2. *Dalal N.,Triggs B.* Histograms of Oriented Gradients for Human Detection // Proceedings CVPR, IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, **1** (2005), 886-893.

3. *Vapnik V. N.* An Overview of Statistical Learning Theory // IEEE Transactions on Neural Networks, **10**:5 (1999), 988-999.

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕАКЦИИ КАТАЛИТИЧЕСКОЙ ИЗОМЕРИЗАЦИИ ПЕНТАН-ГЕКСАНОВОЙ ФРАКЦИИ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Л.В. Еникеева, А.Г. Фасхутдинов, И.А. Арефьев, И.М. Губайдуллин
leniza.enikeeva@gmail.com

УДК 519.688

Рассмотрены основные схемы превращений каталитической изомеризации пентан-гексановой фракции, вероятные с точки зрения термодинамики. Исходя из литературного анализа возможных схем превращения, механизма процесса и на основе экспериментальных данных построена математическая модель реакторного блока процесса и определены кинетические параметры.

Ключевые слова: математическое моделирование, химическая кинетика, каталитическая изомеризация

Investigation of the catalytic isomerization of the pentane-hexane fraction by mathematical modeling

The main conversion schemes of the catalytic isomerization of the pentane-hexane fraction, which are probable from the point of view of thermodynamics, are considered. Based on the literature analysis of possible conversion schemes, the mechanism of the process, and based on experimental data, a mathematical model of the reactor unit of the process is constructed and kinetic parameters are determined.

Keywords: mathematical modeling, chemical kinetics, catalytic isomerization

В настоящее время производство экологически чистых высокооктановых бензинов – это сложная проблема для ряда отечественных нефтеперерабатывающих заводов. Поскольку, кроме повсеместно распространенного процесса каталитического риформинга для этого необходимы такие энергоемкие процессы, как каталитический крекинг, алкилирование и изомеризация легких парафинов, а также более жесткие процессы гидроочистки. Помимо этого вводятся жесткие ограничения по содержанию ароматических углеводородов и, в особенности, бензола в автомобильных бензинах при одновременном сохранении октанового числа. Путем структурного изменения углеродного скелета, каталитическая изомеризация легких парафинов позволяет получать высокооктановый компонент автомобильного бензина с минимальным содержанием ароматических углеводородов. Эффективность данного процесса объясняется использованием в качестве сырья низкооктановых компонентов нефти, как фракции 62–70 ^{0}С, а также рафинатов

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-37-60014.

Еникеева Ленизa Васимовна, к.ф.-м.н., УГНТУ (Уфа, Россия); Leniza Enikeeva (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

Фасхутдинов Азамат Гумерович, ИНК УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Azamat Faskhutdinov (Institute of Petrochemistry and Catalysis, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)

Арефьев Илья Александрович, УГНТУ (Уфа, Россия); Andrey Petrov (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

Губайдуллин Ирек Марсович, д.ф.-м.н., ИНК УФИЦ РАН, УГНТУ (Уфа, Россия); Gubaydullin Irek (Institute of Petrochemistry and Catalysis, Russian Academy of Sciences, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

каталитического риформинга. Процесс осуществляется в среде водорода в присутствии бифункциональных катализаторов [1].

Объектом исследования является реакторный блок установки каталитической изомеризации пентан-гексановой фракции, состоящий из каскада трех реакторов. В качестве сырья взяли гидроочищенную бензиновую фракцию, содержащую в основном пентан и гексан.

Разработка на основе механизма реакций адекватной кинетической модели является важным этапом в создании математической модели. Поскольку путем решения обратных кинетических задач определяются параметры, которые будут служить основой для математической модели [2]. А также учитывающие физико-химические аспекты процесса. В конечном итоге математическая модель позволит проводить прогнозируемые расчеты, подобрать оптимальные технологические условия с целью повышения ресурсоэффективности процесса каталитической изомеризации пентан-гексановой фракции.

Литература

1. *Ахметов С.А.* Технология глубокой переработки нефти и газа // Учебное пособие для вузов. — Уфа: Гилем, 2002. — 672.

2. *Еникеева Л.В.* Оптимизация кинетических параметров низкотемпературной паровой конверсии метан-пропановой смеси // Вестник Башкирского университета, **22**:2 (2017), 386-390.

LAX REPRESENTATION OF THE (1+1)-DIMENSIONAL DISPERSIONLESS SCHR?DINGER-MAXWELL-BLOCH EQUATION

K.Yesmakhanova, Zh.Umurzakhova
kryesmakhanova@gmail.com

УДК 530.182, 517.957

Now, great interest is in the study of solitons, which are used both in theoretical physics and mathematics. The theory of solitons is based on nonlinear integrable equations which solutions are obtained by the inverse scattering method. Dispersionless equations being a subclass of integrable differential equations are interesting, too.

We research the (1+1)-dimensional Schr?dinger-Maxwell-Bloch equation (SMBE), which describes the optical pulse propagation in an erbium-doped fiber. In previous work, we obtained the dispersionless limit for SMBE. Here we derived the Lax pair for the (1+1)-dimensional dispersionless SMBE, which proves its integrability.

Keywords: Schredinger-Maxwell-Bloch equation, Lax pair, dispersionless limit, soliton theory, inverse scattering method.

Есмаханова Куралай Ратбаевна , k.ф.-м.н. ЕНУ им.Л.Н.Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Kuralay Yesmakhanova (ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Умурзахова Жанар Бапаховна, докторант ЕНУ им.Л.Н.Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Zhanar Umurzakhova (ENU, Nur-Sultan, Kazakhstan)

МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИЙ СТРУНЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

М.Б. Зверева, М.И. Каменский
margz@rambler.ru, mikhailkamenski@mail.ru

УДК 517.927

Вариационными методами изучена модель деформаций стилтьесовской струны с локализованными взаимодействиями с окружающей средой. Одно из краевых условий является нелинейным и возникает за счет втулки, ограничивающей движение соответствующего конца струны. Доказаны необходимое и достаточное условия экстремума энергетического функционала; вычислены критические нагрузки, при которых происходит соприкосновение конца струны с втулкой; проанализирована зависимость решения от длины втулки.

Ключевые слова: интеграл Стилтьеса, функции ограниченной вариации, функционал энергии.

A model of string deformations with nonlinear boundary condition

A model of deformations of a Stieltjes string with localized interactions with the environment is studied by variational methods. One of the boundary conditions is nonlinear and occurs due to a sleeve, which limits the movement of the end of the string. In the present work the necessary and sufficient conditions for the extremum of the energy functional are proved; the critical loads at which the contact of the end of the string with the sleeve occurs are calculated; the dependence of the solution on the sleeve length is analyzed.

Keywords: Stieltjes integral, functions of bounded variation, energy functional.

Пусть вдоль отрезка $[0, l]$ натянута струна. Под воздействием внешней силы, задаваемой функцией $F(x)$, струна отклоняется от положения равновесия и принимает форму $u(x)$. Предполагается, что струна помещена в окружающую среду с локализованными упругими опорами (пружинами). Будем считать, что левый конец струны также упруго закреплен с помощью пружины жесткости γ. Правый конец струны с помощью кольца прикреплен к спице, по которой он может скользить (без учета трения). При этом спица находится внутри втулки, представленной отрезком $C = [-h, h]$. В зависимости от приложенной внешней силы, правый конец струны остается свободным, что может быть выражено условием $u'(l) = 0$, либо касается граничной точки втулки, т.е. выполняется условие $u(l) = \pm h$. Математическая модель задачи имеет вид

$$\begin{cases} -p(x)u'(x) + \int\limits_0^x u dQ = F(x) - F(0), \\ u(l) \in C, \\ -u'(l) \in N_C(u(l)), \end{cases} \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственного задания (проект № 1.3464.2017/ ПЧ.), гранта РФФИ (проект № 17-51-52022 МНТ-а.).

Зверева Маргарита Борисовна, к.ф.-м.н., доцент, ВГУ (Воронеж, Россия); Margarita Zvereva (Voronezh State University, Voronezh, Russia)

Каменский Михаил Игоревич, д.ф.-м.н., профессор, ВГУ (Воронеж, Россия); Mikhail Kamenskii (Voronezh State University, Voronezh, Russia)

где множество $N_C(u(l))$ — нормальный конус к C в точке $u(l)$, определяемый как

$$N_C(u(l)) = \{\xi \in R : \xi(c - u(l)) \le 0 \quad \forall c \in C\}.$$

Здесь функция $p(x)$ характеризует упругость струны, $Q(x)$ и $F(x)$ описывают упругую реакцию внешней среды и внешнюю нагрузку соответственно, интеграл понимается по Стилтьесу. Решения $u(x)$ задачи (1) принадлежат классу абсолютно-непрерывных функций, производные которых имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$. Если в точке $x = \xi \in [0, l)$ функция $F(x)$ терпит разрыв, то скачок $\Delta F(\xi)$ равен сосредоточенной в соответствующей точке силе. Скачки функции Q совпадают с упругостями прикрепленных к струне пружин. Заметим, что условие упругого закрепления левого конца струны $-p(+0)u'(+0) + \gamma u(0) = \Delta F(0)$ непосредственно следует из уравнения в (1).

Модель (1) была получена с помощью принципа Лагранжа-Гамильтона, согласно которому, реальная форма, принятая струной, является точкой минимума функционала потенциальной энергии

$$\Phi(u) = \int_0^l \frac{pu'^2}{2} dx + \int_0^l \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^l u dF$$

при условии $|u(l)| \le h$.

Теорема 1. *Пусть функция $Q(x)$ не убывает на $[0, l]$, функции $p(x)$, $F(x)$ имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$, причем, $\inf\limits_{(0,l]} p > 0$, и функции p, Q, F непрерывны в точке $x = l$. Тогда решение задачи (1) существует и единственно. При $h \to 0$ решение задачи (1) равномерно на $[0, l]$ стремится к решению задачи*

$$\begin{cases} -p(x)u'(x) + \int\limits_0^x u dQ = F(x) - F(0), \\ u(l) = 0 \end{cases}$$

Литература

1. *Покорный Ю.В.* О дифференциалах Стилтьеса в обобщенной задаче Штурма-Лиувилля // Докл. АН., **383**:5 (2002), 1-4.

2. *Покорный Ю.В., Зверева М.Б., Шабров С.А.* Осцилляционная теория Штурма-Лиувилля для импульсных задач // УМН, **63**: 1(379) (2008), 111-154.

3. *Покорный Ю.В., Бахтина Ж.И., Зверева М.Б., Шабров С.А.* Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах . — М.: Физматлит, 2009.

4. *Покорный Ю.В.* Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях // Докл. АН., **364**:2 (1999), 167-169.

5. *Zvereva M.* A string oscillations simulation with nonlinear conditions // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, **72** (2017), 141-150.

6. *Kamenskii M., Wen Ch.-F., Zvereva M.* A string oscillations simulation with boundary conditions of hysteresis type // Optimization **6**:9 (2018), 1321-1332.

7. *Kamenskii M., Liou Y.-Ch., Wen Ch.-F., Zvereva M.* On a hyperbolic equation on a geometric graph with hysteresis type boundary conditions // Optimization, (2019) https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1561694.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ВО ВРЕМЕНИ ПАРАМЕТРАМИ

Л.С.Ибрагимова
lilibr@mail.ru

УДК 51.76

Рассмотрены некоторые вопросы использования неавтономных дискретных моделей для описания динамики поведения сложных динамических систем. Обсуждаются вопросы определения коэффициентов модели в ситуации, когда эти параметры зависят от времени. Предложена соответствующая дискретная математическая модель, позволяющая прогнозировать динамику поведения системы с учетом изменяющихся во времени внешних и внутренних факторов.

Ключевые слова: дискретная модель, динамика системы, неавтономное уравнение, параметры модели

Mathematical modeling of dynamical systems with time-varying parameters

In the paper we consider some issues on using non-autonomous discrete models for describing the dynamics of the behavior of complex dynamical systems. We discuss the questions on determining the coefficients of the model in the case, when these coefficients are time dependent. We propose a corresponding discrete mathematical model allowing to predict the dynamics of the behavior of the system under varying in time external and internal factors.

Keywords: discrete model; dynamics of a system; non-autonomous equation; parameters of a model

В задачах математического моделирования сложных процессов в природных, технических, биологических и др. системах часто используются дифференциальные уравнения $x' = f(x, \mu)$, либо разностные уравнения $x_{n+1} = f(x_n, \mu)$ (см., например, [1]). Здесь μ - параметры модели, зависящие от внешних или внутренних факторов, а функция $f(x, \mu)$ часто выбирается из некоторого набора стандартных функций или их модификаций. Приведенные уравнения являются автономными и, следовательно, значение их решений полностью определяется только значением решения в начальный момент. Такое предположение естественно, если внешние и внутренние параметры системы постоянны во времени. В действительности эти параметры могут изменяться и, как следствие, существенно сказываться на динамике системы. В такой ситуации более естественным является использование неавтономных уравнений $x' = f(x, \mu(t))$ или $x_{n+1} = f(x_n, \mu(n))$.

При построении таких моделей одной из основных является задача определения характера зависимости параметра μ от времени, т.е. определения функций $\mu(t)$ или $\mu(n)$.

Приведем в краткой форме предлагаемую схему решения этой задачи. Ограничимся определением функции $\mu(n)$ для выбранной дискретной модели

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu(n)), \tag{1}$$

Ибрагимова Лилия Сунагатовна, к.ф.-м.н, доцент кафедры алгебры и геометрии БашГУ (Уфа, Россия); Liliya Sunagatovna Ibragimova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Пусть для определенности это уравнение описывает динамику численности какой-либо биологической популяции, а μ является скалярным параметром. Эта динамика часто бывает достаточно сложной, характеризующейся как периодами быстрого возрастания численности и не менее быстрого ее убывания, так и периодами более или менее стабильной численности. На численность популяции сильно влияют внешние и внутренние факторы, в первую очередь, погодные и климатические условия, которые нельзя назвать постоянными из года в год. Поэтому для описания динамики ее численности естественно использовать неавтономное разностное уравнение вида (1).

Пусть известна следующая информация:

- значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ численности популяции в годы $j = 1, 2, \ldots, k$;

- климатические и природные параметры $\mathit{\Delta}_1(j), \mathit{\Delta}_2(j), \ldots, \mathit{\Delta}_m(j)$ в те же годы, т.е. $j = 1, 2, \ldots, k$.

По этой информации требуется определить численность популяции в год с номером $j = k + 1$. Предлагается следующий алгоритм решения этой задачи.

На первом этапе значение функции $\mu(j)$ в моменты $j = 1, 2, \ldots, k - 1$ будем определять равенством

$$\mu(j) = \alpha_1 \mathit{\Delta}_1(j) + \alpha_2 \mathit{\Delta}_2(j) + \ldots + \alpha_m \mathit{\Delta}_m(j)\,,$$

в котором коэффициенты α_i могут быть найдены, например, методом наименьших квадратов. При этом следует использовать уравнение (1) и имеющуюся информацию по параметрам $\mathit{\Delta}_l(j)$ за годы $j = 1, 2, \ldots, k - 1$ и по численности x_j за годы $j = 1, 2, \ldots, k$.

На втором этапе определим значение функции $\mu(j)$ в момент $j = k$ посредством равенства:

$$\mu(k) = \alpha_1 \mathit{\Delta}_1(k) + \alpha_2 \mathit{\Delta}_2(k) + \ldots + \alpha_m \mathit{\Delta}_m(k)\,.$$

Наконец, по формуле (1) найдем искомое значение численности популяции: $x_{k+1} = f(x_k, \mu(k))$.

Модель будет зависеть и от выбора функции $f(x, \mu)$ в (1); поэтому естественно проанализировать ее свойства с учетом различных вариантов выбора этой функции.

Указанный подход был применен в работе [2] в задаче моделирования динамики численности бурзянской бортевой пчелы, обитающей на территории заповедника “Шульган-Таш”.

Литература

1. *Братусь А.С., Новожилов А.С., Платонов А.П.* Динамические системы и модели биологии. М.: Физматлит, 2010. 400 с.

2. *Ибрагимова Л.С., Юмагулов М.Г., Ишбирдин А.Р., Ишмуратова М.М.* Математическое моделирование динамики численности биологической популяции при изменяющихся внешних условиях на примере бурзянской бортевой пчелы (Apis mellifera L., 1758). // Математическая биология и биоинформатика. 2017. Т. 12. № 1. С. 224-236.

СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ В УРАВНЕНИИ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Э.С. Имангулова
suyundukova89@mail.ru

УДК 517.518

Рассматривается задача о синхронизации вынужденных колебаний в динамических системах, описываемых уравнением Ван-дер-Поля. Предлагается операторная схема, позволяющая определить значения параметров модели, при которых в системе возникают вынужденные колебания малой амплитуды.

Ключевые слова: синхронизация; вынужденные колебания; динамическая система; бифуркация

Keywords: synchronization, forced oscillations, dynamical system, bifurcation

В настоящей работе рассматривается уравнение генератора Ван-дер-Поля при внешнем гармоническом воздействии (см., например, [1]):

$$x'' + (x^2 - \alpha)x' + x = \beta \cos t\,, \tag{1}$$

где α – управляющий параметр автономного генератора, β – амплитуда внешнего воздействия.

При $\beta = 0$, т.е. при отсутствии внешнего периодического сигнала, значение $\alpha = 0$ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа системы

$$x'' + (x^2 - \alpha)x' + x = 0\,, \tag{2}$$

при этом циклы малой амплитуды в окрестности точки равновесия $x = 0$ возникают при $\alpha > 0$, а именно, при каждом малом положительном α возникает в точности один орбитально устойчивый цикл уравнения (2), амплитуда которого при увеличении α растет примерно как $\sqrt{\alpha}$, а период $T(\alpha)$ растет в соответствии с формулой $T(\alpha) = 2\pi + O(\alpha)$.

Уравнение (1) можно рассматривать как динамическую систему, имеющую собственную частоту $\nu(\alpha) = 2\pi/T(\alpha)$ и на которую воздействует внешний периодический сигнал $\beta \cos t$ частоты $\nu_0 = 1$. Наличие внешнего воздействия приводит к синхронизации периодических колебаний, а именно, в системе (1) при малых α и β устанавливаются колебания с частотой внешнего воздействия.

В настоящем докладе предлагается подход, направленный на исследование синхронизации в системе (1) и развивающий схему, предложенную в [2]. Полагая $z_1 = x$ и $z_2 = x'$, уравнение (1) представим в виде системы

$$z' = A(\alpha)z + a(z) + \beta g(t)\,, \tag{3}$$

где

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad a(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ -z_1^2 z_2 \end{bmatrix}, \quad g(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Имангулова Эльвира Сальмановна, БашГУ (Уфа, Россия); Elvira Imangulova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Задача о 2π-периодических решениях системы (3) равносильна задаче о решениях операторного уравнения

$$y = B(\alpha)y + b(y,\alpha) + u(\alpha,\beta)\,, \quad y \in R^2\,, \tag{4}$$

где $B(\alpha) = e^{2\pi A(\alpha)}$,

$$b(y,\alpha) = \int\limits_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A(\alpha)} a(z(s))ds\,, \quad u(\alpha,\beta) = \beta \int\limits_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A(\alpha)} g(s)ds\,;$$

здесь $z(t)$ – решение задачи Коши для уравнения (3) при $z(0) = y$.

Положим $B'_\alpha = B'_\alpha(\alpha_0)$, $u'_\beta = u'_\beta(\alpha_0,\beta_0)$ и

$$e(\varphi) = e^*(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}, \quad g(\varphi) = g^*(\varphi) = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнено условие*

$$\rho = (B'_\alpha e, e^*)(u'_\beta, g^*) - (B'_\alpha e, g^*)(u'_\beta, e^*) \neq 0\,. \tag{4}$$

Тогда существуют определенные при малых $\varepsilon \geqslant 0$ *непрерывные функции* $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ *и* $\beta = \beta(\varepsilon)$ *такие, что* $\alpha(0) = 0$ *и* $\beta(0) = \beta_0$, *и уравнение* (1) *при* $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ *и* $\beta = \beta(\varepsilon)$ *имеет нестационарные* 2π*-периодические решения* $x(t,\varepsilon)$ *такие, что* $\max\limits_t |x(t,\varepsilon)| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

В рассматриваемой задаче $\rho = \pi^2 \cos\varphi$. Следовательно, почти при всех φ (за исключением значений $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ и $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$) указанный в теореме достаточный признак выполнен. Дальнейшие вычисления и расчеты показывают, что бифуркационные решения уравнения (4) возникают при значениях (α,β) параметров α и β из достаточно узкого клювообразного множества Υ ("языка Арнольда") на плоскости параметров, выходящего своим острием на точку $(0,0)$ (см. Рис. 1).

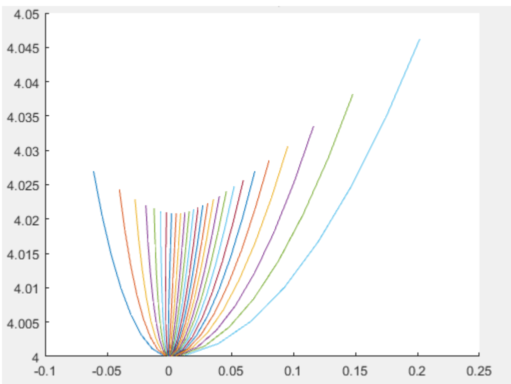


Рис. 1. Множества синхронизации в системе (1).

Литература

1. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

2. *Юмагулов М.Г., Имангулова Э.С.* Метод функционализации параметра в задаче о седло-узловых бифуркациях динамических систем. // Автомат. и телемех., 2017, № 4, 63–77; Autom. Remote Control, 78:4 (2017), 630–642

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЮРАЦИИ ДЛЯ АНАЛИЗА РИСКА ОБЛИГАЦИИ

А. Н. Исхакова
aliya_iskhakova_2018@mail.ru

УДК 51-77

Дюрация позволяет оценить рискованность вложений. Основная цель инвестора — это свести к минимуму риски потерь, при сохранении необходимого уровня доходности. Этот параметр, способный сравнивать на рынке множество бумаг с различным периодом обращения, доходностью и разными выплатами по купонам. В данной статье рассмотрим вычисления дюрации для оценки риска ценной бумаги облигации.

Ключевые слова: дюрация, облигация, купонная норма процента, сумма платежа.

Duration calculation for bond risk analysis

Duration allows you to assess the riskiness of investments. The main objective of the investor is to minimize the risks of losses, while maintaining the required level of profitability. This parameter is able to compare a lot of securities on the market with different circulation periods, yield and different coupon payments. In this article, we consider duration calculations for assessing the risk of a bond security.

Keywords: duration, bond, coupon rate of interest, payment amount.

Рассмотрим средний срок дисконтированных платежей для характеристики облигации:

$$D = \frac{\sum\limits_j t_j S_j \nu^{t_j}}{\sum S_j \nu^{t_j}}, \tag{1}$$

где D — дюрация, t — сроки платежей по купонам в годах, S_j — сумма платежа. Знаменатель равен рыночной цене облигации, т.е. формулу (1) можно записать как:

$$D = \frac{g \sum t_j \nu^{t_j} + \nu^n}{K/100}, \tag{2}$$

здесь g — купонная норма процента, n — общий срок облигации, K — курс облигации.

Очевидно, что для облигации с 0 купоном $D = n$, а в остальных случаях $D < n$. Чем меньше параметр дюрации по долговой бумаге, тем меньше рисков несет инвестор.

Рассмотрим пример вычисления дюрации для облигации с номинальной стоимостью 1000 рублей, купонным доходом 80 рублей, доходностью 10% и

Исхакова Алия Нурмухаметовна, магистрант 2-го года обучения, БашГУ (Уфа, Россия); Aliya Iskhakova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

периодом обращения три года. Решим этот пример с помощью математического пакета Matlab.

Разработана программа вычисления дюрации. Входные данные приведены в таблице 1.

Таблица 1
Входные данные

N	1000
S	[80 80 1080]
i	$0,1$
n	3
t	[1 2 3]

Программа вычисляет для каждого года ν^t, затем каждый член умножает на соответствующий S и суммирует результаты умножения. Далее вычисляет также для каждого года $\nu^t \cdot S \cdot t$ и также суммирует результат умножения (см. таблицу 2).

Таблица 2
Выходные данные

ν^t	[0,9091 0,8264 0,7513]
$\nu^t S$	[72,7273 66,1157 811,4200]
$\nu^t \cdot S \cdot t$	[72,7273 132,2314 2434,2]
D	2,7774

Результатом программы является число 2,7774. Это и есть дюрация для облигации данного примера.

Литература

1. *Буренин А.Н.* Рынок ценных бумаг и производственных финансовых инструментов: Учебное пособие. — М.: 1 Федеративная Книготорговая Компания, 1998. — 352 с.

2. *Капитоненко В.В.* Задачи и тесты по финансовой математике: Учебное пособие. — М.: Финансы и статистика, 2007 — 256 с.

3. *Четыркин Е.М.* Финансовая математика: Учеб. — М.: Дело, 2000. — 400 с.

ФОРМУЛА РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО СЛЕДА ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Х.К. Ишкин, Л.Г. Валиуллина
Ishkin62@mail.ru, L.matem2012@yandex.ru

УДК 517.984

Вычислен регуляризованный след оператора Штурма–Лиувилля на полуоси с логарифмическим потенциалом.

Ключевые слова: оператор Штурма–Лиувилля, регуляризованные следы

The regularized trace formula for the Sturm–Liouville operator with a logarithmic potential

The regularized trace formula for the Sturm-Liouville operator on a semi-axis with a logarithmic potential is obtained..

Keywords: Sturm–Liouville operator, regularized trace.

Пусть L – оператор Штурма–Лиувилля, порожденный в $L^2(0,+\infty)$ дифференциальным выражением $-y'' + \ln xy$ и краевым условием $y(0) = 0$. Спектр оператора L дискретен [1]. Используя асимптотическое уравнения для спектра, полученное в работе [2], легко показать, что

$$\lambda_k = s_k + O\left(k^{-1}(\log k)^{-3/2}\right), \tag{1}$$

$$s_k = \log(2\sqrt{\pi}k) - \frac{k_0 - 1/4}{k}, \tag{2}$$

где k_0 некоторое целое число, обеспечивающее сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - s_k). \tag{3}$$

Обозначим через σ сумму этого ряда. Число σ называют регуляризованным следом оператора L. Цель работы — найти k_0 и вычислить σ.

Регуляризованные следы операторов вида L в случае степенного роста потенциала хорошо изучены (см. [3] и имеющиеся там ссылки). Из формул (1) – (2) следует, что при любом n оператор L^{-n} не ядерный, так что метод ζ-функций [4] в данной ситуации неприменим. С другой стороны, θ-функция оператора L

$$\Theta(t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k}$$

определена на полуплоскости $\Re t > 1$. Используя стандартную технику, функцию Θ удается продолжить на полуплоскость $\Re t > 0$ так, что справедлива оценка

$$\Theta(t) \sim -\theta_0 - \theta_1 t + O(t^2),\ t \to +0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18–11–00002).

Ишкин Хабир Кабирович, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Khabir Ishkin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Валиуллина Ляйсан Габдулловна, БашГУ, УГНТУ (Уфа, Россия); (Bashkir State University, Ufa State Petroleum Technological University Ufa, Russia)

где $\theta_0 = k_0+1/4,\ \theta_1 = \sigma+(\theta_0-1/2)\gamma-\ln 2/2+\ln(2\sqrt{\pi})(\theta_0+1),\ \gamma$ – постоянная Эйлера.

Далее в соответствии с методом параболических уравнений [5] мы находим другое, независимое от (4), разложение для Θ. Для этого мы выводим интегральное представление для ядра оператора e^{-tL} при $\Re\, t > 0$, откуда будет следовать

Теорема 1. *При* $\Re\, t > 1$

$$\Theta(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_{\Gamma_{m\delta}} e^{-t\lambda} G(x,x,\lambda)d\lambda,$$

где $G(x,y,\lambda)$ *– ядро оператора* $(L-\lambda)^{-1}$, $\Gamma_{m\delta}$ *– объединение двух лучей* $\gamma_\pm = \{\lambda = m + re^{\pm i\delta}\},\ m < \lambda_1,\ 0 < \delta < \pi/2$, *интеграл берется от* $e^{i\delta}\infty$ *до* $e^{-i\delta}\infty$.

Следствие. *Справедливо разложение*

$$\Theta(t) \sim -1/4 + O(t^2),\ t \to +0. \tag{5}$$

Теорема 2. *Постоянная* k_0 *равна 0 и справедлива формула*

$$\sigma = \left[\gamma + \ln 2/2 - 3\ln(2\sqrt{\pi})\right]/4.$$

Литература

1. *Molchanov A.M.* On conditions for discreteness of the spectrum of self-adjoint differential equations of the second order, (Russian) Trudy Moskov. Mat. Obsch., **2** (1953), 169-199.

2. *Валиуллина Л.Г., Ишкин Х.К.* Об условиях локализации спектра несамосопряженного оператора Штурма–Лиувилля с медленно растущим потенциалом // Дифференциальные уравнения. Спектральная теория, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **141** (2017), 48-60*Ishkin Kh.K., Valiullina L.G.* On the localization conditions for the spectrum of a non-self-adjoint Sturm–Liouville operator with slowly growing potential // Journal of Mathematical Sciences, **241**:5 (2019), 556–569.

3. *Ишкин Х.К.* Асимптотика спектра и регуляризованный след сингулярных дифференциальных операторов высшего порядка // Дифференц. уравне- ния, **31**:10 (1995), 1658-1668; англ. версия:*Ishkin Kh.K.* Asymptotic behavior of the spectrum and the regularized trace of higher-order singular differential operators // Diff. Equ., **31**:10, (1995), 1622-1632.

4. *Seeley R.T.* The powers A^s of an elliptic operator A (preprint); Russian transl., Matematika, **12**:1 (1968), 96-112.

5. *Minakshisundaram S., Pleijel A.* Some Properties of the Eigenfunctions of The Laplace-Operator on Riemannian Manifolds, Canadian Journal of Mathematics, **1**:3 (1949), 242-256.

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ВОЗМУЩЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА КРИВОЙ В СЛУЧАЕ НЕТРИВИАЛЬНОЙ МОНОДРОМИИ

Х.К. Ишкин, А.Р. Искандарова
Ishkin62@mail.ru, iskandarovaaa98@mail.ru

УДК 517.984

Работа посвящена исследованию асимптотики спектра оператора $T = T_0 + V$, где T_0 – оператор Штурма–Лиувилля на гладкой кривой γ с потенциалом, имеющим регулярную особую точку, в которой удовлетворяет условию тривиальной монодромии, V – оператор умножения на функцию v, голоморфную на замыкании выпуклой оболочки кривой γ. Показано, что если возмущение порождает нетривиальную монодромию, то спектр разбивается на 2 серии, уходящие в бесконечность вдоль 2 различных лучей. Найдены несколько первых членов асимптотики каждой серии.

Ключевые слова: дифференциальные операторы на кривой, нетривиальная монодромия, спектральная неустойчивость, локализация спектра

The regularized trace formula for the Sturm–Liouville operator on a curve in the nontrivial monodromy case

The work is devoted to the study of the spectrum asymptotics of the operator $T = T_0 + V$, where T_0 – is the Sturm–Liouville operator on a smooth curve γ with potential having a regular singular point outside γ at which satisfies the trivial monodromy condition, V is the operator of multiplication by a function v holomorphic on the closure of the convex hull of the curve γ. It is shown that if the perturbation gives rise to a nontrivial monodromy, then the spectrum is divided into 2 series extending to infinity along 2 different rays. The first few terms of the asymptotics of each series are found.

Keywords: differential operator on a curve, nontrivial monodromy, spectral instability, spectrum localization

Пусть γ – некоторая кривая на комплексной плоскости с параметризацией $z = x + ig(x),\ x \in [0, 1]$, где g кусочно-гладкая на $[0, 1]$ функция. Обозначим через T_γ оператор, действующий по правилу $T_\gamma y = -y''$ на своей области определения $D(T_\gamma) = \{y \in W_2^2(\gamma) : y(0) = y(1) = 0\}$. Как и в классическом случае $\gamma = [0, 1]$, спектр T_γ имеет вид $\{(\pi n)^2\}_{n=1}^{\infty}$. Однако при $\gamma \neq [0, 1]$, спектр T_γ может сильно меняться при малых возмущениях. Так, если $L_\gamma = T_\gamma + Q$, где Q – оператор умножения на функцию q, то собственные числа L_γ могут на бесконечности локализоваться около конечного или счетного числа лучей, даже если функция q бесконечно дифференцируема и имеет сколь угодно малую норму $\|q\|_\infty$ [1, 2]. В работе [3] показано, что если область Ω, ограниченная кривой γ и отрезком $[0, 1]$, выпукла, то спектр

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18–11–00002).

Ишкин Хабир Кабирович, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Khabir Ishkin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Искандарова Алия Рафисовна, магистрант 1-го года обучения ФМиИТ, БашГУ (Уфа, Россия); Aliya Iskandarova(Bashkir State University, Ufa, Russia)

L_γ имеет такую же асимптотику, что и спектр T_γ, тогда и только тогда, когда функция q мероморфна в области Ω и каждом полюсе a удовлетворяет условию безмонодромности Дюйстермаата–Грюнбаума [4]:

$$q(z) = \frac{k(k+1)}{(z-a)^2} + \sum_{j=0}^{k} c_j (z-a)^{2j} + (z-a)^{2k+1} r(z), \tag{1}$$

где $k \in \mathbb{N}$, $c_0, \ldots, c_{k-1}$ — некоторые числа, функция r голоморфна в некоторой окрестности точки a.

В случае, когда функция q не удовлетворяет условию безмонодромности, картина совсем другая. Как показано в [5], если

$$q(z) = \frac{k(k+1)}{(z-a)^2} + V,\ a \in \Omega, \tag{2}$$

где $k \notin \mathbb{Z}, V$ – голоморфна в $\overline{\Omega}$, то $\sigma(L_\gamma) = \{\mu_n^{(1)}\} \cup \{\mu_n^{(2)}\}$ и

$$\mu_n^{(1)} \sim \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2, \quad \mu_n^{(2)} \sim \left(\frac{\pi n}{1-a}\right)^2, \quad n \to \infty.$$

Предположим теперь, что в (2) $k \in \mathbb{N}$ и функция V такова, что q не удовлетворяет условию (1), то есть

$$V(z) = \sum_{j=0}^{\infty} V_j (z-a)^j,\ |z-a| < R,$$

$m := \min\{j :\ V_{2j-1} \neq 0\} \leq k$. Справедлива

Теорема 1. *Спектр оператора L_γ состоит из 2 серий $\left\{\mu_j^{(1)}\right\}$ и $\left\{\mu_j^{(2)}\right\}$, для которых справедливы следующие асимптотические разложения:*

$$\mu_j^{(1)} = \left(\frac{\pi j}{a}\right)^2 \left[1 + \frac{2m-2}{\pi j i} \ln\left(\frac{C_1}{\sqrt[2m-2]{V_{2m-1}}} j\right) + O\left(\frac{\ln^2 j}{j^2}\right)\right],$$
$$\mu_j^{(2)} = \left(\frac{\pi j}{1-a}\right)^2 \left[1 + \frac{2m-2}{\pi j i} \ln\left(\frac{C_2}{\sqrt[2m-2]{V_{2m-1}}} j\right) + O\left(\frac{\ln^2 j}{j^2}\right)\right],$$

где C_1, C_2 – явно вычисляемые положительные постоянные, ветвь логарифма фиксирована, для каждой серии – своя.

Литература

1. *Ishkin Kh.K.* On localization of the spectrum of the problem with complex weight // J. Math. Sci., **150**:6 (2008), 2488–2499.
2. *Ishkin Kh.K.* Necessary Conditions for the Localization of the Spectrum of the Sturm–Liouville Problem on a Curve // Math. Notes, **78**:1 (2005), 508–523.
3. *Duistermaat J.J., Grünbaum F.A.* Differential equations in the spectral parameter // Commun. Math. Phys., **103**:2 (1986), 177–240.
4. *Ishkin Kh.K.* A localization criterion for the spectrum of the Sturm–Liouville operator on a curve // St. Petersburg Math. J., **28**:1 (2017), 37–63.
5. *Ishkin Kh.K.* On the Uniqueness Criterion for Solutions of the Sturm–Liouville Equation // Math. Notes, **84**:4 (2008), 515–528.

О КЛАССЕ ПОТЕНЦИАЛОВ С ТРИВИАЛЬНОЙ МОНОДРОМИЕЙ

Х.К. Ишкин, А.Д. Ахметшина
Ishkin62@mail.ru, akhmetshina_ azaliya_ 1997@mail.ru

УДК 517.984, 517.925

Рассматривается задача описания класса мероморфных в некоторой односвязной области Ω потенциалов, удовлетворяющих условию тривиальной монодромии. Показано, что для любого набора точек, которые могут сгущаться только к границе Ω, существует достаточно широкий класс потенциалов с тривиальной монодромией с полюсами в этих точках. В случае, когда указанный набор конечен, дано полное описание класса потенциалов с тривиальной монодромией.

Ключевые слова: спектральная неустойчивость, локализация спектра, уравнение Штурма–Лиувилля, тривиальная монодромия

On the class of potentials with trivial monodromy

We consider the problem of describing the class of meromorphic in a simply connected domain Ω potentials for which the Sturm–Liouville equation has trivial monodromy. It is shown that for any set of points that can accumulate only to the boundary of Ω, there is a fairly wide class of potentials with trivial monodromy with poles at these points. In the case when the indicated set is finite, we have given a complete description of the class of potentials with trivial monodromy.

Keywords: spectral instability, spectrum localization, Sturm–Liouville equation, trivial monodromy

Пусть γ – кривая с параметризацией $z(x) = x + is(x),\ x \in [0,1]$, где функция s гладкая, выпуклая вниз функция и $s(0) = s(1) = 0$, и пусть $q \in L^1(\gamma)$. Обозначим через L_γ оператор, действующий в пространстве $L^2(\gamma)$ по правилу $D(L_\gamma) = \{y \in L^2(\gamma) :\ y' \in AC(\gamma), -y'' + qy \in L^2(\gamma),\ y(0) = y(1) = 0\},\ L_\gamma y = -y'' + qy$.

Точно так же, как в случае $\gamma = [0,1]$ (см., например, [1, § 17, теорема 1]), доказывается, что оператор L_γ плотно определен и замкнут. В работах [2, 3] показано, что спектр этого оператора локализуется около одного луча тогда и только тогда, когда потенциал допускает мероморфное продолжение в некоторую окрестность Ω кривой γ, удовлетворяющее условию тривиальной монодромии, то есть каждое решение уравнения

$$-y'' + qy = \lambda y,\ z \in \Omega, \tag{1}$$

при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$ также мероморфно в области Ω. Известно [4], что уравнение (1) имеет тривиальную монодромию в области Ω тогда и только тогда, когда для любого полюса $a \in \Omega$ функции q найдется ее окрестность U, такая, что

$$q(z) = \frac{m(m+1)}{(z-a)^2} + \sum_{k=0}^{m} c_k (z-a)^{2k} + (z-a)^{2m+1} r(z),\ z \in U \backslash \{a\}, \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18–11–00002).

Ишкин Хабир Кабирович, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Khabir Ishkin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Ахметшина Азалия Давлетгареевна, магистрант 1-го года обучения ФМиИТ, БашГУ (Уфа, Россия); Azaliya Akhmetshina(Bashkir State University, Ufa, Russia)

где $m \in \mathbb{N}, c_0 \dots, c_m$ – некоторые числа, функция r голоморфна в U.

Пусть $A = \{a_k\}_{k=1}^{N}$ $(N \le \infty)$ – множество точек Ω, которые (при $N = \infty$) могут скапливаться только к границе Ω. Далее пусть $M = \{m_k \in \mathbb{N},\ k = \overline{1, N}\}$. Обозначим через $TM(\Omega, P, M)$ множество функций, голоморфных в $\Omega \backslash P$ и удовлетворяющих в каждой точке a_k условию (2) с $m = m_k$.

Теорема 1. *Пусть* $A = \{a_1, \dots, a_N\}, N < \infty,\ M = \{m_1, \dots, m_N\}$. *Тогда* $q \in TM\,(\Omega, P, M)$ *тогда и только тогда, когда для* q *справедливо представление*

$q(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k(m_k+1)}{(z-a_k)^2} + P_0(z) + P_1(z) r(z),$

$P_0(z) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} c_{kj} \frac{(z-z_k)^{2j-1} \prod_{i \ne k} (z-z_i)^{2m_i}}{(2j-1)! \prod_{i \ne k} (z_k - z_i)^{2m_i}},$

$P_1(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)^{2m_i},$

r – произвольная функция, голоморфная в области Ω.

Пусть $A = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}, M = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ и пусть $|a_k| \searrow 0,\ k \to \infty$.

Теорема 2. *Для произвольной последовательности натуральных чисел* $\{m_k\}_1^{\infty}$ *и набора чисел* $\nu_{ij} (i = 1, 2, \dots \quad j = -2, -1, \dots, m_i - 1)$ *существует функция* q*, удовлетворяющая следующим условиям:*

a) q *голоморфна в области* $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, a_1, a_2, \dots\}$;

b)$\forall\ i \in \mathbb{N}$:

$$q(z) = \sum_{s=-2}^{m_i - 1} \nu_{is} (z - a_i)^s + O\left((z - a_i)^{m_i}\right), \quad z \to a_i.$$

Литература

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

2. *Ishkin Kh.K.* On a Trivial Monodromy Criterion for the Sturm–Liouville equation // Math. Notes. **94**:1 (2013), 508-523.

3. *Ishkin Kh.K.* A localization criterion for the spectrum of the Sturm–Liouville operator on a curve // St. Petersburg Math. J. **28**:1 (2017), 37–63.

4. *Duistermaat J.J., Grünbaum F.A.* Differential equations in the spectral parameter // Commun. Math. Phys. **103**:2 (1986), 177-240.

О СПЕЦИАЛЬНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С КОМПЛЕКСНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Х.К. Ишкин, А.Р. Каримова
Ishkin62@mail.ru, albina.karimova.97@mail.ru

УДК 517.984

Для уравнения Штурма–Лиувилля на полуоси с достаточно гладким комплекснозначным потенциалом, имеющим степенной рост на бесконечности, построено специальное решение, которое при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит $L^2(0, +\infty)$ и при каждом $x \geq 0$ является целой функцией λ.

Ключевые слова: дифференциальные операторы, решение Вейля, функция Вейля, дискретность спектра

On a special solution of the Sturm - Liouville equation with complex potential

For a singular Sturm–Liouville equation with a complex smooth increasing potential we construct a special solution $\varphi(x, \lambda)$ with following properties: for each $\lambda \in \mathbb{C}$ $\varphi(\cdot, \lambda) \in L^2(0, +\infty)$ and for each $x \geq 0$ $\varphi(x, \cdot)$ – an entire function of order $1/2 + 1/\alpha$.

Keywords: differential operators, Weyl solution, Weyl function, spectrum discretness

Рассмотрим уравнение

$$-y'' + qy = \lambda y,\ x > 0, \tag{1}$$

где λ – комплексное число, функция q локально суммируема на $(0, +\infty)$. Известно (см. например, [1, гл. II, § 2]), что если при некотором $a \geq 0$

$$(q^{-1/4})'' q^{-1/4} \in L^1(a, +\infty), \tag{2}$$

то уравнение (1) при $\lambda = 0$ имеет решение φ, удовлетворяющее оценке

$$\varphi(x) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{q(x)}} \exp\left(-\int_a^x \sqrt{q(t)}dt\right),\ x \to +\infty. \tag{3}$$

Здесь и всюду далее считаем $q^{-1/n} = 1/q^{1/n},\ q^{1/n} = \sqrt[n]{q} = |q|^{1/n} e^{i(\arg q)/n}$.

Легко проверить, что если $q \to \infty,\ x \to +\infty$ и функции $q'^2 q^{-5/2}$ и $q'' q^{-3/2}$ суммируемы на $(a, +\infty)$, то оценка (3) будет верна при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\varphi(x, \lambda) \sim \frac{1}{\sqrt[4]{q(x) - \lambda}} \exp\left(-\int_a^x \sqrt{q(t) - \lambda}dt\right),\ x \to +\infty. \tag{4}$$

При указанных условиях функция φ обладает следующим свойством: для каждого достаточно большого $x > 0$ найдется $R(x)$, что функция $\varphi(x, \cdot)$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18–11–00002).

Ишкин Хабир Кабирович, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Khabir Ishkin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Каримова Альбина Ринатовна, магистрант 1-го года обучения ФМиИТ, БашГУ (Уфа, Россия); Albina Karimova(Bashkir State University, Ufa, Russia)

голоморфна в круге $|\lambda| < R(x)$. Однако при исследовании некоторых спектральных свойств оператора, порожденного выражением $-y''+qy$ требуется более полная и детальная информация об аналитических свойствах функции φ относительно параметра λ [2–4]. В предлагаемом сообщении будут обсуждаться условия на q, при которых удается получить такого рода информацию.

1) Существует $a > 0$, что q суммируема на $(0, a)$, дифференцируема на $[a, +\infty)$ и q' абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[a, b]$, $b > a$ и удовлетворяет условиям (2) и $\int_a^{+\infty} |q|^{-1/2}dx < \infty$;

2) На $[a, +\infty)$ функция $|q|$ не убывает, положительна, $|\arg q(x)| \leq \pi - \delta$, $\delta > 0$.

Замечание. Условиям 1) – 2) удовлетворяет, например, функция $q = re^{i\theta}$, где $r = x^{\alpha}$, $\theta = (\pi-\delta)\cos x^{\beta}$, $\alpha > 2$, $\beta < \alpha/4+1/2$, при этом ни мнимая, ни вещественная части функции q не удовлетворяют условиям Лидского [2].

Введем обозначения:

$$\Delta_1(x) = \int_x^{\infty} \left| \left(q^{-1/4}\right)'' q^{-1/4} \right| dt, \ \Delta_2(x) = \int_x^{\infty} |q|^{-1/2} dt,$$

$C, C_1, \ldots$ – абсолютные (то есть не зависящие от каких-либо параметров) положительные постоянные, точное значение которых нас не интересует.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1) – 2). *Тогда уравнение (1) имеет единственное решение $\varphi = \varphi(x, \lambda)$, обладающее следующими свойствами:*

(i) *при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$ функция φ принадлежит $L^2[0, +\infty)$ и*

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt[4]{q(x)}} \exp\left(-\int_a^x \sqrt{q(t)}dt\right)(1 + r_0(x, \lambda)), \ x \geq a,$$
$$|r_0(x, \lambda)| \leq C_1\Delta_1(x) + \left(e^{C_2|\lambda|\Delta_2(x)} - 1\right);$$

(ii) *при каждом $x \geq 0$ $\varphi(x, \cdot)$ – целая функция;*

(iii) *при выполнении дополнительного условия*

$$q'(x) = o(q^{3/2}(x)), \ x \to \infty, \tag{5}$$

$$\varphi'(x, \lambda) = -\sqrt[4]{q(x)} \exp\left(-\int_a^x \sqrt{q(t)}dt\right)(1 + r_1(x, \lambda)), \ x \geq a,$$
$$|r_1(x, \lambda)| \leq C_3\Delta_1(x) + \left(e^{C_4|\lambda|\Delta_2(x)} - 1\right) + C_5\left|\frac{q'(x)}{q^{3/2}(x)}\right|;$$

(iv) *если дополнительно к условиям 1) – 2) и (5) $|q(x)| > C_1x^{\alpha}, x > a$, то порядок (целой) функции $\varphi(x, \cdot)$ не превосходит $(2 + \alpha)/2\alpha$.*

Литература

1. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1983.
2. *Лидский В.Б.* Несамосопряженный оператор типа Штурма–Лиувилля с дискретным спектром // Тр. ММО. **9** (1960), 45-79.
3. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси // Функц. анализ и его прил. **51**:1 (2017), 82-98.

4. *Ишкин Х.К.* О спектральной неустойчивости оператора Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом // Диффер. уравнения. **45**:4 (2009), 480-495; англ. версия: *Ishkin Kh.K.* On the Spectral Instability of the Sturm–Liouville Operator with a Complex Potential // Differential Equations, **45**:4 (2009), 494-509.

КРИТЕРИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Х.К. Ишкин, Р.И. Марванов

Ishkin62@mail.ru, rsmar1v@gmail.com

УДК 517.15, 519.214

Исследуются условия эквивалентности двух асимптотических формул для произвольной неубывающей неограниченной последовательности $\{\lambda_n\}$. Результатом являются две теоремы, доставляющие необходимое и достаточное условие на функцию g или последовательность $\{f_n\}$, при котором одна из асимптотических формул $\lambda_n \sim f(n),\ n \to +\infty$, или $N(\lambda) \sim g(\lambda)$, $\lambda \to +\infty$, влечет другую.

Ключевые слова: асимптотическая эквивалентность, правильно меняющиеся функции, PRV-функции

Equivalence conditions for two asymptotic formulas

We study the equivalence conditions for two asymptotic formulas for an arbitrary non-decreasing unbounded sequence $\{\lambda_n\}$. Two theorems provide the necessary and sufficient condition on the function g or a sequence $\{f_n\}$, in which one of the asymptotic formulas $\lambda_n \sim f(n),\ n \to +\infty$, or $N(\lambda) \sim g(\lambda)$, $\lambda \to +\infty$, implies another.

Keywords: asymptotic equivalence, regularly varying functions, PRV-functions

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – вещественнозначная неубывающая последовательность, $N(\lambda) = \sum\limits_{\lambda_n<\lambda} 1$ – функция распределения $\{\lambda_n\}$, S^∞ – множество неубывающих неограниченных последовательностей, F^∞ – множество функций, которые на некотором интервале $(A, +\infty)$ (своем для каждой функции) принимают конечные значения, не убывают и неограничены.

Теорема 1. *Пусть* $\{f_n\} \in S^\infty,\ g \in F^\infty$. *Тогда если выполнены условия*

$$g(f_n) \sim n,\ n \to \infty \tag{1}$$

и

$$\lim_{\delta\to 1+0} \limsup_{x\to+\infty} \frac{g(\delta x)}{g(x)} = 1, \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18–11–00002).

Ишкин Хабир Кабирович, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Khabir Ishkin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Марванов Рустем Ильдарович, аспирант 2-го года обучения, БашГУ (Уфа, Россия); Rustem Marvanov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

то для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, *удовлетворяющей оценке*

$$\lambda_n \sim f_n,\ n \to +\infty, \tag{3}$$

верна оценка

$$N(\lambda) \sim g(\lambda),\ \lambda \to +\infty. \tag{4}$$

Обратно, если для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, *удовлетворяющей (3), верна оценка (4), то* $\{f_n\}$ *и* g *удовлетворяют (1) и (2).*

Теорема 2. *Пусть* $\{f_n\} \in S^\infty$, $g \in F^\infty$ *и* $g(\lambda - 0) \sim g(\lambda)$, $\lambda \to +\infty$. *Тогда если*

$$f_{[g(\lambda)]} \sim \lambda,\ \lambda \to +\infty \tag{5}$$

и

$$\lim_{\delta\to 1+0} \limsup_{n\to+\infty} \frac{f_{[n(1+\delta)]}}{f_n} = 1, \tag{6}$$

то для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, *удовлетворяющей (4), верна оценка (3).*

Обратно, если для любой последовательности $\{\lambda_n\}$, *удовлетворяющей (4), верна оценка (3), то* $\{f_n\}$ *и* g *удовлетворяют условиям (5) и (6).*

Литература

1. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения — Киев: Наукова думка, 1977.

2. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т.4 — Москва: Мир, 1982.

3. *Weyl H.* Das Asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen // Mathematische Annalen, **7** (1912), 441-479.

4. *Buldygin V.V., Klesov O.I., Steinebach J.G.* Properties of a Subclass of Avakumovic Functions and Their Generalized Inverses // Ukr. Math. Jour., **54** (2002), 179-206.

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА КРИВОЙ С КУСОЧНО-АНАЛИТИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Х.К. Ишкин, А.В. Резбаев
Ishkin62@mail.ru, aratyo@mail.ru

УДК 517.927.25

В статье изучаются условия, при которых спектр оператора Штурма–Лиувилля на некоторой гладкой кривой локализуется около счетного числа лучей. В случае, когда потенциал кусочно-аналитичен, найдена асимптотика собственных чисел каждой серии, локализующейся около соответствующего луча. Полученный результат позволяет обобщить известную формулу об асимптотике функции распределения спектра, которая была установлена Э. Дэвисом в случае конечного числа лучей локализации.

Ключевые слова: спектральная неустойчивость, локализация спектра, уравнение Штурма–Лиувилля, тривиальная монодромия

Spectrum Asymptotics of the Sturm - Liouville operator on a curve with piecewise analytic potential

In this paper, we study conditions for the localization of the spectrum of a non-self-adjoint Sturm–Liouville operator on a smooth curve. The conditions under which the spectrum is localized about a countable number of rays obtained. In the case where the potential is piecewise analytic, we have obtained the asymptotic of eigenvalues of each series. This result allows to generalize the well-known Davies formula on the asymptotic of distribution function of the spectrum which was obtained in the case of a finite number of localization rays.

Keywords: spectral instability, spectrum localization, Sturm–Liouville equation, trivial monodromy

Пусть γ – кривая с параметризацией $z(x) = x + is(x),\ x \in [0,1]$, где функция s непрерывно дифференцируема, s' не убывает и $s(0) = s(1) = 0, s'(0) < 0 < s'(1)$. Обозначим $\alpha_0 = \operatorname{arctg} s'(0),\ \alpha_1 = \operatorname{arctg} s'(1)$. Тогда

$$-\pi/2 < \alpha_0 < 0 < \alpha_1 < \pi/2. \tag{1}$$

Пусть $q \in L^1(\gamma)$. *Оператором Штурма–Лиувилля на кривой* γ будем называть оператор L_γ, действующий в пространстве $L^2(\gamma)$ по правилу $L_\gamma y = -y'' + qy$ на своей области определения $D(L_\gamma) = \{y \in L^2(\gamma) :\ y' \in AC(\gamma), -y'' + qy \in L^2(\gamma),\ y(0) = y(1) = 0\}$. Здесь штрих означает производную вдоль кривой γ.

Точно так же, как в случае $\gamma = [0,1]$, доказывается, что оператор L_γ плотно определен. Отсюда, поскольку спектр L_γ дискретен [1, лемма 2], то оператор L_γ замкнут.

Используя условие (1) легко показать, что за исключением конечного числа все собственные значения оператора L_γ лежат в угле $-2\alpha_1 < \arg\lambda <$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18–11–00002).

Ишкин Хабир Кабирович, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Khabir Ishkin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Резбаев Айрат Владимирович, аспирант 1-го года обучения ФМиИТ, БашГУ (Уфа, Россия); Airat Rezbayev(Bashkir State University, Ufa, Russia)

$-2\alpha_0$. В работах [2, 3] показано, что спектр оператора L_γ локализуется около луча $\arg\lambda = 0$ тогда и только тогда, когда функция q допускает мероморфное продолжение в область Ω, ограниченную кривой γ и отрезком $[0,1]$, с полюсами $\{z_k\}$, которые могут скапливаться только к отрезку $[0,1]$, и в окрестности каждого полюса z_k справедливо разложение

$$q(z) = \frac{m_k(m_k-1)}{(z-z_k)^2} + \sum_{i=0}^{m_k-1} c_{ki}(z-z_k)^{2i} + (z-z_k)^{2m_k-1}r(z),$$

где $m_k \in \mathbb{N}$, c_{ki} – некоторые числа, функция r голоморфна в некоторой окрестности точки z_k.

Обозначим через T_0 оператор L_γ с потенциалом q, удовлетворяющим этому критерию. Тогда $N(T_0, r) \sim \frac{\sqrt{r}}{\pi}$, $r \to +\infty$.

Теорема 1. Справедливы утверждения:

1) если $-2\alpha_0 \le \beta \le 2\pi - 2\alpha_1$, то $\|(T_0 - r^{i\beta})^{-1}\| = O\left(r^{-1}\right)$, $r \to +\infty$, равномерно по $\beta \in [-2\alpha_0, 2\pi - 2\alpha_1]$;

2) функция распределения спектра оператора $|T_0|$ имеет асимптотику $N(|T_0|, r) \sim \sqrt{r}/\pi$, $r \to +\infty$.

Пусть $\{a_k\}_1^\infty$ – последовательность точек на кривой γ, таких, что последовательность $\{\operatorname{Re} a_k\}$ убывает и стремится к 0 при $k \to \infty$. Положим $V(z) = v_k$, $z \in \gamma_k$, где γ_k – дуга кривой γ, соединяющая точки a_k и a_{k-1} $(a_0 = 1)$, $\{v_k\}_1^\infty$ – ограниченная последовательность, такая, что $v_{k+1} \neq v_k$ $(k = 1, 2, \dots)$.

Введем оператор $T = T_0 + V$, где V – оператор умножения на функцию.

Теорема 2. Пусть функция q в области Ω_1, ограниченной дугой γ_1 и отрезком $[1, a_1]$ может иметь только конечное число полюсов. Тогда

1) при любом $\varepsilon > 0$ спектр оператора T вне угла $-\varepsilon - 2\arg(1-a_1) < \arg\lambda < -2\alpha_0$ конечен;

2) спектр оператора T допускает представление

$$\sigma(T) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{(k)}, \lambda_n^{(k)} \sim \left(\frac{\pi n}{a_k - a_{k-1}}\right)^2 + c_{nk}, \ \sup_{n,k}|c_{nk}| < \infty.$$

Следствие 1. В условиях теоремы 2 имеет место формула

$$N(T, r) \sim \frac{|l|}{2\pi}\sqrt{r}, \ r \to +\infty, \tag{2}$$

где $|l|$ – длина ломаной l с вершинами в точках $\{a_k\}_0^\infty$.

Ранее формула вида (2) была получена Э. Дэвисом в случае ломаной l с конечным числом звеньев [4].

Литература

1. *Ishkin Kh.K.* Necessary Conditions for the Localization of the Spectrum of the Sturm–Liouville Problem on a Curve // Math. Notes. **78**:1 (2005), 64-75.

2. *Ishkin Kh.K.* On a Trivial Monodromy Criterion for the Sturm–Liouville equation // Math. Notes. **94**:1 (2013), 508-523.

3. *Ishkin Kh.K.* A localization criterion for the spectrum of the Sturm–Liouville operator on a curve // St. Petersburg Math. J. **28**:1 (2017), 37–63.

4. *Davies E.B.* Eigenvalues of an elliptic system // Math. Zeitschrift. **243** (2003), 719–743.

НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

С.Н. Какушкин

kakushkin-sergei@mail.ru

УДК 519.6

В работе описан метод нахождения собственных функций дискретных полуограниченных операторов, представимых в виде суммы невозмущенного дискретного оператора и возмущающего ограниченного оператора, действующих в гильбертовом пространстве. Для нахождения собственных функций используется только информация о спектральных характеристиках невозмущенного оператора и сам возмущающий оператор.

Ключевые слова: собственные функции, возмущенный оператор, спектральная теория, метод Галеркина

Finding eigenfunctions of perturbed discrete semi-bounded operators

The article describes a method for finding the eigenfunctions of discrete semi-bounded operators, represented as the sum of an unperturbed discrete operator and a perturbing bounded operator, acting in Hilbert space. For finding the eigenfunctions, only information about the spectral characteristics of the unperturbed operator and the perturbing operator itself are used.

Keywords: eigenfunctions, perturbed operator, spectral theory, Galerkin's method

Ранее в работах [1 – 3] рассматривалось нахождение собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом регуляризованных следов. В данной работе приводится еще один новый способ нахождения собственных функций возмущенных операторов.

Рассмотрим спектральную задачу

$$Lu = \mu u; \quad Gu\Big|_{\Gamma} = 0. \tag{1}$$

Здесь L – дискретный полуограниченный оператор, G – некоторый линейный оператор, заданные в гильбертовом пространстве H с областью определения в D и границей области Γ. Предположим, что оператор L представим в виде суммы дискретного оператора T и ограниченного оператора P, заданных в том же пространстве H. Через $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим собственные числа оператора T, занумерованные в порядке неубывания их величин, а через $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ – собственные функции, соответствующие этим собственным числам. Точное решение $u = u(x)$, $x \in D$ спектральной задачи (1), следуя методу Галеркина, можно представить в виде $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k v_k(x)$, где

Какушкин Сергей Николаевич, к. ф.-м .н., зав. сектором информационных технологий и сетевого обслуживания, Администрация МР Белорецкий район РБ (Белорецк, Россия); Sergey Kakushkin (Administration of MD Beloretsky district of RB, Beloretsk, Russia)

a_k – некоторые числовые коэффициенты. Будем приближать точное решение первыми $n \in \mathbb{N}$ его членами: $u^{(n)}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k v_k(x)$, т.е. $u^{(n)}(x)$ является решением спектральной задачи $L^{(n)}u^{(n)}(x) = \mu u^{(n)}(x)$; $Gu^{(n)}(x)\Big|_{\Gamma} = 0$.

Несложно показать справедливость неравенства: $\left\|L - L^{(n)}\right\| \leq C + r_0(n)$, где $\|P\| \leq C$, $r_0(n) = \inf\limits_{\zeta \in \rho_n(T)} |\zeta|$, $\rho_n(T)$ – резольвентное множество оператора T, из которого видно, что количество членов ряда, необходимых для получения приближенного решения $u^{(n)}(x)$, пропорционально величине нормы возмущающего оператора P и количеству собственных чисел λ_k оператора T, взятых внутри окружности, радиуса $|\lambda_{n+1} + \lambda_n|/2$.

Теорема 1. *Предположим, что собственные числа задачи* (1) *найдены и занумерованы в порядке неубывания. Тогда коэффициенты* a_m, $(m = \overline{1, n-1})$ *входящие в разложение приближенного решения* $u_k^{(n)}(x)$, *соответствующего собственному числу* μ_k, $k \in \mathbb{N}$, *являются решениями системы:*

$$\widetilde{A}(\mu_k) \cdot (a_1, a_2, \ \dots \ , a_{n-1})^T = (-V_{n,1}, \ \dots \ , -V_{n,k-1}, -V_{n,k+1}, \ \dots \ , -V_{n,n})^T,$$

где $\widetilde{A}(\mu_k) =$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 - \mu_k + V_{11} & \cdots & V_{k-1,1} & V_{k,1} & V_{k+1,1} & \cdots & V_{n-1,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{1,k-1} & \cdots & \lambda_{k-1} - \mu_k + V_{k-1,k-1} & V_{k,k-1} & V_{k+1,k-1} & \cdots & V_{n-1,k-1} \\ V_{1,k+1} & \cdots & V_{k-1,k+1} & V_{k,k+1} & \lambda_{k+1} - \mu_k + V_{k+1,k+1} & \cdots & V_{n-1,k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{1,n} & \cdots & V_{k-1,n} & V_{k,n} & V_{k+1,n} & \cdots & \lambda_n - \mu_k + V_{n-1,n} \end{pmatrix},$$

$V_{i,j} = (Pv_i, v_j)$, $i, j = \overline{1, n}$.

Также для вычисления коэффициентов a_m, $(m = \overline{1, n-1})$, входящих в разложение решения $u_k^{(n)}(x)$, можно решить систему нелинейных алгебраических уравнений подходящим численным методом:

$$\begin{cases} (\lambda_1 - \mu_k + V_{11})a_1 + V_{21}a_2 + \dots + V_{j1}\sqrt{1 - \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_k^2} + \dots + V_{n1}a_n = 0; \\ V_{12}a_1 + (\lambda_2 - \mu_k + V_{22})a_2 + \dots + V_{j2}\sqrt{1 - \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_k^2} + \dots + V_{n2}a_n = 0; \\ \dots \\ V_{1n}a_1 + V_{2n}a_2 + \dots + V_{jn}\sqrt{1 - \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_k^2} + \dots + (\lambda_n - \mu_k + V_{nn})a_n = 0. \end{cases}$$

При этом $j \leq n$ задается произвольно пользователем.

Литература

1. *Kakushkin S.N., Kadchenko S.I.* The calculation of values of eigenfunctions of the perturbed self-adjoint operators by regularized traces method // Journal of Computational and Engineering Mathematics. 2015. Т. 2. № 4. С. 48-60.

2. *Какушкин С.Н., Кадченко С.И.* Математическое моделирование нахождения значений собственных функций задачи гидродинамической теории устойчивости Орра-Зоммерфельда методом регуляризованных следов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2013. Т. 13. № 3. С. 30-36.

3. *Kadchenko S.I., Kakushkin S.N., Zakirova G.A.* Spectral problems on compact graphs // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2017. Т. 10. № 3. С. 156-162.

ОПЦИОННЫЕ СТРАТЕГИИ

Л. А. Каримова
karimoff.al@yandex.ru

УДК 51-77

Число опционных стратегий потенциально очень велико, так как существует множество стратегий в зависимости от вида опциона, его цен исполнения и даты исполнения. Рассматриваются простые опционные стратегии, такие как опционы колл и пут, а также организация опционной торговли.

Ключевые слова: финансовый инструмент, сравнительный анализ, финансовая математика, математическая статистика

Optional strategies

The number of option strategies is potentially very large, since there are many strategies depending on the type of option, its strike price and strike date. Simple options strategies are considered, such as call and put options, as well as the organization of option trading.

Keywords: financial instrument, comparative analysis, financial mathematics, mathematical statistics

Опционы позволяют инвесторам формировать разнообразные стратегии. Простейшие из них — покупка или продажа опционов колл или пут. Если инвестор полагает, что курс базисного актива пойдет вверх, он может или купить опцион колл, или продать опцион пут. В случае продажи опциона пут его выигрыш ограничится только суммой полученной премии. Если вкладчик полагает, что курс базисного актива упадет, он может или купить опцион пут, или продать опцион колл. Возможна ситуация, когда инвестор ожидает существенного изменения цены базисного актива, однако не уверен, в каком направлении оно произойдет. В таком случае целесообразно купить и опцион пут, и опцион колл. Данная стратегия называется стеллаж или стреддл. Стеллаж предполагает приобретение опционов с одинаковой ценой исполнения и сроком истечения.

Пример

Инвестор покупает и опцион «пут» и опцион «кол» Сбербанка с одной величиной страйка (эта стратегия называется «стрэдл»), в зависимости от развившегося движения. Инвестор выиграет, если будет движение, неважно куда, важно, что оно будет. А вот если Сбербанк начнет долгую и упорную консолидацию, неделя за неделей оставаясь на одном месте, он получит убыток. Его купленные опционы станут дешеветь тем больше, чем быстрее приближается дата их поставки.

Литература

1. *Буренин А.Н.* Рынок ценных бумаг и производственных финансовых инструментов: Учебное пособие. — М.: 1 Федеративная Книготорговая Компания, 1998. — 352 с.

2. *Назарова В.В.* Производные финансовые инструменты. Учеб.-метод. пособие / В.В. Назарова; Санкт-Петербургский филиал Нац. исслед. ун-та «Высшая школа экономики» — СПб.: Отдел оперативной полиграфии НИУ ВШЭ —- Санкт-Петербург, 2011. – 88 с.

Каримова Лариса Альфретовна, магистрант 2-го года обучения, БашГУ (Уфа, Россия); Larisa Karimova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

3. *Четыркин Е.М.* Финансовая математика: Учеб. — М.: Дело, 2000. — 400 с.

ДИНАМИКА СТАБИЛИЗИРОВАННОГО ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА НА КОЛЕСЕ

О.М. Киселев
olegkiselev@matem.anrb.ru

УДК 517.518

В предлагаемой работе выведены уравнения динамики маятника на колесе при одномерном движении по неровной поверхности. Рассмотрены вырождения этих уравнений для движения по горизонтальной прямой и по прямой постоянного наклона. Исследованы свойства фазового пространства соответствующих динамических систем и получены области, в которых перевернутый маятник стабилизируется с помощью пропорционально- дифференциального регулятора. Показано, как уменьшается область устойчивого движения маятника при изменении наклона поверхности.

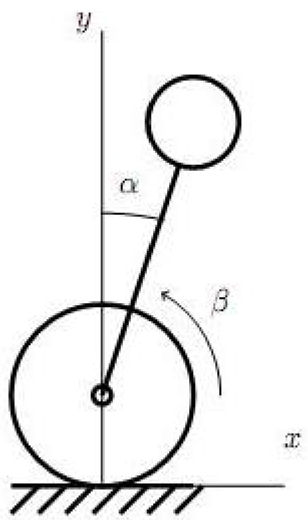
Ключевые слова: математика, дифференциальные уравнения, спектральная теория

Dinamics of the stabilized wheeled inverted pendulum

We had derive the equations for dynamics of the inverted wheeled pendulum on different surfaces. The special cases of these equations for the horizontal, slanted and soft surfaces is considered. The properties of the phase space for corresponded dynamical systems is studied for proportional-integral-derivative controller. We show the degeneration of the basin for stable trajectories on the slanted surface

Keywords: mathematics, differential equations, spectral theory

Будем рассматривать уравнения движения для механической конструкции маятника на колесе.



Киселев Олег Михайлович, д.ф.-м.н., Вед. научн. сотр., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Oleg Kiselev (IMCC UFRC RAS, Ufa, Russia)

Рис. 1:Маятник на колесе. Примем r – радиус колеса, l – длина маятника, α – угол отклонения маятника от вертикали, β – угол поворота колеса относительно некоторого начального положения. Считается, что маятник шарнирно закреплен на оси колеса так, что он может свободно вращаться относительно колеса.

Пусть масса маятника, изображенного на рисунке равна m, масса обода колеса M. Будем считать, что на маятник действует сила тяжести с ускорением свободного падения g, направленная вертикально вниз.

Стационарные точки, соответствующие верхнему положению маятника неустойчивы. Для стабилизации маятника в окрестности неустойчивой стационарной точки используется управлением вращения колеса.

Обозначим момент вращения колеса μ. Если этот момент переобозначить: $\mu = 2Mrh$, тогда система уравнений для маятника на колесе: примет вид:

$$\ddot{\alpha} = \sin(\alpha) - (\cos(\alpha - z)\ddot{\beta} - \sin(\alpha - z)z'\dot{\beta}^2)\rho,$$
$$(\zeta + 2)\rho\,\ddot{\beta} = -\sin(z) - \left(\ddot{\alpha}\cos(\alpha - z) - \dot{\alpha}^2\sin(\alpha - z)\right)\zeta + 2h\rho.$$

Здесь $z(\beta)$ – уравнение кривой, по которой катится колесо, $\rho = r/l$ – отношение длины маятника к радиусу колеса, $\zeta = m/M$ – отношение массы маятника к массе обода колеса.

В частности для маятника на колесе на горизонтальной прямой ($z \equiv 0$):

$$(\sin^2(\alpha)\zeta + 2)\ddot{\alpha} = (\zeta + 2)\sin(\alpha) - \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2\zeta\sin(2\alpha) + 2(k_1\alpha + k_2\dot{\alpha})\rho\cos(\alpha).$$

Теорема 1. *Траектории уравнения при выполнении условия* $2\rho k_1 < -(2+\zeta), \quad k_2 \le 0$ *внутри области, заключенной между сепаратрисами, определяющимися уравнением для маятника на колесе на горизонтальной прямой* $t \to \infty$ *стремятся к точке* $(0, 0)$ *на фазовой плоскости* $(\alpha, \dot{\alpha})$. *То есть к верхнему положению маятника. В точке* $(\alpha, \dot{\alpha}) = (0, 0,)$ *ускорение колеса* $\ddot{\beta} = 0$.

Аналогичное утверждение для верно для маятника на наклонной поверхности. Для маятника на мягкой поверхности можно указать параметры пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора для которых возникает стабилизация маятника на предельном цикле вблизи верхнего неустойчивого положения равновесия.

Управление маятником на колесе в различных случаях рассматривалось например, в работах [1]-[4].

Предложенные в докладе результаты обобщают результаты упомянутых работ для областей устойчивости на фазовой плоскости под действием регулятора и для динамики маятника на колесе на мягкой поверхности.

Литература

1. *Danielle Sami Nasrallah, Hannah Michalska, and Jorge Angeles* Controllability and posture control of a wheeledpendulum moving on an inclined plane.// IEEE transactions on robotics, 2007, 23, 564-577.

2. *Kaustubh Pathak, Jaume Franch, and Sunil K. Agrawal* Velocity and position control of a wheeled inverted pendulum by partial feedback linearization// IEEE transactions on robotics, 2005, 21, 505-513.

3. *Формальский А.М.* Управление движением неустойчивых объектов.// Физматлит, 2012.

4. *Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М.* Управляемый маятник на подвижном основании.// Известия РАН. МТТ 2013, №1, с.9-23.

ON INTEGRAL PROPERTIES OF STATIONARY MEASURES FOR THE STOCHASTIC SYSTEM OF THE QUASI-SOLENOIDAL LORENZ MODEL DESCRIBING A BAROCLINIC ATMOSPHERE

Yu.Yu. Klevtsova
yy_klevtsova@ngs.ru

УДК 517.956.8

It was obtained the sufficient conditions on the right-hand side and the parameters of Lorenz model for a baroclinic atmosphere with white noise perturbation for existence of a unique stationary measure of Markov semigroup defined by solutions of the Cauchy problem for this system and for the exponential convergence of the distributions of solutions to the stationary measure as $t \to +\infty$. Several integrals over such stationary measures were estimated by the set of the right-hand side and the parameters (here it was not proposed that measure be unique). A similar result was obtained for the equation of a barotropic atmosphere and the two-dimensional Navier-Stokes equation.

Keywords: the two-layer quasi-solenoidal Lorenz model for a baroclinic atmosphere, white noise perturbation, exponential convergence of distributions of solutions to the stationary measure, integral properties of stationary measures, the two-dimensional Navier-Stokes equation.

We consider the system of equations for the quasi-solenoidal Lorenz model for a baroclinic atmosphere

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 u + \nu A_2 u + A_3 u + B(u) = g, \qquad t > 0, \tag{1}$$

on the two-dimensional unit sphere S centered at the origin of the spherical polar coordinates (λ, φ), $\lambda \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\mu = \sin\varphi$. Here $\nu > 0$ is the kinematic viscosity, $u(t,x,\omega) = (u_1(t,x,\omega), u_2(t,x,\omega))^{\mathrm{T}}$ is an unknown vector function and $g(t,x,\omega) = (g_1(t,x,\omega), g_2(t,x,\omega))^{\mathrm{T}}$ is a given vector function, $x = (\lambda, \mu)$, $\omega \in \Omega$, (Ω, P, F) is a complete probability space,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta + \gamma I \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0 & \Delta^2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -k_0\Delta & 2k_0\Delta \\ k_0\Delta & -(2k_0 + k_1 + \nu\gamma)\Delta + \rho I \end{pmatrix},$$

$$B(u) = \left(J(\Delta u_1 + 2\mu, u_1) + J(\Delta u_2, u_2),\ J(\Delta u_2 - \gamma u_2, u_1) + J(\Delta u_1 + 2\mu, u_2)\right)^{\mathrm{T}}.$$

Yulia Klevtsova (Federal State Budgetary Institution “Siberian Regional Hydrometeorological Research Institute”, Siberian State University of Telecommunications and Information Sciences, Novosibirsk, Russia)

Also, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$ are numerical parameters, I is the identity operator, $J(\psi,\theta) = \psi_\lambda\theta_\mu - \psi_\mu\theta_\lambda$ is the Jacobi operator and $\Delta\psi = ((1-\mu^2)\psi_\mu)_\mu + (1-\mu^2)^{-1}\psi_{\lambda\lambda}$ is the Laplace-Beltrami operator on the sphere S. A random vector function $g = f + \eta$ is taken as the right-hand side of (1); here $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^{\mathrm{T}}$ and $\eta(t,x,\omega) = (\eta_1(t,x,\omega), \eta_2(t,x,\omega))^{\mathrm{T}}$ is a white noise in t. In [1] and in the present work it was obtained for existence of a unique stationary measure of Markov semigroup defined by solutions of the Cauchy problem for (1) and for the exponential convergence of the distributions of solutions to the stationary measure as $t \to +\infty$ the sufficient conditions on the right-hand side of [1] and the parameters ν, γ, ρ, k_0, k_1:

$$k_0 < \min_{i=1,2,\ldots,i_*} \varsigma(i), \tag{2}$$

$$\varsigma(i) = \frac{2}{(j(i)-\gamma)^2}\Bigg(3\nu j^2(i)(j(i)+\gamma) + \chi(j(i))$$

$$+\sqrt{(3\nu j^2(i)(j(i)+\gamma)+\chi(j(i)))^2 + (j(i)-\gamma)^2\left(\nu^2 j^3(i)(j(i)+\gamma) + \nu j(i)\chi(j(i))\right)}\Bigg),$$

$$\chi(y) = (k_1+\nu\gamma)(y^2+\gamma y) + \rho(\gamma+y),\ j(y) = y(y+1),\ y \geqslant 0,$$

$$i_* = \left[\frac{c_*}{(1+\sqrt{2}\nu}\left(\sqrt{1+\frac{2c_*}{(1+\sqrt{2})\nu}}+1\right)^{-1}\right] \geqslant 1,$$

$$c_* = \begin{cases} \varsigma(1), & \text{if} \quad \gamma \neq 2, \\ \varsigma(2), & \text{if} \quad \gamma = 2, \end{cases} \quad [r] \text{ - the integer part of } r.$$

In the present work it was also proven the theorem (for definitions of $\{b_i\}_{i=1}^\infty$, $\{E_i\}_{i=1}^\infty$, l_2^+, H^p, $|||\cdot|||_p$, $p \in Z$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $P(X)$ see the third paragraph of [1]).

Theorem.

Let $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$ be such that inequality (2) is satisfied, let $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$ and let $f \in L_2(\Omega; H^{-1})$ be F_0-measurable random vector function. Then there exits a stationary measure $\mu \in P(H^2)$ for system (1). Moreover, if instead of (2) inequality

$$k_0 \leq \min\left\{4k_1, \frac{4(2+\gamma)}{(2-\gamma)^2}(2k_1+\rho)\right\} \tag{3}$$

is satisfied then any stationary measure $\mu \in P(H^2)$ of system (1) is satisfied inequalities

$$\int_{H^2} \langle A_2\vartheta, A_1\vartheta\rangle\,\mu(d\vartheta) \leq \frac{1}{8\nu}\left(\sqrt{4\mathrm{b}^2 + \frac{2+\gamma}{\nu}E|||f|||_{-1}^2} + \sqrt{\frac{2+\gamma}{\nu}E|||f|||_{-1}^2}\right)^2,$$

$$\int_{H^2} |||\vartheta|||_2^2\,\mu(d\vartheta) \leq \frac{1}{4\nu}\left(\sqrt{2\sum_{i=1}^\infty b_i^2\langle A_1^{-1}E_i, E_i\rangle + \frac{1}{\nu}E|||f|||_{-2}^2} + \sqrt{\frac{1}{\nu}E|||f|||_{-2}^2}\right)^2.$$

Note that the right-hand side of inequality (3) does not exceed the right-hand side of inequality (2).

A similar result is obtained for the equation of a barotropic atmosphere and the two-dimensional Navier-Stokes equation. A comparative analysis with some of the available related results is given for the latter.

Литература

1. *Klevtsova Yu.Yu.* On the rate of convergence as $t \to +\infty$ of the distributions of solutions to the stationary measure for the stochastic system of the Lorenz model describing a baroclinic atmosphere // Sb. Math., **208**:7 (2017), 929-976.

О КРИТИЧЕСКИХ ТОЧКАХ МНОГОМЕРНОЙ МОДЕЛЬНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ

М.М. Кобилзода, А.Н. Наимов
kobilzoda94@mail.ru, nan67@rambler.ru

УДК 517.925.5

Для одной многомерной модельной автономной системы доказано, что при выполнении определенных условий ее нулевая критическая точка является седловой точкой, а ее положительная критическая точка асимптотически устойчива.

Ключевые слова: многомерная модельная автономная система, критическая точка, асимптотическая устойчивость.

On critical points of the multidimensional model autonomous system

For one multidimensional model autonomous system it is proved that under certain conditions its zero critical point is the saddle point, and its positive critical point is asymptotically stable.

Keywords: multidimensional model autonomous system, critical point, asymptotic stability.

Доклад посвящен исследованию критических точек модельной автономной системы следующего вида:

$$x'(t) = x(t) \circ (C(\overline{y} - y(t)) - k_1), \quad y'(t) = Ax(t) \circ (\overline{y} - y(t)) - k_2 \circ y(t). \quad (1)$$

Здесь $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^\top$, $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^\top$ - неизвестные вектор-функции, векторы $\overline{y}$, k_1, $k_2 \in R^n$ и квадратные матрицы C, A предполагаются заданными. Знаком $\circ$ обозначена операция координатного умножения двух векторов: $u \circ v = (u_1v_1, \ldots, u_nv_n)^\top$.

Система уравнений (1) рассматривается как многомерное обобщение модельной автономной системы, исследованной в работах [1, 2]. В этих работах анонсировано и доказано, что в скалярном случае $n = 1$ все положительные решения системы уравнений (1) при $t \to +\infty$ приближаются к единственной положительной критической точке, если положительны $\overline{y}$, k_1, k_2, C, A и $C\overline{y} - k_1$.

В настоящей работе исследованы критические точки автономной системы (1) при $n \geq 1$, и найдены условия, при выполнении которых нулевая критическая точка является седловой точкой, существует единственная положительная критическая точка, положительная критическая точка асимптотически устойчива.

Предположим, что векторы $\overline{y}$, k_1, k_2 и матрицы C, A удовлетворяют следующим условиям (покоординатно):

1) векторы $\overline{y}$ и k_2 положительны;
2) матрицы C и A неотрицательны и невырождены;
3) $0 < C^{-1}k_1 < \overline{y}$;

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-47-350001р-а, № 19-01-00103а).

Кобилзода Мирзоодили Мирзомалик, аспирант, ТНУ (Душанбе, Таджикистан); Mirzoodil Kobilzoda (Tajik National University, Dushanbe, Tajikistan)

Наимов Алижон Набиджанович, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия); Alizhon Naimov (Vologda State University, Vologda, Russia)

4) $\left(diag\left(C^{-1}k_1\right)A\right)^{-1}\left(k_2\circ\left(\overline{y}-C^{-1}k_1\right)\right)>0$, где $diag\left(C^{-1}k_1\right)$ - диагональная матрица, составленная из координат вектора $C^{-1}k_1$.

Из условий 1-4 следует, что у автономной системы (1), кроме нулевой критической точки $O(0,0)$, имеется единственная положительная критическая точка $O^*(x^*,y^*)$, где

$$x^*=\left(diag\left(C^{-1}k_1\right)A\right)^{-1}\left(k_2\circ\left(\overline{y}-C^{-1}k_1\right)\right),\qquad y^*=\overline{y}-C^{-1}k_1.$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1-4. Тогда для автономной системы (1) точка $O(0,0)$ является критической точкой типа седло, а критическая точка $O^*(x^*,y^*)$ асимптотически устойчива, если устойчива матрица*

$$E^*=\left(\begin{array}{cc} O & -diag(x^*)C \\ diag(\overline{y}-y^*)A & -diag(Ax^*+k_2) \end{array}\right).$$

При этом, если матрица E^* устойчива, то $det(AC)>0$.

Теорема 2. *Пусть при $n=2$ выполнены условия 1-4 и отличны от нуля два числа*

$$r_1=det(AC)det(diag(x^*))det(diag(C^{-1}k_1)),$$

$$r_2=(p_1q_2+p_2q_1)(p_1^2p_2+p_1p_2^2+p_1q_1+p_2q_2)-r_1(p_1+p_2)^2,$$

где

$$p_1=\frac{k_{21}\overline{y}_1}{\overline{y}_1-y_1^*},\qquad p_2=\frac{k_{22}\overline{y}_2}{\overline{y}_2-y_2^*},\qquad k_2=(k_{21},k_{22})^\top,$$

$$q_1=\left(\overline{y}_1-y_1^*\right)\left(c_{11}a_{11}x_1^*+c_{21}a_{12}x_2^*\right),\quad q_2=\left(\overline{y}_2-y_2^*\right)\left(c_{12}a_{21}x_1^*+c_{22}a_{22}x_2^*\right),$$

$$\overline{y}=(\overline{y}_1,\overline{y}_2)^\top,\qquad y^*=(y_1^*,y_2^*)^\top\qquad x^*=(x_1^*,x_2^*)^\top,$$

$c_{11},c_{12},c_{21},c_{22}$ - элементы матрицы C, $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ - элементы матрицы A. В этом случае матрица E^* устойчива тогда и только тогда, когда положительны числа r_1 и r_2.

Литература

1. *Горский А. А., Локшин Б. Я., Розов Н. Х.* Режим обострения в одной системе нелинейных уравнений // Дифференц. уравнения, **35**:11 (1999), 1571.

2. *Мухамадиев Э., Наимов А. Н., Собиров М. К.* Исследование положительных решений динамической модели производства и продажи товара // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сборник трудов X междунар. конф. «ПМТУКТ-2017». Воронеж (2017), 268—271.

О РЕШЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ И ДАННЫМИ В ВИДЕ МЕРЫ

Л.М. Кожевникова
kosul@mail.ru

УДК 517.956.25

В работе рассмотрен некоторый класс эллиптических уравнений второго порядка с переменными показателями нелинейностей и правой частью в виде общей меры Радона с конечной полной вариацией. Доказано существование ренормализованного решения задачи Дирихле как следствие устойчивости относительно сходимости правой части уравнения.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, ренормализованное решение, существование решения, мера Радона, емкость, переменный показатель

On solutions of elliptic equations with variable nonlinearity exponents and mesure data

We consider a class of elliptic equations of the second order with variable nonlinearity exponents. The right part of the equations is a radon measure with limited total variation. The existence of renormalized solution of the Dirichlet problem is proved as a consequence of stability with respect to the right side of the equation.

Keywords: elliptic equation, renormalized solution, existence solution, Radon measure, capacity, variable exponent

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$. В работе рассматривается задача Дирихле

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) + a_0(\mathrm{x}, u) = \mu, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

где μ — мера Радона с конечной полной вариацией.

Понятие ренормализованного решения служит основным шагом для изучения эллиптических уравнений с данными в виде меры. Первое определение ренормализованного решения уравнения

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) = \mu, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{3}$$

дано в работе [1]. Здесь $u \to -\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)$ — монотонный оператор, определенный в пространстве Соболева $\mathring{W}_p^1(\Omega)$, $1 < p \leq n$. Существование ренормализованного решения задачи Дирихле (3), (2) получено с помощью аппроксимаций как следствие результата устойчивости. Ключевым моментом доказательства является результат сильной сходимость срезок в пространстве $\mathring{W}_p^1(\Omega)$. В работе [2] представлено другое доказательство результата устойчивости, на требующее сильной сходимости срезок в энергетическом пространстве.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00428).

Кожевникова Лариса Михайловна, д.ф.-м.н., профессор, СФ БашГУ (Стерлитамак, Россия); Larisa Kozhevnikova (Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia)

В настоящей работе доказывается существование ренормализованного решения задачи Дирихле (1), (2) для непрерывного, ограниченного, коэрцитивного и строго монотонного оператора $u \to -\mathrm{div}\, \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) + a_0(\mathrm{x}, u)$, определенного в пространстве Соболева с переменным показателем $\mathring{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$, $1 < p(\cdot) < n$. А именно, обобщаются результаты, полученные в работе [1], на переменный показатель $p(\cdot)$.

Ранее автором в работе [3] были доказаны существование и единственность ренормализованного решения задачи (1), (2) с мерой μ диффузной по $p(\cdot)$ – емкости.

Литература

1. *Dal Maso G., Murat F., Orsina L., Prignet A.* Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **28**:4 (1999), 741-808.

2. *Malusa A.* A new proof of the stability of renormalized solutions to elliptic equations with measure data // Asymptotic Analysis, **43** (2005), 111-129.

3. *Кожевникова Л.М.* Эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений анизотропной эллиптической задачи в неограниченных областях с данными в виде меры // Известия вузов. Математика, (2019) (в печати).

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КАТАЛИТИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ НА ОСНОВЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

К.Ф. Коледина
koledinakamila@mail.ru

УДК 517.977.58

Разработана методология многокритериальной оптимизации каталитических реакций на основе кинетической модели. Объектом исследования является реакция синтеза бензилалкиловых эфиров в присутствии медного катализатора.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, кинетическая модель, критерии оптимальности, синтез бензилалкиловых эфиров

Multicriteria optimization of catalytic reactions based on the kinetic model

A methodology for multicriteria optimization of catalytic reactions based on a kinetic model has been developed. The object of the study is the synthesis of benzylalkyl ethers in the presence of a copper catalyst.

Keywords: multicriteria optimization, kinetic model, optimality criteria, synthesis of benzylalkyl ethers

Продуктами реакции бензилового и н-бутилового спиртов являются целевой бензилбутиловый эфир $PhCH_2OBu(Y_6)$, дибензиловый эфир $PhCH_2OCH_2Ph(Y_9)$, дибутиловый эфир $BuOBu(Y_{12})$. Задача многокритериальной оптимизации условий проведения каталитической реакции синтеза бензилбутилового эфира имеет вид:
- Вектор варьируемых параметров $X = (x_1, x_2, x_3)$, где x_1 – температура реакции, T; x_2 – мольное соотношение реагентов бутилового спирта к бензиловому спирту $N = [Y_4] : [Y_1]$; x_3 – время проведения реакции, t^*; размерность вектора варьируемых параметров $|X| = 3$.
- Вектор функция критериев оптимальности $F(X) = (f_1(X), f_2(X), f_3(X))$: f_1 – выход продукта $PhCH_2OBu(Y_6)$, максимизация; f_2 – выход продукта $PhCH_2OCH_2Ph(Y_9)$, минимизация; f_3 – выход продукта $BuOBu(Y_{12})$, минимизация.
- $F(X)$ со значениями в целевом пространстве $\{F\} = R^{(F)} = R^3$ определено в области $D_X \subset \{X\} = R^{|X|} = R^3 : T \in [T_{min}; T_{max}], N \in [N_{min}; N_{max}], t^* \in [t^*_{min}; t^*_{max}]$.
Тогда необходимо максимизировать критерии оптимальности в области D_X по (1).

$$\max_{X \in D_X} F(X) = F(X^*) = F^*. \tag{1}$$

Решение задачи многокритериальной оптимизации проводилось алгоритмом Парето-аппроксимации NSGA-II [1] в автоматизированной системе идентификации условий проведения гомогенных и гетерогенных реакций в задачах многоцелевой оптимизации [2].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-00006)

Коледина Камила Феликсовна, к.ф.-м.н., ИНК УФИЦ РАН (Уфа, Россия), УГНТУ (Уфа, Россия); Kamila Koledina (Institute of petrochemistry and catalysis RSA, Ufa, Russia, Ufa State Technological Petroleum University, Ufa, Russia)

Литература

1. *Deb K., Mohan M., Mishra S.* Towards a Quick Computation of Well-Spread Pareto-Optimal Solutions — Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Springer, 2003. P. 222-236. **123**:3 (1958), 401-404.

2. *Koledina K.F., Koledin S.N., Gubaydullin I.M.* Automated System for Identification of Conditions for Homogeneous and Heterogeneous Reactions in Multiobjective Optimization Problems // Numerical Analysis and Applications. **12**:2 (2019), 116–125.

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.Н. Конечная

n.konechnaya@narfu.ru

УДК 517.928

Доклад посвящен нахождению главного члена асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений вида $l_2(l_1(y)) = \lambda y$ при $x \to +\infty$. При этом предполагается, что коэффициенты дифференциальных выражений l_1 и l_2 являются суммами некоторых чисел и производных первого порядка от некоторых функций (в смысле теории распределений), убывающих на бесконечности в интегральном смысле.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с коэффициентами – распределениями, асимптотика решений дифференциальных уравнений

On the asymptotics of solutions of some classes of linear differential equations

The report is devoted to finding the principal term of the asymptotics of solutions to linear differential equations of the type $l_2(l_1(y)) = \lambda y$ as $x \to +\infty$. In this case, it is assumed that the coefficients of the differential expressions l_1 and l_2 are sums of some numbers and first-order derivatives in the sense of the theory of distributions of certain functions decreasing at infinity in the integral sense.

Keywords: differential equations with distribution coefficients, asymptotics of solutions to differential equations

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ и λ – комплексные числа, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $q_1, q_2, \ldots, q_m$ – комплекснозначные измеримые на $R_+ (:= [0, +\infty))$ функции, такие, что

$$|p_1| + (1 + |p_2 - p_1|) \sum_{j=2}^{n} |p_j| \in L^1_{loc}(R_+)$$

и

$$|q_1| + (1 + |q_2 - q_1|) \sum_{j=2}^{m} |q_j| \in L^1_{loc}(R_+),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00250).

Конечная Наталья Николаевна, к.ф.-м.н., зав. кафедрой, САФУ имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия); Natalia Konechnaya (Northern (Arctic) Federal University, Arkhangelsk, Russia)

где, как обычно, $L^1_{loc}(R_+)$ – это пространство интегрируемых по Лебегу на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset R_+$ функций.

В докладе будет представлена конструкция, позволяющая при выполнении этих условий определить, в каком смысле следует понимать уравнение вида

$$l_2(l_1(y)) = \lambda y, \qquad x \in R_+,$$

где

$$l_1(y) := y^{(n)} + (a_1 + p_1(x))y^{(n-1)} + (a_2 + p_2'(x))y^{(n-2)} + \ldots + (a_n + p_n'(x))y,$$

$$l_2(y) := y^{(m)} + (b_1 + q_1(x))y^{(m-1)} + (b_2 + q_2'(x))y^{(m-2)} + \ldots + (b_m + q_m'(x))y,$$

и всюду производные понимаются в смысле теории распределений, а λ — комплексный параметр.

Используя эту конструкцию, установлено, что главный член асимптотики при $x \to +\infty$ фундаментальной системы решений этого уравнения и их производных определяется по корням многочлена

$$F(z) = (z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n)(z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m) - \lambda,$$

если функции $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и $q_1, q_2, \ldots, q_m$ удовлетворяют определенным условиям интегрального убывания на бесконечности. В докладе, в частности, будет изложено доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Пусть*

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = b_1 = b_2 = \ldots = b_m = \lambda = 0.$$

Пусть далее функции $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *и* $q_1, q_2, \ldots, q_m$ *такие, что*

$$|p_1| + (1 + x|p_2 - p_1|)\sum_{j=2}^{n} x^{j-2}|p_j| \in L^1(R_+)$$

и

$$|q_1| + (1 + x|q_2 - q_1|)\sum_{j=2}^{m} x^{j-2}|q_j| \in L^1(R_+).$$

Тогда уравнение

$$l_2(l_1(y)) = \lambda y$$

имеет фундаментальную систему решений $\{y_j\}$, $j = 1, 2, \ldots n+m$, *такую, что при* $x \to +\infty$ *справедливы равенства*

$$y_j^{[s]}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{j-1-s}}{(j-1-s)!}(1 + o(1)), & \text{если } s = 0, 1, \ldots, j-1, \\ x^{j-1-s}\, o(1), & \text{если } s = j, j+1, \ldots, n+m-1. \end{cases}$$

Из данной теоремы видно, что полученные асимптотические формулы хорошо согласуются с классическими асимптотическими формулами для случая, когда коэффициенты дифференциального уравнения почти постоянные функции (см., например, [1]).

Доклад основан на совместной работе [2].

Литература

1. *M.S.P. Eastham* The Asymptotic Solution of Linear Differential Systems. — Oxford, Clarendon Press, 1989.

2. *N.N. Konechnaya, K.A. Mirzoev, Ya.T. Sultanaev* Об асимптотике решений одного класса линейных дифференциальных уравнений // Azerbaijan Journal of Mathematics (in print).

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

К.Ю. Котлованов

kotlo_13@is74.ru

УДК 517.958

В докладе расматривается уравнение в приближении Буссинеска, редуцированное в уравнение Пуанкаре. Полученная математическая модель внутренних волн рассматривается в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей ∂D. Данная модель рассматривается с условиями Коши–Дирихле. Работа основывается на теории относительно полиномиально ограниченных пучков операторов. В докладе построены пропагаторы для уравнения соболевского типа второго порядка.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, приближение Буссинеска, модель внутренних волн

On a mathematical model of Sobolev type internal waves

The report considers the equation in the Boussinesq approximation reduced to the Poincare equation. The resulting mathematical model of internal waves is considered in a bounded domain $D \subset \mathbb{R}^3$ with a smooth boundary ∂D. This model is considered with Cauchy – Dirichlet conditions. The work is based on the theory of polynomially bounded operator pencil. In the report propagators for the equation of Sobolev type of the second order are constructed

Keywords: Sobolev type equation, the Boussinesq approximation, internal wave model

В докладе будет рассмотрена математическая модель внутренних волн

$$\triangle u_{tt} + N^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \tag{1}$$

в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей ∂D. Здесь частота Вяйсяля $N^2 = -\frac{g\rho_0^{-1} d\rho_0}{dz}$. [1] На границе области зададим условие Дирихле

$$u(x, y, z, t) = 0, \quad (x, y, z, t) \in \partial D \times \mathbb{R} \tag{2}$$

и в начальный момент времени задается условие Коши

$$u(x, y, z, 0) = u_0, \quad u_t(x, y, z, 0) = u_1. \tag{3}$$

Котлованов Константин Юрьевич, ЮУрГУ (Челябинск, Россия); Konstantin Kotlovanov (South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)

Работа основывается на теории относительно полиномиально ограниченных пучков операторов. Редуцируем математическую модель к абстрактной задаче (4)-(5). Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ - банаховы пространства, операторы $A, B_1, B_0 : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ – линейно непрерывные. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1 \tag{4}$$

для уравнения соболевского типа второго порядка

$$Au_{tt} = B_1 u_t + B_0 u. \tag{5}$$

В работе [2] доказана теорема о существование и единственности решения задачи (4), (5) и получен вид решения. Единственное решение $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{U})$ задачи Коши (4) для уравнения (5) представимо в виде

$$u(t) = U_1^t u_1 + U_0^t u_0,$$

где пропагаторы $U_k^t,\ k = 0, 1,$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned} U_0^t &= \tfrac{1}{2\pi i} \textstyle\int_\gamma R_\mu^A(\vec{B})(\mu A - B_1) e^{\mu t} d\mu, \\ U_1^t &= \tfrac{1}{2\pi i} \textstyle\int_\gamma R_\mu^A(\vec{B}) A e^{\mu t} d\mu. \end{aligned}$$

Введем пространства $\mathfrak{U} = W_2^{l+2}(D),\ \mathfrak{F} = W_2^l(D)$ и определим операторы

$$A = \triangle, \quad B_1 = \mathbb{O}, \quad B_0 = -N^2(u_{xx} + u_{yy})$$

$\forall l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$. Обозначим за $\{-\lambda_{k,m,n}^2\} (= \sigma(\triangle))$ (и $-\lambda_n^2$) собственные значения задачи Дирихле для оператора Лапласа $\triangle$. Обозначим за $\{\phi_{k,m,n}\}$ соответствующей $\{-\lambda_{k,m,n}^2\}$ ортонормированным собственным функциям в смысле скалярного произведения в $L^2(\Omega)$. Пусть $\{\phi_k\} \subset C^\infty(\Omega)$, тогда

$$\mu^2 A - \mu B_1 - B_0 = \sum_{k,m,n=1}^{\infty} [\mu^2 \lambda_{k,m,n}^2 + N^2 \lambda_{k,m}^2] < \varphi_{k,m,n}, \cdot > \varphi_{k,m,n},$$

где $< \cdot, \cdot >$ это скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Составим уравнение для определения относительного спектра

$$\mu^2 \lambda_{k,m,n}^2 + N^2 \lambda_{k,m}^2 = 0.$$

Относительный спектр ограничен, и оператор A непрерывно обратим. Построим пропагаторы $U_1^t u_1$ и $U_0^t u_0$ и получаем решение в виде

$$u(t) = \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{k,m,n}^2} cos \left(\frac{N\sqrt{\lambda_{k,m}^2}}{\sqrt{\lambda_{k,m,n}^2}} t \right) < \varphi_{k,m,n}, \cdot > \varphi_{k,m,n} +$$

$$+ \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \frac{1}{N \lambda_{k,m,n} \lambda_{k,m}} sin \left(\frac{N\sqrt{\lambda_{k,m}^2}}{\sqrt{\lambda_{k,m,n}^2}} t \right) < \varphi_{k,m,n}, \cdot > \varphi_{k,m,n}.$$

Литература

1. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн) — М.: Наука, 1982.

2. *Замышляева А.А.* Фазовое пространство уравнения соболевского типа высокого порядка // Известия Иркутского государственного университета, **4**:4 (2011).

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА В МОДЕЛИ С ПРИМЕСЯМИ

Р.В. Кудрявцев, А.М. Гумеров, Г.И. Антонов, К.Ю. Самсонов, Р.К. Салимов, В.Н. Назаров, Е.Г. Екомасов

Xc.89@mail.ru, bgu@bk.ru, georgij.antonow@yandex.ru, sams-kirill@yandex.ru, salems665@yandex.ru, nazarovvn@yahoo.com, ekomasoveg@gmail.com

УДК 51-73, 537.611.3

Исследованы нелинейные свойства солитонных решений уравнения синус-Гордона в рамках моделей с примесями, внешней силой и неоднородной диссипацией.

Ключевые слова: солитон, примесь, генерация солитонов, уравнение синус-Гордона

Nonlinear dynamics of solitons of the sine-Gordon equation in the model with impurities

Nonlinear properties of soliton solutions of the sine-Gordon equation in the framework of models with impurities, external force and inhomogeneous dissipation are investigated.

Keywords: soliton, impurity, soliton generation, sine-Gordon equation

Одним из самых изучаемых нелинейных дифференциальных уравнений, имеющих солитонные решения, является уравнение синус-Гордона (УСГ), являющееся континуальным приближением модели Френкеля-Конторовой и нашедшее широкое применение, например, в описании динамики дислокаций в кристаллах, доменных границ в магнетиках, макромолекулы ДНК и т.д. Один из часто используемых способов модификации УСГ, необходимых при описании приложений, заключается в учете пространственной неоднородности периодического потенциала в виде примеси и неоднородности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00122).

Кудрявцев Роман Владимирович, к.ф.-м.н., инженер, ИФМК УНЦ РАН (Уфа, Россия); Roman Kudryavtsev (IMCP UFRC RAS, Ufa, Russia)

Гумеров Азамат Маратович, к.ф.-м.н., инженер, БашГУ (Уфа, Россия); Azamat Gumerov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Антонов Георгий Игоревич, БашГУ (Уфа, Россия); Antonov Georgii (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Самсонов Кирилл Юрьевич, ТюмГУ (Тюмень, Россия); Samsonov Kirill (University of Tyumen, Tyumen, Russia)

Салимов Ришат Камилевич, БашГУ (Уфа, Россия); Salimov Rishat (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Назаров Владимир Николаевич, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, ИФМК УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Vladimir Nazarov (IMCP UFRC RAS, Ufa, Russia)

Екомасов Евгений Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Eugene Ekomasov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

других параметров нелинейного уравнения [1, 2]. В данной работе исследуется нелинейная динамика солитонных решений уравнения синус-Гордона в модели с произвольным числом примесей, внешней силой и затуханием.

В работе для одномерного случая трех и четырех разных примесей (расположенных на произвольном расстоянии друг от друга) изучены колебания локализованных волн и динамика кинка с учётом влияния внешней силы и неоднородной диссипации. Определены возможные сценарии динамики кинка, изменения его структуры в зависимости от начальной скорости кинка, параметров примесей и от расстояния между ними. Проведено сравнение с ранее изученным случаем двух разных примесей. Показана возможность синхронизации частоты колебаний нелинейных высокоамплитудных волн, локализованных на примесях. Найдена зависимость частот и амплитуд этих колебаний от величин неоднородностей параметров системы, расстояния между примесями и величины внешней силы. Предложены способы использования примесей как генератора для возбуждения мультисолитонов УСГ. Найдены условия для возникновения различных резонансных эффектов, связанных с динамикой кинка: резонансного отражения от притягивающей примеси и «квазитуннелирования». С помощью численных расчетов изучена трансформация структуры и динамика бризеров уравнения синус-Гордона в модели с примесями с учётом возможности возбуждения внутренних мод колебаний бризера, генерации высокоамплитудных нелинейных локализованных волн и излучения свободных волн.

Для случая одной, двух, трех и четырех одномерных примесей найдены условия для возможности хаотического поведения изучаемой системы, авторезонансной генерации с динамическим сдвигом частоты связанных локализованных высокоамплитудных нелинейных волн в зависимости от диссипации, параметров примеси и амплитуды внешней силы. Рассмотрено влияние вида функции, моделирующей неоднородность периодического потенциала. Предложены способы использования примесей как генератора для возбуждения различного вида мультисолитонов.

Исследовано рассеяние кинка двойного уравнения синус-Гордона, модифицированного уравнения Кортевега-де-Вриза-синус-Гордона, уравнения ϕ^4 на произвольном числе примесей. Определена структура и особенности связанных состояний высокоамплитудных нелинейных волн, локализованных в области примесей. Проведено сравнение со случаем уравнения синус-Гордона.

Для (3+1) случая исследовано влияние одиночной, двумерной и трехмерной неподвижной и движущейся примеси на динамику кинков и бризеров уравнения синус-Гордона. Для случая подвижной примеси в обычный гамильтониан для поля уравнения синус-Гордона с примесью добавлена ее кинетическая энергия. Разработана модификация известных методов теории возмущений для одномерного случая уравнения синус-Гордона в модели с примесями на трехмерный случай.

С помощью представленных выше моделей описана для разных возможных физических ситуаций динамика доменных границ и магнитных солитонов в современных мультислойных наноразмерных ферромагнитных структурах и в реальных магнетиках с дефектами.

Литература

1. *Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V.* Resonance dynamics of kinks

in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping // Journal of Computational and Applied Mathematics, **312** (2017), 198–208.

2. *Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Murtazin R.R.* Interaction of sine-Gordon solitons in the model with attracting impurities // Mathematical Methods in The Applied Sciences, **40**:17 (2017), 6178–6186.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА.

А.Ф. Кужаев
arsenkuzh@outlook.com

УДК 517.518

Известно, что вопрос полноты системы экспонент (или экспоненциальных мономов) в некоторой выпуклой области тесно связан с так называемыми условиями единственности для целой функции экспоненциального типа. В настоящей работе формулируется теорема единственности для целых функций экспоненциального типа в терминах оценок на логарифмическую блок-плотность последовательности её нулей и индикатора этой целой функции.

Ключевые слова: целая функция, логарифмическая блок-плотность, теорема единственности, полнота

On a theorem of uniqueness of entire functions of exponential type.

It is known that the question of completeness of a system of exponents (or exponential monomers) in some convex domain is closely related to the so-called uniqueness conditions for an entire function of exponential type. In this paper, we formulate a uniqueness theorem for entire functions of exponential type in terms of estimates on the logarithmic block density of the sequence of its zeros and the indicator of the integer function.

Keywords: entire function, logarithmic block density, theorem of uniqueness, completeness

Рассматривается $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — кратная последовательность положительных чисел, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $k \geq 1$, $\lambda_k \to +\infty$, числа $n_k \in \mathbb{N}$ называют кратностью элемента λ_k.

Пусть далее f — целая функция экспоненциального типа, т.е.

$$\ln|f(z)| \leq A|z| + B, \quad z \in \mathbb{C}, \quad A, B > 0.$$

Индикатором целой функции f экспоненциального типа называют величину

$$h_f(\varphi) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\ln|f(te^{i\varphi})|}{t}, \quad \varphi \in [-\pi, \pi].$$

Отметим, что h_f — непрерывная функция ([5], гл. I, §5, теорема 5.6).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект № 18-11-00002).

Кужаев А.Ф., аспирант 2-го года обучения, БашГУ (Уфа, Россия); Arsen Kuzhaev (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Пусть f — целая функция и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Будем писать $f(\Lambda) = 0$, если f обращается в нуль в каждой точке λ_k с кратностью не меньшей, чем n_k.

Логарифмической блок-плотностью (или просто логарифмической плотностью) $\overline{L}(\Lambda)$ положительной последовательности Λ называется величина, определяемая равенством

$$\overline{L}(\Lambda) = \inf_{a>1} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\lambda(at) - \lambda(t)}{\ln a}, \quad \lambda(t) = \sum_{\lambda_k<t} \frac{n_k}{\lambda_k}.$$

Согласно лемме 3.2 работы [3] величину $\overline{L}(\Lambda)$ можно вычислить следующим образом:

$$\overline{L}(\Lambda) = \lim_{a\to+\infty} \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\lambda(ar) - \lambda(r)}{\ln a}.$$

В 1914 году Карлсон доказал в [1] теорему единственности: если целая функция f экспоненциального типа обращается в нуль во всех натуральных числах, и удовлетворяет соотношению $|f(iy)| = O(1)\exp(c|y|)$, $y \in \mathbb{R}$, где $c < \pi$, то $f(z) \equiv 0$. Обобщение этого результата было дано в 1956 году Л. А. Рубелем в его статье [2]. Им же в той работе и была введена логарифмическая блок-плотность, которая обнаружила своё применения в дальнейших работах, посвящённых полноте системы

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n e^{\lambda_k z}\}_{n=0,k=1}^{n_k-1,\infty}$$

в области $D \subset \mathbb{C}$, т.е. в пространстве функций аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах этой области. Помимо совместного результата Л.А. Рубеля и П. Мальявена в [3], имеется ряд результатов о полноте системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в круге (см., например, [4], гл. IV, [5], гл. I, §7).

Результат, который здесь сформулирован, представляет собой развитие идей работы [2].

Теорема 1. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, f *— целая функция экспоненциального типа и* $f(\Lambda) = 0$. *Предположим, что для некоторого* $\varphi \in (-\pi, 0)$ *верно неравенство*

$$\frac{h_f(\varphi) + h_f(\varphi + \pi)}{2} < \overline{L}(\Lambda)\pi|\sin\varphi|.$$

Тогда $f \equiv 0$.

Литература

1. *Carlson F.* Sur une classe de séries de Taylor // Dissertation, Uppsala, Sweden, 1914.

2. *Rubel L. A.* Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions. // Trans. Amer. math. Soc. 1956. V. 83. Pp. 417–429.

3. *Malliaven P., Rubel L. A.* On small entire functions of exponential type with given zeros. // Bull. Soc. Math. France. 1961. V. 89. Pp. 175–201.

4. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. — М., Гостехиздат, 1956.

5. *Леонтьев А.Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1983.

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОДКЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДВУМЕРИЗОВАННЫХ ЦЕПОЧЕК ПРИ ПОМОЩИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ АЛГЕБР.

М.Н. Кузнецова
mariya.n.kuznetsova@gmail.com

УДК 517.9

Рассматривается задача классификации интегрируемых случаев уравнений типа двумеризованной цепочки Тоды $u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y})$. Цепочка называется интегрируемой, если существуют условия обрыва, сводящие ее к бесконечному числу систем гиперболического типа, интегрируемых в смысле Дарбу. В данной работе мы исследуем подкласс квазилинейных цепочек вида $u_{n,xy} = p(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})u_{n,x} + r(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})u_{n,y} + q(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})$.

Ключевые слова: двумеризованная цепочка, интегрируемая редукция, характеристическая алгебра Ли, вырожденное условие обрыва, интегрируемая по Дарбу система, x-интеграл

Classification of a subclass of quasilinear two-dimensional lattices by means of characteristic algebras

We consider a classification problem of integrable cases of the Toda type two-dimensional lattices $u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y})$. We call the lattice integrable if there are cutting off boundary conditions allowing to reduce the lattice to an infinite number of hyperbolic type systems integrable in the sense of Darboux. Here we concentrate on a subclass of quasilinear lattices of the form $u_{n,xy} = p(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})u_{n,x} + r(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})u_{n,y} + q(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})$.

Keywords: two-dimensional lattice, integrable reduction, characteristic Lie algebra, degenerate cutting off condition, Darboux integrable system, x-integral

Настоящая работа является продолжением серии работ [1, 2, 3], посвященных задаче классификации уравнений типа двумеризованной цепочки Тоды

$$u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y}), \quad -\infty < n < \infty. \tag{1}$$

Предполагается, что функция $f = f(x_1, x_2, \cdots x_5)$ является аналитической в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^5$. Здесь искомая функция $u_n = u_n(x, y)$ зависит от вещественных x, y и целого n.

Исследуется подкласс цепочек (1) следующего вида:

$$u_{n,xy} = p(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,x} + r(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})u_{n,y} + q(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}). \tag{2}$$

Функции $p(x_1, x_2, x_3)$, $r(x_1, x_2, x_3)$, $q(x_1, x_2, x_3)$ предполагаются аналитическими в некоторой области $D \subset \mathbb{C}^3$ и выполняется хотя бы одно из условий $\frac{\partial p}{\partial u_{n+1}} \neq 0$ или $\frac{\partial p}{\partial u_{n-1}} \neq 0$.

Кузнецова Мария Николаевна, к.ф.-м.н., Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Mariya Kuznetsova (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)

Многомерные уравнения являются сложными объектами для исследования и, тем более, для классификации. Известно, что существование большого числа интегрируемых редукций указывает на интегрируемость уравнения (см., например, работу [4], в которой существование интегрируемых редукций гидродинамического типа рассматривается в качестве признака интегрируемости). В наших работах мы используем аналогичную идею - называя уравнение интегрируемым, если оно допускает бесконечный класс редукций в виде систем гиперболического типа, интегрируемых в смысле Дарбу. При описании интегрируемых по Дарбу систем гиперболических уравнений специального вида давно используется понятие характеристической алгебры Ли [5]. Переход к более общим алгебрам Ли-Райнхарта [6] открывает новые возможности [1, 2, 3].

Условие обрыва $u_0 = \varphi(x, y)$ называется вырожденным условием обрыва для цепочки (1), если оно сводит (1) к двум независимым цепочкам, определенным на интервалах $-\infty < n < 0$ и $0 < n < +\infty$, соответственно.

Допустим, что для цепочки (1) существуют вырожденные условия обрыва в двух разных точках $n = N_1$, $n = N_2$. Тогда цепочка (1) сводится к конечной системе гиперболического типа:

$$\begin{aligned} &u_{N_1} = \varphi_1(x, y), \\ &u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y}), \quad N_1 < n < N_2, \\ &u_{N_2} = \varphi_2(x, y). \end{aligned} \tag{3}$$

Определение 1. *Цепочка (1) называется интегрируемой, если существуют функции φ_1 и φ_2, такие, что для любого выбора пары целых чисел N_1, N_2, где $N_1 < N_2 - 1$, система гиперболического типа (3) является интегрируемой по Дарбу.*

Основной результат данной работы:

Теорема 1. *Если цепочка (2) интегрируема в смысле Определения 1, тогда она приводится посредством точечных преобразований к одной из следующих:*

$$u_{n,xy} = \left(e^{u_n - u_{n-1}} - e^{u_{n+1} - u_n}\right) u_{n,x}, \tag{4}$$

$$u_{n,xy} = \left(-u_{n+1} + 2u_n - u_{n-1}\right) u_{n,x}. \tag{5}$$

Цепочки (4), (5) были известны ранее (см. [7]).

Литература

1. *Habibullin I.T.* Characteristic Lie rings, finitely-generated modules and integrability conditions for (2+ 1)-dimensional lattices // Physica Scripta **87**:6 (2013), 065005.

2. *Habibullin I.T., Poptsova M.N.* Classification of a Subclass of Two-Dimensional Lattices via Characteristic Lie Rings // SIGMA **13** (2017), 073, 26 p.p.

3. *Habibullin I. T., Poptsova M. N.* Algebraic properties of quasilinear two-dimensional lattices connected with integrability // Ufa Math. J., **10**:3 (2018), 86–105.

4. *Ferapontov E.V., Khusnutdinova K.R.* On the integrability of (2+1)-dimensional quasilinear systems // Commun. Math. Phys. **248**:1 (2004), 187-206.

5. *Жибер А.В., Муртазина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б.* Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. — 376стр.

6. *Millionshchikov D.* Lie algebras of slow growth and Klein-Gordon PDE // Algebr. Represent. **21**:5 Theor. (2018), 1037-1069.

7. *Shabat A.B., Yamilov R.I.* To a transformation theory of two-dimensional integrable systems // Phys. Lett. A **227**:1-2. (1997), 15-23.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕТИКИ ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

А.Ф. Купцова
a-l-s-u@bk.ru

УДК 544.431

Предметом исследования работы являются математические модели химической кинетики. Это направление в настоящее время активно развивается в самых разных областях, в том числе в химии и химической технологии.

Ключевые слова: базис маршрутов, граф сложной химической реакции, базис ключевых веществ

Mathematical modeling of kinetics of chemical processes

The subject of this research is mathematical models of chemical kinetics. This direction is currently developing in various fields, including chemistry and chemical technology.

Keywords: route basis, graph of complex chemical reaction, basis of key substances

Решаемая задача – определение параметров математических моделей на основании кинетических измерений. В химическом плане рассматриваемые задачи относятся к классу обратных задач идентификации механизмов сложных химических реакций.

Основная трудность решаемых задач – измерению, как правило, доступна только часть участвующих в реакции веществ. Следствием такой недоинформативности является неединственность решения обратной задачи. Информативность – базис нелинейных параметрических функций кинетических констант, допускающих однозначное оценивание при заданной структуре кинетического эксперимента. Ставится вопрос о точном аналитическом виде нелинейных параметрических функций.

Современные технологии параллельных вычислений позволяют обратиться к таким классам задач, решение которых традиционными методами крайне затруднено.

В цикле работ [1], [2] предложен метод, позволяющий существенно упростить исследование на информативность кинетических моделей сложных реакций. Метод основан на теоретико-графовом анализе независимых маршрутов [3].

Итак, совокупность стадий химической реакции можно разбить на подсистемы, в которые входят части стадий исходного механизма. Число таких подсистем равно числу независимых маршрутов. Объединение матриц связей для каждой подсистемы позволяет выписать матрицу связей всей системы и найти базис нелинейных параметрических функций исходной сложной системы реакций.

Купцова Алсу Фаритовна, магистрант 2-го года обучения,БашГУ(Уфа,Россия); Alsu Kupcova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Следовательно, можно сформулировать правило нахождения базиса нелинейных параметрических функций:

1. Нахождение маршрутов химической реакции. Разложение исходной системы на подсистемы, отвечающие независимым маршрутам.

2. Нахождение матрицы связей для каждой из подсистем. Объединение матриц.

3. Нахождение базиса нелинейных параметрических функций кинетических параметров для исходной системы.

Литература

1. *Спивак С.И., Исмагилова А.С., Ахмеров А.А.* Анализ информативности кинетических измерений при решении обратных задач химической кинетики для многомаршрутных реакций // Кинетика и катализ. — 2014. — Т. 55. № 5. — С. 566-576.

2. *Спивак С.И., Исмагилова А.С.* Информативность кинетических измерений и обратные задачи химической кинетики // Доклады Академии наук. — 2013. — Т. 451. № 3. — С. 296-298.

3. *Темкин М.И.* Механизм и кинетика сложных каталитических реакций // Лекции, прочитанные на первом симпозиуме Международного конгресса по катализу. — М.: Наука, 1970. — С. 57-76.

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ТРИКОМИ-НЕЙМАНА ДЛЯ ОПЕРАТОРА СМЕШАННОГО ТИПА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

А.Н. Кучкарова

kuchkarova_ aigul@mail.ru,

УДК 517.518

Найдены собственные значения спектральной задачи для оператора смешанного типа с характеристическим вырождением и построена соответствующая система собственных функций

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, собственные числа, собственные функции

The Tricomi-Neumann spectral problem for a mixed type operator with characteristic degeneration

The eigenvalues ??of the spectral problem for a mixed-type operator with characteristic degeneracy are found and the corresponding system of eigenfunctions is constructed.

Keywords: mixed type equation, eigenvalues, eigenfunctions

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + yu_{yy} + qu_y + \lambda u = 0, \tag{1}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $1/2 < q < 1$, в области D, ограниченной: 1) "нормальной"кривой $\Gamma_0 : x^2 + 4y = 1$, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$ с концами в

Кучкарова Айгуль Наилевна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Aigul Kuchkarova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

точках $A_1(-1,0)$ и $A_2(1,0)$; 2) характеристиками OC $(x - 2\sqrt{-y} = 0)$ и CA_2 $(x + 2\sqrt{-y} = 1)$ уравнения (1) при $y < 0$.

Обозначим $D_0 = D \cap \{y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$.

В области D для уравнения (1) поставим следующую спектральную задачу.

Задача. *Найти значения комплексного параметра λ и соответствующие им функции $u(x,y)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,y) \in \mathrm{C}(\,\overline{D}\,) \cap \mathrm{C}^1(D) \cap \mathrm{C}^2(D_0 \cup D_1),$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \ \ (x,y) \in D_0 \cup D_1,$$

$$u(x,y) = 0, \ \ (x,y) \in \Gamma,$$

$$u_y(x,0) = 0, \ \ -1 < x < 0,$$

$$u(x,y) = 0, \ \ (x,y) \in OC.$$

$$lim_{y \to 0-0}(-y)^q u_y(x,y) = lim_{y \to 0+0} y^q u_y(x,y) = 0.$$

Найдены собственные значения и построены в явном виде соответствующие собственные функции спектральной задачи Трикоми-Неймана для оператора смешанного типа с характеристичесим вырождением. Отметим, что ранее в работах [1]-[3] построены собственные функции задач Трикоми–Неймана и Геллерстедта.

Литература

1. *Сабитов К.Б., Кучкарова А.Н.* Спектральные свойства решения задачи Геллерстедта для уравнений смешанного типа и их применения // Сибирский математический журнал. 2001. Т. 42. № 5. С.1147-1161.

2. *Сабитов К.Б., Бибакова С.Л.* Построение собственных функций задачи Трикоми-Неймана для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением и их применение //Математические заметки. 2003. Т. 74. № 1. С. 76-87.

3. *Кучкарова А.Н.* Построение системы собственных функции задачи Трикоми- Неймана для вырождающегося оператора смешанного типа. // Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В.А.Садовничего Современные проблемы математики и механики (г. Москва, 14 - 15 мая 2019г.) с.314-316

NUMBER OF BOUND STATES IN A SYSTEM OF THREE PARTICLES IN AN OPTICAL LATTICE. THE EFIMOV EFFECT AND RELATED RESULTS

S.N.Lakaev
slakaev2019@gmail.

УДК 517.518

For the two resp.three particle discrete Shrödinger operators $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ resp. $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, associated to a system of two resp. three bosons with zero-range pair interaction on the three-dimensional lattice $\mathbb{Z}^3$ the discrete and essential spectra and their location are established.

Keywords: Schrödinger operator, three-particle system, hamiltonian,zero-range interaction, eigenvalue, lattice

Let $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ resp. $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$ be the two resp. three particle discrete Schrödinger operator associated to a system of two resp. three bosons with zero-range pair interaction on three-dimensional lattice $\mathbb{Z}^3$. In the momentum representation $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ resp. $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$ acts in the Hilbert space $L^{2,e}[(\mathbb{T}^d)]$ resp.$L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$:

$$h_\mu(k) = h_0(k) + \mu v \,\text{resp.}\, H_\mu(K) = H_0(K) + \mu(V_1 + V_2 + V_3).$$

The operator $h_0(k)$ resp. v is of the form

$$(h_0(k)f)(p) = \mathcal{E}(k;p)f(p) \,\text{resp.}\, (vf)(p) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(t)\eta(dt)$$

where $\mathcal{E}(k;p) = \varepsilon(\frac{k}{2} - p) + \varepsilon(\frac{k}{2} + p)$, $\varepsilon(p) = \sum\limits_{j=1}^{d}[1 - \cos p_j]$, $p = (p_1, ..., p_d) \in \mathbb{T}^d$.

The operator $H_0(K)$ is of the form $(H_0(K)f)(p,q) = E(K;p,q)f(p,q)$, where

$$E(K;p,q) = \varepsilon(\frac{K}{3} - p - q) + \varepsilon(\frac{K}{3} + p) + \varepsilon(\frac{K}{3} + q),$$

.

The operator $\mathbb{V} = V_1 + V_2 + V_3$ in coordinates $(p,q) \in (\mathbb{T}^d)^2$ can be written in the form

$$(\mathbb{V}f)(p,q) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(p,t)\eta(dt) + \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(t,q)\eta(dt) + \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(t, K-p-q)\eta(dt).$$

Let $\mathcal{E}_{\min}(k) \equiv \min_{p\in\mathbb{T}^d} \mathcal{E}_k(p)$, $\mathcal{E}_{\max}(k) \equiv \max_{p\in\mathbb{T}^d} \mathcal{E}_k(p)$, $k \in \mathbb{T}^d$ and

$$\mathrm{E}_{\min}(K) \equiv \min_{p,q\in\mathbb{T}^d} E(K;p,q), \, \mathrm{E}_{\max}(K) \equiv \max_{p,q\in\mathbb{T}^d} E(K;p,q), K \in \mathbb{T}^d.$$

The essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k))$ and number of eigenvalues of the operator $h_\mu(k)$ are described in theorem.

Theorem 1. *Let $d = 3$. There exists $\mu_{ef} < 0$ such that:*

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда фундаментальных исследований (проект № OT-F4-66).

Lakaev Saidakhmat Norjigitovich, doctor of science,academician,professor SamDU, Samarkand, Uzbekistan

(i) *Let $\mu_{ef} < \mu < 0$. Then $\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)]$ and operator $h_{\mu_{ef}}(0)$ has no virtual level(resonance) at $e_{\mu_{ef}}(0) = \mathcal{E}_{\min}(0)$ and eigenvalue below $\mathcal{E}_{\min}(k)$.*

(ii) *Let $\mu = \mu_{ef} < 0$.Then $\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)]$ and operator $h_{\mu_{ef}}(k)$ has a virtual level(resonance) at $e_{\mu_{ef}}(0) = \mathcal{E}_{\min}(0)$ and eigenvalue below $\mathcal{E}_{\min}(k), k \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$.*

(iii) *Let $\mu < \mu_{ef} < 0$ and $k \in \mathbb{T}^d$.Then $\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k), \mathcal{E}_{\max}(k)]$ and the operator $h_\mu(k)$ has a unique eigenvalue $e_\mu(k)$, which is satisfies the relations $e_\mu(k) < \mathcal{E}_{\min}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ and $e_\mu(0) < e_\mu(k), k \neq 0$.*

The following theorem is described the essential spectrum and number of eigenvalues of three-particle Schrödinger operator $H_\mu(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$.

Theorem 2. *Let $d = 3$. There exists $-\infty < \mu_{ef} < \mu_{th} < 0$ such that:*

(i) *Let $\mu_{th} < \mu < 0$. Then $\sigma_{\text{spec}}(H_\mu(0)) = \sigma_{\text{ess}}(H_\mu(0)) = [E_{\min}(0), E_{\max}(0)]$.*

(i) *Let $\mu = \mu_{th} < 0$. Then $\sigma_{\text{spec}}(H_\mu(0)) = \sigma_{\text{ess}}(H_\mu(0)) = [E_{\min}(0), E_{\max}(0)]$, the point $E_{\min}(0)$ is an eigenvalue of operator $H_\mu(0)$ and $H_\mu(0)$ has no eigenvalues below the bottom $\tau_{\text{ess}}(H_\mu(0)) = \inf \sigma_{\text{ess}}(H_\mu(0)) = E_{\min}(0)$.*

(ii) *For any $\mu_{ef} < \mu < \mu_{th} < 0$ and $K \in \mathbb{T}^d$ the operator $H_\mu(K)$ has an eigenvalue $E_\mu(K)$ lying below the bottom $\tau_{\text{ess}}(H_\mu(K)) = \inf \sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K)) = E_{\min}(K)$ and the associated eigenfunction (bound state) $f_\mu(\cdot, \cdot) \in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ is regular in $(p, q) \in (\mathbb{T}^d)^2$.*

(iii) *Let $\mu = \mu_{ef} < 0$ and $K = 0$. Then $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(0)) = \inf \sigma_{\text{ess}}(H_\mu(0)) = [E_{\min}(0), E_{\max}(0)]$, and $H_\mu(0)$ has an infinitely many number eigenvalues $E_\mu^{(1)}(0) < ... < E_\mu^{(n)}(0)...$ lying below the bottom $\tau_{\text{ess}}(H_\mu(0)) = E_{\min}(0)$, where $e_{\mu_{ef}}(0)$ is a virtual level (resonance) of the operator $h_{\mu_{ef}}(0), 0 \in \mathbb{T}^d$.*

(iv) *Let $\mu = \mu_{ef} < 0$ and $0 \neq K \in \mathbb{T}^d$. Then $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K)) = [E_{\min}(K), E_{\max}(K)]$, and $H_\mu(K)$ has finitely many eigenvalues $E_\mu^{(1)}(0) < ... < E_\mu^{(n)}(0)$ lying below the bottom $\tau_{\text{ess}}(H_\mu(K)) = E_{\min}(K)$, where $e_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$ is a unique eigenvalue of the operator $h_\mu(k)$ lying below the bottom $\tau_{\text{ess}}(h_\mu(k)) = E_{\min}(k)$.*

(v) *Let $\mu < \mu_{ef} < 0$.Then $\sigma_{\text{essspec}}(H_\mu(K)) = \cup_{k \in \mathbb{T}^d}\{e_{\mu_{ef}}(k) + \varepsilon(k)\} \cup [E_{\min}(K), E_{\max}(K)]$ and $H_\mu(0)$ has an eigenvalue $E_\mu(k), k \in \mathbb{T}^d$ lying below the bottom $\tau_{\text{ess}}(H_\mu(K)) < E_{\min}(K)$.*

Литература

1. *Lakaev S.N.* On Efimov's Effect in a System of Three Identical Quantum Particles // Funct. Anal. Appl. **27**:3(1993), pp. 166–175.

2. *Albeverio S., Lakaev S.N. and Muminov Z.I.*: Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics //Ann. Henri Poincaré. **5**, (2004),743–772

3.*Albeverio S., Lakaev S.N.,Makarov K.A., Muminov Z.I.*: The Threshold Effects for Two-particle Hamiltonians on Lattices// Comm.Math.Phys. **262**(2006),91–115.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

И.И. Латыпов

LatypovII@rambler.ru

УДК 517.956

Рассматривается проблема аналитического решения системы сингулярно возмущенных краевых задач нестационарной теплопроводности, описывающей процесс распределения температуры в твердом материале при облучении ультракороткими лазерными импульсами.

Ключевые слова: асимптотика, нестационарное уравнение теплопроводности, сингулярно возмущенная краевая задача, лазерный импульс, подвижная граница

Solution of a system of singularly perturbed boundary value problems thermal conductivity

The report addresses the analytical solution systems of singularly perturbed boundary value problems of non-stationary thermal conductivity describing the process of temperature distribution in solid material when irradiated with ultrashort laser pulses.

Keywords: asymptotics, non-stationary heat equation, singularly perturbed boundary value problem, laser pulse, moving boundary

Быстрым развитием технологии, использование материалов со сложной структурой, лазерной техники привело к тому, что все больше внимания уделяется абляции под действием ультракоротких лазерных импульсов пикосекундного и фемтосекундного диапазонов, для которых квазистационарный режим абляции не достигается, а так же проявляются эффекты, связанные с электрон-фононным взаимодействием, и явления, обусловленные горячим электронным газом в веществе [1,2].

Задача нахожения распределение температуры в твердом материале при облучении ультракороткими лазерными импульсами, может быть сформулирована на основе двухтемпературной модели описания переходных явлений в неравновесном электронном газе и решетке при субпикосекундном лазерном воздействии. Двухтемпературная модель [2] описывает транспорт энергии внутри металла с помощью системы уравнений нестационарной теплопроводности для температуры электронов и решетки:

$$c_e\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial t}=c_e\nu\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi_e\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial z}\right)+D_k\cdot Q-\mu_e\left(T_e(z,t)-T_i(z,t)\right),$$

$$c_i\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t}=c_i\nu\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi_i\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial z}\right)+D_k\cdot Q+\mu_e\left(T_e-T_i\right),\quad (x,t)\in\Omega,$$

$$T_e(z,\ t_k)=T_{e,k}(z),\quad T_e(z,\ t_0)=T_{e,0}(z)=T_0,\quad k=\overline{0,m},$$

$$T_i(z,\ t_k)=T_{i,k}(z),\quad T_i(z,\ t_0)=T_{i,0}(z)=T_0,\quad D_k=\begin{cases}1, & k=2p\\ 0, & k=2p+1\end{cases},$$

$$\Omega=\{\ (x,t):\ 0<\ z\ <\ H,\quad t_0<t<t_\infty\},$$

Латыпов Ильмир Ибрагимович, к.ф.-м.н., доцент, Бирский филиал БашГУ (Бирск, Россия); Ilmir Latypov (Birsk branch Bashkir State University, Birsk, Russia)

$$-\chi\cdot\left.\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}=J_e(t),\ J_e(t)=-k_0b_0\left(T_{e,s}(t)+T_0\right)^2\exp\left\{-\frac{T_a}{T_{e,s}(t)+T_0}\right\},$$

$$-\chi\cdot\left.\frac{\partial T_i(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}=J_i(t)=-\varrho\nu\text{Ł},\ \nu=\nu_0\exp\left\{-\frac{T_u}{T_{i,s}+T_0}\right\},$$

$$-\chi\cdot\left.\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial z}\right|_{z=H}=\psi_e(t)+\sigma_{1,e}\left[T_e(z,t)-T_0\right]+\sigma_{2,e}\left[T_e^4(z,t)-U_0^4\right],$$

$$-\chi\cdot\left.\frac{\partial T_i(z,t)}{\partial z}\right|_{z=H}=\psi_i(t)+\sigma_{1,i}\left[T_i(z,t)-T_0\right]+\sigma_{2,i}\left[T_i^4(z,t)-U_0^4\right],$$

где $\mu_e=c_e/\tau$ - коэффициент скорости обмена энергией между электронной и решоточной подсистемами (τ- характерное время обмена для электронной подсистемы); b_0 - постоянная Ричардсона; $k_0=k_b\left(T_{s,e}-T_0\right)/e$- коэффициент преобразования плотности потока энергии J_e в энергетические единицы, где индкс s - обозначает значение соответствующей величины на поверхности $z=0$; $H,\ \psi,\ L$- толщина, плотность и удельная теплота плавления материала; $\nu,\ T_a$ - константы, характеризующие модель испарения. Функции $\psi_e,\ \psi_i$ и константы $\sigma_{1,e},\ \sigma_{1,e},\ \sigma_{1,i},\ \sigma_{1,i}$ определяют режимы теплообменана на обратной стороне пластины. Функция $Q(z,t)$ - описывает вид и характер источника тепла. Данная модель применима в случае, когда работают классические законы Фурье, т.е. для времен, много больших, чем характерное время τ_e установления равновесного распределения в электронном газе, которое в большинстве задач составляет несколько фемтосекунд.

Исходная задача, вводя безразмерные переменные, сводится к решению системы сингулярно возмущенных краевых задач уравнения теплопроводности с нелинейными граничными условиями. Приближенное решение которой, используя "геометро-оптический"асимптотический метод [3], получается в виде асимптотического разложения решения в смысле Пуанкаре по степеням малых параметров, в зависимости от близости рассматриваемой точки к границам [4,5].

Литература

1. *Прохоров А.М., Конов В.И., Урсу И., Михэилеску И.Н.* Взаимодействие лазерного излучения с металлами. // — М.: Наука, 1988.**123**:3

2. *Анисимов С.И., Лукъянчук Б.С.* Избранные вопросы теории лазерной абляции. // УФН. 2002. Том 172, № 3.

3. *Kravchenko V.F., Nesenenko G.A., Latypov I.I.* An application of integral equations to a singularly perturbed nonstationary boundary value problem for the heat equation in a domain with moving boundaries // Differential Equations. Volume 35, Issue 9, September 1999, Pages 1184–1192.

4. *Latypov I.I.* Approximate solution to a singular perturbed boundary value problem of thermal shielding // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 918 (2017) 012005.

5. *Latypov I.I., Bigaeva L.A., Chudinov V.V., Gilev A.Y., Gaisin F.R.* Material evaporation with ultrashort laser exposure // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 537 (2019) 022068.

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ ДЛЯ СЕТОЧНОЙ ЗАДАЧИ О СОПРЯЖЕНИИ С ИТЕРАЦИЯМИ НА ГРАНИЦЕ РАЗРЫВА РЕШЕНИЯ

Ф. В. Лубышев, М. Э. Файрузов
fairuzovme@mail.ru

УДК 519.6:517.962

Рассматривается и исследуется итерационный процесс для сеточной задачи о сопряжении с итерациями на границе разрыва решения. Предложенный в работе итерационный процесс сводит решение исходной сеточной граничной задачи для состояния с разрывным решением к решению на каждой фиксированной итерации двух специальных граничных задач в двух сеточных подобластях.

Ключевые слова: итерационный метод, краевая задача, эллиптическое уравнение, разрывное решение, разностная аппроксимация

On an iterative process for a grid conjugation problem with iterations on the boundary of the solution discontinuity

An iterative process for the mesh conjugation problem with iterations on the boundary of the solution discontinuity is considered and investigated. The iterative process proposed in this paper reduces the solution of the initial grid boundary value problem for a discontinuous state to the solution of two special boundary value problems in two grid subdomains at each fixed iteration.

Keywords: iterative method, boundary value problem, elliptic equation, discontinuous solution, difference approximation

В работе рассматривается следующая сеточная задача о сопряжении с разрывным сеточным решением на границе раздела сред. Требуется найти функцию $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$, определенную на $\bar{\omega} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}^{(1,2)}$, $y(x) = y_1(x)$, $x \in \bar{\omega}^{(1)}$, $y(x) = y_2(x)$, $x \in \bar{\omega}^{(2)}$, где компоненты $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют условиям:

1) сеточная функция $y_1(x)$, определенная на $\bar{\omega}^{(1)} = \omega^{(1)} \cup \partial\omega^{(1)}$, удовлетворяет в $\omega^{(1)}$ уравнению

$$L_{1h}y_1(x) = -\big(a_{1h}^{(1)}(x)y_{1\bar{x}_1}\big)_{x_1} - \big(a_{2h}^{(1)}(x)y_{1\bar{x}_2}\big)_{x_2} + d_{1h}(x)q_1(y_1) = f_{1h}(x), x \in \omega^{(1)}, \tag{1}$$

а на границе $\gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \backslash \gamma_S$ условию

$$y_1(x) = 0, \qquad x \in \gamma^{(1)}; \tag{2}$$

2) сеточная функция $y_2(x)$, определенная на сетке $\bar{\omega}^{(2)} = \omega^{(2)} \cup \partial\omega^{(2)}$ удовлетворяет в $\omega^{(2)}$ уравнению

$$L_{2h}y_2(x) = -\big(a_{1h}^{(2)}(x)y_{2\bar{x}_1}\big)_{x_1} - \big(a_{2h}^{(2)}(x)y_{2\bar{x}_2}\big)_{x_2} + d_{2h}(x)q_2(y_2) = f_{2h}(x), x \in \omega^{(2)}, \tag{3}$$

а на границе $\gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \backslash \gamma_S$ условию

$$y_2(x) = 0, \qquad x \in \gamma^{(2)}; \tag{4}$$

Лубышев Федор Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Fedor Lubyshev (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Файрузов махмут Эрнстович, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Mahmut Fairuzov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

3) искомые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ связаны между собой дополнительными условиями на γ_S, позволяющими "сшить"сеточные решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ вдоль сеточного множества γ_S в виде следующих уравнений:

$$\tilde{L}_{1h}y_1(x) = \frac{2}{h_1}\big[a_{1h}^{(1)}(\xi,x_2)y_{1\bar{x}_1}(\xi,x_2)+\theta_h(x_2)y_1(\xi,x_2)\big]+d_{1h}(\xi,x_2)q_1(y_1(\xi,x_2))-$$

$$-\big(a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)y_{1\bar{x}_2}(\xi,x_2)\big)_{x_2} = f_{1h}(\xi,x_2) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_2(\xi,x_2), \qquad (5)$$

$$x \in \gamma_S = \{x_1 = \xi, x_2 \in \omega_2\},$$

$$\tilde{L}_{2h}y_2(x) = -\frac{2}{h_1}\big[a_{1h}^{(2)}(\xi+h_1,x_2)y_{2x_1}(\xi,x_2) + \theta_h(x_2)y_2(\xi,x_2)\big] + d_{2h}(\xi,x_2)\times$$

$$\times q_2(y_2(\xi,x_2)) - \big(a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)y_{2\bar{x}_2}(\xi,x_2)\big)_{x_2} = f_{2h}(\xi,x_2) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_1(\xi,x_2),$$

$$x \in \gamma_S = \{x_1 = \xi, x_2 \in \omega_2\}, \qquad (6)$$

Задача (1)-(6) является сеточным аналогом исходной дифференциальной задачи для состояния процесса управления, описываемого УМФ с разрывными коэффициентами и решениями (см. [1]). Подобные задачи возникают при математическом моделировании и оптимизации процессов теплопередачи, диффузии, фильтрации, теории упругости и др. (см., например, [2]-[3]).

Здесь и далее по поводу обозначений для сеточных функций, разностных аппроксимаций смотри работу [1].

В работе показано, что численное решение граничных задач подобного типа можно эффективно осуществлять с применением итерационных методов разработанных в настоящей работе, а именно с помощью итераций на внутренней границе разрыва сеточного решения в сочетании с другими итерационными методами по нелинейностям в отдельности в каждой из сеточных подобластей. Заметим, что задачи для состояний управляемых процессов, описываемых уравнениями математической физики (УМФ) с разрывными коэффициентами и решениями, возникают при математическом моделировании и оптимизации процессов теплопередачи, диффузии, фильтрации, теории упругости и др. Предложенный в работе итерационный процесс сводит решение исходной сеточной граничной задачи для состояния с разрывным решением к решению на каждой фиксированной итерации двух специальных граничных задач в двух сеточных подобластях. Доказана сходимость итерационного процесса в сеточных Соболевских нормах к единственному решению сеточной задачи при любом начальном приближении.

Литература

1. *Лубышев Ф. В.* О разностных аппроксимациях задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, **52**:8 (2012), 1378–1399.

2. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н.* Вычислительная теплопередача. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.

3. *Самарский А. А., Андреев В. Б.* Разностные методы для эллиптических уравнений. — М.: Наука, 1976.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИММЕТРИЯМИ ТОЛЬКО ЛИНЕЙНО-АВТОНОМНОГО ВИДА

С.Ю. Лукащук
lsu@ugatu.su

УДК 517.958

Рассматривается класс нелинейных дробно-дифференциальных уравнений в частных производных, состоящий из уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля по одной независимой переменной. Доказывается, что группа точечных симметрий уравнения или системы уравнений из такого класса может состоять только из симметрий линейно-автономного типа.

Ключевые слова: система дробно-дифференциальных уравнений, точечная симметрия, линейная автономность

On one class of systems of fractional differential equations with linearly-autonomous symmetries

A class of multi-dimensional nonlinear partial fractional differential equations involving the Riemann–Liouville fractional derivatives with respect to only one independent variable is considered. It is proved that any Lie point symmetry group admitted by equations or systems belonging to considered class consists of only linearly-autonomous point symmetries.

Keywords: system of fractional differential equations, Lie point symmetry, linear autonomy

Рассматривается система m дробно-дифференциальных уравнений

$$ {}_0D^{\alpha_\mu}_{x^0}(u^\mu) = F_\mu(x^0, x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(r)}), \qquad \mu = 1, \dots, m, \tag{1}$$

где x^0, $x = (x^1, \dots, x^n)$ — независимые переменные, $u \equiv u(x^0, x) = \{u^1, u^2, \dots, u^m\}$ — вектор-функция зависимых переменных, $n, m \in \mathbb{N}$,

$$ {}_0D^{\alpha_\mu}_{x^0}(u^\mu)(x^0, x) = \frac{1}{\Gamma(N_\mu + 1 - \alpha_\mu)} \frac{\partial^{N_\mu+1}}{\partial (x^0)^{N_\mu+1}} \int_0^{x^0} \frac{u^\mu(s, x)}{(x^0 - s)^{\alpha_\mu - N_\mu}} ds$$

— левосторонняя дробная (порядка $\alpha_\mu \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N}$) производная Римана–Лиувилля (см., например,[1]), $\Gamma(z)$ — гамма-функция. В (1) использована нотация дифференциальной алгебры [2]:

$$\begin{aligned} &u_{(1)} = \{u^\mu_{i_1}\},\ u_{(2)} = \{u^\mu_{i_1 i_2}\},\ \dots,\ u_{(r)} = \{u^\mu_{i_1 i_2 \dots i_r}\}, \\ &u^\mu_{i_1} = D_{i_1}(u^\mu),\ u^\mu_{i_1 i_2} = D_{i_2}(u^\mu_{i_1}),\ \dots,\ u^\mu_{i_1 i_2 \dots i_r} = D_{i_r}(u^\mu_{i_1 i_2 \dots i_{r-1}}), \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект госзадания № 1.3103.2017/4.6).

Лукащук Станислав Юрьевич, д.ф.-м.н., доцент, УГАТУ (Уфа, Россия); Stanislav Lukashchuk (Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia)

где $i_1, \ldots, i_r = 0, \ldots, n$, $\mu = 1, \ldots, m$ и $D_i \equiv D_{x^i}$ — оператор полного дифференцирования по переменной x^i.

Рассматривается задача построения группы Ли точечных преобразований, допускаемых системой (1). Инфинитезимальный оператор группы ищется в виде

$$X = \xi^i(x^0, x, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\mu(x^0, x, u)\frac{\partial}{\partial u^\mu}, \tag{1}$$

где $i = 0, \ldots, n$, $\mu = 1, \ldots, m$.

В работе [3] было введено понятие X-автономной группы преобразований, частным случаем которой является линейно-автономная группа [4].

Определение. Инфинитезимальный оператор X группы Ли точечных преобразований, допускаемой системой (1), называется *линейно-автономной симметрией* этой системы, если $\xi^i_{u^\mu} = 0$, $\eta^\mu_{u^\nu u^\lambda} = 0$ для всех $i = 0, \ldots, n$ и $\mu, \nu, \lambda = 1, \ldots, m$.

Таким образом, линейно-автономная симметрия имеет вид

$$X = \xi^i(x^0, x)\frac{\partial}{\partial x^i} + \left[\eta^\mu_{(0)}(x^0, x) + \eta^\mu_{(1)\nu}(x^0, x)u^\nu\right]\frac{\partial}{\partial u^\mu}. \tag{2}$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Группа Ли точечных симметрий системы* (1) *состоит только из симметрий линейно-автономного типа* (2), *причем*

$$\xi^0 = \phi(x)(x^0)^2 + \psi(x)x^0, \quad \xi^j = \theta^j(x), \quad \eta^\mu_{(1)\mu} = (\alpha_\mu - 1)\phi(x)x^0 + \varphi_\mu(x),$$

$$\eta^\mu_{(1)\nu} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{p=0}^{l_{\mu\nu}} \omega^\mu_{p\nu}(x)(x^0)^p, & \alpha_\mu = \alpha_\nu + l_{\mu\nu}, \\ 0, & \alpha_\mu \neq \alpha_\nu + l_{\mu\nu}, \end{cases} \quad l_{\mu\nu} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \nu \neq \mu,$$

где $j = 1, \ldots, n$, $\mu, \nu = 1, \ldots, m$. *Функции* $\phi(x)$, $\psi(x)$, $\theta^j(x)$, $\varphi_\mu(x)$, $\omega^\mu_{p\nu}(x)$, $\eta^\mu_{(0)}(x^0, x)$ *удовлетворяют системе определяющих уравнений*

$$ {}_0D^{\alpha_\mu}_{x^0}(\eta^\mu_{(0)}) + \left[\varphi_\mu - \alpha_\mu\psi - (1 + \alpha_\mu)\phi x^0\right]F_\mu - X_{(r)}F_\mu + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{m}\sum_{p=0}^{l_{\mu\nu}}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\frac{\Gamma(\alpha_\mu + 1)(x^0)^{p-k}}{\Gamma(\alpha_\mu - k + 1)}\omega^\mu_{p\nu}D^{l_{\mu\nu}-k}_{x^0}(F_\nu) = 0,$$

где $\binom{p}{k}$ — *биномиальные коэффициенты и*

$$X_{(r)} = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\mu\frac{\partial}{\partial u^\mu} + \zeta^\mu_i\frac{\partial}{\partial u^\mu_i} + \ldots + \zeta^\mu_{i_1\ldots i_r}\frac{\partial}{\partial u^\mu_{i_1\ldots i_r}}$$

— r*-е продолжение оператора* X.

Теорема 1 позволяет существенно упростить конструктивный алгоритм нахождения симметрий для систем дробно-дифференциальных уравнений вида (1), что иллюстрируется в докладе рядом примеров.

Литература

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.

2. *Ibragimov N.H.* Transformation groups and Lie algebras. — Singapore: World Scientific, 2013.

3. *Овсянников Л.В.* О свойстве X-автономии // Докл. АН, **330**:5 (1993), 559-561.

4. *Чиркунов Ю.А.* Условия линейной автономности основной алгебры Ли системы линейных дифференциальных уравнений // Докл. АН, **426**:5 (2009), 605-607.

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

В.О. Лукащук, Э.И. Тимирбаева
voluks@gmail.com, evelinatimirbaeva@mail.ru

УДК 517.95

В работе выполнена групповая классификация обобщенного уравнения Бюргерса с малым параметром по произвольным функциям, входящим в уравнение. Установлено, что исследуемое уравнение удовлетворяет принципу нелинейной самосопряженности, и найдены его законы сохранения. Для некоторых допускаемых операторов выписаны инвариантные решения обобщенного уравнения Бюргерса.

Ключевые слова: обобщенное уравнение Бюргерса с малым параметром, приближенная группа преобразований, приближенный закон сохранения

Group classification and conservation laws of the generalized Burgers equation with a small parameter

A group classification of the generalized Burgers equation with a small parameter with respect to two arbitrary functions involved in the equation is performed. Also, it is proved that the equation under consideration satisfies the principle of nonlinear self-adjointness, and its conservation laws are found. Invariant solutions of the equation are obtained for some admitted operators.

Keywords: generalized Burgers equation with small parameter, approximate transformation group, approximate conservation law

Рассматривается обобщенное уравнение Бюргерса с малым параметром

$$u_t + (f_0(u) + \varepsilon f_1(u))u_x \approx u_{xx}, \tag{1}$$

где$f_0(u)$,$f_1(u)$ – некоторые функции, f_0,$f_1 \neq const$. Это уравнение в невозмущенном случае, то есть при $\varepsilon = 0$, хорошо исследовано [1], [2]. В частности показано, что при произвольной функции $f_0(u)$ уравнение допускает двухпараметрическую группу преобразований, которая расширяется до трех- и пятипараметрической при $f_0(u) = u$ и $f_0(u) = u^k, k \neq 0, 1$, соответственно.

Лукащук Вероника Олеговна, к.ф.-м.н., доцент, УГАТУ (Уфа, Россия); Lukashchuk Veronika (Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia)

Тимирбаева Эвелина Ильдаровна, студент, УГАТУ (Уфа, Россия); Evelina Timirbaeva (Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia)

В данной работе, следуя [3], выполнена групповая классификация уравнения (1). Доказано, что если f_0,f_1 произвольные функции, то приближенная группа точечных преобразований полностью наследует операторы невозмущенного уравнения. Кроме того, установлен вид этих функций, когда группа расширяется до четырех-, пяти-, семи- и десятипараметрической.

В работе показано, что уравнения (1) удовлетворяет условию нелинейной самосопряженности [4], и выписан формальный Лагранжиан. Доказано, что законы сохранения для этого уравнения являются тривиальными или полностью повторяют исследуемое уравнение. Дополнительно получены некоторые инвариантные решения уравнения (1).

Литература

1. *Katkov, V.L.* Group classification of solutions of Hopf's equations// Zh. Prikl. Mekh. Tekh. Fiz, 1965.

2. *Vaneeva, O.O.* Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence // Journal of Engineering Mathematics, 2015, 165-176.

3. *Байков, В. А.* Методы возмущений в групповом анализе // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж, 1989.

4. *Ibragimov, N. H.* Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws // Archives of ALGA, Volume 7/8, 2010-2011, 2-18.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ НАСЕЛЕНИЯ

Р.А. Лукманов
lukmanov-rishat@mail.ru

УДК 518

При исследовании демографических процессов немало важным является демографическое прогнозирование. В работе представлены основные выводы, которые были получены при прогнозировании динамики численности населения в РФ с помощью имитационной модели.

Ключевые слова: имитационное моделирование, демографическая ситуация, численность населения

Modeling population dynamics

Demographic forecasting is very important in the study of demographic processes.The paper presents the main conclusions that were obtained when predicting the dynamics of the population in the Russian Federation using a simulation model..

Keywords: simulation modeling, demographic situation, population size

При исследовании демографических процессов немало важным является демографическое прогнозирование. Без предварительного прогноза невозможно представить себе перспективы производства и потребления товаров и услуг, жилищного строительства, развития социальной инфраструктуры, здравоохранения и образования, пенсионной системы, решение геополитических проблем и т.д. [3] В результате моделирования численности населения параметры рождаемости, смертности и миграция были рассчитаны с использованием статистических данных официального сайта Федеральной службы государственной статистики [2]. В общем виде соотношение, описывающее эволюцию численности населения, имеет вид:

Утверждения типа теорем и лемм просим оформлять по следующему образцу.

$$S(t+1) = S(t) + r(t) * S(t) \check{} \beta(t) * S(t) + y(t). \qquad (1)$$

Данное соотношение учитывает количество умерших людей, родившихся и миграцию населения: S(t)– численность населения, r(t) – общий коэффициент рождаемости, $\beta(t)$ – общий коэффициент смертности, y(t) – миграционный прирост за год t (разность между въехавшими и выехавшими людьми). Нелинейный регрессионный метод может дать более точную, чем линейный метод, прогнозную численность населения на ближайшие временные периоды. Однако линейная регрессия при долгосрочных прогнозах дает значения численности более близкие к прогнозам [1]. Построенная модель соответствует поставленной задаче. Построенная модель в системе моделирования AnyLogic отражает численность населения на 2017 г. Полученные данные сравниваются с официальными данными [2].

Согласно официальным данным численность населения Российской федерации на 1 января 2017 года составляло 146 804 372 человек. Разница

Лукманов Ришат Алфритович, магистрант 2 г.о., БашГУ (Уфа, Россия); преподаватель математики, УГКТиД (Уфа, Россия); Rishat Lukmanov (Bashkir State University, Ufa, Russia; Ufa State College of technology and design,Ufa, Russia)

между экспериментальными данными и официальными составляет в среднем 0,56%.

С учётом полученных экспериментальных данных и вычисленной погрешности можно уверенно строить модель динамики численности населения на недалёкое будущее.

В качестве эксперимента были вычислены значения численности населения РФ на период с 2016 по 2025 гг. Совместно с прогнозами Федеральной службы статистики населения [2].

Среднегодовые темпы прироста численности населения России по всем вариантам прогнозов будут снижаться в ближайшее десятилетие, оставаясь положительными только по высокому варианту и данным, полученным в результате моделирования (в 2018-2020 годы). По моделируемым данным к 2022 году численность населения будет расти и достигнет результата 147123327. Начиная с 2022 года возможно снижение роста населения.

Рассмотренные варианты прогнозов свидетельствуют о том, что при определенных условиях сохранение тенденции роста населения России возможно. При самых благоприятных условиях его величина будет незначительной – в среднем равной 0,3% в год.

Литература

1. *Абдюшева С.Р., Лукманов Р.А., Лукманов Р.А.* Прогнозирование демографических показателей. Расчет численности населения Республики Башкортостан на период с 2017 по 2023 гг. // Математическое моделирование процессов и систем. Материалы VII Международной молодежной научно-практической конференции. Уфа, 2017 г. Часть I – с. 41-45.

2. Официальный сайт Федеральной службы государственной статистики - http://www.gks.ru

3. *Игебаева Ф. А* Демографическое воспроизводство населения: анализ и прогнозирование // Исторические, философские, политические и юридические науки, культурология и искусствоведение. Вопросы теории и практики. – 2015. – №2-1 (52). – С. 87-89.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БУССИНЕСКА – ЛЯВА

А.В. Лут

lutav@susu.ru

УДК 517.518

В работе приведены достаточные условия однозначной разрешимости обратной задачи для уравнения соболевского типа второго порядка. К такому типу уравнений можно редуцировать уравнение Буссинеска – Лява.

Ключевые слова: математическая модель, уравнение Буссинеска – Лява, обратная задача, уравнение Соболевского типа

Solution of the second-order inverse problem for the Boussinesq – Love mathematical model

In the paper, sufficient conditions are given for the unique solvability of the inverse problem for a second-order Sobolev type equation. The Boussinesq – Love equation can be reduced to this type of equations.

Keywords: mathematical model, Boussinesq – Love equation, inverse problem, Sobolev type equation

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times [0;T]$ рассмотрим уравнение Буссинеска – Лява [1]

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')v_t + \beta(\Delta - \lambda'')v + q + f, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$v(x,0) = v_0(x),\ v_t(x,0) = v_1(x), \tag{2}$$

граничным условием

$$v(x,t)|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3}$$

и условием переопределения

$$\int\limits_{\Omega} v(x,t)K(x)dx = \Phi(t), \tag{4}$$

где $K(x)$ заданная функция в $L_2(\Omega)$. Уравнение (1) описывает продольные колебания в упругом стержне с учетом инерции и внешней нагрузки. Условия (2) задают начальное смещение и начальную скорость соответственно, а (3) устанавливает значение на границах. Условие переопределения (4) возникает, когда, помимо нахождения функции u, требуется восстановить часть внешней нагрузки q.

Задачу (1) – (4) возможно редуцировать к уравнению соболевского типа второго порядка

$$Av''(t) = B_1 v'(t) + B_0 v(t) + \chi(t)q(t) + f(t),\ t \in [0,T], \tag{5}$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90137.

Лут Александр Валерьевич, аспирант, ЮУрГУ (Челябинск, Россия); Alexander Lut (South Ural State University, Chelyabinsk, Russia)

с условиями

$$v(0) = v_0,\ v'(0) = v_1, \tag{6}$$

$$Cv(t) = \Psi(t), \tag{7}$$

где $\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{Y}$ – банаховы пространства, операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$, $\ker A \neq \{0\}$, $C \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$, функции $\chi : [0,T] \to \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{F})$, $f : [0,T] \to \mathcal{F}$, $\Psi : [0,T] \to \mathcal{Y}$.

Пусть пучок операторов $\overrightarrow{B} = (B_1, B_0)$ полиномиально A-ограничен и выполнено условие

$$\int\limits_\gamma R^A_\mu(\overrightarrow{B})d\mu \equiv \mathbb{O}, \tag{A}$$

где $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$, тогда $v(t)$ можно представить как $v(t) = Pv(t) + (I-P)v(t) = u(t) + w(t)$. Предположим, что $\mathcal{U}^0 \subset \ker C$. Тогда в силу [2] задача (5) – (7) эквиавалентна задаче нахождения функций $u \in C^2([0,T];\mathcal{U}^1)$, $w \in C^2([0,T];\mathcal{U}^0)$, $q \in C^1([0,T];\mathcal{Y})$ из соотношений

$$u''(t) = S_1u'(t) + S_0u(t) + (A^1)^{-1}Q\chi(t)q(t) + (A^1)^{-1}Qf(t), \tag{8}$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, \tag{9}$$

$$Cu(t) = \Psi(t) \equiv Cv(t), \tag{10}$$

$$H_0w''(t) = H_1w'(t) + w(t) + (B^0_0)^{-1}(I-Q)\chi(t)q(t) + (B^0_0)^{-1}(I-Q)f(t), \tag{11}$$

$$w(0) = w_0,\ w'(0) = w_1, \tag{12}$$

где $S_1 = (A^1)^{-1}B^1_1$, $S_0 = (A^1)^{-1}B^1_0$, $u_0 = Pv_0$, $u_1 = Pv_1$, $w_0 = (I-P)v_0$, $w_1 = (I-P)v_1$, $t \in [0,T]$.

Теорема 1. Пусть пучок операторов $\overrightarrow{B}$ полиномиально A-ограничен и выполнено условие (A), кроме этого, точка ∞ полюс порядка $p \in \mathbb{N}_0$ A-резольвенты пучка $\overrightarrow{B}$, оператор $C \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})$, $\mathcal{U}^0 \subset ker\ C$, $\chi \in C^{p+2}([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{F}))$, $f \in C^{p+2}([0,T];\mathcal{F})$, $\Psi \in C^{p+4}([0,T];\mathcal{Y})$, для любого $t \in [0,T]$ оператор $C(A^1)^{-1}Q\chi$ обратим, причем $\left(C(A^1)^{-1}Q\chi\right)^{-1} \in C^{p+2}([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{Y}))$ и выполняется условие согласования $Cu_1 = \Psi'(0)$ при некотором начальном значении $u_1 \in \mathcal{U}$, а начальные значения $w_k = (I-P)v_k \in \mathcal{U}^0$ удовлетворяют

$$w_k = -\sum_{j=0}^{p} K^2_j(B^0_0)^{-1}\frac{d^{j+k}}{dt^{j+k}}\Big[(I-Q)(\chi(0)q(0) + f(0))\Big], \quad k = 0, 1.$$

Тогда существует единственное решение (v, q) обратной задачи (5) – (7), причем $q \in C^{p+2}([0,T];\mathcal{Y})$, $v = u + w$, где $u \in C^2([0,T];\mathcal{U}^1)$ – решение задачи (8) – (10), а функция $w \in C^2([0,T];\mathcal{U}^0)$ является решением задачи (11), (12), которое можно представить в виде

$$w(t) = -\sum_{j=0}^{p} K^2_j(B^0_0)^{-1}\frac{d^j}{dt^j}\Big[(I-Q)(\chi(t)q(t) + f(t))\Big].$$

Литература

1. *Ляв А.* Математическая теория упругости // пер. с англ. Б.В. Булгаков В.Я. Натанзон. – М.; Л.: ОНТИ. 1935.

2. *Zamyshlyaeva A.A., Lut A.V.* Inverse Problem for Sobolev Type Mathematical Models // Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modeling and Programming, **12**:2 (2019), 25-36.

ТРИНАДЦАТИКОМПОНЕНТНАЯ КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА КАТАЛИТИЧЕСКОГО КРЕКИНГА

Г.И. Маннанова, И.М. Губайдуллин, К.Ф. Коледина
gulshat.islamova.2017@mail.ru, irekmars@mail.ru

УДК 51-74+665.64

В работе представлена тринадцатикомпонентная кинетическая модель процесса каталитического крекинга. Данная модель учитывает весовой и структурный состав компонентов, что позволяет одновременно оценивать выход получаемых продуктов, в частности, бензина, и их основные качественные показатели.

Ключевые слова: Бензин, константы равновесия, каталитический крекинг, кинетическая модель, кокс, математическое моделирование

Thirteen-lump kinetic model of catalytic cracking process

The paper presents a thirteen-component kinetic model of the catalytic cracking process. This model takes into account the weight and structural composition of the components, which allows to simultaneously assess the yield of the products obtained, in particular, gasoline, and their main quality indicators.

Keywords: gasoline, equilibrium constants, catalytic cracking, kinetic model, coke, mathematical modeling

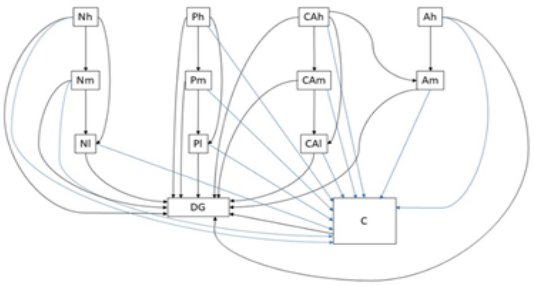
Процесс каталитического крекинга является одним из важнейших процессов нефтепереработки. В данном процессе получают базовый компонент товарных бензинов, имеющий высокое октановое число и низкое содержание ароматических углеводородов. С каждым годом, ужесточаются требования к товарным бензинам [1]. На основании анализа существующих моделей, экспериментальных лабораторных и заводских данных предложен вариант новой кинетической модели, которая в дальнейшим будет основой для математического моделирования, модифицирования и проектирования процесса каталитического крекинга. В настоящее время известно большое количество различных математических моделей процесса каталитического крекинга. В частности, в предыдущей работе [2] нами были рассмотрены ряд моделей: четырехкомпонентная [3], пятикомпонентная [4], две шестикомпонентные модели [5,6], девятикомпонентная [7], одиннадцатикомпонентная

Маннанова Гульшат Ильнуровна аспирант Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Mannanova Gulshat Il'nurovna (Institute of Petrochemistry and Catalysis, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)

Губайдуллин Ирек Марсович, д.ф.-м.н. с.н.с. Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН, УГНТУ (Уфа, Россия); Gubaydullin Irek Marcovich (Institute of Petrochemistry and Catalysis, Russian Academy of Sciences,Ufa state oil technical University Ufa, Russia)

Коледина Камилла Феликсовна, к. ф.-м.н. Институт нефтехимии и катализа УФИЦ РАН, УГНТУ (Уфа, Россия); Koledina Kamila Felixovna(Institute of Petrochemistry and Catalysis, Russian Academy of Sciences,Ufa state oil technical University Ufa, Russia)

[8], двенадцатикомпонентная [4] и четырнадцатикомпонентная [9] модели. На основе анализа моделей была предложена новая тринадцатикомпонентная кинетическая модель процесса каталитического крекинга. Принципиальная схема превращений, согласно этой модели, представлена на рисунке 1.



Обозначение	Название	Мол. масса, кг/кмоль
Ph	Тяжелые парафины	400
Nh	Тяжелые нафтены	400
Ah	Тяжелые ароматические соединения	400
Cah	Тяжелые соединения с ароматическими заместителями	400
Pm	Средние парафины	200
Nm	Средние нафтены	200
Am	Средние ароматические соединения	200
CAm	Средние соединения с ароматическими заместителями	200
Pl	Легкие парафины	100
Nl	Легкие нафтены	100
Al	Легкие ароматические соединения	100
C	Кокс + Газ	50
DG	Сухой газ	18,4

Рисунок 1 – Схема превращений в тринадцатикомпонентной кинетической модели процесса каталитического крекинга Система дифференциальных уравнений, показывающая кинетику превращений, приведена далее:
d[y1]/dt= -k1[y1]-k8[y1]-k12[y1]-k23[y1]
d[y2]/dt= -k2[y2]- k9[y2]- k13[y1]-k24[y2]
d[y3]/dt=-k3[y3]-k10[y3]-k14[y3]-k25[y3]-k11[y3]
d[y4]/dt=-k4[y4]-k15[y4]-k26[y4]
d[y5]/dt=2k1[y1]-k5[y5]-k16[y5]-k27[y5]
d[y6]/dt=2k2[y2]-k6[y6]-k17[y6]-k28[y6]
d[y7]/dt=2k3[y3]-k7[y7]-k18[y7]-k29[y7]
d[y8]/dt=2k4[y4]+2k11[y3]-k19[y8]-k30[y8]
d[y9]/dt=2k5[y5]+4k8[y1]-k20[y9]-k31[y9]
d[y10]/dt=2k6[y6]+4k9[y2]-k21[y10]-k32[y10]
d[y11]/dt=2k7[y7]+4k10[y3]-k22[y11]-k33[y11]
d[y12]/dt=k12[y1]+k13[y2]+k14[y3]+k15[y4]+k16[y5]+k17[y6]+k18[y7]+ k19[y8]+k20[y9]+k21[y10]+k22[y11]-k34[y12]
d[y13]/dt=k23[y1]+k24[y2]+k25[y3]+k26[y4]+k27[y5]+k28[y6]+k29[y7]+ k30[y8]+k31[y9]+k32[y10]+k33[y11]+k34[y12]

Нами было произведено разделение на компонентны с учетом их структурного и весового состава. Это позволит не только количественно определять выход бензина, каталитических газойлей и потери с сухим газом и коксом, но и оценить качество получаемой продукции. Например, октановое число бензинов увеличивается при большом содержании изопарафинов и ароматических соединений. Последние ограничиваются стандартом – не более 35 % [1]. Также ограничено содержание олефинов в бензинах (18 %) [1], так как они плохо влияют на химическую стабильность бензинов. Весовой состав бензина определяет пусковые свойства бензинов. В тринадцатикомпонентной модели нами представлено три уровня весового состава – т.н. тяжелые, средние и легкие компоненты. Это позволит оценить выход и качество трех продуктов: бензина, легкого и тяжелого каталитического газойлей. Таким образом, наша модель позволит оценить выход и качество получаемых продуктов. Первичные расчеты по известным в литературе константам равновесия показали адекватность получаемых результатов (рисунок 2). Это позволит нам провести дальнейшее моделирование процесса по заводским и экспериментальным данным с получением полноценной модели технологического процесса каталитического крекинга.

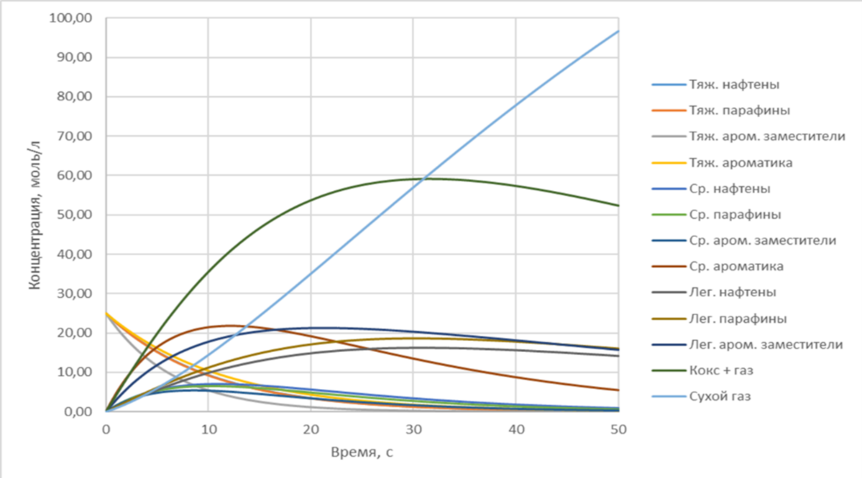


Рисунок 2 – Результаты первичных расчетов согласно тринадцатикомпонентной модели

Литература

1. *Т*ехнический регламент таможенного союза 013/2011 О требованиях к автомобильному и авиационному бензину, дизельному и судовому топливу, топливу для реактивных двигателей и мазуту.

2. *Исламова Г. И., Губайдуллин И.М.* Обзор и анализ математических моделей процесса каталитического крекинга//Сбор. науч. трудов к межд. конференции актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики –Марчуковские научные чтения-2019 - Новосибирск 2019- 127с.

3. *Pitault I., Forissier M., Bernard J.R.,* Determination of kinetics constants of catalytic cracking by modeling microactivity test. // Can. J. Chem. Eng. – 1995. – Vol.73. – P.498–504.

4. *H. S. Cerqueira* Mathematical modeling and simulation of catalytic cracking of gasoil in a fixed bed: Coke formation / E.C. Biscaia Jr., E. F. Sousa-Agular // Applied Catalysis A: General 164 (1997) 35-45

5. *Behjata Y.* CFD analysis of hydrodynamic, heat transfer and reaction of three phase riser reactor / Shahhosseinia S. // Chemical engineering research and design. – №89. – 2011. – P.978–989.

6. *Sadeghzadeh J., Farshi A., Forsat K., A* Mathematical modeling of the riser reactor in industrial FCC unit // Petrol.Coal. – 2008. – Vol.50 (2) – P.15–24.

7. *Kang X.* An Introduction to the lump kinetics model and reaction mechanism of FCC gasoline / Guo X. // Energy Sources. – Part A, 35:1921–1928. – 2013. – P.343-358

8. *Barbosa A.C* Three dimensional simulation of catalytic cracking reactions in an industrial scale riser using a 11-lump kinetic / Lopes G.C. // Chemical engineering transactions. – Vol. 32. – 2013. – P.637 – 642.

9. *Zhang,* Numerical simulation on catalytic cracking reaction in two-stage riser reactors // China University of Petroleum. – Beijing, China. – 2005. – P.129-153.

GUARANTEED EXTERNAL ESTIMATES OF ATTAINABILITY SETS FOR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH AFTEREFFECT

V.P. Maksimov
maksimov@econ.psu.ru

УДК 517.929

A class of control problems with respect to the general on-target vector-functional is considered for a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect. The consideration is concerned with some techniques of getting reliable external estimates of attainability sets.

Keywords: continuous-discrete functional differential equations, control problems, attainability sets, reliable computing

The report is devoted to the study of attainability sets (see, for instance, [1] and references therein) for a delay functional differential system which contains simultaneously equations with respect to state variables of continuous time and state variables of discrete time.

We consider the system under control

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{T}_{11}x + \mathcal{T}_{12}z + Fu + f, \\ z &= \mathcal{T}_{21}x + \mathcal{T}_{22}z + Gu + g. \end{aligned} \tag{1}$$

Here $\mathcal{T}_{11} : DS^n(m) \to L^n$, $\mathcal{T}_{12} : FD^\nu(\mu) \to L^n$, $\mathcal{T}_{21} : DS^n(m) \to FD^\nu(\mu)$, $\mathcal{T}_{22} : FD^\nu(\mu) \to FD^\nu(\mu)$, $F : L_2^r \to L^n$, $G : L_2^r \to FD^\nu(\mu)$ are linear bounded Volterra operators. Given sets $J_1 = \{0, t_1, ..., t_\mu, T\}, 0 < t_1 < ... < t_\mu < T$, and $J_2 = \{0, \tau_1, ..., \tau_m, T\}, 0 < \tau_1 < ... < \tau_m < T$, the spaces $DS^n(m)$ and $FD^\nu(\mu)$ are defined as follows. $DS^n(m)$ (see [4]) is the space of functions $x : [0, T] \to R^n$ representable in the form $x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s)\, ds + \sum_1^m \chi_{[\tau_i,T]}(t)\Delta_i x$, $\Delta_i x = \Delta_i = [x(\tau_i) - x(\tau_i - 0)]$, χ_A is the characteristic function of the set A; $FD^\nu(\mu)$ is the space of functions $z : J_2 \to R^\nu$. As usually, L^n (L_2^r) is the space of summable (square summable) functions $v : [0, T] \to R^n$ ($v : [0, T] \to R^r$). All spaces are equipped with proper natural norms. The jumps of the trajectory, Δ_i are used as elements of mixed control with L_2^r- and impulse components.

System (1) is a typical one met with in mathematical modeling economic dynamics processes and covers many kinds of dymamic models with aftereffect and impulsive perturbations. The equations of (1) include simultaneously terms depending on continuous time, $t \in [0, T]$, and discrete time $t \in J_2$, that is why the term "hybrid"seems to be suitable.

Let us fix an initial state of (1):

$$x(0) = \alpha, \; z(0) = \beta. \tag{2}$$

To set up the goal of control, we introduce the linear bounded vector-functional $\ell : DS^n(m) \times FD^\nu(\mu) \to R^N$ (the on-target vector-functional).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00332). The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18–01–00332).

Максимов Владимир Петрович, д.ф.-м.н., профессор, ПГНИУ (Пермь, Россия); Vladimir Maksimov (Perm State University, Perm, Russia)

A goal of control with the use of controls $u \in L_2^r$ and $\Delta = \mathrm{col}(\Delta_1, ..., \Delta_m) \in R^{nm}$ is defined as the attainability of a given vector of on-target values $\gamma \in R^N$ over trajectories of (1):

$$\ell(x, z) = \gamma \tag{3}$$

under admissible mixed control that includes $u \in L_2^r$ constrained by inequalities:

$$\Lambda_1 u(t) \leq \gamma_1, \ t \in [0\, T], \tag{4}$$

and the vector of jumps Δ constrained by the inequalities

$$\Lambda_2 \Delta \leq \gamma_2, \tag{5}$$

where $(N_1 \times r)$-matrix Λ_1 and $(N_2 \times mn)$-matrix Λ_2 are given. It is assumed that the solutions set V_i to the linear inequalities system $\Lambda_i v \leq \gamma_i, i = 1, 2$, is nonempty and bounded.

The ℓ-attaiability set of the problem (1)-(5) is defined [3] as the set of all $\gamma \in R^N$ such that this problem is solvable. Under description of the ℓ-attaiability set, the important part is played by the Cauchy operator of system (1)[2]. As is shown in [3,4], with the use of this operator, the problem can be reduced to the generalized moment problem [5] that can be formulated here in the form

$$\int_0^T M(t)u(t)\, dt \ = \ \delta, \tag{6}$$

where u is the admissible control: $u(t) \in V_1$, $t \in [0, T]$, the moment matrix $M(t)$ is constructed by the elements of the Cauchy operator and the parameters of the vector-functional ℓ. It should be noted that the impact of the impulse component Δ can easily be taken into account. The description of all δ for which there exists an admissible control can be done on the base of Theorem 7.1 [5] in the terms of $v(t, \lambda) = \mathrm{argmax}(\lambda' M(t)u : u \in V_1)$ ($(\cdot)'$ stands for tranposition). To obtain the guaranteed external estimates of the ℓ-attaiability set, the following steps should be executed: i) reliable computing the two-sided estimates for coordinates to extremal corner points of V_1; ii) reliable computing upper bounds ω_i to the integrals $\int_0^T \lambda_i' M(t) v(t, \lambda_i)\, dt$ for a finite collection $\{\lambda_i\}$. Let Ω_i, $i = 1, ..., K$ be the half-space of all $\rho \in R^{N_1}$ such that the inequality $\lambda_i' \rho \leq \omega_i$ holds. Then the set of δ for which there exists an admissible control $u(\cdot)$ providing (6) is a subset of the polyhedron being the intersection $\bigcap_{i=1}^K \Omega_i$.

In the report, some algorithms to execute the above steps are described in detail.

References

1. *Kostousova E.K.* On polyhedral estimates of attainability sets of differential systems with bilinear uncertainty // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **18**:4 (2012), 195-210. (Russian)

2. *Maksimov V.P.* The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, **29**:1 (2019), 40-51.

3. *Maksimov V.P.* On the ℓ-Attainability Sets of Continuous Discrete Functional Differential Systems // IFAC PapersOnLine, **51**:32 (2018), 310-313.

4. *Maksimov V.P.* Attainable values of on-target functionals for a functional differential system with impulses // Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences, **23**: 123 (2018), 441-447. (Russian).

5. *Kreyn M.G., Nudelman A.A.* The Markov Moment Problem and Extremal Problems. —American Mathematical Society, 1977.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПЕРАЦИИ СВЕРТКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОРОДЫ ДЛЯ ПРОГНОЗА ХАРАКТЕРА НАСЫЩЕННОСТИ ПЛАСТОВ

Ю.В. Мартынова, С.П. Михайлов

MartynovaYV@bnipi.rosneft.ru, Mikhaylov.SP@gazpromneft-ntc.ru

УДК 51.73, 550.8.05

Рассматривается способ определения насыщенности пластов в литологически неоднородных коллекторах, необходимой для подсчета запасов месторождений углеводородного сырья. Предлагаемый способ позволяет повысить точность определения насыщенности благодаря интеграции капиллярной и электрической моделей насыщения, основываясь на результатах геофизических исследований скважин и лабораторных исследований керна.

Ключевые слова: конволюция, капиллярная модель, геофизические исследования скважин

Using the operation of convolution of the electrical properties of the rock to predict the nature of formation saturation

Consider a method for determining the saturation of formations in lithologically heterogeneous reservoirs, which is necessary for calculating the reserves of hydrocarbon deposits. The proposed method allows to increase the accuracy of determining saturation due to the integration of capillary and electric models of saturation, based on the results of geophysical studies of wells and laboratory studies of core.

Keywords: convolution, capillary model, well logging

По комплексу геофизических исследований скважин производят детальную разбивку литологии пласта, а по результатам лабораторных исследований керна строят капиллярную модель насыщения, в качестве которой была выбрана J-функция Леверетта, для которой варьируемым параметром будет уровень зеркала свободной воды h_{ZSV} [1]:

$$J = \frac{P_c r_p}{\sigma \cos\theta} = \frac{(\rho_w - \rho_o)g(h_{ZSV} - h)r_p}{\sigma \cos\theta},$$

где P_c – капиллярное давление, $r_p = \sqrt{k/\phi}$ – средний радиус пор, k – проницаемость, ϕ – пористость, σ – поверхностное натяжение на границе раздела

Мартынова Юлия Валерьевна, к.ф.-м.н., ведущий специалист, ООО «РН-БашНИПИнефть» (Уфа, Россия); Martynova Yuliya (NNC «BashNIPIneft», Ufa, Russia)

Михайлов Сергей Петрович, главный специалист, ООО «Газпромнефть НТЦ» (Санкт-Петербург, Россия); Sergey Mikhaylov (NNC «Gazpromneft NTC», St. Petersburg, Russia)

фаз, θ – краевой угол смачивания, ρ_w – плотность воды, ρ_o – плотность нефти, g – ускорение свободного падения, h – глубина.

Расчет коэффициентов водонасыщенности S_w по разрезу пласта производится с помощью полученного значения J-функции:

$$S_w = S_w^* + (1 - S_w^*) \left(\frac{J}{c} + 1 \right)^{1/d},$$

где S_w^* – остаточная водонасыщенность, c, d – подобранные коэффициенты.

Далее строят электрическую модель насыщения согласно формуле Арчи-Дахнова, по которой определяют значения удельного электрического сопротивления (УЭС) пласта R_r:

$$R_r = \frac{aR_w}{S_w^n \phi^m},$$

где a – эмпирическая константа, R_w – УЭС пластовой воды, m – показатель цементации, n – показатель насыщения.

Затем, используя процедуру конволюции УЭС по разрезу пласта $R_r(h)$ с вертикальной характеристикой прибора индукционного каротажа $f(x)$, получают модельную кривую индукционного каротажа $R_m(h)$:

$$R_m(h) = \int_{\mathbb{R}} R_r(x) f(h - x) dx = (R_r * f)(h).$$

При решении задач необходимо задать определенный вид весовой функции прибора $f(x)$, а именно, в виде функции с компактным носителем $[-w; w]$, удовлетворяющей условию

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{-w}^{w} f(x) dx = 1.$$

Из геометрических соображений в качестве весовой функции прибора предлагается использовать

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Phi_L^R} \frac{1}{(U-x)^2+u^2} \frac{1}{(V-x)^2+v^2}, & x \in [-w; w] \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где U, V – координаты точек притяжения относительно центра зонда, u, v, w – подбираемые параметры.

Определенный интеграл $\Phi_L^R = \int_L^R \frac{1}{(U-x)^2+u^2} \frac{1}{(V-x)^2+v^2} dx$ выписывается в явном виде.

Посредством подбора параметров капиллярной модели насыщения минимизируют расхождение кривой индукционного каротажа $R_{IK}(h)$, зарегистрированной в скважине, и кривой $R_m(h)$, полученной в результате моделирования, ставится оптимизационная задача:

$$\frac{\sum_{h \in H} |R_m(h) - R_{IK}(h)|}{\sum_{h \in H} R_{IK}(h)} \xrightarrow[h_{ZSV}]{} \min.$$

Насыщенность пласта в литологически неоднородных коллекторах определяют по капиллярной модели с использованием подобранных параметров (уровня зеркала свободной воды).

Литература

1. *Амикс Д., Басс Д., Уайтинг Р.* Физика нефтяного пласта. — М.: Гостоптехиздат, 1962.

2. *Колонских А.В., Жонин А.В., Михайлов С.П., Федоров А.И., Муртазин Р.Р.* Способ определения насыщенности низкопроницаемых пластов: патент РФ №2675187, МПК G01V 3/38 (2006.01), G01V 11/00 (2006.01). — 2018. — Бюл. №35.

О СУММИРОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ С ПОМОЩЬЮ РАВЕНСТВА ПАРСЕВАЛЯ-СТЕКЛОВА

И.А. Марусеев, А.Э. Рассадин

maruseev52@yandex.ru, brat_ras@list.ru

УДК 517.518.3, 517.58

В работе с помощью разложений степенной функции с бегущим показателем в ряд Фурье по полиномам Лежандра и по полиномам Чебышёва-Лагерра и последующим применением к этим разложениям равенства Парсеваля-Стеклова получены нетривиальные тождества.

Ключевые слова: полная ортонормированная система функций, гамма-функция Эйлера, символ Похгаммера

On summation of functional series by means of the Parseval-Steklov identity

In this paper, using the Parseval-Steklov identity, nontrivial identities were obtained. It was possible to do this by expanding a power function with a running exponent in a Fourier series in Legendre polynomials and in Chebyshev-Laguerre polynomials.

Keywords: complete orthonormal system of functions, the gamma function, the Pochhammer symbol

Рассмотрим разложение вещественной функции двух вещественных переменных $f(x,y)$ в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, заданных на фиксированном интервале (a,b), возможно, неограниченном [1]:

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y)\,\varphi_n(x)\,, \tag{1}$$

где

$$f_n(y) = \int_a^b f(x,y)\,\varphi_n(x)\,dx \tag{2}$$

— коэффициенты Фурье функции $f(x,y)$, зависящие от переменной y как от параметра.

Марусеев Иван Александрович, член Нижегородского математического общества (Нижний Новгород, Россия); Ivan Maruseev (Nizhni Novgorod Mathematical Society, Nizhni Novgorod, Russia)

Рассадин Александр Эдуардович, член Правления Нижегородского математического общества (Нижний Новгород, Россия); Alexander Rassadin (Nizhni Novgorod Mathematical Society, Nizhni Novgorod, Russia)

Применяя к ряду (1) равенство Парсеваля-Стеклова, получим:

$$\int_a^b f^2(x,y)dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(y)\,. \tag{3}$$

Тождество (3) означает, что если интеграл в левой части формулы (3) находится точно, то функциональный ряд из квадратов функций (2) вычисляется.

Конструктивизм этого подхода был продемонстрирован в работах [2, 3] на примере тригонометрической системы функций $1/\sqrt{2\,\pi}\,, \cos n\,x/\sqrt{\pi}\,, \sin n\,x/\sqrt{\pi}$, заданной на интервале $(-\pi\,,\pi)$.

В данной работе с помошью формулы (3) доказаны две теоремы:

Теорема 1. *Пусть $y > -1/2$ и $(y)_n \equiv y\,(y+1)\,\ldots(y+n-1)$ — символ Похгаммера. Тогда справедливо тождество:*

$$\frac{1}{2\,y+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(2\,n+1)\,\left[\frac{(-y)_n}{(y+1)_{n+1}}\right]^2. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 0$ и $y > -\alpha/2 - 1/2$ или $-1 < \alpha \leq 0$ и $y > -\alpha/2 - 1/4$. Тогда справедливо тождество:*

$$\frac{\Gamma(2\,y+\alpha+1)}{\Gamma^2(y+\alpha+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(-y)_n]^2}{n\,!\,\Gamma(n+\alpha+1)}\,, \tag{5}$$

где $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\exp(-t)\,dt$— гамма-функция Эйлера.

Доказательство **Теоремы 1** основано на разложении функции $f(x,y) = (1-x)^y$ на интервале $(-1,\,1)$ по x и при $y > -1$ по полиномам Лежандра $P_n(x)$:

$$(1-x)^y = 2^y\sum_{n=0}^{\infty}(2\,n+1)\,\frac{(-y)_n}{(y+1)_{n+1}}\,P_n(x)\,,$$

выведенном в работе [4] (см. формулу (42)).

Доказательство **Теоремы 2** базируется на известном разложении функции $f(x,y) = x^y$, являющейся ядром преобразования Меллина, на интервале $(0,\,+\infty)$ по x по стандартизированным полиномам Чебышёва-Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$, справедливом при $\alpha > 0$ и $y > -\alpha/2 - 3/4$ или при $-1 < \alpha \leq 0$ и $y > -\alpha/2 - 1/4$ (см. [5], стр. 259):

$$x^y = \Gamma(y+\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-y)_n}{\Gamma(n+\alpha+1)}\,L_n^{\alpha}(x).$$

Формулы (4) и (5) не встречались авторам доклада в известной им литературе.

Литература

1. *Карташев А.П., Рождественский Б.Л.* Математический анализ. — М.: Наука, 1984.

2. *Алексеева Е.С., Рассадин А.Э.* Применение равенства Парсеваля к периодическим решениям дифференциальных уравнений // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона, **20** (2018), 57-66.

3. *Марусеев И.А., Рассадин А.Э.* Об альтернативных теореме Миттаг-Леффлера способах разложения мероморфных функций на простейшие дроби // Фазуллин З.Ю. (ред.) Комплексный анализ и теория аппроксимаций: сборник тезисов Международной конференции (г. Уфа, 29-31 мая 2019 г.). — Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. — 32.

4. *Хаиров А.Р.* О различных формах представления многочленов Лежандра // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1. Естественные науки, **33**:3 (2018), 80-93.

5. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1979.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ И ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Мегралиев Я.Т.,Рамазанова А.Т.

aysel.ramazanova@uni-due.de

УДК 517.95

В работе исследована одна обратная краевая задача для уравнения изгибных колебания стержня с периодическим и интегральным условием. С помощью метода Фурье задача сводится к решению системы интегральных уравнений, а также используя метод сжатых отображений доказываются существование и единственность решения системы интегральных уравнений. Доказываются существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: уравнения изгибных колебания стержня, обратная задача, единственность решения

The main tasks of mathematics

This work is devoted to study one inverse boundary value problem for the equation of flexural vibrations of a rod with a periodic and integral condition. Using the Fourier method, the problem is reduced to solving a system of integral equations, and using the method of compressed mappings, the existence and uniqueness of a solution to a system of integral equations is proved. The existence and uniqueness of the classical solution of the original problem are proved.

Keywords: equations of flexural vibrations of a rod, inverse problem, uniqueness of a solution

Известно немало случаев, когда потребности практики приводят к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения. Среди нелокальных задач можно выделить класс задач с интегральными условиями. Условия такого вида появиться при математическом моделировании явлений, связанных с физической плазмы [1], распространением тепла [2], [3],

---

Мегралиев Яшар Топушоглы, д.м.н., профессор кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Бакинского государственного университета (Баку, Азербайджан); Megraliev Yashar Topush ogly, (Baku State University, Baku Azerbaijan)

Рамазанова Айсель Тельман гызы, k.ф.-м.н. Научный сотрудник в университете Дуйсбург-Эссен (Essen, Germany); Dr.Ramazanova Aysel Telman, Research Assistant at the University Duisburg-Essen (University Duisburg-Essen)

процессом влагопереноса в капиллярно-простых средах [4], вопросами демографии и математической биологии, а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики. В предлагаемой статье исследовано обратная краевая задача для уравнения изгибных колебания стержня с периодическим и интегральным условием. Рассмотрим для уравнения

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) = a(t)u(x,t) + b(t)u_t(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x)(0 \le x \le 1) \tag{2}$$

периодическими условиями

$$u(0,t) = u(1,t), u_x(0,t) = u_x(1,t), u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t)(0 \le t \le T) \tag{3}$$

нелокальным интегральным условием

$$\int\limits_0^1 u(x,t)dx = 0(0 \le t \le T) \tag{4}$$

и с дополнительными условиями

$$u(x_i,t) = h_i(t)(i = 0,1.,0 \le t \le T) \tag{5}$$

где $x_i \in (0,1)$ $(i = 1,2)$—фиксированные числа, $f(x,t)$, $\varphi(x)$,$\psi(x)$,$h_i(t)$,$(i = 1,2)$-заданные функции, $u(x,t), b(t)$ и $a(t)$— искомые функции.

Введем обозначение:

$$C^{2,4}(D_T) = \left\{u(x,t) : u(x,t) \in C^2(D_T), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t) \in C(D_T)\right\}$$

Определение. Тройку $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ функций $u(x,t) \in C^{2,4}(D_T)$ и $a(t) \in C[0,T]$ удовлетворяющих уравнению (1) в D_T , условию (2) в $[0,1]$ и условиям (3)-(5) в $[0,T]$,назовем классическим решением обратной краевой задачи(1)-(5).

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть*

1. $\varphi(x) \in C^5[0,1], \varphi^{(6)}(x) \in L_2(0,1), \varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = \varphi'(1),$ $\varphi''(0) = \varphi''(1), \varphi'''(0) = \varphi'''(1), \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(1)$,$\varphi^{(5)}(0) = \varphi^{(5)}(1)$, $\int\limits_0^1 \varphi(x)dx = 0$;
2. $\psi(x) \in C^3[0,1], \psi^{(4)}(x) \in L_2(0,1), \psi(0) = \psi(1), \psi'(0) = \psi'(1), \psi''(0) = \psi''(1), \psi'''(0) = \psi'''(1), \int\limits_0^1 \psi(x)dx = 0$;
3. $f(x,t), f_x(x,t), f_{xx}(x,t) \in C(D_T), f_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T), f_{xxxx}(x,t) \in L_2(D_T)$, $f(0,t) = f(1,t)$, $f_x(0,t) = f_x(1,t), f_{xx}(0,t) = f_{xx}(1,t)$, $f_{xxx}(0,t) = f_{xxx}(1,t), \int\limits_0^1 f(x,t)dx = 0, (0 \le t \le T)$;

4. $h_i(t) \in C^2\ [0,T], (i = 1,2), h(t) = h_1(t)h_2'(t) - h_2(t)h_1'(t) \neq 0$, $h(t) \neq 0 (0 \leq t \leq T)$.

и выполняются условие согласования $\varphi(x_i) = h_i(0), \psi(x_i) = h_i'(0) (i = 1,2)$.

Тогда при достаточно малых значениях T задача (1)-(6) имеет единственное классическое решение.

Литература

1. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, **123**:т.16, №11, (1980), 1925-1935.

2. *Cannon J.R.* The solution of the heat equation subject to the specificationof energy // Quart. Appl. Math., (1963), v.5, 21, 155-160.

3. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнение (1970) 13, №2,294-304.

4. *Нахушев А.М.* Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения,(1982), т.18, №1,72-81.

ОБ ОБОБЩЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ДЛЯ СУММ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова
mirzoev.karahan@mail.ru, t.Safonova@narfu.ru

УДК 517.927.25

В работе средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}^2[a,b]$ получены формулы для сумм числовых рядов, являющиеся обобщениями некоторых классических формул таких, как значения ζ-функции Римана в целых точках.

Ключевые слова: функция Грина, интегральное представление, ζ-функция Римана, β-функция Дирихле, дигамма-функция Эйлера

ON THE GENERALIZATION OF SOME CLASSICAL FORMULAS FOR SUMS OF NUMBER SERIES

In this paper, using the spectral theory of ordinary differential operators with constant coefficients in the Hilbert space $\mathcal{L}^2[a,b]$ formulas for sums of number series are obtained that are generalizations of some classical formulas such as the values of the Riemann ζ-function at integer points.

Keywords: Green's function, integral representation, Riemann ζ-function, Dirichlet β-function, Euler digamma function

Собственные значения и собственные функции некоторых операторов, порождённых симметрическими дифференциальными выражениями с постоянными коэффициентами и самосопряжёнными граничными условиями в пространстве квадратично интегрируемых по Лебегу функций на отрезке, явно вычисляются, а резольвенты этих операторов являются интегральными операторами. Из спектральной теоремы следует, что для ядер резольвент этих операторов справедлива билинейная формула. Кроме того, каждое из этих ядер является функцией Грина некоторой самосопряжённой граничной задачи, и хорошо известна процедура её построения. Таким образом, для функций Грина этих задач справедливы формулы разложения в ряды по собственным функциям. В работе полученные этим способом тождества применяются для интегрального представления сумм некоторых степенных рядов и специальных функций, а также для вычисления сумм некоторых сходящихся числовых рядов.

В частности, справедливо следующее. Пусть $P_n(x)$ - многочлен степени $n \geq 2$ с вещественными коэффициентами. Рассмотрим самосопряжённую граничную задачу

$$\begin{cases} P_n\left(i\dfrac{d}{dx}\right)y = f \\ y^{(j)}(0) - y^{(j)}(2\pi) = 0,\ j = 0, \dots, n-1. \end{cases} \tag{1}$$

Первый автор поддержан РНФ (проект № 17-11-01215), второй автор поддержан РФФИ (проект № 18-01-00250).

Мирзоев Карахан Агахан оглы, д.ф.-м.н., профессор, МГУ (Москва, Россия); Karakhan Mirzoev (Moscow State University, Moscow, Russia)

Сафонова Татьяна Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия); Tatyana Safonova Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russia)

Теорема 1. *Пусть многочлен с вещественными коэффициентами $p_m(x)$ $(m \geq 1)$ - такой, что $p_m(k^2) \neq 0$ при $k = 0, 1, \dots$ и пусть $P_n(x) = p_m(x^2)$ в задаче (1). Тогда для функции Грина $G(x,t)$ этой задачи справедливо равенство*

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi p_m(0)} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos k(x-t)}{p_m(k^2)}. \tag{2}$$

Из равенства (2) в свою очередь следует, что

$$\frac{1}{2p_m(0)} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{p_m(k^2)} = \pi G(0,0) \tag{3}$$

и

$$\frac{1}{2p_m(0)} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{p_m(k^2)} = \pi G(0,\pi). \tag{4}$$

Если $a \in (0,1)$ и $P_2(x) = x^2 - a^2$ в задаче (1), то равенства (3) и (4) совпадают с извсетными формулами Эйлера о разложение функций $\pi \operatorname{ctg} a\pi$ и $\pi / \sin a\pi$ на простейшие дроби, т.е. с равенствами

$$\pi \operatorname{ctg} a\pi = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k-a})$$

и

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k-a}).$$

Таким образом, формулы (3) и (4) в некотором смысле являются обобщениями этих разложений (подробнее см. [1]).

Если использовать функции Грина других самосопряжённых граничных задач и разложения в ряды Фурье некоторых элементарных функций, то, в частности, можно получить классические формулы Эйлера для значений ζ-функции Римана и β-функции Дирихле в натуральных точках и их обобщения на произвольный допустимый многочлен $p_m(x)$ (см. [2] и [3]).

Кроме того, из некоторых наших общих результатов можно извлечь новое доказательство известной теоремы Гаусса о значениях дигамма-функции Эйлера (логарифмической производной гамма-функции) и β-функции Дирихле в рациональных точках.

Литература

1. *Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Функция Грина обыкновенных дифференциальных операторов и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // Докл. АН, **482**:5 (2018), 500-503.

2. *Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Об интегральном представлении сумм некоторых степенных рядов // Математические заметки, **106**:3 (2019), 470-475.

3. *Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Обыкновенные дифференциальные операторы и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // Труды Московского математического общества, **80**:2 (2019).

БИФУРКАЦИЯ ДВУКРАТНОГО РАВНОВЕСИЯ В СИСТЕМАХ СО СЛАБООСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

С.М. Музафаров
aygiz.muzafarov03@mail.ru

УДК 517.928

Исследуется бифуркационный процесс в нелинейном дифференциальном уравнении зависящих от скалярного параметра. Установлено, что при выполнении некоторых предположениях бифуркация двукратного равновесие преобразуется в бифуркацию вынужденных колебаний.

Ключевые слова: операторный метод, точка бифуркации, вынужденные колебания, нелинейные дифференциальные уравнения

Bifurcation of double equilibrium with weakly oscillating parameters

The bifurcation process in the nonlinear the differential equation of dependent from the scalar parameter. It is established that under certain assumptions bifurcation of double equilibrium is transformed into bifurcation of forced oscillations.

Keywords: operator method, bifurcation point, forced oscillations, nonlinear differential equations

В теории нелинейных колебаний одними из наиболее интересных являются задачи о локальных бифуркациях в окрестностях стационарных состояний системы при изменении характера их устойчивости. При этом могут возникать новые состояния равновесия, периодические или почти периодические колебания малой амплитуды, инвариантные торы и др.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x' = A(\lambda)x + a(x, \lambda), \quad x \in R^N, \tag{1}$$

где $A(\lambda)$ – квадратная матрица порядка N, непрерывно зависящая от скалярного параметра λ, вектор-функция $a(x, \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных и равномерно по λ удовлетворяет условию $\|a(x, \lambda)\| = o(\|x\|)$ при $\|x\| \to 0$. Здесь $\| \ \|$ означает какую-либо норму в пространстве R^N.

В настоящей работе рассматривается бифуркация двукратного равновесия уравнения (1), которая является одной из двух типичных локальных бифуркаций в окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (1), возникающих при переходе спектра матрицы $A(\lambda)$ через мнимую ось, а именно, в ситуации, когда одно из собственных значений матрицы $A(\lambda_0)$ равно нулю. Второй типичной бифуркацией является бифуркация Андронова-Хопфа, когда матрица $A(\lambda_0)$ имеет пару чисто мнимых собственных значений.

Наряду с исследованием бифуркации двукратного равновесия уравнения (1), изучается также ситуация, когда параметр λ медленно эволюционирует по периодическому закону в окрестности точки бифуркации λ_0:

$$\lambda = f_\delta(t) = \lambda_0 + \delta\varphi(t), \quad \varphi(t+T) \equiv \varphi(t), \tag{2}$$

Музафаров Салих Мухаррамович, к.ф.-м.н, СИ (филиал) БашГУ (Сибай, Россия); Salikh Muzafarov (Sibay Institute (branch) of Bashkir State University, Sibay, Russia)

где δ – малый параметр. В этом случае уравнение (1) принимает вид:

$$x' = A[f_\delta(t)]x + a[x, f_\delta(t)]. \tag{3}$$

Число δ_0 называют точкой бифуркации вынужденных колебаний уравнения (3), если существует последовательность $\delta_n \to \delta_0$ такая, что при $\delta = \delta_n$ уравнение (3) имеет ненулевое T-периодическое решение $x_n(t)$, при этом $\|x_n(t)\|_C \to 0$.

Как правило, при бифуркации двукратного равновесия уравнения (1) возникают одна или несколько непрерывных ветвей бифурцирующих решений $x(\lambda)$, определенных либо в некоторой окрестности $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ (двусторонняя бифуркация), либо в односторонней окрестности: $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0]$ (субкритическая бифуркация) или $[\lambda_0, \lambda_0 + \delta)$ (суперкритическая бифуркация). Аналогично определяется тип бифуркации вынужденных колебаний уравнения (3).

Таким образом получены новые формулы, определяющие тип бифуркации двукратного равновесия уравнения (1) и свойства устойчивости бифурцирующих решений. Показано также, что при достаточно общих предположениях бифуркация двухкратного равновесия уравнения (1) в случае, когда параметр λ медленно эволюционирует по периодическому закону (2), преобразуется в бифуркацию вынужденных колебаний уравнения (3). При этом в естественном смысле тип бифуркации и свойства устойчивости бифурцирующих решений сохраняются.

Всюду ниже предполагается, что выполнено условие:

U1. Число 0 является простым собственным значением матрицы $A_0 = A(\lambda_0)$.

Обозначим через e_0 собственный вектор матрицы A_0, отвечающий нулевому собственному значению. Транспонированная матрица A_0^* также имеет простое нулевое собственное значение. Пусть g_0 – соответствующий собственный вектор матрицы A_0^*. Будем считать, что e_0 и g_0выбраны из условий $\|e_0\| = 1$ и $(e_0,\ g_0) = 1$.

Пусть, наряду с U1 выполнено также условие:

U2. Имеет место соотношение $k_0 = (A'(\lambda_0)e_0, g_0) \neq 0$.

Здесь $A'(\lambda)$ – матрица, полученная дифференцированием элементов матрицы $A(\lambda)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия U1 и U2. Тогда λ_0 является точкой бифуркации двукратного равновесия уравнения (1)*

Положим

$$\varphi_0 = \int_0^T \varphi(\tau)d\tau,$$

где $\varphi(t)$ – это T-периодическая функция, участвующая в равенстве (2).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия U1 и U2. Пусть $\varphi_0 \neq 0$. Тогда $\delta = 0$ является точкой бифуркации вынужденных колебаний уравнения (3).*

Таким образом, бифуркация двукратного равновесия уравнения (1) преобразуется (при условии $\varphi_0 \neq 0$) в бифуркацию вынужденных колебаний уравнения (3).

Литература

1. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. - М.: Наука, 1969.

456 с.

2. *Красносельский М.А., Юмагулов М.Г.* ДАН России, 1999. Т.365. № 2. С. 162-164. 3. *Юмагулов М.Г., Нуров И.Д., Музафаров С.М., Ибрагимова Л.С.* Бифуркация Андронова-Хопфа со слабоосциллирующими парамерами.// Автоматика и телемеханика. 2008. №1. С. 39-44.

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С KPZ-НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

А.Б. Муравник
amuravnik@yandex.ru

УДК 517.956

В бесконечной цилиндрической области рассматриваются сингулярные квазилинейные параболические уравнения, содержащие KPZ-нелинейности. На боковой поверхности ставится весовое однородное условие Неймана. Найдены достаточные условия отсутствия глобальных положительных решений указанной задачи.

Ключевые слова: параболические уравнения, KPZ-нелинейности, отсутствие решений

A nonclassical Neumann problem for singular parabolic equations with KPZ-nonlinearities

In the infinite cylindrical domain, singular quasilinear parabolic equations containing KPZ-nonlinearities are considered. A weight homogeneous Neumann condition is posed on the lateral area. We find sufficient conditions for the absence of global positive solutions of the specified problem.

Keywords: parabolic equations, singular equations, KPZ-nonlinearities, absence of solutions

Рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{\alpha}{u}|\nabla u|^2 - a(x)u^p,\ x \in \Omega,\ t \geq 0, \tag{1}$$

$$u^\alpha \frac{\partial u}{\partial n} = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t \geq 0, \tag{2}$$

где Ω — ограниченная область с липшицевой границей в $\mathbb{R}^n$, функция a измерима и ограничена, а постоянная α отлична от 0 и -1.

Доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Задача* (1)-(2) *не имеет классических положительных решений, если выполняется один из следующих двух наборов условий*:

(i) $\int\limits_\Omega a(x)dx < 0$, $\alpha > -1$ *и* $p > 1$;

Муравник Андрей Борисович, д.ф.-м.н., АО «Концерн «Созвездие» (Воронеж, Россия) и РУДН (Москва, Россия); Andrey Muravnik (JSC “Concern “Sozvezdie”, Voronezh, Russia) & RUDN (Moscow, Russia)

(ii) $\int\limits_{\Omega} a(x)dx > 0$, $\alpha < -1$ *и* $p < 1$.

ПОСТРОЕНИЕ ЯЗЫКОВ АРНОЛЬДА ДЛЯ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С.А. Муртазина
Sariamurtaz@mail.ru

УДК 517.91

Предлагается схема построения языков Арнольда в задаче о бифуркации субгармонических колебаний систем с периодическими коэффициентами.

Ключевые слова: системы с периодическими коэффициентами, бифуркация субгармонических колебаний, языки Арнольда

Arnold languages construction for sistems with periodic coefficients

The problem of bifurcation of forced oscillations of sistems with periodic coefficients is consired. Arnold languages construction scheme is given.

Keywords: the sistems with periodic coefficients, the bifurcation of forced oscillations, the Arnold languages

Одним из важных с теоретической и практической точек зрения понятий в теории динамических систем является понятие языков Арнольда [1]-[3]. Такие множества отвечают областям значений параметров, при которых система имеет периодические решения определенных периодов. Различные вопросы, связанные с понятием языка Арнольда в нелинейной динамике, обсуждались, например, в следующих работах ([1]-[4], [6]).

Рассматривается динамическая система

$$x' = A(t,\mu)x + a(x,t,\mu), x \in R^2, \tag{1}$$

где $\mu = (\alpha,\beta)$-двумерный параметр. Пусть правая часть системы (1) непрерывна по t и непрерывно дифференцируема по x, μ; матрица $A(t,\mu)$ и вектор-функция $a(x,t,\mu)$ являются T - периодическими по t; нелинейность $a(x,t,\mu)$ начинается с квадратичных слагаемых; система (1) при всех значениях параметра μ имеет решение $x = 0$. Пусть $V(\mu)$ - матрица монодромии линейной системы $x' = A(t,\mu)x$ соответствующей (1). Предположим:

П. *матрица* $V(\mu_0)$ *при некотором значении* μ_0 *имеет пару простых собственных значений вида* $e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$, *где* $\theta_0 = p/q$*-несократимая дробь,* $0 < \theta_0 \le 1/2$.

Здесь $\mu_0 = (\alpha_0,\beta_0)$. При выполнении условия П в системе (1) возможны различные сценарии бифуркаций, связанные с характером перехода параметра μ через точку μ_0 на плоскости параметров (α,β). Переход векторного

Муртазина Сария Аширафовна, к.ф.-м.н., доцент, СИБашГУ (Сибай, Россия); Sariya Murtazina (Sibay Institute Bashkir State University, Sibay, Russia)

параметра μ через точку μ_0 может осуществляться по прямым или кривым, проходящим через точку μ_0. Каждое такое направление может приводить к различным сценариям бифуркационного поведения системы (1) в окрестности $x = 0$. Здесь могут возникать или исчезать периодические решения различных периодов nT, где $n \geq q$ (бифуркация субгармонических колебаний). Для того чтобы при переходе μ через т. μ_0 у системы (1) в окрестности $x = 0$ возникали периодические решения минимально возможного периода qT, необходимо, чтобы этот переход на плоскости параметров осуществлялся по некоторому клювообразному множеству, упирающемуся своим клювом в точку μ_0. Такие множества называют языками Арнольда на плоскости параметров. Понятие языков Арнольда также введена в другой интерпретации ([3]-[4]). Рассмотрим окружность $S = (z : |z| = 1)$ на комплексной плоскости. Пусть точка (α_0, β_0) является т. бифуркации субгармонических колебаний периода qT системы (1). Чтобы в системе (1) реализовался данный сценарий, требуется, чтобы пара собственных значений $\rho(\alpha, \beta)e^{\pm 2\theta(\alpha,\beta)i}$ матрицы $V(\alpha, \beta)$ $(\rho(\alpha_0, \beta_0) = 1,\ \theta(\alpha_0, \beta_0) = \theta_0)$ были расположены на двух клювообразных множествах комплексной плоскости упирающихся своим клювом в точки $e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$ окружности S. Типичный язык Арнольда заключен между двумя гладкими кривыми.

Приведем приближенный метод построения языков Арнольда системы (1) на комплексной плоскости основанный на операторных методах (см. [5], [7]). Из условия П находим точку бифуркации (α_0, β_0) системы (1). Условие П равносильно тому, что матрица $V^q(\alpha_0, \beta_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Соотвествующие собственные векторы обозначим через e и g. Транспонированная матрица $(V^q(\alpha_0, \beta_0))^T$ также будет иметь полупростое собственное значение 1 кратности 2. Соответствующие собственные векторы обозначим через e^*, g^*. Пусть $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ - главные асимптотики асимптотических формул ([5]) для значений параметров, при которых возникают субгармонические колебания системы (1). Определим векторы $e(r) = (\cos r,\ -\sin r)$, $g(r) = (-\sin r,\ -\cos r)$, где $r \in [0; 2\pi]$. При $r = 0$ векторы $e(r)$ и $g(r)$ совпадают с e и g. Значения параметров $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$, при которых возникают субгармонические колебания вычисляются с использованием векторов $e(r)$ и $g(r)$. При малых ε функции $\rho(\alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon))e^{\pm 2\theta(\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon))i}$ на комплексной плоскости образуют пару кривых принадлежащих парам языков Арнольда. При $r \in [0; 2\pi]$ совокупность таких кривых и образует пару языков Арнольда.

1. *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва-Ижевск: Редакция журнала "Регулярная и хаотическая динамика 2000.

2. *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем. — Москва: МЦНМОб, 2005.

3. *Kuznetsov Yu.A.* Elements of Applied Bifurcation Theory. — N.Y.: Springer, 1998.

4. *Козякин В.С., Красносельский А.М., Рачинский Д.И.* О языках Арнольда в задаче о периодических траекториях больших амплитуд. // Докл. АН, **411**:3 (2006), 1-7.

5. *Юмагулов М.Г., Муртазина С.А.* Исследование локальных бифуркаций вынужденных колебаний динамических систем. // Автоматика и телемеханика., **4**:4 (2012), 83-98.

6. *Юмагулов М.Г.* Локализация языков Арнольда дискретных динамических систем. // Уфимский математический журнал., **5**:2 (2012), 109-130.

7. *Юмагулов М.Г.* Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах. // Доклады Академии наук., **424**:2 (2009), 177-180.

О КЛАССИФИКАЦИИ ГРАНИЦ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И.Ж. Мустафина

fanina84@bk.ru

УДК 517.518

В работе определяются признаки мягкого и жесткого сценария бифуркации Андронова-Хопфа в двупараметрических системах при переходе параметров через границы области устойчивости.

Ключевые слова: безопасная и опасная точка бифуркации, бифуркация Андронова–Хопфа.

On the classification of the boundaries of stability regions of two–parameter dynamical systems

The paper defines the signs of a soft and hard Andronov–Hopf bifurcation scenario in two–parameter systems when parameters pass through the boundaries of the stability domain.

Keywords: safe and dangerous bifurcation point, Andronov–Hopf bifurcation

Сценарии локальных бифуркаций бывает двух видов: мягкая (безопасная) и жесткая (опасная). Рис. 1 иллюстрирует мягкий и жесткий сценарии бифуркации Андронова-Хопфа.

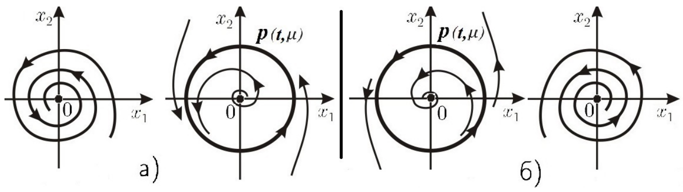


Рис 1. Мягкий а) жесткий б) сценарий бифуркации Андронова-Хопфа.

Рассматривается двупараметрическое нелинейное автономное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(\alpha,\beta)x + a_2(x,\alpha,\beta) + a_3(x,\alpha,\beta) + \tilde{a}_4(x,\alpha,\beta), \quad x \in R^N, \qquad (1)$$

Мустафина Ильмира Жаватовна (Россия); Mustafina I.Zh. (Russia) где α и β – скалярные вещественные параметры, $A(\alpha,\beta)$ – квадратная матрица, нелинейности $a_2(x,\alpha,\beta)$ и $a_3(x,\alpha,\beta)$ содержат соответственно квадратичные и кубические по x слагаемые и являются непрерывно дифференцируемыми, а нелинейность $\tilde{a}_4(x,\alpha,\beta)$ является непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет соотношению: $\|\tilde{a}_4(x,\alpha,\beta)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \to 0$ равномерно по α и β.

При всех значениях параметров α и β уравнение (1) имеет решение $x = 0$, которое при одних значениях параметров является устойчивым, при других неустойчивым. Как правило, в плоскости параметров (α,β) возникают области устойчивости и неустойчивости решения $x = 0$; граница между этими областями обычно представляет собой некоторую кривую γ_0. Возникает вопрос о том, как изменяется динамика системы (1) при переходе параметров через точки граничной кривой γ_0, в частности, каким будет сценарий бифуркация: мягкий или жесткий. В первом случае границу γ_0 области устойчивости будем называть безопасной, а во втором - опасной (см. [1, 2]).

В каждой точке (α_0,β_0) граничной кривой γ_0 матрица $A_0 = A(\alpha_0,\beta_0)$ имеет хотя бы одно чисто мнимое собственное значение. Пусть при $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$ матрица $A_0 = A(\alpha_0,\beta_0)$ имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm\omega_0 i$, где $\omega_0 > 0$. Тогда при переходе через точку (α_0,β_0) реализуется сценарий бифуркации Андронова-Хопфа.

Обозначим через $e, g, e^*, g^* \in R^N$ ненулевые векторы такие, что выполняются равенства:

$$A_0(e+ig) = i\omega_0(e+ig), \quad A_0^*(e^*+ig^*) = -i\omega_0(e^*+ig^*).$$

Положим

$$\eta_1 = (A_1 e, e^*) + (A_1 g, g^*)\,, \quad \eta_2 = (A_2 e, e^*) + (A_2 g, g^*)\,;$$

здесь $A_1 = A'_\alpha(\alpha_0,\beta_0)$, $A_2 = A'_\beta(\alpha_0,\beta_0)$.

Теорема 1. *Пусть $\eta_1^2 + \eta_2^2 > 0$. Тогда при трансверсальном переходе параметров (α,β) через граничную кривую γ_0 вблизи точки (α_0,β_0) в системе (1) реализуется сценарий бифуркации Андронова-Хопфа.*

Для изучения вопроса о типе граничной кривой γ_0 (безопасная или опасная) ограничимся рассмотрением двумерного случая, т.е. пусть в системе (1) $N = 2$.

Положим

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\,, \quad e(t) = e\cos 2\pi t + g\sin 2\pi t\,, \quad e^*(t) = e^*\cos 2\pi t - g^*\sin 2\pi t,$$

$$F_2(t) = T_0 a'_{2x}(e(t),\alpha_0,\beta_0)e^{T_0 A_0 t}\,,$$

$$f_3(t) = T_0 a_3(e(t),\alpha_0,\beta_0) + T_0 F_2(t)\int_0^t e^{-\tau T_0 A_0} a_2(e(\tau),\alpha_0,\beta_0)d\tau\,,$$

$$\Delta_0 = \int_0^1 (f_3(t), e^*(t))\,dt\,.$$

Теорема 2. *Пусть $N = 2$ и в условиях теоремы 1 выполнено соотношение: $\Delta_0 \neq 0$. Тогда граничная кривая γ_0 является безопасной (опасной)* *границей области устойчивости решения $x = 0$ двумерной системы (1), если $\Delta_0 < 0$ ($\Delta_0 > 0$).*

Литература

1. *Баутин Н.И.* Поведение динамических систем вблизи границ областей устойчивости. // Серия "Современные проблемы механики". Л.-М.: ОГИЗ ГОСТЕХИЗДАТ. 1949.

2. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2.- М.- Ижевск: Институт компьютерных исследовании, 2009. 548 с.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА С КРАТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Р.Мустафокулов
rmustaf@list.ru

УДК 517.55

В работе приводится интегральное представление для решения одного линейного уравнения типа Эйлера в случае, когда соответсвующее характеристическое уравнение имеет кратные корни.

Ключевые слова: уравнение типа Эйлера, модельное уравнение, характеристика уравнения, определитель типа Вандермонды.

In this work explicit integral representations for solutions of one lineare equation of Euler's type where corresponding characteristic equation have roots multiple.

Keywords: equation of Euler's type, model equation, characteristic equation, determinant of Vandermond's type

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение типа Эйлера

$$[\omega(x)]^n y^{(n)} + a_1(x)[\omega(x)]^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\omega(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

с непрерывными при $x \in (a, b)$ коэффициентами $a_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$, $\omega(x)$ и правой части $f(x)$. Предполагая $\omega(x) \neq 0$ при $x \in (a, b)$ и функцию $\mu(x) = \int \frac{dx}{\omega(x)}$ $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемой, для каждого $k = 1, 2, \ldots, n-1$ ведем в рассмотрении функций

$$Q_k^i(x) = \mu'(x)Q_{k-1}^{i-1}(x) + [Q_{k-1}^i(x)]' \ (i = \overline{2, k-1}), \ Q_k^1(x) = \mu^{(k)}(x), \ Q_k^k(x) = [\mu'(x)]^k.$$

Уравнение (1) называется *модельным,* если существуют постоянные p_i $(i = \overline{1, n})$ такие, что коэффициенты $a_i(x)$ удовлетворяют условиям

Мустафокулов Рахмонкул, д.ф.-м.н., профессор, ТНУ (Душанбе,Таджикистан); Mustafokulov Rahmonkul (TNU, Tajikistan)

$$a_i(x) = p_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_j(x)[\omega(x)]^{n-j} Q_{n-j}^{n-i}(x) \quad (i = \overline{1, n-1}),\ a_n(x) \equiv p_n.$$

Модельное уравнение заменой $t = \mu(x)$ приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$z^n y^{(n)} + p_1 z^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} z' + p_n z = F(t), \tag{2}$$

где $F(t) = f[\nu(t)]$, $x = \nu(t)$ -обратное к $t = \mu(x)$ преобразование.

Если $z(t)$ - решение уравнения (2), то полагая в нем $t = \mu(x)$ находим решения $y(x) = z[\mu(x)]$ модельного уравнения (1).

Решение $z(t)$ уравнения(2) определяется в зависимости от корней характеристического уравнения

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0. \tag{3}$$

В [1] приведена формула интегрального представления для решения модельного уравнения (1) в случае простых вещественных и комплексных характеристик. Ниже мы будем обсуждать случай наличия кратных характеристик.

Теорема 1. *Пусть характеристическое уравнение (3) имеет l простых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$ и один $m-$кратный λ_0 вещественных корней ($l+m = n$). Тогда общее решение $y(x)$ модельного уравнения (1) определяется формулой*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{l} c_i e^{\lambda_i \mu(x)} + e^{\lambda_0 \mu(x)} \sum_{j=1}^{m} c_{l+j} [\mu(x)]^{j-n} + \sum_{i=1}^{l} \frac{(-1)^l}{A_i(\lambda_i - \lambda_0)^m} \times$$
$$\times \int_a^x \Big(e^{\lambda_i[\mu(x)-\mu(\tau)]} - e^{\lambda_0[\mu(x)-\mu(\tau)]} \sum_{j=1}^{m} \frac{(\lambda_i - \lambda_0)^{j-1}}{(j-1)!} [\mu(x) - \mu(\tau)]^{j-1} \Big) \mu'(\tau) f(\tau) d\tau,$$

где

$$A_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{l} (\lambda_j - \lambda_i),$$

c_k $(k = \overline{1, n})$*- произвольные постоянные.*

Отметим некоторые частные случаи этой теоремы.

Следствие. Если характеристическое уравнение (3) имеет n простых вещественных корней, то общее решение $y(x)$ модельного уравнения (1) имеет вид

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i e^{\lambda_i \mu(x)} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1}}{A_i} \int_a^x e^{\lambda_i[\mu(x)-\mu(\tau)]} \mu'(\tau) f(\tau) d\tau,$$

а если характеристическое уравнение(3) имеет один $n-$ кратный вещественных корень, то общее решение $y(x)$ модельного уравнения (1) определяется формулой

$$y(x) = e^{\lambda_0 \mu(x)} \sum_{j=1}^{n} c_j [\mu(x)]^{j-1} - \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x e^{\lambda_0[\mu(x)-\mu(\tau)} [\mu(x) - \mu(\tau)]^{n-1} \mu'(\tau) f(\tau) d\tau.$$

Литература

1. *Мустафокулов Р.* Интегральное представление решения одного линейного уравнения типа Эйлера в случае простых характеристик // Современны методы теории краевых задач. Матер.Междунар.конф.Воронежская весенняяя математическая школа ≪Понтрягинские чтения -XXX≫, 2019, с. 211-212.

О ПОЛНОТЕ ОДНОГО ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ

Э.М. Мухамадиев, С. Байзаев, М.А. Очилова

emuhamadiev@rambler.ru, baisat54@rambler.ru, ochilova-1997@mail.ru

УДК 517.512

Вводятся понятия несимметрических частичных сумм ряда Фурье и равномерной сходимости этого ряда. Доказывается полнота пространства равномерно сходящихся рядов Фурье непрерывных функций по несимметрическим частичным суммам.

Ключевые слова: ряды Фурье, несимметрические частичные суммы, равномерная сходимость, полнота пространства, пространство гёльдеровых функций.

On the completeness of one function space

Introduces the notion of non-symmetric partial sums of the Fourier series and uniform convergence of this series. We prove the completeness of the space of uniformly convergent Fourier series of continuous functions on non-symmetric partial sums.

Keywords: Fourier series, non-symmetric partial sums, uniform convergence, completeness of space, space of Holder.

Ряды Фурье [1] и их срезки [2] используются в решении многих задач математики и смежных наук, в частности, в исследовании сингулярного интегрального уравнения типа Гильберта.

Ряд Фурье непрерывной 2π-периодической функции $f(t)$ обозначим

$$(Sf)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)e^{ikt}, \quad \text{где} \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt.$$

Частичные суммы этого ряда определяются как (см. [1], с. 17)

$$(S_{-n,n}f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt}, \quad n > 0.$$

Мухамадиев Эргашбой Мирзоевич, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия); Ergashboy Muhamadiev (Vologda State University, Vologda, Russia)

Байзаев Саттор, д.ф.-м.н., профессор, Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики (Худжанд, Таджикистан); Sattor Baizaev (Tajik State University of Law, Business and Politics, Khujand, Tajikistan)

Очилова Мухайёхон Акбаровна, преподаватель, Худжандский государственный университет (Худжанд, Таджикистан); Muhayokhon Ochilova (Khujand State University, Khujand, Tajikistan)

Наряду с этими частичными суммами рассмотрим несимметрические частичные суммы

$$(S_{-m,n}f)(t) = \sum_{k=-m}^{n} c_k(f)e^{ikt}, \quad m,n > 0.$$

Будем говорить, что ряд Фурье сходится равномерно к функции $f(t)$ по несимметрическим частичным суммам на отрезке $[0, 2\pi]$, если

$$\lim_{m,n\to\infty} ||f - S_{-m,n}f||_C = 0,$$

где $||\cdot||_C$ - норма в $C[0, 2\pi]$. В дальнейшем, под термином сходится равномерно, будем понимать сходимость по несимметрическим частичным суммам.

Срезками ряда Фурье функции $f(t)$ назовём односторонние ряды

$$(S_{1,+\infty}f)(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(f)e^{ikt}, \qquad (S_{-\infty,-1}f)(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(f)e^{ikt}.$$

Теорема 1. *Пусть ряд Фурье непрерывной 2π-периодической функции $f(t)$ сходится равномерно. Тогда существуют функции $f^{(+)} \in C[0, 2\pi]$ и $f^{(-)} \in C[0, 2\pi]$, являющиеся равномерными пределами срезок $S_{1,+\infty}f$ и $S_{-\infty,-1}f$ соответственно*:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left|f^{(+)} - S_{1,n}f\right|\right|_C = 0, \qquad \lim_{m\to\infty} \left|\left|f^{(-)} - S_{-m,-1}f\right|\right|_C = 0.$$

Отметим, что обратное утверждение к теореме 1 является очевидным.

Теорема 2. *Множество $FC[0, 2\pi]$, состоящее из непрерывных 2π-периодических функций $f(t)$, ряды Фурье которых сходятся равномерно, является полным нормированным пространством с нормой*

$$||f||_{FC} = \sup_{m,n>0} ||S_{-m,n}f||_C \,.$$

Существуют непрерывные функции, ряды Фурье которых расходятся в некоторых точках. Классическим примером таких функций является пример Дюбуа-Реймонда [3, с. 497-502]. Из этого следует, что пространство $C[0, 2\pi]$ шире пространства $FC[0, 2\pi]$. Однако, пространство $FC[0, 2\pi]$ шире любого пространства Гёльдера $H^\gamma[0, 2\pi]$ $(0 < \gamma < 1)$:

$$H^\gamma[0, 2\pi] \subset FC[0, 2\pi] \subset C[0, 2\pi].$$

Литература

1. *Кахан Ж.-П.* Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. — М.: Мир. 1976.

2. *Назимов А.Б., Мухамадиев Э.М., Морозов В.А., Муллоджанов М.* Метод регуляризации сдвигом. Теория и приложения. Монография. — Вологда: ВоГТУ. 2012.

3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. — М.: Наука. 1969.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э.М. Мухамадиев, А.Б. Назимов, А.Н. Наимов
emuhamadiev@rambler.ru, n.akbar54@mail.ru, nan67@rambler.ru

УДК 517.9

В статье исследована разрешимость одного класса нелинейных уравнений с малым параметром в евклидовом пространстве конечномерных вещественных векторов. Для исследования разрешимости рассматриваемого класса уравнений применен новый метод, в котором сочетаются идея метода Понтрягина из теории автономных систем на плоскости и методы вычисления вращения векторных полей.

Ключевые слова: нелинейное уравнение с малым параметром, метод Понтрягина, вращение векторного поля, периодическая задача.

On the solvability of a class of nonlinear equations

In this article is investigated the solvability some class of nonlinear equations with a small parameter in Euclidean space of finite-dimensional real vectors. To study the solvability of the considered class of equations is applied a new method in which is combined the idea of the Pontryagin's method from the theory of Autonomous systems on plane and methods for calculating the rotation of vector fields.

Keywords: nonlinear equation with a small parameter, Pontryagin's method, rotation of a vector field, periodic problem.

В работе исследуется разрешимость нелинейных уравнений вида

$$Ax = \mu f(x, \mu), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

где μ - вещественный параметр, $A : R^n \mapsto R^n$ - необратимый линейный оператор, $f : R^{n+1} \mapsto R^n$ - непрерывное отображение.

Для исследования разрешимости уравнения (1) применяется новый метод, исходящий от метода Понтрягина, известного в теории автономных систем на плоскости (см. [1]). Метод Понтрягина применяется для доказательства существования предельного цикла возмущенной автономной системы с малым параметром на плоскости. Основная идея метода Понтрягина заключается в том, что, используя нелинейное возмущение, выделяется определенное решение невозмущенной автономной системы и посредством этого решения доказывается существование решения возмущенной автономной системы. Данная идея в настоящей работе реализована применительно к нелинейным уравнениям вида (1). К тому же, в отличие от метода Понтрягина не предполагается дифференцируемость нелинейного отображения

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 18-47-350001р-а, № 19-01-00103а).

Мухамадиев Эргашбой Мирзоевич, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия); Ergashboy Muhamadiev (Vologda State University, Vologda, Russia)

Назимов Акбар Багадурович, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия); Akbar Nazimov (Vologda State University, Vologda, Russia)

Наимов Алижон Набиджанович, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия); Alizhon Naimov (Vologda State University, Vologda, Russia)

f и применяется теория вращения векторных полей (см. напр., [2, с. 135-157]). Сформулирована и доказана теорема о разрешимости уравнения (1) при малых значениях параметра μ.

В качестве приложения исследована периодическая задача

$$y' = Cy + \mu g(t, y, \mu), \quad t \in (0, \omega), \quad y \in R^n, \qquad y(0) = y(\omega)$$

в резонансном случае, т. е. в случае, когда матрица C имеет чисто мнимые собственные значения $\pm i2\pi k/\omega$. Полученные результаты в последующем могут быть использованы при исследовании краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений.

Обозначим через A^* оператор, сопряженный к оператору A. Пусть $N(A)$, $N(A^*)$ - ядра операторов A и A^*, а $R(A)$, $R(A^*)$ их области значений, $R(A)^{\perp}$, $R(A^*)^{\perp}$ - ортогональные дополнения к $R(A)$, $R(A^*)$. Общеизвестны следующие равенства:

$$R(A)^{\perp} = N(A^*), \quad R(A) \oplus N(A^*) = R^n, \quad R(A^*)^{\perp} = N(A),$$

$$R(A^*) \oplus N(A) = R^n, \quad \dim R(A) = \dim R(A^*), \quad \dim N(A) = \dim N(A^*).$$

Из последнего равенства следует существование линейного обратимого оператора $B : N(A^*) \mapsto N(A)$. А также заметим, что обратим оператор $\widetilde{A} : R(A^*) \mapsto R(A)$, где $\widetilde{A}$ - сужение оператора A на подпространстве $R(A^*)$. Далее, обозначим через P и Q ортогональные проекторы $P : R^n \mapsto N(A)$, $\quad Q : R^n \mapsto N(A^*)$.

Лемма. *Если μ отлично от нуля и x - решение уравнения (1), то из разложения $x = u + v$, где $u \in N(A)$ и $v \in R(A^*)$, следует, что пара (u, v) является решением системы уравнений*

$$BQf(u + v, \mu) = 0, \quad v = \mu \widetilde{A}^{-1}(I - Q)f(u + v, \mu), \quad u \in N(A), \quad v \in R(A^*). \tag{2}$$

И обратно, если пара (u, v) - решение системы уравнений (2), то $x = u + v$ является решением уравнения (1).

Согласно лемме, уравнение (1) при ненулевом μ равносильно системе уравнений (2).

О разрешимости системы уравнений (2) имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $N(A) \neq \{0\}$ и выполнены условия*

1) существуют $u_0 \in N(A)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $BQf(u_0, 0) = 0$ и $BQf(u, 0) \neq 0$ при $0 < |u - u_0| \leq \varepsilon$;

2) вращение $\gamma(BQf(\cdot, 0), S^1_{\varepsilon}(u_0))$ векторного поля $BQf(\cdot, 0) : N(A) \mapsto N(A)$ на сфере $S^1_{\varepsilon}(u_0) = \{u \in N(A) : |u - u_0| = \varepsilon\}$ отлично от нуля.

Тогда существует $\mu_0 > 0$ такое, что при всех $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$ разрешима система уравнений (2).

Литература

1. *Понтрягин, Л. С.* О динамических системах, близких к гамильтоновым // ЖЭТФ, **4**:8 (1934), 234-238.

2. *Красносельский, М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975.

О РАЗРЕШИМОСТИ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИЛЬБЕРТА С КРАТНЫМ ЯДРОМ

Ш.М. Мухамеджонова, А.Б. Назимов
shohida.2019@mail.ru, n.akbar54@mail.ru

УДК 517.642.7

В работе рассматривается сингулярное интегральное уравнение Гильберта с кратным ядром. Приведены необходимое и достаточное условия разрешимости этого уравнения в пространстве равномерно сходящихся рядов Фурье и однозначная разрешимость при дополнительных условиях.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение Гильберта, ряды Фурье, однозначная разрешимость.

On the solvability of a singular Hilbert integral equation with multiple kernel

The paper considers the singular Hilbert integral equation with multiple kernel. The necessary and sufficient conditions for the solvability of this equation in the space of uniformly converging Fourier series are given. The unique solvability of this equation is proved under additional conditions.

Keywords: singular Hilbert integral equation, Fourier series, unique solvability.

Пусть $\varphi(x)$ и $f(x,y)$ - комплекснозначные непрерывные 2π-периодические функции по x и y. Рассмотрим ряды Фурье этих функций

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_k e^{ikx}, \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f_{kl} e^{i(kx+ly)}, \tag{1}$$

где

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(s) e^{-iks} ds, \qquad f_{kl} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s,t) e^{-i(ks+lt)} ds dt.$$

Частичные суммы рядов (1) обозначим:

$$\left(S_{-m_1,m_2}\varphi\right)(x) = \sum_{k=-m_1}^{m_2} \varphi_k e^{ikx}, \quad \left(S_{-m_1,m_2}^{-n_1,n_2} f\right)(x,y) \sum_{k=-m_1}^{m_2} \sum_{l=-n_1}^{n_2} f_{kl} e^{i(kx+ly)}. \tag{2}$$

Будем говорить, что ряды Фурье (1) сходятся равномерно соответственно к функциям $\varphi(x)$ и $f(x,y)$, если

$$\lim_{\substack{m_1 \to \infty \\ m_2 \to \infty}} ||\varphi - S_{-m_1,m_2}\varphi||_{C_1} = 0, \qquad \lim_{\substack{m_1 \to \infty, n_1 \to \infty \\ m_2 \to \infty, n_2 \to \infty}} ||f - S_{-m_1,m_2}^{-n_1,n_2} f||_{C_2} = 0, \tag{3}$$

Мухамеджонова Шохида Музаффаровна, преподаватель, Худжандский государственный университет (Худжанд, Таджикистан); Shohida Mukhamedjonova (Khujand State University, Khujand, Tajikistan)

Назимов Акбар Багадурович, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия); Akbar Nazimov (Vologda State University, Vologda, Russia)

где
$$||\varphi||_{C_1} = \max_{0\le x\le 2\pi} |\varphi(x)|, \qquad ||f||_{C_2} = \max_{0\le x,y\le 2\pi} |f(x,y)|.$$

Множество всех функций $\varphi(x)$ и $f(x,y)$ с равномерно сходящимися рядами Фурье образуют полные нормированные пространства U_1 и U_2 с нормами

$$||\varphi||_1 = \sup_{m_1,m_2>0} ||S_{-m_1,m_2}\varphi||_{C_1}, \qquad ||f||_2 = \sup_{m_1,m_2>0,n_1,n_2>0} ||S^{-n_1,n_2}_{-m_1,m_2} f||_{C_2}.$$

Сингулярным интегральным уравнением Гильберта с кратным ядром называется уравнение

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{t_1-s_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t_2-s_2}{2} x(s_1,s_2)ds_1ds_2 = f(t_1,t_2). \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $f(t_1,t_2)\in U_2$ - произвольная функция. Для того, чтобы сингулярное интегральное уравнение Гильберта с кратным ядром (4) имело решение $x(s_1,s_2)$, принадлежащее пространству U_2, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$f(t_1,0)=0 \quad \text{для всех} \quad t_1\in[0,2\pi], \tag{5}$$

$$f(0,t_2)=0 \quad \text{для всех} \quad t_2\in[0,2\pi]. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть для данной функции $f(t_1,t_2)\in U_2$ выполняются условия (5) и (6). Тогда для любых функций $\alpha_1(s_1)$, $\alpha_2(s_2)$, принадлежащих пространству U_1, существует только одно решение $x(s_1,s_2)\in U_2$ уравнения (4), удовлетворяющее условиям*:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(s_1,s_2)ds_2 = \alpha_1(s_1), \quad s_1\in[0,2\pi],$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(s_1,s_2)ds_1 = \alpha_2(s_2), \quad s_2\in[0,2\pi].$$

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА С МЕЛКОЙ ПЕРФОРАЦИЕЙ ВДОЛЬ ЗАДАННОГО МНОГООБРАЗИЯ

А.И. Мухаметрахимова
albina8558@yandex.ru

Пусть $x = (x', x_n)$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n-1}$ соответственно, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – неограниченная область, $n \geq 3$. Будем считать, что в окрестности гиперплоскости $x_n = 0$ эта область совпадает со слоем, то есть, существует $\tau_0 > 0$, такое что $\Omega \cap \{x : |x_n| \leqslant \tau_0\} = \{x : |x_n| \leqslant \tau_0\}$. Пусть ε – малый положительный параметр, $\eta = \eta(\varepsilon)$ – некоторая функция, удовлетворяющая неравенству: $0 < \eta(\varepsilon) \leqslant 1$, $S := \{x : x_n = 0\}$, M_k^ε – точки расположенные на S периодически, а именно, $M_k^\varepsilon = (\varepsilon b_1 k_1, \dots, \varepsilon b_n k_n)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, $b_i > 0$. Через θ обозначим множество, лежащее в параллелепипеде $\{x : -\frac{b_i}{2} < x_i < \frac{b_i}{2}, i = 1, \dots, n-1, x_n = 0\}$. Предположим, что множество θ состоит из двух компонент: $\theta = \theta_D \cup \theta_R$, $\theta_D \cap \theta_R = \emptyset$. Положим: $\theta_D^\varepsilon = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} \big\{x : \varepsilon^{-1}\eta^{-1}(x - M_k^\varepsilon) \in \theta_D\big\}$, $\theta_R^\varepsilon = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}^n} \big\{x : \varepsilon^{-1}\eta^{-1}(x - M_k^\varepsilon) \in \theta_R\big\}$, $\theta^\varepsilon = \theta_D^\varepsilon \cup \theta_R^\varepsilon$, $\Omega^\varepsilon = \Omega \setminus \theta^\varepsilon$.

Через $A_{ij} = A_{ij}(x)$, $A_i = A_i(x)$, $A_0 = A_0(x)$ обозначим функции, заданные в Ω и удовлетворяющие следующим условиям:

$$A_{ij}, A_i \in W_\infty^1(\Omega), \quad A_0 \in L_\infty(\Omega), \quad A_{ij} = A_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$
$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant C_0|\xi|^2, \quad x \in \Omega, \quad \xi = (\xi_1 \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

где C_0 – положительная константа, не зависящая от x и ξ. Пусть $a = a(u)$ – некоторая измеримая функция, удовлетворяющая условию: $|a(u_1) - a(u_2)| \leqslant a_0|u_1 - u_2|$, $a(0) = 0$, где a_0 – некоторая константа, не зависящая от u_1 и u_2. Пусть $f \in L_2(\Omega) \cap W_2^q(\{x : |x_n| \leqslant \tau_0\})$ для любого $q \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$\mathcal{L} := -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n A_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{A_j}(x) + A_0(x).$$

Будем предполагать, что $A_{ij} = 1$, $A_j = 0$, $A_0 = 0$ при $|x_n| \leqslant \tau_0$. Через $\chi = \chi(x_n)$ обозначим бесконечно дифференцируемую срезающую функцию, равную нулю при $|x_n| < 1$ и единице при $|x_n| > 2$ и положим:

$$\chi^\varepsilon(x_n) = \begin{cases} \chi\left(x_n \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right), & |x_n| \geqslant \tau_0 \\ 0, & |x_n| \leqslant \tau_0. \end{cases}$$

Рассмотрим краевую задачу:

$$(\mathcal{L} - \lambda)u_\varepsilon = f \quad \text{в} \quad \Omega_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$
$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{на} \quad \partial\theta_D^\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N} + a(u_\varepsilon) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\theta_R^\varepsilon. \quad (1)$$

Мухаметрахимова Альбина Ишбулдовна, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы (Уфа, Россия)

В работе рассматривается случай, когда ε и η связаны следующим соотношением:

$$\frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}(\varepsilon)} \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Цель: построить асимптотическое разложение решения задачи (1).

Теорема 1. *Асимптотика функции u_ε в норме $W_2^1(\Omega_\varepsilon)$ имеет вид*

$$u_\varepsilon(x,\xi,\eta) = \chi^\varepsilon(x_n)u_\varepsilon^{ex}(x,\eta) + (1-\chi^\varepsilon(x_n))u_\varepsilon^{in}(\xi,x',\eta) + O\left(\left(\frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}}\right)^4\right),$$

где

$$u_\varepsilon^{ex}(x,\eta) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x,\eta) + \varepsilon^2 u_2(x,\eta) + \varepsilon^3 u_3(x,\eta),$$
$$u_\varepsilon^{in}(\xi,x',\eta) = \varepsilon v_1(\xi,x',\eta) + \varepsilon^2 v_2(\xi,x',\eta) + \varepsilon^3 v_3(\xi,x',\eta).$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЯКОБИ

Я. Мухтаров, А.В. Усманов

ya.muxtarov47@gmail.com, azimkxon@gmail.com

УДК 517.946

В работе рассматривается обобщенное уравнение Якоби. Проведено качественное исследование соответствуюшей системы при различных значениях параметра

Ключевые слова: Фазовые портреты,уравнение Якоби,особые точки, полиномиальная система

The work considers the generalized Jacobi equation. A qualitative research of the corresponding system was carried out for various values of the parameter

Keywords: Phase portraits, Jacobi equation, singular points, polynomial system

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_{10}x + b_{01}y + y(ax+by)^m}{a_{10}x + a_{01}y + x(ax+by)^m}, \tag{1}$$

Яхъё Мухтаров, к.ф.-м.н., доцент, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Yahyo Muxtarov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Усманов Азим Валижонович, ассистент, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Azim Usmanov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

здесь m-произвольное натуральное число. (1) является обобщением уравнения Якоби и частным случаем уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b_{10}x + b_{01}y + yQ_n(x,y)}{a_{10}x + a_{01}y + xP_n(x,y)},$$

которая была исследована в работе [1] при некоторых частных случаях.

Проведено качественное исследование уравнения (1) в зависимости от корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{10} - \lambda & a_{10} \\ b_{01} & b_{01} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

и четности или нечетности числа m.

Доказаны, при m- четном:

1) если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, то уравнение (1) имеет при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ одну особую точку типа неустойчивый узел, при $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ пять особых точек, а именно начало координат устойчивый узел, два седла и два узла. Уравнение (1) не имеет предельный цикл.

2) если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, то уравнение (1) имеет особые точки типа два узла и седло, а в бесконечности нет особых точек. Особые точки уравнения (1) лежат на оси x или на оси y и расположены симметрично относительно начала координат. при m- нечетном:

1) если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 (\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0)$, и выполняются условия $\lambda_1 \cdot b < 0, \lambda_2 \cdot a < 0$, то уравнение (1) имеет три особые точки типа седла и два узла;

2) если $b < 0, a < 0, \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, то уравнение (1) (кроме начала, которое является устойчивым узлом), не имеет особых точек;

3) если $b < 0, a > 0, (b > 0, a < 0), \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, то уравнение (1) (кроме начала, которые является устойчивым узлом) имеет одну особую точку типа вырожденный седло, а в бесконечности нет особых точек.

Литература

1. *Латипов Х.Р., Шарипов Ш.Р.* О сожительстве особых точек полиномиального уравнения на всей плоскости. Труды СамГУ, вып.144,1984.

A STABILITY ESTIMATE OF A RESIDUAL-BASED ARTIFICIAL VISCOSITY METHOD FOR EXPLICIT SCHEMES

M. Nazarov
murtazo.nazarov@it.uu.se

УДК 517.518

В данной работе исследуются оценки устойчивости L^2 для метода стабилизации на основе невязок. Доказано, что метод устойчив при обычных критериях Куранта-Фридрихса-Леви (КФЛ) для шага по времени по схеме Эйлера.

This work investigates the L^2 stability estimates for a residual based stabilization technique. It is proved that the method is stable under the usual CFL condition for explicit Euler time-stepping.

Keywords: finite element method, nonlinear stabilization techniques, conservation laws

We consider the following scalar conservation equation

$$\begin{aligned} \partial_t u + \nabla\cdot f(u) = 0, \qquad & (x,t) \in R^d \times R_+ \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad & x \in R^d, \end{aligned} \tag{1}$$

where d is the space dimension, $f : \mathcal{C}_b^1(R, R^d)$ is a smooth flux with bounded derivatives. To avoid unnecessary technicalities due to boundary conditions we assume that the initial data $u_0 \in L^\infty(R^d)$ has compact support in R^d.

Conservation laws in form (1) play important role in understanding many physical phenomenons such as in fluid dynamics, aero dynamics, gas flows, thermodynamics. Usually, analytical solution to this problems are difficult to obtain, therefore, numerical simulations of conservation laws are developed to overcome this issue. Finite element methods are one of the numerical tools that are used to compute numerical solutions of (1).

The objective of the present work is to construct a numerical approximation of the *entropy solution* of (1) using a finite element method. We will regularize the numerical method by an artificial viscosity based on the residual of the PDE.

Residual-based viscosity method. Due to the fact that u_0 is compactly supported, the solution u of (1) has compact support in $R^d \times [0, T^\infty]$. This implies that there exists $M < +\infty$ be so that $u(x,t) = 0$ for all $|x| \geq M$ and all $t \in [0, T^\infty]$.

Let $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ be a shape-regular mesh family of R^d. Each mesh is assumed to be composed of affine simplices. For every $K \in \mathcal{T}$, the diameter of K is denoted h_K and we set $h := \max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$. We then introduce the following finite element space

$$V_h = \{v \in H^1(R^d) : v \in \mathcal{C}^0(R^d_n),\, v|_K \in \mathcal{P}_1(K),\, v(x) = 0 \text{ for } |x| \geq 2M\},$$

where $\mathcal{P}_1(K)$ is the set of d-variate polynomials over K of total degree at most 1.

Let T^∞ be some finite time and let $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T^\infty$ be a sequence of discrete time steps with associated time intervals $I_n = (t_{n-1}, t_n]$

Murtazo Nazarov, PhD in applied and computation mathematics, associate professor in scientific computing, Uppsala University (Uppsala, Sweden);

of length $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, $n = 1, 2, \cdots, N$. We assume that the mesh in time is quasi-uniform, i.e. $\max \tau_n / \min \tau_n$ is uniformly bounded for all possible time sequences. We define $\tau := \max \tau_n$.

Let $u_{0,h}$ be some reasonable approximation of u_0; for instance, set $u_{0,h} = \pi_h u_0$ if u_0 is continuous, or use the L^2-projection of u_0 onto V_h if u_0 is not continuous. Then set $U_h^0 = u_{0,h}$ and consider the following stabilized finite element approximation of the conservation equation (1) with explicit Euler time stepping: for $n = 1, 2, \cdots, N$ find $U_n \in V_h$ such that

$$\int_{R^d} \frac{U_{n+1} - U_n}{\tau_n} v dx + \int_{R^d} \nabla \cdot f(U_n) v dx + \int_{R^d} \varepsilon_n(U) \nabla U_n \cdot \nabla v dx = 0, \quad (2)$$

for all test functions $v \in V_h$. The artificial viscosity $\varepsilon_n(U)$ is defined as follows:

$$\varepsilon(U_n)|_K = \min(C_M h_K \|f'(U_n)\|_{L^\infty(K)},\, C_R h_K^2 |R(U_n)|_K) \quad (3)$$

$$R(U_n) = \frac{U_n - U_{n-1}}{\tau_n} + \nabla \cdot f(U_n), \quad (4)$$

where $C_M, C_R > 0$ is a user-defined $O(1)$ constants, and $R(U_n)$ is the residual of the discretization.

Convergence of residual-based viscosity method for implicit time discretization was done in [1]. Later, this method was extended to solve realistic flow problems using the finite element method in [2], and the spectral element method in [3] and [4].

In this work, we proved the following stability estimates for the residual-based viscosity method:

Теорема 1. *There is uniform constant C so that*

$$\|U\|^2_{L^\infty((0,T^\infty);L^2(R^d))} + (1-\lambda) \sum_{n=1}^{N} \int_{R^d} \varepsilon(U_n) |\nabla U_n|^2 dx \le \|u_0\|^2_{L^2(R^d)}, \quad (5)$$

where $\lambda = C\|f'(U_n)\|_{L^\infty} h^{-1} \tau$ is the CFL number.

The L^2 estimate is important since it shows the stability of the finite element scheme. Also, it facilitates convergence proof towards an unique entropy solution, which will be done in future work.

Литература

1. *Nazarov M.* Convergence of a residual based artificial viscosity finite element method. // Computers & Mathematics with Applications, **65**(4) (2013), 616-626.

2. *Nazarov M, Hoffman J.* Residual based artificial viscosity for simulation of turbulent compressible flow using adaptive finite element methods. // Int. J. Num. Methods Fluids, **71**(3) (2013), 339-357.

3. *Marras S., Nazarov M., Francis X. Giraldo.* Stabilized high-order Galerkin methods based on a parameter-free dynamic SGS model for LES. // Journal of Computational Physics. **301** (2015), 77-101.

4. *Lu L., Nazarov M., Fischer P.* Nonlinear artificial viscosity for spectral element methods. // Comptes Rendus Mathematique **357**(7) (2019), 646-654

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ МАГНИТНОГО БРИЗЕРА В РЕЖИМЕ АВТОРЕЗОНАНСА

В.Н. Назаров, А.М. Гумеров, Р.Р. Муртазин, И.В. Бычков, Е.Г. Екомасов

nazarovvn@gmail.com, bgu@bk.ru, murtazinrr@mail.ru, bychkov@csu.ru, ekomasoveg@gmail.com

УДК 537.622

Рассмотрено авторезонансное возбуждение магнитного бризера в трехслойном ферромагнетике полями переменной частоты и малой амплитуды с использованием явной схемы интегрирования уравнения синус-Гордона.

Ключевые слова: уравнение синус-Гордона, авторезонанс, трёхслойный ферромагнетик, динамика доменных границ

Application of the sine-Gordon equation to describe the nonlinear dynamics of a magnetic breather in autoresonance mode

Autoresonant excitation of a magnetic breather in a three-layer ferromagnet by fields of variable frequency and small amplitude is considered using an explicit integration scheme of the sine-Gordon equation.

Keywords: sine-Gordon equation, autoresonance, three-layer ferromagnet, dynamics of domain walls

Нелинейное дифференциальное уравнение синус-Гордона постоянно привлекает большое внимание исследователей. Решения уравнения в виде бризеров и солитонов описывают многие процессы в физике твердого тела, например, динамику перемагничивания. В данной работе описывается авторезонансное параметрическое возбуждение магнитного бризера в трехслойном ферромагнетике полями переменной частоты и малой амплитуды [1] с использованием явной схемы интегрирования уравнения синус-Гордона. Трёхслойный ферромагнетик рассматривается как структура, состоящая из двух широких одинаковых слоёв, разделённых тонким слоем с изменёнными значениями параметра анизотропии. При переходе к сферическим координатам вектора намагниченности можно получить уравнение движения в угловых переменных в обезразмеренном виде:

$$\Delta\theta - \ddot{\theta} - \frac{1}{2} f(r) \sin 2\theta = h \sin\theta + \alpha\dot{\theta},$$

функцию $f(r)$ будем моделировать в виде прямоугольника, являющегося для доменной границы потенциальной ямой. При прохождении доменной

Для Гумерова А.М. работа поддержана грантом РФФИ (проект № 18-31-00122).

Назаров Владимир Николаевич, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, ИФМК УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Vladimir Nazarov (IMCP UFRC RAS, Ufa, Russia)

Гумеров Азамат Маратович, к.ф.-м.н., инженер, БашГУ (Уфа, Россия); Azamat Gumerov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Муртазин Рамиль Равилевич, к.ф.-м.н., инженер, БашГУ (Уфа, Россия); Ramil Murtazin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Бычков Игорь Валерьевич, д.ф.-м.н., профессор, ЧелГУ (Челябинск, Россия); Igor Bychkov (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Екомасов Евгений Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Eugene Ekomasov (Bashkir State University, Ufa, Russia

границы через такую потенциальную яму возбуждаются нелинейный магнитные неоднородности типа солитонов и бризеров, амплитуда которых со временем убывает. Для возможных практических применений локализованных магнитных неоднородностей необходимо уметь управлять их структурой и динамическими свойствами. Например, для солитона нужно уметь переключать направления намагниченности на 180-градусов, а для бризера нужно уметь менять амплитуду и частоту. В постоянном магнитном поле достаточно большой величины, направленном против направления намагниченности в его центре, происходит переключение направления намагниченности в солитоне.

Для задач управления динамической структурой бризера наиболее интересен случай применения переменного внешнего магнитного поля, когда с помощью резонансных эффектов можно добиться локализованных колебаний намагниченности достаточно большой амплитуды. Внешнее магнитное поле задается как переменное специального вида

$$h = h_0 \cos(\omega t),$$

где частота является линейной функцией времени

$$\omega = \omega_0 + \mu t.$$

Здесь ω_0 – рассчитанная ранее в [2] собственная частота бризера, локализованного на дефекте, μ – малый параметр, амплитуда внешнего поля h_0 считается малой. Показано, что в переменном поле можно резонансно повысить амплитуду магнитной неоднородности бризерного типа. Получены различные зависимости роста амплитуды бризера от ширины и глубины потенциальной ямы. Кроме того, возможна генерация магнитного бризера с увеличением амплитуды в поле тонкого слоя из уравнений движения, сформулированных в виде уравнения синус-Гордона в модели с включением примесей и решаемой с помощью численных методов [3].

Литература

1. *Назаров В.Н., Екомасов Е.Г.* Авторезонансная модель управления нелинейной динамикой намагниченности в трехслойной антиферромагнитной структуре с учетом затухания в системе // Письма о материалах, **8**:2 (2018), 158-164.

2. *Екомасов Е.Г., Муртазин Р.Р., Назаров В.Н.* Одномерная динамика доменных границ в трехслойной ферромагнитной структуре с различными параметрами магнитной анизотропии и обмена // Физика металлов и металловедение, **115**:2 (2014), 125-131.

3. *Ekomasov E.G., Gumerov A.M., Kudryavtsev R.V.* Resonance dynamics of kinks in the sine-Gordon model with impurity, external force and damping //Journal of Computational and Applied Mathematics, **312** (2017), 198-208.

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СДВИГОМ ОДНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

А.Б. Назимов, М.К. Собиров
n.akbar54@mail.ru, adolat1@mail.ru

УДК 517.9

В докладе рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Найдено условие однозначной разрешимости регуляризованной системы. Доказана сходимость регуляризованных решений.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, регуляризация сдвигом, периодическая задача.

On the regularization by shift of one periodic problem

The report considers a system of linear differential equations with constant coefficient. The condition for the unique solvability of a regularized system is found. Convergence of regularized solutions is proved.

Keywords: differential equations, regularization by shift, periodic problem.

Рассмотрим задачу нахождения периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x' = Ax + f(t), \quad 0 < t < 2\pi, \tag{1}$$

где A - постоянная квадратная матрица порядка N с комплексными элементами, $f \in \overline{C}_N$ - заданная вектор-функция, $\overline{C}_N = \overline{C}_N[0, 2\pi]$ - пространство непрерывных 2π-периодических вектор-функций.

Известно, что [1]. необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости системы уравнений (1) в $\overline{C}_N$ для любой вектор-функции $f \in \overline{C}_N$ является отсутствие целых чисто мнимых собственных значений у матрицы A.

Наряду с (1) рассмотрим регуляризованную сдвигом систему

$$x' = (A + \alpha B)x + f(t), \quad 0 < t < 2\pi, \tag{2}$$

где B - постоянная квадратная матрица порядка N с комплексными элементами, а α - комплексный параметр регуляризации.

В настоящем докладе исследуется вопросы:

1) каким условиям должна удовлетворять матрица A, чтобы регуляризованная система (2) имела единственное решение для любой матрицы B, правой части $f \in \overline{C}_N$ и достаточно малых ненулевых значений параметра регуляризации α?

2) сходятся ли решения регуляризованной системы (2) к единственному решению системы (1)?

Ответ на первый вопрос приведен в теореме 1, а на второй вопрос - в теореме 2.

Назимов Акбар Багадурович, д.ф.-м.н., профессор, ВоГУ (Вологда, Россия); Akbar Nazimov (Vologda State University, Vologda, Russia)

Собиров Масъуд Камолович, к.ф.-м.н., доцент, (Душанбе, Таджикистан); Masud Sobirov (Dushanbe, Tajikistan)

Теорема 1. *Для того чтобы регуляризованная сдвигом система (2) имела единственное решение в пространстве* $\overline{C}_N$ *для произвольной матрицы* B*, правой части* $f \in \overline{C}_N$ *и достаточно малых ненулевых значений параметра регуляризации* α*, необходимо и достаточно отсутствие целых чисто мнимых собственных значений у матрицы* A.

Теорема 2. *Пусть матрица* A *не имеет целых чисто мнимых собственных значений. Тогда единственное* 2π*-периодическое решение* $x_\alpha(t)$ *регуляризованной системы (2) сходится при* $\alpha \to 0$ *к единственному* 2π*-периодическому решению* $x_0(t)$ *исходной системы (1) и справедлива оценка скорости сходимости*

$$||x_\alpha - x_0|| \leq M|\alpha|,$$

где число $M > 0$ *определяется по данным задачи.*

Наиболее полное исследование вопроса сходимости решений регуляризованной сдвигом системы для произвольных матриц A приведено в работе [2].

Литература

1. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.

2. *Назимов А.Б., Мухамадиев Э.М., Морозов В.А., Муллоджанов М.* Метод регуляризации сдвигом. Теория и приложения. Монография. — Вологда: ВоГТУ. 2012.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ЭКОНОМИКЕ

Н.А. Насибуллина
nellyullina@gmail.com

УДК 517.518

Предметом моей работы являются математические модели динамических систем в экономике. Актуальность связана с возможностью исследовать объекты, реальные эксперименты над которыми затруднены или невозможны.Показано, что колебания цены на рынке и экономической системы в целом около равновесного значения возникают при мягкой потере устойчивости, а кризисные явления возникают как жесткое установление автоколебаний.

Ключевые слова: математическое моделирование, динамическая система, экономика

Mathematical modeling of dynamic systems in economics

The subject of my work are mathematical models of dynamical systems in economics. Relevance is associated with the ability to investigate objects whose real experiments are difficult or impossible. It is shown that price fluctuations in the market and the economic system as a whole near equilibrium values occur with a mild loss of stability, and crisis phenomena arise as a rigid establishment of self-oscillations.

Keywords: mathematical modeling, dynamic system, economic

Тема моего исследования: «Математическое моделирование динамических систем в экономике». Поскольку при создании различных моделей, используемых для решения различных исследовательских и проектно-управленческих задач, служат математические модели. Возникает необходимость реализации модели в виде компьютерной программы.

Целью моей работы было установление реальной динамической системе математической модели и исследование этой модели, позволяющее получить реальные характеристики системы.

Актуальность, в свою очередь, связана с возможностью исследовать объекты, реальные эксперименты над которыми затруднены или невозможны. Построение математические моделей помогает в анализе экономических явлений и процессов, соответственно, имеет широкое практическое применение.

Основной задачей являлось разработка динамической модели изменения цен. Для ее выполнения были пройдены следующие этапы:

1. изучение моделируемого моделирования, составление содержательной постановки;

2. формирование содержательной, концептуальной и математической постановки задачи;

3. выбор методов решения для дальнейшего использования в программе, поиск решения и разработка его алгоритма;

4. практическое использование составленной модели.

В ходе работы все этапы были пройдены, соответственно, достигнута поставленная задача.

Насибуллина Нелли Артуровна,БашГУ (Уфа, Россия); Nelly Nasibullina (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Модель представляет собой совокупность объектов, при чем существует набор законов, показывающих их взаимодействие как друг с другом, так и с окружающей средой. Показано, что колебания цены на рынке и экономической системы в целом около равновесного значения возникают при мягкой потере устойчивости, а кризисные явления возникают как жесткое установление автоколебаний. Программа моделируется по системе правил, но в зависимости от собственных характеристик, не смотря на представление каждого элемента системы как отдельной части с собственным набором параметров.

Литература

1. *Бережная Е.В., Бережной В.И.* Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. 2-е изд., (2006), 431-433.

2. *Бусленко В.Н.* Автоматизация имитационного моделирования сложных систем, (1977), 240.

3. *Бусленко Н.П.* Моделирование сложных систем, (1968), 356 с.

О СИЛЬНЫХ И СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ф.С. Насыров
farsagit@yandex.ru

УДК 519.2

Найдены новые условия существования сильных решений обыкновенных дифференциальных уравнений со случайной правой частью, стохастических дифференциальных уравнений со случайным измеримым сносом и их потраекторных аналогов с симметричными интегралами. Показано, что решения уравнения Ито удовлетворяют параболическому уравнению вдоль траектории винеровского процесса.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение, сильное решение, слабое решение, обыкновенное дифференциальное уравнение со случайной правой частью, уравнение с симметричными интегралами, решение Каратеодори

On strong and weak solutions of stochastic differential equations

New conditions for the existence of strong solutions of ordinary differential equations with a random right-hand side and their trajectory analogues are found. It is shown that the solutions of the Ito equation satisfy the parabolic equation along the trajectory of the Wiener process.

Keywords: Stochastic differential equations, strong solutions, weak solutions, ordinary differential equations with random right-hand side, equations with symmetric integrals, Caratheodory solutions

Пусть на $(\Omega, F, (F_t)_{t\in[t_0,T]}, P)$ задан F_t-винеровский процесс $W(t)$, $\mathcal{P}$ есть σ-алгебра предсказуемых множеств, а $B(R^2)$ – борелевская σ-алгебра.

Задача выяснения условия существования сильных и слабых решений обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) со случайной правой

Насыров Фарит Сагитович, д.ф.-м.н., профессор, УГАТУ

частью и стохастических дифференнциальных уравнений (СДУ) привлекало внимание очень многих исследователей (см. например, [2], [3], [4]), при этом существуют обзоры работ по этой тематике ([1], [5]) с подробной библиографией.

В данной работе, во первых, исследуются условия существования сильных решения СДУ вида (см. ниже) (2) и (3) с измеримым случайным сносом. При этом выяснилось, что методы, применяемые ниже и опирающиеся на структуру решения СДУ, позволяют доказать существование сильных решений для уравнений вида (2) в случае, когда $X(s) = X(s,\omega)$ есть случайный процесс с непрерывными траекториями, согласованный с некоторой фильтрацией (F_t).

Во вторых, удалось более глубоко понять хорошо известную связь между решениями СДУ Ито и математическими ожиданиями этих решений как решениями параболических уравнений: показано, что сами решения СДУ (3) с вероятностью 1 удовлетворяют уравнению параболического типа вдоль винеровского процесса. При этом данное утверждение есть следствие формулы Ито, то есть в самом определении интеграла Ито заложена потраекторная связь с параболическими уравнениями.

В работе доказаны следующие утверждения:

1. Обыкновенное дифферениальное уравнение со случайной правой частью вида $y' = f(t, W(t), y + W(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad y(t_0) = y_0$, где $f(t,v,y) = f(t,v,y,\omega)$ – $\mathcal{P} \times B(R^2)$-измеримая случайная функция, обладает сильным решением, если с $P = 1$

$$|f(t,v,y)| \le n(t), \text{ где } n(t) = n(t,\omega) \text{ суммируема по } t. \qquad (1)$$

2. Пусть $X(s)$ – произвольная непрерывная функция и выполнены следующие условия: (a) уравнение $(\varphi^*)'_v = \sigma(t,v,\varphi^*)$, допускает общее решение $\phi^*(t,v,C(t))$; (b) измеримая функция $f(t,y) = \frac{B(t,X(t),\varphi^*(t,X(t),y)) - (\varphi^*)'_t(t,X(t),y)}{\sigma(t,X(t),\varphi^*(t,X(t),y))}$ удовлетворяет неравенству (1) с неслучайной функцией $n(t)$. Тогда существует решение $\xi(t){=}\phi^*(t,X(t),C(t))$ уравнения с симметричным интегралом

$$\xi(t) - \xi(t_0) = \int_{t_0}^{t} \sigma(s,X(s),\xi(s)) * dX(s) + \int_{t_0}^{t} B(s,X(s),\xi(s))\,ds. \qquad (2)$$

3. Если с вероятностью 1 справедливы предположения предыдущего утверждения с борелевской функцией $\sigma(t,u,\varphi)$ и $\mathcal{P}\times B(R^2)$-измеримой функцией $B(t,u,\varphi,\omega)$, то существует сильное решение уравнения Стратоновича вида (2) с $X(s)$, замененным на $W(s)$.

4. Пусть дано уравнения Ито

$$d\xi(t) = \sigma(t,W(t),\xi(t))dW(t) + B(t,W(t),\xi(t))\,dt, \quad \xi(0) = \xi_0. \qquad (3)$$

Если справедливы предположения пункта 3 и непрерывная функция $\sigma(t,u,\varphi)$ имеет непрерывные частные производные $\sigma'_u(t,u,\varphi)$ и $\sigma'_\varphi(t,u,\varphi)$, то существует сильное решение уравнения $\xi(t){=}\phi^*(t,W(t),C(t))$ и случайная функция $\phi(t,W(t)){\equiv}\phi^*(t,W(t),C(t))$ с вероятностью 1 удовлетворяет соотношению
$\phi'_t(t,W(t)) = -\frac{1}{2}\phi''_{uu}(t,W(t)) + b(t,W(t),\phi(t,W(t))), \quad t \in [t_0,T]$.

Литература

1. *Анулова С. В., Веретенников А. Ю., Крылов Н. В., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Стохастическое исчисление.// Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. — ВИНИТИ, т. 45, 1989.

2. *Веретенников А. Ю.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений.— Теория вероятностей и ее применение. 1979. т. 24. № 2. с. 348–360.

3. *Звонкин А, К., Крылов Н. В.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений.// Тр. школы-семинара по теории случайных процессов.{Друскиникай-1974}. II Вильнюс: Институт физики и математики – 1975, с.9-88.

4. *Клепцина М. Л.* О сильных решениях стохастических дифференциальных уравнений с вырождающимися коэффициентами. — Теория вероятностей и ее применение. 1984. т. 29. № 2. с. 392–396.

5. *Ширяев А. Н.* Основы финансовой математики. Т.1,2. — М.: Фазис, 1998.

СПЕКТР И ФОРМУЛА СЛЕДОВ ДВУМЕРНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В ПОЛОСЕ

И.Г. Нугаева

nuga-irina@yandex.ru

УДК 517.984.5

В работе исследован спектр двумерного гармонического осциллятора в полосе. Доказана теорема о локализации спектра и получена формула регуляризованного следа финитного возмущения двумерного гармонического осциллятора в полосе.

Ключевые слова: спектр, регуляризованный след, двумерный гармонический осциллятор

Spectrum and a trace formula of the 2D harmonic oscillator in a strip

The spectrum of two-diminsional harmonic oscillator in a strip is studied. We prove a spectrum localization theorem and obtain a regularezed trace formula for a compactly supported perturbation of this operator.

Keywords: spectrum, regularized traces, two-dimensional harmonic oscillator.

Рассмотрим оператор $L = L_0 + V$ с областью определения

$$D = \left\{ u(x,y) \in L^2(\Pi), \quad u(x,0) = u(x,\pi) = 0 \right\},$$

где $\Pi = \{(x,y), x \in \mathbb{R}, 0 \le y \le \pi\}$, $L_0 u = -\Delta u + x^2 u$ задачи Дирихле и $-\Delta = -\frac{\partial_2}{\partial x^2} - \frac{\partial_2}{\partial y^2}$ в пространстве $L^2(\Pi)$, V — оператор умножения на ограниченную измеримую финитную, вещественную функцию. Пусть $P_i^{(2)}$ — ортонормированный проектор на собственное подпространство одномерного гармонического осциллятора, соответствующее собственным значениям $2i+1$, $i = 0,1,2...$, то есть $P_i^{(2)}\varphi = (\varphi,\varphi_i)\varphi_i$, где $\varphi_i(x) = (2^i i!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_2}{2}} H_i(x)$. А

Нугаева Ирина Гамировна, БашГУ (Уфа, Россия); Irina Nugaeva (Bashkir State University, Ufa, Russia)

$P_l^{(1)}$ — ортонормированный проектор на собственное подпространство одномерного оператора Лапласа задачи Дирихле, сосответствующие собственным значениям l^2, $l = 1, 2...$, то есть $P_l^{(1)} f = (f, f_l) f_l$, где $f_l(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} sinly$, $y \in [0, \pi]$. См [1],[2]. Тогда для собственных значений λ_{mk} оператора L_0 и соответствующих им проекторов P_{mk} справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Собственные значения оператора* L_0 $\lambda_n = \lambda_{mk} = n$, $n = 2, 4, 5, 6...$, *а их кратность* $\nu_n = \begin{cases} [\frac{\sqrt{n}}{2}], \textit{если} \quad \lambda_n \in \Big((2[\frac{\sqrt{n}}{2}])^2; (2[\frac{\sqrt{n}}{2}] + 1)^2 \Big) \\ [\frac{\sqrt{n}}{2}] + \frac{(-1)^n + 1}{2}, \textit{если} \quad \lambda_n \in \Big((2[\frac{\sqrt{n}}{2}] + 1)^2; (2[\frac{\sqrt{n}}{2}] + 2)^2 \Big) \end{cases}$ *причем* $P_n = P_{mk} = \sum\limits_{s=1}^{\nu_n} P_s^{(1)} \otimes P^{(2)}_{(\frac{n}{2} - \frac{s^2+1}{2})}$.

Пусть $\mu_s^{(n)}$ – собственные числа оператора L, соответствующие собственному числу $\lambda_n = n$, $\mathbb{N} \backslash \{1, 3\}$ спектра оператора L_0. Тогда справедлива

Теорема 2. *Пусть* $V(x, y) \in C^4(\Pi)$, *тогда*

$$\sum_{k \in \mathbb{N} \backslash \{1,3\}}^{n} [\sum_{s=1}^{\nu_k} (\lambda_k - \mu_s^{(k)}) + spP_k V] = \frac{1}{12\pi} \int\limits_{\Pi} V^2(x) dx$$

Литература

1. *Фазуллин З.Ю., Нугаева И.Г.* Спектр и формула следов финитного возмущения двумерного гармонического осциллятора в полосе // Диф.ур. – 2019. – Т.55, №5. – С. 691-701.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПОНТРЯГИНА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

И.Д. Нуров, З.И. Шарифзода
nid1@mail.ru, sakhara-2803@mail.ru

УДК 517.91

Работа посвящена вопросам существования периодических решений систем нелинейных уравнений с малым параметром. Найдены условия существования периодических решений, которые существенно расширяют область применимости метода малого параметра Понтрягина Л.С.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, периодическое решение, топологические методы, вращение вполне непрерывного векторного поля.

In this article considered the existence periodic solutions of nonlinear system equations with a small parameter. Living found conditions of periodic decisions, which significantly broaden area of applicability of a method of small parameter of Pontryagin L.S.

Keywords: differential equation, periodical solution, topological methods, rotation of completely continuous vector field.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \mu \cdot P(x, y, \mu), \\ \dot{y} = x + \mu \cdot Q(x, y, \mu), \end{cases} \tag{1}$$

где функции $P(x, y, \mu)$, $Q(x, y, \mu)$ непрерывны по совокупности переменных (x, y, μ) в области $|\mu| < \mu_0$, $(x, y) \in R^2$. В работе изучается вопрос о существовании периодического решения - цикла системы (1) при $\mu \neq 0$. По функциям $P(x, y, 0)$,$Q(x, y, 0)$ определим скалярную функцию

$$F(r) = \int_0^{2\pi} (cos\varphi \cdot P(rcos\varphi, rsin\varphi, 0) + sin\varphi \cdot Q(rcos\varphi, rsin\varphi, 0))d\varphi. \tag{2}$$

Для исследования вопроса о существовании циклов системы (1) отправным пунктом для авторов послужила классическая теорема Л.С. Понтрягина [1], которая сформулирована при предположении аналитичности функций $P(x, y, \mu)$,$Q(x, y, \mu)$ по совокупности переменных (x, y, μ) [2, стр. 214]:

Теорема [1,2]. *Если для некоторого $\rho = \rho_0$ выполняются условия $F(\rho_0) = 0$, $F^{'}(\rho_0) \neq 0$, то существуют числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что:*
а) для любого μ, $|\mu| < \delta$, система (1) имеет в ε - окрестности кривой $x^2 + y^2 = \rho_0$ один и только один предельный цикл, причем при $\mu \to 0$ он стягивается к окружности $x^2 + y^2 = \rho_0$ (являющейся траекторией системы (1) при $\mu = 0$);
б) этот предельный цикл является грубым предельным циклом, устойчивым, когда $\mu \cdot F^{'}(\rho_0) < 0$, и неустойчивым когда $\mu \cdot F^{'}(\rho_0) > 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РТ (проект № 0117TJ00807).

Нуров Исхокбой Джумаевич, д.ф.-м.н., профессор, НИИ ТНУ (Душанбе,Таджикистан); Nurov Iskhokboi Jumaevich (Scientific Research Institute, TNU, Tajikistan)

Шарифзода Зебонисо Иброхим, аспирант ТНУ (Душанбе, Таджикистан); Sharifzoda Zeboniso Ibrohim (post-graduate TNU, Tajikistan)

Функция (2) определена и непрерывна, если функции $P(x, y, \mu)$, $Q(x, y, \mu)$ лишь непрерывны по совокупности переменных. Но это условие не гарантирует дифференцируемости функции $F(r)$. В связи с этим возникает вопрос: как сформулировать утверждение, содержащее аналог теоремы Л.С.Понтрягина или аналог какой либо ее части для случая непрерывных функций $P(x, y, \mu)$, $Q(x, y, \mu)$?

В настоящей работе сделано попытка ответить на сформулированный вопрос и получены теоремы существования цикла у системы в условиях непрерывности функций $P(x, y, \mu)$, $Q(x, y, \mu)$ в терминах самой функции $F(r)$. А именно, справедливы следующие теоремы.

Теорема А. *Пусть* $\rho_0 > 0$ *- решение уравнения* $F(\rho) = 0$ *и в окрестности точки* ρ_0 $[\rho_0 - \varepsilon_0, \rho_0 + \varepsilon_0]$, $\rho_0 - \varepsilon_0 > 0$ *функция* $F(\rho) \neq 0$ *при* $\rho \neq \rho_0$, *причем значения функции* $F(\rho)$ *меняют знак при переходе через точку* ρ_0. *Тогда система (1) при достаточно малых значениях* μ *имеет периодическое решение* $(x(t, \mu), y(t, \mu))$, *удовлетворяющее условию* $|\sqrt{x^2(t, \mu) + y^2(t, \mu)} - \rho_0| < \varepsilon_0$.

Теорема Б. *Пусть существуют числа* $0 < \rho_1 < \rho_2$ *такие, что* $F(\rho_2) \cdot F(\rho_1) < 0$. *Тогда система (1) при достаточно малых значениях* μ *имеет периодическое решение* $(x(t, \mu), y(t, \mu))$, *удовлетворяющее условию* $\rho_1 < \sqrt{x^2(t, \mu) + y^2(t, \mu)} < \rho_2$.

Литература

1. *Pontryagin L.S.* Uber Auto Schwingungssysteme, die den Hamiltonschen nahelegen. -Phys. Zeitschrift der Sowjetunion,(1934) t. 6, h. 1-2.

2. *Баутин Н.Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. -М.: Наука, 1976, -496 с.

3. *Мухамадиев Э.М.* К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уранений. -ДАН СССР, 1970, т. 194, №3, с. 510-513.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

Орипов Т.С.

УДК 517.956

В некоторых работах [1- 2], были изучены различные типы переопределённые системы уравнений в частных производных первого и высшего порядка с регулярными и сингулярными правыми частями. Учитывая их условия совместности, и тождественного выполнения, многообразия решений были найдены определённым формулами.

Keywords:

В предлагаемом сообщении рассматриваются переопределённые системы уравнений второго порядка вида:

$$\begin{cases} x^n \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_1(x,y,z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_1(x,y,z) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^m, \\ y^n \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial C \partial x} = a_2(x,y,z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_2(x,y,z) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^m, \\ z^n \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = a_3(x,y,z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_3(x,y,z) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^m. \end{cases} \tag{1}$$

По аналогии с системой (1) можно рассматривать и системы уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_1(x,y,z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \\ z^n \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial C \partial x} = a_2(x,y,z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_1(x,y,z) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^m, \\ x^n \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = a_3(x,y,z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_2(x,y,z) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^m, \end{cases} \tag{2}$$

а также

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_1(x,y,z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad x^n \frac{\partial^2 u}{\partial C \partial x} = a_2(x,y,z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \\ y^n \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = a_3(x,y,z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + f_2(x,y,z) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^m, \end{cases} \tag{3}$$

где все функции $a_i(x,y,z)$, и $f_i(x,y,z)$, $j = 1,2,3$ заданы в параллелепипеде Π_3: $0 \le |x|, |y|, |z| \le r_k$, $(k = 1,2,3$ a m, n - положительные произвольные вещественные числа. Поскольку в начале координат, а также по поверхностям вырождений вида $_1 = \{(x,y,z) |\, x = 0\}$, $_2 = \{ |\, y = 0\}$,$_3 = \{ |\, z = 0\}$ задачу Коши ставить нельзя, то при этом получаем некоторые частные решения системы (1). Поэтому в системе (1) начальные условия, либо задачи Коши нужно ставить по следующим формулам

$$u = u_0 \text{ при } x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,\ (x_0, y_0, z_0 \neq 0). \tag{4}$$

В системе (1) делая замену вида $\frac{\partial u}{\partial x} = V$, $V = V(x.y.z)$, преобразуем ее к следующему виду

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{a_1(x,y,z)}{x^n} \cdot V + \frac{f_1(x,y,z)}{x^n} \cdot V^n, \\ \frac{\partial V}{\partial C} = \frac{a_2(x,y,z)}{y^n} \cdot V + \frac{f_2(x,y,z)}{y^n} \cdot V^n, \\ \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{a_3(x,y,z)}{z^n} \cdot V + \frac{f_3(x,y,z)}{z^n} \cdot V^n. \end{cases}$$

Условием совместности $P_j(x,y,z) \cdot V + Q_j(x,y,z) \cdot V^k = 0, \quad (j = 1,\ 2\ ,3)..$

Орипов Т.С. (Душанбе, Тадж. Техн. Унив. им. С.Осими)

Если в условии совместности системы (1) выполняется взаимосвязи функции

$$a_2(x,y,z) = y^n \left[\alpha_1(y,z) + A'_{1\,y}\right], A(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t,y,z)}{t^n} dt, a_3(.) =$$

$$= z^n \left[\alpha_2(y,z) + A'_{1\,z}\right] .$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x} = \frac{a_1(x,y,z)}{x^n}, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial y} = \alpha_1(y,z) + A'_{1\,y}(x,y,z), \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial z} = \alpha_2(y,z) + A'_{1\,z}(x,y,z), \tag{5}$$

то она разрешима, и многообразия ее решений определяется формулой

$$u(x,y,z) = \psi(y,z) + \left[\int_x^1 \exp\left\{\omega_1(t,y,z)\cdot\left[C + (1-k)[\omega_2(x,y,z)]^{1/\,(1-k)}\right]\right\} dt\right]. \tag{6}$$

Причём, в этой формуле $\omega_1(x,y,z)$ – решением системой (5), а $\omega_2(x,y,z)$ – определяется через интегральные представления функции $f_k(x,y,z)$. Тогда система (1) разрешима явно и многообразия ее решений, определяется через одно произвольной функции двух независимых переменных, и одно произвольное постоянное, представляющиеся формулой (6), непрерывной при значений порядка $0 \le n < 1$ во всей области $\Pi_3^{(0)}$, а в случаи $n \ge 1$ имеющий на линии особых поверхностей соответственно логарифмическую особенность, и особенности порядка (n-1).

Относительно систем (2) и (3) отметим, что учитывая одного из их коэффициентов как данной непрерывной функцией, легко определяем, что другие коэффициенты систем выражаются через данной функции, их особенностей устраняются, и многообразия решений данных систем находятся как непрерывной функций определённой формулой.

Литература

1. *Михайлов Л.Г., Орипов Т.С.* Формулы представления решений систем уравнений в полных дифференциалах второго порядка с сингулярными линиями.// Вестник Таджикского Национального Университета.- Душанбе, 2005 г., № 2, с. 83-85.

2. *Орипов Т.С.* Об одном классе систем уравнений в полных дифференциалах второго порядка с сингулярными коэффициентами. //Труды Таджикского технического университета.- Душанбе, 2013 г., № 4, с. 6-9.

"КВАНТОВАНИЕ"ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ КИМУРЫ H^{4+1}

В.А. Павленко
PVA100186@mail.ru, petrov01@gmail.com

УДК 517.958

Ищутся совместные решения двух временных уравнений Шредингера. Эти уравнения определяются гамильтонианами $H^{4+1}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ гамильтоновой системы H^{4+1}. Найденные решения явно выражаются через решения линейных систем ОДУ, условием совместности которых является гамильтонова система H^{4+1}.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, гамильтонова система, условие совместности, дифференциальные уравнения

"Quantization" Hamiltone system of Kimura H^{4+1}

We find simultaneous solutions of two analogues of the non-stationary Schrodinger equations. These equations are defined by the Hamiltonians $H^{4+1}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$ of Hamiltone system H^{4+1}. Found equations are explicity expressed in terms of solutions of linear systems of ordinary differential equations, the compatibility condition of which is the H^{4+1}.

Keywords: Schrodinger equation, Hamiltone system, compatibility condition, differential equations

В данной работе рассматриваем нелинейные уравнения Шредингера (НУШ)

$$ip_t + p_{xx} - 8p^2q, \quad iq_t - q_{xx} + 8pq^2 = 0.$$

Рассматриваются также системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$i\beta q_{xxx} - 8tq_{xx} + 64tpq^2 - 24i\beta pqq_x - 4iq - 4ixq_x + 8i\gamma q = 0$$

$$i\beta p_{xxx} + 8tp_{xx} - 64tp^2q - 24i\beta pqp_x - 4ip - 4ixp_x - 8i\gamma q = 0$$

В данной работе мы строим явные решения НУШ через гамильтонианы гамильтоновой системы H^{4+1}. Однако, мы только начали выптсывать решения таких уравнений, которые задаются гамильтонианами Кимуры. Мы начали с гамильтониана $H^{1+1+1+2}$. Но в работе Кимуры имеются еше имметя целый ряд уравнений, которые задаются другими гамильтонианами Кимуры. Кимура выписал все гамильтонианы в своей работе в 1986 году. Смотри статью [1]. Часть из них рассмотрена и изучена Сулеймановым Б.И. Смотри статью [2]. Часть еще только предстоит изучить. Эти результаты будут обсуждаться в последующих работах.

Литература

1. *Kimura.* Annali di Matem. pura et appl. // IV. 1989. V. 155. No.1. P. 25.
2. *Новиков Д.П., Сулейманов Б.И.* // ТМФ. 2016. Т. 187. №1. С.39

Павленко Виктор Александрович, к.ф.-м.н., доцент, БашГАУ, БашГУ (Уфа, Россия); Viktor Pavlenko (Bashkir State Agrarian University, Bashkir State University, Ufa, Russia)

МНОГООБРАЗИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ ПЯТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Р.Пиров, Ф.Ш.Рахимзода

УДК 517.956

Рассматривается класс нелинейных систем с тремя неизвестными функциями. Получены явные условия совместности, обеспечивающие однозначную разрешимость задач с начальными данными.

Ключевые слова: условия совместности, переопределенные системы, многообразия решений.

THE RESEARCH OF ISSUES OF JOINTNESS AND THE MANIFOLDS OF SOLUTIONS OF A CLASS OF NONLINEAR OVERDETERMINED SYSTEMS OF FIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THREE UNKNOWN FUNCTIONS IN SPACE

A class of nonlinear systems with three unknown functions is considered. Explicit compatibility conditions are obtained that provide unambiguous solvability of problems with initial data.

Keywords: overdetermined systems, compatibility condition, manifold solutions.

В монографии Э. Гурса [1] изучались в основном переопределенные системы первого порядка с одной неизвестной функцией. Начиная с 1970 г., классы систем с одной, двумя и более неизвестными функциями стали изучаться в работах академика Л. Г. Михайлова и его учеников. В этих же работах изучались квазилинейные и нелинейные системы с несколькими неизвестными, как на плоскости. В настоящей работе, по сути являющееся продолжением [2, см. §5; 3-4], рассматривается система вида

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x, U_y, V_x = f^i(x,y,z;U,V,W), i=1,3, \\ \alpha^k(x,y,z)\cdot V_y + \beta^k(x,y,z)\cdot W_y = f^k(x,y,z;U,V,W,V_z), k=4,5, \end{array} \right. \tag{1}$$

где коэффициенты и неизвестные $U(x,y,z), W(x,y,z) \in C^3(\Pi_0)$, а $V(x,y,z) \in C^4(\Pi_0)$; здесь $\Pi_0 = \{(x,y,z) : |x-x_0| \le a, |y-y_0| \le a, |z-z_0| \le a\}$ при некотором $a > 0$. Отметим что, решение ищется в классе $C^4(\Pi_0)$.

Пусть дана система (1). Через $\Pi = \Pi(a;b)$ обозначим прямоугольник в пространстве R^7, заданный неравенствами: $|x-x_0| \le a$, $|y-y_0| \le a$, $|z-z_0| \le a$, $|U-U^0| \le b$, $|V-V^0| \le b$, $|W-W^0| \le b$, $|V_y-V_y^0| \le b$. Индексом "нолик" будем снабжать значения тех или иных функций в точке (x_0,y_0,z_0). Пусть $f^i \in C^3(\Pi), i=\overline{1,5}$, тогда в силу предположения $\Delta_1 = \alpha^4\beta^5 - \alpha^5\beta^4 \ne 0$ из (1_4) и (1_5) получим

$$V_y, W_y = \widetilde{f}^k(x,y,z;U,V,W,V_z), k=4,5, \quad \Delta_1\cdot\widetilde{f}^4 = \beta^5 f^4 - \beta^4 f^5,$$

Р.Пиров Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни

Ф.Ш.Рахимзода Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни

$$\Delta_1 \cdot \widetilde{f}^5 = \alpha^4 f^5 - \alpha^5 f^4. \tag{2}$$

Равенство смешанных производных (р.с.п.) $D_y(1_1) = D_x(1_2)$ (т.е. $U_{xy} = U_{yx}$) при выполнении условия $f^2_W \neq 0$ сразу же приводит к уравнению

$$W_x = \widetilde{f}^6(x, y, z; U, V, W, V_z),$$

$$f^2_W \widetilde{f}^6 = f^1_y - f^2_x + f^1_U \cdot f^2 - f^2_U \cdot f^1 + f^1_V \cdot \widetilde{f}^4 - f^2_V \cdot f^3 + f^1_W \cdot \widetilde{f}^5. \tag{3}$$

В силу сделанных предположений, проделанных несложными преобразованиями и осуществления замены приходим к эквивалентной системе

$$\begin{cases} U_x, U_y, V_x = f^i(x, y, z; U, V, W), i = \overline{1,3}, V_z = R, \\ V_y, W_y = \widetilde{f}^k(x, y, z; U, V, W, R), k = 4, 5, W_x = \widetilde{f}^6(x, y, z; U, V, W, R) \end{cases} \tag{4}$$

Что касается р.с.п. $D_y f^3 = D_x \widetilde{f}^4 \quad (V_{xy} = V_{yx})$ и $D_y \widetilde{f}^5 = D_x \widetilde{f}^6 \quad (W_{xy} = W_{yx})$, то они при выполнении условий $\widetilde{f}^4_R \neq 0$ и $\widetilde{f}^6_R \neq 0$ приводят к уравнениям

$$R_x, R_y = \widetilde{f}^j(x, y, z; U, V, W, R), j = 7, 8, \tag{5}$$

где

$$\widetilde{f}^4_R \cdot \widetilde{f}^7 = f^3_y - \widetilde{f}^4_x + f^3_U \cdot f^2 - \widetilde{f}^4_U \cdot f^1 + f^3_V \cdot \widetilde{f}^4 + f^3_W \cdot \widetilde{f}^5 - \widetilde{f}^4_W \cdot \widetilde{f}^6. \tag{6}$$

$$\widetilde{f}^6_R \cdot \widetilde{f}^8 = \widetilde{f}^5_x - \widetilde{f}^6_y + \widetilde{f}^6_U \cdot f^1 - \widetilde{f}^6_U \cdot f^2 + \widetilde{f}^5_V \cdot f^3 - \widetilde{f}^6_V \cdot \widetilde{f}^4 + \widetilde{f}^5_W \cdot \widetilde{f}^6 + \widetilde{f}^5_R \cdot \widetilde{f}^7, \tag{7}$$

а р.с.п. $D_z f^3 = R_x \quad (V_{xz} = V_{zx})$ и $D_z \widetilde{f}^4 = R_y \quad (V_{yz} = V_{zy})$ дают неразрешенные уравнения

$$f^3_U \cdot U_z + f^3_W \cdot W_z = \widetilde{f}^7 - f^3_z - f^3_V \cdot R, \quad \widetilde{f}^4_U \cdot U_z + \widetilde{f}^4_W \cdot W_z + \widetilde{f}^4_R \cdot R_z = \widetilde{f}^8 - \widetilde{f}^4_z - \widetilde{f}^4_V \cdot R \tag{8}$$

из которых при $\Delta_2 = f^3_U \cdot \widetilde{f}^4_W - \widetilde{f}^4_U \cdot f^3_W \equiv 0$ R_z находится в виде

$$R_z = \widetilde{f}^9(x, y, z; U, V, W, R), f^3_U \cdot f^4_U \cdot \widetilde{f}^9 = \widetilde{f}^4_W(\widetilde{f}^7 - f^3_z - f^3_V \cdot R) - f^3_W(\widetilde{f}^8 - \widetilde{f}^4_z - \widetilde{f}^4_V \cdot R) \tag{9}$$

Заметим, что U_z и W_z при $\Delta_3 = \widetilde{f}^7_U \cdot \widetilde{f}^8_W - \widetilde{f}^8_U \cdot \widetilde{f}^7_W \neq 0$ можно определит из р.с.п. $D_z \widetilde{f}^7 = D_x \widetilde{f}^9 \quad (R_{xz} - R_{zx})$ и $(R_{xz} = R_{zx})$:

$$U_z, W_z = \widetilde{f}^l(x, y, z; U, V, W, R), l = 10, 11,$$

$$\Delta_3 \cdot \widetilde{f}^{10} = \widetilde{f}^8_W(L_1) - \widetilde{f}^7_W(L_2), \Delta_3 \cdot \widetilde{f}^{11} = \widetilde{f}^7_U(L_2) - \widetilde{f}^8_U(L_1),$$

$$(L_1 \equiv \widetilde{f}^4_x - \widetilde{f}^7_z + \widetilde{f}^9_U \cdot f^1 + \widetilde{f}^9_W \cdot f^3 - \widetilde{f}^7_V \cdot R + \widetilde{f}^9_W \cdot \widetilde{f}^6 - \widetilde{f}^7_W \cdot \widetilde{f}^9 - \widetilde{f}^9_R \cdot \widetilde{f}^7),$$

$$(L_2 \equiv \widetilde{f}^9_y - \widetilde{f}^8_z + \widetilde{f}^9_U \cdot f^1 + \widetilde{f}^9_V \cdot \widetilde{f}^4 - \widetilde{f}^8 \cdot R + \widetilde{f}^9_W \cdot \widetilde{f}^5 + \widetilde{f}^9_R \cdot \widetilde{f}^8 - \widetilde{f}^8_R \cdot \widetilde{f}^9), \tag{10}$$

Присоединяя (5), (9) и (12) к (4), получим эквивалентную к (1) систему в полных дифференциалах (п.д.-система) относительно четырех неизвестных функциям U, V, W и $R (\equiv V_z)$

$$\begin{cases} U_x, U_y = f^i(x, y, z; U, V, W), i = 1, 2, \quad U_z = \widetilde{f}^{10}(x, y, z; U, V, W, R), \\ V_x = f^3(x, y, z; U, V, W), \quad V_y = \widetilde{f}^4(x, y, z; U, V, W, R), \quad V_z = R(x, y, z), \\ W_y, W_x, W_z = \widetilde{f}^k(x, y, z; U, V, W, R), k = 5; 6; 11, \\ R_x, R_y, R_z = \widetilde{f}^j(x, y, z; U, V, W, R), j = 7; 8; 9, \end{cases} \tag{11}$$

Условия полной интегрируемости (у.п.и.) этой системы является следующие:

$$
\begin{gathered}
H^1(x,y,z;U,V,W,R) = f^3_U \cdot \widetilde{f}^4_W \cdot \widetilde{f}^{10} + f^3_U \cdot \widetilde{f}^4_W \cdot \widetilde{f}^{11} - \widetilde{f}^4_W \cdot (\widetilde{f}^7 - f^3_z - f^3_V \cdot R) \equiv 0, \\
H^2(x,y,z;U,V,W,R) = f^3_y - f^1_x + f^3_U \cdot f^2 - \widetilde{f}^4_W \cdot f^3 + f^3_V \cdot \widetilde{f}^4 - \widetilde{f}^4_V \cdot f^3 + f^3_W \cdot \widetilde{f}^5 - \\
- \widetilde{f}^4_W \cdot \widetilde{f}^6 - \widetilde{f}^4_R \cdot \widetilde{f}^7 - f^3_R \cdot \widetilde{f}^8 \equiv 0, \\
H^3(x,y,z;U,V,W,R) = \widetilde{f}^4_x - \widetilde{f}^7_z + \widetilde{f}^9_U \cdot f^1 + \widetilde{f}^9_W \cdot f^3 - \widetilde{f}^7_V \cdot R + \widetilde{f}^9_W \cdot \widetilde{f}^6 - \widetilde{f}^7_R \cdot \widetilde{f}^9 - \quad (12) \\
- \widetilde{f}^9_R \cdot \widetilde{f}^7 - \widetilde{f}^7_U \cdot \widetilde{f}^{10} - \widetilde{f}^7_W \cdot \widetilde{f}^{11} \equiv 0 \\
H^4(x,y,z;U,V,W,R) = \widetilde{f}^9_y - \widetilde{f}^8_z + \widetilde{f}^9_U \cdot f^1 + \widetilde{f}^9_U \cdot f^4 - \widetilde{f}^8_V \cdot R + \widetilde{f}^9_W \cdot \widetilde{f}^5 + \widetilde{f}^9_R \cdot \widetilde{f}^8 - \\
- \widetilde{f}^8_R \cdot \widetilde{f}^9 - \widetilde{f}^8_U \cdot \widetilde{f}^{10} - \widetilde{f}^8_W \cdot \widetilde{f}^{11} \equiv 0.
\end{gathered}
$$

Теорема 1. *Пусть в системе (1)* $f^i \in C^3(\Pi)$, $f^2_W \neq 0$, $\widetilde{f}^4_R \neq 0$, $\widetilde{f}^6_R \neq 0$, $\Delta_1 = \alpha^4\beta^5 - \alpha^5\beta^4 \neq \ \neq 0$, $\Delta_3 = \widetilde{f}^7_U \cdot \widetilde{f}^8_W - \widetilde{f}^8_U \cdot \widetilde{f}^7_W \neq 0$, $\Delta_2 \equiv f^3_U \cdot \widetilde{f}^4_W - \widetilde{f}^4_U \cdot f^3_W \equiv 0$. *Если тождественно относительно* $U, V, W, R \quad (\equiv V_z)$ *выполняются условия (12) и* $\alpha < min(a, b/M), M = max|f^i|$, *то на* $\Pi(\alpha, b)$ *задача (1),*

$$[U]_0 = c_1, [V]_0 = c_2, [W]_0 = c_3, [V_z]_0 = c_4 \tag{13}$$

в классе $C^4(\Pi_0)$ *разрешима единственным образом.*

Литература

1. *Goursat E.* Lecons sur l'inteqration des equations aux derivees partielles de premier ordre. Paris - 1921 - 454 p.

2. *Михайлов Л.Г.* Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. - Душанбе: Дониш, 1986, с.116.

3. *Михайлов Л.Г., Пиров Р.* Об условиях совместности и многообразиях решений некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных с тремя неизвестными функциями. - ДАН России, 2013, т. 451, №3, с. 251-254.

4. *Пиров Р.* Об условиях совместности и многообразиях решений некоторых классов переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. - Уфимский математический журнал, 2016, т.8, №2, с.59-66.

РАСЧЕТ УПРУГОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОДОЛЬНО-КРУТИЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Пья Пьо Аунг, Ю.В. Григорьев
pyaephyo88@mail.ru, grigoryev52@mail.ru

УДК 531.8:519.2

В данной работе исследовано напряженно-деформированное состояние (НДС) продольно-крутильного преобразователя для ультразвуковых медицинских инструментов. Методом последовательных нагружений получена упругая характеристика системы, проанализирована зависимость угла поворота на выходе от продольного перемещения начального сечения. В результате расчета определены размеры продольно-крутильного преобразователя с наилучшей характеристикой.

Ключевые слова: продольно-крутильный преобразователь, метод последовательных нагружений, упругая характеристика

Calculation of elastic characteristics of the longitudinal torsional transducer at large displacements

In this paper, the use of a longitudinal torsional transducer for ultrasonic medical instruments is investigated. The elastic characteristic of the system is obtained by the method of successive loads, the dependence of the angle of rotation at the outlet on the longitudinal displacement of the initial section is analyzed. As a result of calculation, the sizes of the longitudinal torsional transducer with the best characteristic are defined.

Keywords: longitudinal-torsional transducer, method of successive loads, elastic characteristic

Ультразвуковые медицинские инструменты (УЗМИ) широко используются в хирургии, стоматологии и других областях лечебной практики. Источником механических высокочастотных колебаний традиционно являются устройства магнитострикционного либо пьезоэлектрического действия. Такие устройства способны создавать продольные вибрации [1]. Однако наряду с инструментами продольного действия хорошо себя зарекомендовали УЗМИ, использующие крутильные колебания режущего окончания [2]. Для преобразования продольных колебаний источника в крутильные колебания волновода УЗМИ применяется продольно-крутильный преобразователь (ПКП).

Предлагается преобразователь на основе многозаходного винтового упругого элемента. Такая конструкция позволяет регулировать амплитуду угла поворота на выходе ПКП при постоянной амплитуде продольных перемещений, задаваемой источником. Для этого необходимо предварительно деформировать ПКП на требуемую величину в соответствии с упругой характеристикой. Расчёт этой нелинейной упругой характеристики выполнен методом последовательных нагружений. За основу приняты известные уравнения механики стержней [3]:

Пья Пьо Аунг, Аспирант, МГТУ имени Баумана (Москва, Россия); Pyae Phyo Aung (Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia)

Григорьев Юрий Всеволодович, к.т.н., доцент, МГТУ имени Баумана (Москва, Россия); Grigoryev Yuri Vsevolodovich (Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia)

$$\frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \varepsilon} - Q_{20}\Delta\chi_3 + Q_{30}\Delta\chi_2 - \chi_{30}\Delta Q_2 + \chi_{20}\Delta Q_3 = 0;\ \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varepsilon} + \chi_{20}\vartheta_3 - \chi_{30}\vartheta_2 - \Delta\chi_1 = 0;$$

$$\frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \varepsilon} - Q_{30}\Delta\chi_1 + Q_{10}\Delta\chi_3 - \chi_{10}\Delta Q_3 + \chi_{30}\Delta Q_1 = 0;\ \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varepsilon} + \chi_{30}\vartheta_1 - \chi_{10}\vartheta_3 - \Delta\chi_2 = 0;$$

$$\frac{\partial \Delta Q_3}{\partial \varepsilon} - Q_{10}\Delta\chi_2 + Q_{20}\Delta\chi_1 - \chi_{20}\Delta Q_1 + \chi_{10}\Delta Q_2 = 0;\ \frac{\partial \vartheta_3}{\partial \varepsilon} + \chi_{10}\vartheta_2 - \chi_{20}\vartheta_1 - \Delta\chi_3 = 0;$$

$$\frac{\partial \Delta M_1}{\partial \varepsilon} + \chi_{20}\Delta M_3 - \chi_{30}\Delta M_2 + M_{30}\Delta\chi_2 - M_{20}\Delta\chi_3 = 0;\ \frac{\partial u_1}{\partial \varepsilon} + \chi_{20}u_3 - \chi_{30}u_2 = 0;$$

$$\frac{\partial \Delta M_2}{\partial \varepsilon} + \chi_{30}\Delta M_1 - \chi_{10}\Delta M_3 + M_{10}\Delta\chi_3 - M_{30}\Delta\chi_1 - \Delta Q_3 = 0;\ \frac{\partial u_2}{\partial \varepsilon} + \chi_{30}u_1 - \chi_{10}u_3 - \vartheta_3 = 0;$$

$$\frac{\partial \Delta M_3}{\partial \varepsilon} + \chi_{10}\Delta M_2 - \chi_{20}\Delta M_1 + M_{20}\Delta\chi_1 - M_{10}\Delta\chi_2 - \Delta Q_2 = 0;\ \frac{\partial u_3}{\partial \varepsilon} + \chi_{10}u_2 - \chi_{20}u_1 - \vartheta_2 = 0;$$

На каждом малом шаге эта линеаризованная краевая задача численно решалась методом начальных параметров [3]. Целью исследования является определение размеров многозаходного винтового упругого ПКП, обеспечивающих максимальное усиление сигнала. Наличие предварительно полученной характеристики ПКП позволяет создавать более универсальные многорежимные медицинские инструменты, позволяющие хирургу устанавливать требуемую амплитуду крутильных колебаний режущего окончания непосредственно в ходе операции.

Литература

1. *Агранат Б. А., Дубровин М. Н., Хавский Н. Н.* Основы физики и техники ультразвука: Учебное пособие для вузов. — М.: Высшая школа, 1987. — 352 с

2. *Z. Zhu, X. Zhou, R. Wang, Q. Liu* Compliant linear-rotation motion transduction element based on novel spatial helical flexure hinge, Mechanism and Machine Theory, Vol. 92(2015), 330-337.

3. *Светлицкий В.А.* Механика стержней: Учебное пособие для вузов. Ч. 1. Статика. — М.: Высшая школа, 1987. — 320 с.

ОБ ОБОБЩЕННОМ ОПЕРАТОРЕ ДАНКЛА

А.И. Рахимова
alsu1405@mail.ru

УДК 517.53

В работе изучается обобщенный оператор Данкла в пространстве целых функций. Были исследованы различные свойства этого оператора и вычислены его собственные функции.

Ключевые слова: обобщенный оператор Данкла, оператор обобщенного дифференцирования, целая функция, собственная функция

About the generalized Dunkl operator

The work studies the generalized Dunkl operator in the space of entire functions. Various properties of this operator have been investigated and its eigenfunctions have been calculated.

Keywords: generalized Dunkl operator, operator of the generalized differentiation, entire function, eigenfunction

Рассмотрим $H(\mathbb{C})$ — пространство целых функций, $H^*(\mathbb{C})$ — сопряженное к нему пространство. Введем в пространстве $H(\mathbb{C})$ обобщенный оператор Данкла

$$\Lambda f(z) = f'(z) + \frac{c}{z}\sum_{k=o}^{n-1} \alpha_k f(\alpha_k z),\ z \in \mathbb{C},\ f(z) \in H(\mathbb{C}),$$

где его коэффициенты имеют вид

$$\alpha_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}},\ k = \overline{(0; n-1)},$$

n — фиксированное натуральное число, причем $n \geq 2$ [1], [2]. В дальнейшем положим, что $c = 1$.

Теорема 1. *Обобщенный оператор Данкла отображает пространство $H(\mathbb{C})$ в пространство $H(\mathbb{C})$. Он является частным случаем оператора Гельфонда-Леонтьева.*

Теорема 2. *Этот оператор имеет собственную функцию*

$$y(z) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{p(1)p(2)...p(m)},$$

где его коэффициенты определяются по формуле

$$p(m) = m + \sum_{j=1}^{n-1} e^{\frac{2\pi i j(m+1)}{n}}.$$

Ее порядок и тип имеют вид $\rho = 1$, $\sigma = 1$.

Литература

1. *Напалков В.В., Напалков В.В.(мл.)* Операторы Данкла как операторы свертки // Доклады Академии наук, **423**:3 (2008), 300–302.

Рахимова Алсу Ильдаровна, аспирант, БашГУ (Уфа, Россия); Alsu Rakhimova, post-graduate student, Bashkir State University (Ufa, Russia)

2. *Карамов И.И., Напалков В.В.* Обобщенный оператор Данкла // Уфимский математический журнал, **6**:1 (2014), 59–68.

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М.Р. Рахимова
rakhimova.mahsuda@mail.ru

УДК 517.95

В докладе приводятся результаты исследований относительно задачи о решениях, определенных и ограниченных в первой четверти плоскости, переопределённых систем уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами. Найдены достаточные условия существования указанных решений. Эти условия выписываются через коэффициенты и правые части системы.

Ключевые слова: переопределенная система уравнений в частных производных, сингулярные коэффициенты, ограниченные решения.

Bounded solutions of overdetermined systems of partial differential equations with singular coefficients

The report translates the results of research on the task about bounded solutions in the first quarter of the plane overdetermined systems partial differential equations with singular coefficients. Sufficient conditions for the existence of these solutions are found. These conditions are written out in terms of the coefficients and the right-hand sides of the system.

Keywords: overdetermined system of partial differential equations, singular coefficients, bounded solutions.

В докладе для переопределённых систем двух уравнений в частных производных первого порядка с сингулярными коэффициентами рассматривается задача о существовании решений, принадлежащих пространству $C(D)$-непрерывных и ограниченных в области D функций. Эта задача исследуется методами работ [1], [2].

В области D рассмотрим переопределенную систему дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{a(x,y)}{xy}u + f(x,y), \\ u_y = \dfrac{b(x,y)}{xy}u + g(x,y). \end{cases} \tag{1}$$

Через P_N обозначим множество непрерывных в D функций $\nu(x,y)$, удовлетворяющих условию $|\nu(x,y)| \leq K(1 + x^N + y^N), \quad (x,y) \in D$, где $K = K(\nu) > 0, N \in \{0, 1, ...\}$.

Рахимова Махсуда Аюбовна, старший преподаватель, ТГУПБП (Худжанд, Таджикистан); Rakhimova Mahsuda (Tajik State University of law, business and politics, Khujand, Tajikistan)

Будем предполагать, что функции a, b принадлежат $C(D)$, f, g принадлежат P_N и существуют частные производные a_y, b_x, f_y, g_x, принадлежащие $L_{1,loc}(D)$.

Необходимыми и достаточными условиями полной разрешимости системы (1) являются равенства

$$y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{y}\right) = x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{x}\right), \quad f_y - g_x + \left(\frac{a}{xy}\right)g - \left(\frac{b}{xy}\right)f = 0 \quad \forall (x,y) \in D. \quad (2)$$

Пусть $S = \{(x,y) : x > y > 0\}$ и $\Omega = \{(t,\xi,\eta) : t > 0, (\xi,\eta) \in S\}$. По коэффициентам системы (1) определим следующие функции

$$\alpha(y,\xi,\eta) = \frac{1}{\xi - \eta}\int\limits_{\eta}^{\xi} \frac{a(t,y)}{t}dt, \qquad \beta(x,\xi,\eta) = \frac{1}{\xi - \eta}\int\limits_{\eta}^{\xi} \frac{b(x,s)}{s}ds, (\xi,\eta) \in S.$$

Предположим, что выполняются условия

$$|a(x,\xi) - a(x,\eta)| \le a_0(x)|\xi - \eta|^{\nu_1} \quad \forall (\xi,\eta) \in S, \quad 0 < \nu_1 < 1, \quad (3)$$

$$|b(\xi,y) - b(\eta,y)| \le b_0(y)|\xi - \eta|^{\nu_2} \quad \forall (\xi,\eta) \in S, \quad 0 < \nu_2 < 1, \quad (4)$$

где $a_0(x)$ и $b_0(y)$ положительные функции такие, что $\dfrac{a_0(x)}{x}$ и $\dfrac{b_0(y)}{y}$ принадлежат пространству $L_{1,loc}(0,\infty)$.

Можно показать, что если выполняются условия (3) и (4) и функции $\alpha(y,\xi,\eta)$, $\beta(x,\xi,\eta)$ ограничены снизу, то существуют следующие нижние пределы $a_+ = \varliminf\limits_{\substack{\xi-\eta\to\infty \\ \xi>\eta>0}} \alpha(y,\xi,\eta)$ $\quad b_+ = \varliminf\limits_{\substack{\xi-\eta\to\infty \\ \xi>\eta>0}} \beta(x,\xi,\eta)$ и эти пределы не зависят от y и x соответственно.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (2) и (4). Пусть функция $\alpha(y,\xi,\eta)$ является ограниченной снизу в области Ω и функции f,g принадлежат классу P_N. Тогда при $a_+ > 0$ система (1) имеет единственное в классе $C(D)$ решение и это решение даётся формулой*

$$u(x,y) = -\int\limits_{x}^{\infty} f(t,y)e^{\frac{1}{y}\int\limits_{t}^{x}\frac{a(\xi,y)}{\xi}d\xi}dt.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (2) и (3). Пусть функция $\beta(x,\xi,\eta)$ является ограниченной снизу в области Ω и функции f,g принадлежат классу P_N. Тогда при $b_+ > 0$ система (1) имеет единственное в классе $C(D)$ решение и это решение даётся формулой*

$$u(x,y) = -\int\limits_{y}^{\infty} g(x,\eta)e^{\frac{1}{x}\int\limits_{\eta}^{y}\frac{b(x,\tau)}{\tau}d\tau}d\eta.$$

Литература

1. *Байзаев С., Рахимова М. А.* О необходимых и достаточных условиях существования ограниченных решений переопределенных систем уравнений с частными производными // Учёные записки ХГУ, серия естественные и экономические науки. — Худжанд: Нури маърифат, 2017. №3(42). 3 - 12.

2. *Рахимова М.А.* Полиномиальные решения переопределенных систем уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физ.-мат., хим., геол. и тех. наук. 2017. №4 (169). С. 35 - 39.

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМЫ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ С СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ

Саидов Б.Б., Шадманов М.Х.

УДК 517.956

В предлагаемой работе рассматривается одна система нелинейных уравнений в полных дифференциалах (п.д. - систем) функций трёх независимых переменных, с сингулярной точкой в трёхмерном пространстве. Учитывая взаимосвязи данных функций, определяется закономерность между данных функций, которые обеспечиваются тождественного выполнения условия совместности систем и ее решение найдётся определённой формулой.

Keywords:

1. Рассмотрим систему уравнение в полных дифференциалах вида.

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{a(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^n} h(\theta,u), \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{b(\rho,\varphi,\theta)}{\rho^{n-1}} h(\theta,u), \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = c(\rho,\varphi,\theta,u), \qquad (1)$$

где $a,b,c,h \in C^1(\bar{D} = D^{\pm}UL),\ u \in C^2(D_0)$.

Условиями совместности системы (1) будут:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{a}{\rho^n}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{b}{\rho^{n-1}}\right) \\ \frac{\partial c}{\partial \rho} + \frac{ah}{\rho^n}\frac{\partial c}{\partial u} - \frac{ac}{\rho^n}\frac{\partial h}{\partial u} - \frac{1}{\rho^k}\left(h\frac{\partial a}{\partial \theta} + a\frac{\partial h}{\partial \rho}\right) = 0 \\ \frac{\partial c}{\partial \varphi} + \frac{bh}{\rho^{n-1}}\frac{\partial c}{\partial u} - \frac{bc}{\rho^{n-1}}\frac{\partial h}{\partial u} - \frac{1}{\rho^n}\left(h\frac{\partial b}{\partial \theta} + b\frac{\partial h}{\partial \varphi}\right) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Поскольку систему (1) в точках линии вырождения $\rho = \rho_0$ интегрировать нельзя, поэтому учитывая аналоги работы Л.Г.Михайлова- [3], найдём непрерывное решение данной системы всюду в области, включая линии вырождения, и требуем, чтобы выполнялись условие леммы

Лемма. *Пусть в п.д.- системе (1) $a,b,c,h \in C^1(\bar{D} = D^{\pm}UL)$, $u \in C^2(D_0)$. Если в случаи ограниченности частные производные и по всем*

Саидов Б.Б. Душанбе, канд.ф.м.н., ст. преподаватель Таджикский Государственный Финансово-Экономический Университет

Шадманов М.Х. Душанбе, канд.ф.м.н., ст. преподаватель Таджикский Государственный Финансово-Экономический Университет

независимым переменным, существуют и равны к нулю следующие пределы:

$$\lim_{\rho\to 0}\left((\rho-\rho_0)^n\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=0, \lim_{\rho\to 0}\left(\rho-\rho_0)^{n-1}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=0, \lim_{\rho\to 0}\left(\rho-\rho_0)^{n-1}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0,$$

то необходимо $a(0,\varphi,\theta)=a_0=0,\ b(0,\varphi,\theta)=b_0=0,\ h(\theta,u)=h_0=0,\ c(0,\varphi,\theta,u)=c_0=0.$

При этом, существуют функций $u=h_1(\theta),\ u=h_2(\varphi,\theta)$*, которые возможно будут некоторыми частными, либо особыми решениями системы (1).*

Если хотя бы одна из этих функций удовлетворяет системе (1), то она будет некоторым ее частным либо особым решением. Заметим, что тождественное выполнение условий (2) можно рассматривать частично, либо в общем случае:
а) $a(\rho,\varphi,\theta)\equiv(\rho-\rho_0)^n\alpha(\varphi), b(\rho,\varphi,\theta)\equiv(\rho-\rho_0)^{n-1}\beta(\varphi), m=const,\ c=const.$

В этом случае полученное решение системы (1) во всей области $\bar{D}^{\pm}UL$ является непрерывным, и определяется формулой вида

$$u(\rho,\varphi,\theta)=S^{-1}\left\{C+A(\rho)+\lambda\ B(\varphi)+\lambda\ C(\theta)\right\}. \tag{3}$$

б) Пусть первое равенство в (2) выполняется. Тогда, интегрируя первую пару уравнений системы (1), аналогично п.1, получим:

$$H(\theta,u)=V(\theta)+\omega(\rho,\varphi,\theta),\quad \frac{\partial\omega}{\partial\rho}=\frac{a(\rho,\varphi,\theta)}{(\rho-\rho_0)^n},\quad \frac{\partial\omega}{\partial\rho}=\frac{b(\rho,\varphi,\theta)}{(\rho-\rho_0)^{n-1}}\quad ,$$

При этом, последние два равенства условий в (2) выполняются тождественно, если функция $c(\rho,\varphi,\theta;u)$ принимает следующий вид:

$$c(\rho,\varphi,\theta;u)=\left\{\frac{\partial\omega_0}{\partial\theta}-\frac{\partial H}{\partial\theta}+f\left[\theta;\ H(\theta,u)-\omega_0(\rho,\varphi,\theta)\right]\right\}\cdot h(\theta,u), H(\theta,u)=$$

$$=\int\limits_{u_0}^{u}\frac{d\varsigma}{h(\theta,\varsigma)}. \tag{4}$$

Результат интегрирования системы (1) с учетом значения функции $c(\rho,\varphi,\theta,u)$ вида (4), сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения (о.д.у.) вида:

$$\frac{dV}{d\theta}=f(\theta,V)\quad\text{или}\quad dV=f(\theta,V)d\theta, \tag{5}$$

где функция $f(\theta,V)$ определяется из формулы (4) и выражается через функции a,b,c,h. Интегрируя о.д.у. (5) найдём решение (5) в виде функции $V=V(C,\theta)$, и многообразие решений исходной системы в случае обратимости функции $H(\theta,u)$ по переменной u внутри данной области, принимает вид:

$$u^{+}(\rho,\varphi,\theta)=H^{-1}\left\{\theta;\ V(\theta,C)+\omega(\rho,\varphi,\theta)\right\}. \tag{6}$$

Если считать, что с учётом предыдущим условиям, на функции системы (1) $\rho\to\infty$, то решение вида (6) для системы (1), принимает вид

$$u^{-}(\rho,\varphi,\theta)=H^{-1}\left\{\theta;\ V(\theta,C)+\omega_1(\rho,\varphi,\theta)\right\},$$

$$\omega_1(\rho,\varphi,\theta)=\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{a(t,\varphi,\theta)}{(t-\rho_0)^n}dt+\frac{1}{(-\rho_0)^{n-1}}\int\limits_{\rho}^{2\pi}b(0,\tau,\theta)d\tau.$$

При этом в точках линии вырождения L – решение задачи имеет различного порядка особенности: при $n<1$ непрерывно, при $n=1$ имеет логарифмическую особенность, и в случаи $n>1$ – имеет особенности порядка $(n-1)$.

Литература

1. *Михайлов Л.Г., Бильман Б.М.* О некоторых системах уравнений с частными производными первого порядка –/ Л.Г. Михайлов, Б.М. Бильман // – Докл. АН Тадж. ССР,-1979- т.22 (№5)- с.88-90.

2. *Михайлов Л.Г.* Некоторые переопределённые системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями./Л.Г.Михайлов//–Душанбе,: Дониш, -1986-116.

3. *Михайлов Л.Г.* Об одном свойстве сингулярных дифференциальных уравнений. / Л.Г. Михайлов //- ДАН СССР-1991- т.321(№4)- с.681-686.

МАТРИЧНЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКЕ

И.М. Саитова

saitova.ilsiyar@gmail.com

УДК 544.431,517.926

Химическая кинетика или кинетика химических реакций - это раздел физикохимии, которая изучает закономерность химических реакций во времени, зависимость этой закономерности от внешних условий и механизм химических преобразований. Цель состоит в том, чтобы решить уравнение скорости химической реакции с использованием различных математических методов.

Ключевые слова: химическая кинетика, последовательная реакция, обратимость, скорость химической реакции.

Matrix method for solving equations in chemical kinetics

Chemical kinetics or kinetics of chemical reactions is a branch of physical chemistry that studies the regularity of chemical reactions over time, the dependence of this regularity on external conditions, and the mechanism of chemical transformations. The goal is to solve the equation of speed of a chemical reaction using various mathematical methods

Keywords: chemical kinetics, sequential reaction, reversibility, chemical reaction rate.

Химическая кинетика – это наука, изучающая химическую реакцию как процесс, протекающий во времени и по определённому механизму. Скорость химической реакции – производная от концентрации компонентов реакции a_i по времени $\frac{da_i}{dt}$.

Для решения задачи применяются основные понятия химической кинетики, рассмотрен основной постулат химической кинетики, обратимые,

Саитова Ильсияр Мусавировна,магистрант 2-го года обучения,БашГУ(Уфа,Россия); Saitova Ilsiyar Musavirovna (Bashkir State University,Ufa, Russia)

последовательные реакции. Рассмотрим последовательную реакцию с обратимостью во второй стадии. Дана реакция:

$$A \xrightarrow{k_1} B \leftrightarrows^{k_2}_{k_3} C$$

Где A, B, C - вещества реакции.

$a(t), b(t), c(t)-$ концентрации компонентов реакции.

k_1, k_2, k_3- константа скорости химической реакции.

$a(0) = 1, b(0) = 0, c(0) = 0-$ начальные условия.

$a(t) + b(t) + c(t) = 1-$ уравнение материального баланса.

Для приведенной реакции система кинетических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -k_1 a \\ \frac{db}{dt} = k_1 a - k_2 b + k_3 c \\ \frac{dc}{dt} = k_2 b - k_3 c \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим один из способов решения реакции - это матричный способ. Этот способ представлен в виде нахождения собственных значений, собственных векторов. Систему (1) можно изобразить матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{da}{dt} \\ \frac{db}{dt} \\ \frac{dc}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & k_3 \\ 0 & k_2 & -k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{2}$$

Составим характеристическое уравнение матрицы и найдем его корни $\det(A - \lambda E) = 0 : (-k_1 - \lambda)\left(\lambda^2 + (k_2 + k_3)\lambda\right) = 0$ Для этой матрицы получим собственные значения и собственные вектора такого типа:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -k_1 \\ \lambda_3 = -(k_2 + k_3) \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \left(0, \frac{k_3}{k_2}, 1\right) \\ \left(-\frac{k_2+k_3-k_1}{k_2}, \frac{k_3-k_1}{k_2}, 1\right) \\ (0, -1, 1) \end{cases} \tag{4}$$

Так как каждому корню характеристического уравнения соответствует решение $C_i v^i e^{\lambda_i t}$, где C_i -произвольная постоянная, v^i - собственный вектор матрицы, соответствующий λ_i, тогда получим:

$$\begin{cases} a = -\frac{k_2+k_3-k_1}{k_2} C_1 e^{-k_1 t} \\ b = \frac{k_3-k_1}{k_2} C_1 e^{-k_1 t} - C_2 e^{-(k_2+k_3)t} + \frac{k_2}{k_3} C_3 \\ c = C_1 e^{-k_1 t} + C_2 e^{-(k_2+k_3)t} + C_3 \end{cases} \tag{5}$$

Находим постоянные C_1, C_2, C_3 через начальные условия и, подставив в систему (5), получаем концентрации компонентов:

$$\begin{cases} a = e^{-k_1 t} \\ b = -\frac{k_3-k_1}{k_2+k_3-k_1} e^{-k_1 t} - \frac{k_1 k_2}{(k_2+k_3)(k_2+k_3-k_1)} e^{-(k_2+k_3)t} + \frac{k_3}{k_2+k_3} \\ c = -\frac{k_2}{k_2+k_3-k_1} e^{-k_1 t} + \frac{k_1 k_2}{(k_2+k_3)(k_2+k_3-k_1)} e^{-(k_2+k_3)t} + \frac{k_2}{k_2+k_3} \end{cases} \tag{6}$$

При $t \to \infty$ получим:

$$\begin{cases} a(t) = o \\ b(t) = \frac{k_3}{k_2+k_3} \\ c(t) = \frac{k_2}{k_2+k_3} \end{cases} \qquad (7)$$

Литература

1. *Кубасов А.А.* Химическая кинетика и катализ. Часть 1. Москва: Изд-во Московского университета, 2004.

2. *Эмануэль Н.М., Кнорре Д.Г.* Курс химической кинетики: Учебник для хим. фак. университетов.-4-е изд., перераб. и доп.-М.: Высш.шк.,1984-463с.,ил.

ОПЕРАТОРЫ $\mathrm{ROT} + \lambda\mathrm{I}$ И $\nabla\mathrm{DIV} + \lambda\mathrm{I}$ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{L}_2(\Omega)$

Р.С. Сакс

romen-saks@yandex.ru

УДК 517.984.50

В ограниченной области Ω, гомеоморфной шару, с гладкой границей γ, изучаются краевые задачи 1: $(\mathrm{rot} + \lambda\mathrm{I})\mathbf{u} = \mathbf{f}$ в Ω, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\gamma = g$, и 2: $(\nabla\mathrm{div} + \lambda\mathrm{I})\mathbf{u} = \mathbf{f}$ в Ω, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\gamma = g$, в пространствах Соболева $\mathrm{H}^s(\Omega)$, $s = 1, 2$. Рассматриваются также спектральные задачи и обобщенные решения этих уравнений в пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega)$.

Ключевые слова: пространства Соболева, эллиптические операторы, градиент, дивергенция, ротор, краевые и спектральные задачи.

Operators $\mathrm{rot} + \lambda\mathrm{I}$ and $\nabla\mathrm{div} + \lambda\mathrm{I}$ in $\mathbf{L}_2(\Omega)$ space

In the bounded domain Ω, homeomorphic to the ball, with the smooth boundary γ, are studied boundary value problems:$(\mathrm{rot} + \lambda\mathrm{I})\mathbf{u} = \mathbf{f}$ in Ω, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\gamma = g$, and $(\nabla\mathrm{div} + \lambda\mathrm{I})\mathbf{u} = \mathbf{f}$ in Ω, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\gamma = g$, in the Sobolev spaces $\mathrm{H}^s(\Omega)$, $s = 1, 2$. Spectral problems and generalized solutions of these equations in space $\mathbf{L}_2(\Omega)$ are also considered.

Keywords: the Sobolev spaces, elliptic operators, gradient, divergence, curl (rotor), boundary value problems, spectral problems.

Операторы $\mathrm{rot} + \lambda\mathrm{I}$ и $\nabla\mathrm{div} + \lambda\mathrm{I}$, не являясь эллиптическими, при $\lambda \neq 0$ принадлежат классу Б.Вайнберга и В.Грушина [2], операторы которого приводятся к эллиптическим формально переопределенным матрицам, а краевые задачи, удовлетворяют условиям эллиптичности В.Солонникова [3]. Из эллиптической теории и оценок вытекают полезные свойства решений спектральных задач операторов ротора и градиента дивергенции: каждое ненулевое собственное значение имеет конечную кратность, а отвечающие им собственные поля являются гладкими вплоть до границы области Ω.

Пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$ разлагается на ортогональные подпространства $\mathcal{A} = \{\nabla h, h \in H^1(\Omega)\}$ и $\mathbf{V}^0 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \mathbf{div}\mathbf{u} = 0, \gamma(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}) = 0\}$ потенциальных и вихревых полей [1]; $\mathcal{A}_\gamma = \{\nabla h, h \in H^2(\Omega), \gamma(\mathbf{n}\cdot\nabla)h = 0\} \subset \mathcal{A}$. Операторы $\nabla\mathrm{div}$ и rot имеют самосопряженные расширения $\mathcal{N}_d$ и $\mathcal{S}$ в подпространства $\mathcal{A}$ и $\mathbf{V}^0$ [5, 6]. Их собственные векторы $\mathbf{q}_j$ и $\mathbf{q}_j^+$, $\mathbf{q}_j^-$ задают

Сакс Ромэн Семенович, д.ф.-м.н., профессор, ИМ ВЦ УФИЦ РАН (Уфа)

ортогональные базисы в $\mathcal{A}_\gamma$ и $\mathbf{V}^0$, элементы которых представляются рядами Фурье, а операторы $\mathcal{N}_d+\lambda\,I$ и $\mathcal{S}+\lambda\,I$- преобразованиями этих рядов:

$$(\mathcal{N}_d+\lambda\,I)\mathbf{f}=\lim_{n\to\infty}(\nabla\mathrm{div}+\lambda\mathrm{I})(\mathbf{f}^n_{\mathcal{A}})=\sum_{j=1}^{\infty}[(\lambda-\mu_j)(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j,$$

$$(S+\lambda I)\mathbf{f}=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{rot}+\lambda\mathrm{I})(\mathbf{f}^n_{\mathbf{V}})=\sum_{j=1}^{\infty}[(\lambda+\lambda_j)(\mathbf{f},\mathbf{q}^+_j)\mathbf{q}^+_j+(\lambda-\lambda_j)(\mathbf{f},\mathbf{q}^-_j)\mathbf{q}^-_j],$$

Определены [7] аналоги пространств Соболева

$$\mathbf{A}^{2k}_\gamma(\Omega)=\{\mathbf{f}\in\mathcal{A}_\gamma,...,(\nabla\mathrm{div})^k\,\mathbf{f}\in\mathcal{A}_\gamma\},\quad \mathbf{W}^m(\Omega)=\{\mathbf{f}\in\mathbf{V}^0,...,\mathrm{rot}^m\mathbf{f}\in\mathbf{V}^0\}.$$

порядков $2k\geq 2$ и $m\geq 1$ в классах потенциальных и вихревых полей и классы $C(2k,m)=\mathbf{A}^{2k}_\gamma\oplus\mathbf{W}^m$ их прямых сумм. Доказана

Теорема 1. *Если $\lambda\neq 0,\pm\lambda_j\in Sp(\mathrm{rot})$, $j\in\mathbb{N}$, и $\mathbf{f}\in\mathbf{L}_2(\Omega)$, то единственное решение $\mathbf{u}$ уравнения* $(\mathrm{rot}+\lambda\mathrm{I})\mathbf{u}=\mathbf{f}$ *в* $\mathbf{L}_2(\Omega)$ *дается суммой рядов-проекций $\mathbf{u}_{\mathcal{A}}+\mathbf{u}_{\mathbf{V}}$:*

$$\mathbf{u}_{\mathcal{A}}=\lambda^{-1}\mathbf{f}_{\mathcal{A}}\equiv\lambda^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}(\mathbf{f},\mathbf{q}_j)\mathbf{q}_j(\mathbf{x}),\tag{1}$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{V}}=(S+\lambda)^{-1}\mathbf{f}_{\mathbf{V}}\equiv\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{(\mathbf{f},\mathbf{q}^+_j)}{\lambda+\lambda_j}\mathbf{q}^+_j(\mathbf{x})+\frac{(\mathbf{f},\mathbf{q}^-_j)}{\lambda-\lambda_j}\mathbf{q}^-_j(\mathbf{x})\right].\tag{2}$$

В частности, если $\mathbf{f}=\mathbf{f}_{\mathcal{A}}$ и $\mathbf{f}_{\mathcal{A}}\in\mathcal{A}$ или $\mathbf{f}_{\mathcal{A}}\in\mathcal{A}_\gamma$,
то $\mathbf{u}=\ \lambda^{-1}\mathbf{f}_{\mathcal{A}}\in\mathcal{A}$ или $\mathbf{u}\in\mathcal{A}_\gamma$ - обобщенные решения уравнения.
Если $\mathbf{f}\in\mathcal{B}\perp\mathcal{A}$ в $\mathbf{L}_2(\Omega)$, то $\mathbf{u}=(S+\lambda)^{-1}\mathbf{f}_{\mathbf{V}}\in\mathbf{W}^1$.
Если $\mathbf{f}$ принадлежит классу $C(2k,m)$, то $\mathbf{u}\in C(2k,m+1)$.
Если же $\mathbf{f}\in\mathbf{C}^\infty_0(\Omega)$, то ряды (1), (2) сходятся в $\mathbf{H}^s(\Omega)$
для любого $s\geq 1$ и $\mathbf{u}\in C^\infty(\overline{\Omega})$ - классическое решение уравнения.

В случае шара эта теорема имеет наиболее законченный вид.

Согласно [4] собственные значения $\lambda_{n,m}$ оператора S в шаре радиуса R равны $\pm\rho_{n,m}/R$, где числа $\pm\rho_{n,m}$ - нули функций $\psi_n(z)=(-z)^n\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\frac{\sin z}{z}$, $m,\,n\in\mathbb{N}$, кратность собственного значения $\lambda_{n,m}$ равна $2n+1$. Собственные значения оператора $\nabla\mathrm{div}$ равны $-\nu^2_{n,m}$, где $\nu_{n,m}=\alpha_{n,m}/R$, а числа $\alpha_{n,m}$ - нули производных $\psi'_n(r)$, $n\geq 0$, $m\in\mathbb{N}$; кратность собственного значения $-\nu^2_{n,m}$ равна $2n+1$.

Собственные поля $\mathbf{q}^\pm_\kappa(\mathbf{x})$ ротора и $\mathbf{q}_\kappa(\mathbf{x})$ градиента дивергенци, $\kappa=(n,m,k)$, выражены явно через сферические функции и функции $\psi_n(r)$.

Доказано также, что оператор $S+\lambda I\,:\,\mathbf{W}^m\to\mathbf{W}^{m-1}$ - фредгольмов. При $\lambda\neq Sp(\mathrm{rot})$ оператор $\mathrm{rot}+\lambda\,I$ отображает класс $C(2k,m+1)$ на класс $C(2k,m)$ взаимно однозначно и непрерывно;

Если область $\Omega=B$, есть шар, $\psi_n(\lambda\,R)\neq 0\;\forall\,n\in\mathbb{N}$, а поле $\mathbf{f}\in\mathbf{A}^{2k}_\gamma(B)\oplus\mathbf{W}^m(B)$, то решение задачи 1 существует, единственно и принадлежит классу $\mathbf{A}^{2k}_\gamma(B)\oplus\mathbf{W}^{m+1}(B)$.

Для уравнения $(\nabla\mathrm{div}+\lambda\mathrm{I})\mathbf{u}=\mathbf{f}$ в $\mathbf{L}_2(\Omega)$ имеют место аналогичные "симметричные" утверждения. Имеются приложения.

Литература

1. *Соболев С.Л.* Об одной новой задаче математической физики // Известия АН СССР (серия математическая), 18 (1954), 3-50.

2. *Вайнберг Б.Р., Грушин В.В.* Равномерно неэллптические задачи I // Математич. сборник, 72(114):4 (1967), 602-636.

3. *Солонников В.А.* Переопределенные эллиптические задачи // Записки научных семинаров ЛОМИ, Л., 21:5 (1971), 112-158.

4. *Сакс Р.С.* Собственные функции операторов ротора, градиента дивергенции и Стокса // Вестник Самарского ГТУ, Серия ф.-м. науки, 2:1 (2013), 131-146.

5. *Сакс Р.С.* Ортогональные подпространства пространства $\mathbf{L}_2(G)$ и самосопряженные расширения операторов ротора и градиента дивергенциии // Доклады РАН, 462:3 (2015), 278-282.

6. *Сакс Р.С.* Оператор градиент дивергенции в $\mathbf{L}_2(G)$ // Доклады РАН, 462:5 (2015), 61-65.

7. *Сакс Р.С.* Оператор градиент дивергенции и пространства Соболева // Ж. Динамические системы, Крым. ФУ им. В.И. Вернадского, 8(36):4 (2018), 385-407.

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Д.С. Сафаров, Ф.М Шамсудинов, О. Абдулвохид

safarov-5252@mail.ru, vohid161090@mail.ru, faizullo100@yahoo.com

УДК 517.95

Краткая аннотация: В работе для одной нелинейной эллиптической системы второго порядка найдено решение с помощью обобщенной эллиптической функции Вейерштрасса на плоскости некоторого гомеоморфизма уравнения Бельтрами.

Ключевые слова: Эллиптическая функция, двоякопериодическое решение, эллиптическая система.

The main tasks of mathematics

For a nonlinear elliptic system of second order the solution is found by means of the generalized Weierstrass elliptic function on the plane some homorphism equation Beltrami.

Keywords: Elliptic function, doubly periodic solution, elliptic system.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим эллиптическую систему, записанную в комплексной форме [1,2]

$$w_{\bar{z}z} + \alpha w_z^2 + \alpha_1 w_z^4 + \alpha_2 w^3 + \alpha_3 w + \alpha_4 = 0, \tag{1}$$

где $z = x + iy, w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$- искомая, $2w_z = w_x - iw_y, 2w_{\bar{z}z}$-дифференциальный оператор Лапласа и все α_j- постоянные.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00000).

Сафаров Джумабой, д.ф.-м.н., профессор, Бохтарский государственный университет, Таджикистан; Djumaboy Safarov (Bokhtar State University after named N.Khusrav, Tajikistan)

Шамсудинов Фаизулло Мамадуллоевич,, к.ф.-м.н., доцент, Бохтарский государственный университет, Таджикистан; Shamsudinov Faizullo Mamaduloevich (Bokhtar State University after named N.Khusrav, Tajikistan)

Абдулвохиди Олимхон, докторант PhD, Бохтарский государственный университет, Таджикистан; Abdulvohidi Olimchon (Bokhtar State University after named N.Khusrav, Tajikistan)

Решение уравнения (1) в некоторых частных случаях найдены в [3] через обобщенные эллиптические функции Вейерштрасса, определение на плоскости некоторого квазипериодического гомеоморфизма уравнения Бельтрами

$$\varphi_{\bar{z}} - q(z)\varphi_z = 0. \tag{2}$$

где $|q| \leq q_0 < 1$.

Под обобщенным эллиптическим функциям понимается эллиптическая функция определенная на плоскости некоторые квазипериодического гомеоморфизма $\varphi(z)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям [3]

$$\varphi(0) = 0, \varphi(z + m_1h_1 + m_2h_2) = \varphi(z) + m_1\tilde{h}_1 + m_2\tilde{h}_2, m_1, m_2 = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

постоянные $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ - зависят как функционал от $q(z)$, причем постоянное $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2$ и h_1, h_2 удовлетворяют условий $Im\left(\tilde{h}_2/\tilde{h}_1\right) \neq 0, Im(h_2/h_1) \neq 0$.

В монографии [3] доказана, что такой гомеоморфизм всегда существует, если $|q| \leq q_0 < 1$ и является двоякопериодической с некоторыми периодами $h_1, h_2, Im\,(h_2/h_1) > 0$ и непрерывной по Гельдеру в основном параллелограмме периодов Ω двоякопериодической групы $P(z)$

$$P(z) = z + m_1h_1 + m_2h_2, m_1, m_2 = 0, \pm1, \pm2, ...$$

Когда $q(z) \equiv q$-постоянная, то такой гомеормофизм имеет вид

$$\varphi(z) = z + q\overline{z}$$

и удовлетворяет условиям квазипериодичности

$$\varphi(z + m_1h_1 + m_2h_2) = \varphi(z) + m_1\tilde{h}_1 + m_2\tilde{h}_2,$$

где $\widetilde{h}_1 = h_1 + q\overline{h}_1, \widetilde{h}_2 = h_2 + q\overline{h}_2$, причем при $|q| < 1, Im\left(\widetilde{h}_2/\widetilde{h}_1\right) > 0$, если $Im\,(h_2/h_1) > 0$, а при $|q| > 1$ наоборот.

Эллиптическая функция Вейерштрасса

$$\wp(z + q\overline{z}) = \wp(t),$$

по переменным $z, \overline{z}$ удовлетворяет уравнению Белтрами (2), а по переменной t является решением дифференциального уравнения [4]

$$\wp'^2(t) = 4\wp^3(t) - g_2\wp(t) - g_3,$$

постоянные g_2, g_3 называются инвариантами и удовлетворяет условию.

$$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0. \tag{3}$$

Периоды функции $\wp(u), \omega_1, \omega_2$ связаны с g_1, g_3 системами уравнений [4]

$$\begin{cases} 60\sum{}'(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^{-4} = g_2, \\ \\ 140\sum{}'(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^{-6} = g_2. \end{cases} \tag{4}$$

где суммирование ведется по всем $\omega \neq 0, \omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2, m_1, m_2 = 0, \pm1, \pm2, ...$ В теории модулярных функций [4] доказывается, что при выполнении условия (3) система уравнений (4) имеет единственное решение на верхной полуплоскости $Im\,(\omega_2/\omega_1) > 0$. Если $g_2 = 0, g_3 \neq 0$, то периодами функции $\wp(u)$ являются следующие числа

$$\omega_1^6 = \frac{140}{g_3} \sum{}' (m_1 + m_2\rho)^{-6},\ \omega_2 = \omega_1\rho,\ \rho = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right).$$

Теперь отыскивая решение уравнения (1) в виде

$$w(z) = \frac{A}{\wp(z + q\bar{z})}, \quad |q| \neq 1$$

и подставляя в уравнение находим постоянные A и q и инварианты $g_2 = 0, g_3 \neq 0$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1) коэффициенты* α_j *связаны условиями:* $\alpha_4 = 4\alpha_1, \alpha_2 \cdot \alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_4 = 0$, *и постоянные* $g_2 = 0, g_3 = \frac{\alpha_1\alpha_3^2}{4\alpha_0^3}$, *являются инвариантами функции Вейерштрасса* $\wp(u)$. *Тогда при* $|4\alpha_0\alpha_1| \neq \alpha_3$, *уравнение (1) имеет двоякопериодическое решение вида*

$$w(z) = -\frac{\alpha_3}{4\alpha_0\wp(z + q\bar{z})}, \quad q = -\frac{4\alpha_0\alpha_1}{\alpha_3}$$

с периодами

$$h_j = \frac{\omega_j - q\overline{\omega}_j}{1 - |q|^2}, j = 1, 2,$$

где

$$\omega_1^6 = \frac{560\alpha_0^3}{\alpha_1\alpha_3^2} \sum{}' (m_1 + m_2\rho)^{-6},\ \omega_2 = h_1\rho,\ \rho = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right),$$

Литература

1. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959 г.- 628 с.

2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. // М.: Наука, 1981. -448с.

3. *Сафаров Д.С.* Двоякопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения.- Душанбе, 2012.-190 с.

4. *Гурвиц А. Курант Р.* Теория функции -М: Наука, 1968.-648 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОСТАДИЙНЫХ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ МЕТОДАМИ АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Л.Ф. Сафиуллина

Nurislamova_ LF@mail.ru

УДК 519.6

В статье представлен общий подход, применяемый автором для анализа многостадийных химических реакций на основе ее математической модели и оценки чувствительности параметров модели к изменениям кинетических и технологических параметров. Описана методика анализа чувствительности математической модели, направленная на редуцирование кинетической схемы реакции.

Ключевые слова: кинетическая модель, анализ чувствительности, математическое моделирование

Sensitivity analysis of multistage chemical reactions

The article presents a general approach used to analyze multi-stage chemical reactions based on mathematical model and to estimate the sensitivity of model parameters to changes in kinetic and technological parameters. The technique of sensitivity analysis of a mathematical model is described, which is aimed at reducing the kinetic reaction scheme.

Keywords: kinetic model, sensitivity analysis, mathematical modeling

Анализ чувствительности математической модели к изменению ее входных параметров является важным первоначальным этапом при моделировании кинетики процесса. На основании данного анализа можно выявить ключевые параметры модели и наиболее эффективно подходить к решению обратной задачи для нахождения оптимальных значений кинетических параметров. Тем самым можно определить те стадии и вещества, которые являются ключевыми в процессе исследуемой реакции, и исключить из рассмотрения те, которые влияют незначительно.

Выделяют глобальные и локальные методы анализа чувствительности. Нормированные локальные коэффициенты чувствительности концентрации вещества x_i к константе скорости k_j j-той стадии могут быть вычислены как частные производные от концентраций компонент системы по константам скорости $S_{ij} = \frac{k_j}{x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial k_j}$ или по формуле конечно-разностного приближения.

Одним из лучших методов глобального анализа чувствительности признан метод, разработанный российским ученым Соболем И.М. Однако следует признать, что данный метод является вычислительно затратным, требует большого числа запусков модели. Глобальный анализ чувствительности, в отличие от локального, позволяет проанализировать поведение кинетических кривых во всей области значений параметров. Глобальный коэффициент характеризует вклад дисперсии D_i индивидуального параметра k_j к полной дисперсии D исследуемой функции.

Для устранения возможных затруднений с анализом полученных наборов данных при анализе чувствительности математической модели, в на-

---

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках (научного проекта № 19-31-27001).

Сафиуллина Лиана Фануровна, к.ф.-м.н., научный сотрудник, УГНТУ (Уфа, Россия); Liana Safiullina (Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

стоящей работе предложена следующая процедура проведения анализа чувствительности. Предлагается анализировать чувствительность функционала математической модели к изменению констант скоростей стадий (либо к кинетическим параметрам Аррениуса), где функционал характеризует меру близости расчетных значений по имеющейся и измененной схемам реакции возмущением ее параметров в различные моменты времени и/или для различных температур:

$$F_{obj} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{R} g_i (x_{ijk}^{sh1} - x_{ijk}^{sh2})^2, \qquad (1)$$

где x_{ij}^{sh1} – расчетные значения концентраций веществ, полученные по исходной схеме; x_{ij}^{sh2} – расчетные значения концентраций веществ, полученные изменением (возмущением) параметров в схеме; g_i - вес вещества, который вводится для того, чтобы все переменные имели одинаковую значимость; N – количество точек температур; M – количество веществ; R – количество точек времени.

Анализ чувствительности функционала позволяет выявить те параметры, которые обеспечивают наибольший (или наименьший) вклад в погрешность при моделировании реакции. Математическая модель может содержать параметры, изменение значений которых не влияет на качественное и количественное описание процесса. Вклад таких параметров в значение функционала не будет иметь большого значения. Поэтому стадии, которые не служат для моделирования кинетических кривых веществ можно исключить из рассмотрения. Параметры, которые следует идентифицировать, определяются диапазоном условий (температурой, давлением, временем реакции), для которых требуется адекватно описывать выход наблюдаемых веществ. Пусть, например, для описания процесса используется М совокупность стадий, который позволяет решить ее некоторым методом с эффективностью Р. Исключим из этой схемы одну стадию и решим снова поставленную задачу, используя тот же метод. Если окажется, что эффективность решения задачи не изменилась (относительное отклонение расчетных значений не превышает 2%), то это означает, что исключенный параметр не заключает никакой информации при описании процесса в заданных условиях. Такой параметр будем называть незначимым (не подлежащим идентификации). Если же эффективность решения задачи снизилась, то указанный параметр содержит информацию и такой параметр будем называть значимым (подлежащим идентификации).

С использованием анализа чувствительности были исследованы реакции низкотемпературного пиролиза этана и пропана, реакции окисления формальдегида и водорода [1,2].

Литература

1. *Nurislamova L.F., Gubaydullin I.M.* Mechanism reduction of chemical reaction based on sensitivity analysis: development and testing of some new procedure // Journal of Mathematical Chemistry, **55**:9 (2017), 1779-1792.

2. *Нурисламова Л.Ф., Губайдуллин И. М.* Численный анализ идентифицируемости параметров математической модели химической реакции // Вычислительные методы и программирование, **15**(2018), 685-696.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПЦИОННЫХ СТРАТЕГИЙ

Е.В. Саяпова
SayapovaEV@gmail.com

УДК 519.21

Опционные стратегии представляют собой одновременную покупку либо продажу одного или нескольких опционов, отличающихся друг от друга одним или более параметрами. Хеджирование - это стратегия, применяемая инвестором для снижения риска актива путем покупки других активов. Опционные контракты широко используются на практике как инструмент хеджирования финансового риска.

Ключевые слова: опционные модели, опционные стратегии, финансовый риск

Option Strategy Models

Option strategies are the simultaneous buying or selling of one or more options that differ in one or more of the options' variables. Hedging is a strategy used by investors to reduce the risk of holding one investment position by taking another investment position. Option contract is a common tool to use to hedge against financial risks.

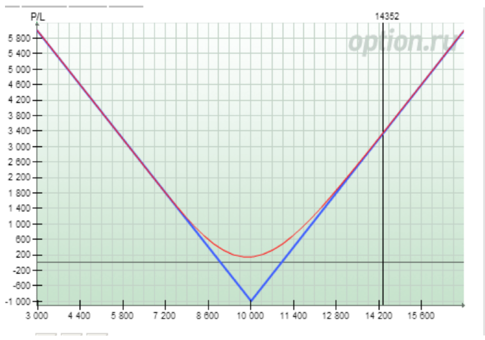
Keywords: option models, option strategies, financial risk

Опционом (опционным контрактом) называется контракт, дающий оплаченное право, но не обязательство, купить или продать определенный базовый актив по фиксированной цене в течение оговоренного в условиях опциона срока. Суть опционного контракта состоит в том, что один из участников сделки имеет право выбора: исполнить контракт, либо отказаться от его исполнения. За получение такого права владелец (держатель) опциона при заключении контракта выплачивает продавцу опциона некоторое вознаграждение - премию (C). Различают опционы следующих типов: опцион-колл – опцион, дающий право купить актив, и опцион-пут - опцион, дающий право на продажу актива. Спотовая цена (E) – цена реального базисного актива на рынке в данный момент времени (процентная ставка, курс акций, валютный курс и т.д.). Цена покупки или продажи объекта опциона, оговоренная в контракте, называется ценой исполнения (ценой страйк -S).

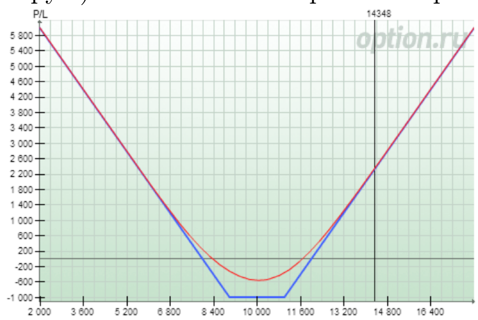
Для исследования и сравнительного анализа комбинированных опционных стратегий при хеджировании финансовых рисков воспользуемся данными об опционах на акции ОАО «Газпром» и рассмотрим пример опционного контракта, взятого из российской финансовой практики.

Стрэддл - покупка опционов колл и пут с одинаковыми датами истечения и ценой исполнения. Предполагаем, что инвестор приобрел опционы колл и пут с ценой исполнения E= 10000 руб. и премией C=500 руб. Максимальные потери данной позиции равны сумме уплаченных премий при равенстве цены спот и цены исполнения (1000 руб.). Максимальная прибыль стратегии неограниченна.На отрезке цены базового актива от 9000 руб. до 11000 руб. инвестор несет убытки.

Саяпова Елена Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Elena Sayapova (Bashkir State University, Ufa, Russia)



Стренгл - сочетание опционов колл и пут на один и тот же базисный актив, но с разными ценами исполнения. Рассмотрим позицию длинный Стрэнгл: инвестор покупает опцион-пут с ценой исполнения $E_1 = 9000$ руб. и опцион-колл с ценой исполнения E_2=11000 руб. и премией C= 500 руб. Максимальные убытки данной позиции равны сумме уплаченных премий (1000 руб.). Максимальная прибыль стратегии неограниченна.



Спрэд быка - это стратегия покупки колл-опциона с более низкой ценой исполнения и продажа колл-опциона с более высокой ценой исполнения, рассчитана на ожидания роста курсовой стоимости базового актива. В этом случае инвестор получает выигрыш, однако он будет ограниченным, так же как и убытки инвестора.

Спрэд медведя - стратегия продажи колл-опциона с более низкой ценой исполнения и покупки колл-опциона с более высокой ценой исполнения. Прибыль, так же как и убытки, ограниченна. Стратегия принесет прибыль, если базовый актив понизится в цене.

В работе проведен сравнительный анализ финансовых рисков на примере опционов на акции ОАО "Газпром", в ходе которого было выявлено, что при значительном изменении цены базового актива, опционная стратегия Стрэддл приносит инвестору наибольшую прибыль, но если цена базового актива изменяется в незначительном диапазоне от цены исполнения опционов, то опционная стратегия Спрэд быка приносит прибыль инвестору, в то время как остальные стратегии приносят убытки.

Литература

1. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели. // Москва: Московский центр непрерывного математического образования, 2016

2. *Четыркин Е.М.* Финансовая математика // Москва: Дело, 2010

3. *Буренин А.Н.* Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов // Москва: НТО, 2011.

О ВЫЧИСЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И ФУНКЦИЙ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА С ЯДЕРНОЙ РЕЗОЛЬВЕНТОЙ

А.И. Седов
sedov-ai@yandex.ru

УДК 517.984.46, 517.983.28

Рассматривается задача вычисления собственных чисел и собственных функций возмущенного линейного самосопряженного оператора с ядерной резольвентой, возмущенного ограниченным оператором действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве. Изменение классического метода приводит к ряду, скорость сходимости которого значительно больше, что позволяет уменьшить количество членов ряда используемых в вычислениях. Приводятся формулы для вычисления коэффициентов Фурье разложения возмущенных собственных функций в ряд по невозмущенным. Для вычисления первых собственных функций используется обратная матрица Вандермонда.

Ключевые слова: собственные числа, собственные функции, ядерный оператор, возмущенный оператор

On calculation of eigenvalues and eigenfunctions of selfadjoint operator with a resolvent of a trace class

The problem of calculation of eigenvalues and eigenfunctions of the perturbed linear selfadjoint operator with a resolvent of a trace class acting in separable Hilbert space is considered. The change of a classical method offered in work brings to series which convergence speed much more that allows to reduce the number of the members of a series used in calculations. Formulas for calculation of coefficients of Fourier of decomposition of the indignant eigenfunctions in a series on not indignant are given in work. For calculation of the first eigenfunctions the inverse matrix of Vandermond is used

Keywords: eigenvalue, eigenfunction, operator of trace class, perturbed operator

Рассмотрим самосопряженный оператор T с дискретным спектром и ядерной резольвентой, а также линейный ограниченный самосопряженный оператор P, действующие в гильбертовом пространстве H. Для простоты изложения, предположим, что оператор T — положительный с простым спектром $\sigma(T) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Собственные числа $\{\lambda_n\}$ оператора T занумеруем в порядке возрастания. Обозначим через $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ собственные числа оператора $T+P$, занумерованные в порядке возрастания с учетом алгебраической кратности. Введем обозначения: $r_n = \frac{1}{2}\min\limits_{k\neq n}\{|\lambda_n - \lambda_k|\}$, $\gamma_n = \{\lambda : |\lambda_n - \lambda| = r_n\}$, $\Gamma_n = \{\lambda : |\lambda| = \lambda_n + r_n\}$, $R_0(\lambda) = (T-\lambda E)^{-1}$, $R(\lambda) = (T+P-\lambda E)^{-1}$, $r = \inf\limits_{n\geq N} r_n$.

Теорема 1. *Если $\|P\| < r_N$, то первые N собственных чисел μ_n оператора $T+P$ являются решениями системы уравнений*

$$\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{(z-\mu_l)^s} = \sum_{l=1}^{N}\frac{1}{(z-\lambda_l)^s} + \sum_{l=1}^{N}\frac{s(Pv_l, v_l)}{(z-\lambda_l)^{s+1}} + \sum_{k=2}^{M-1}\alpha_k^{(s)}(N) + \varepsilon_s, \quad s=\overline{1,N},$$

Седов Андрей Иванович, к.ф.-м.н., доцент, МГТУ им. Г.И. Носова (Магнитогорск, Россия); Andrey Sedov (Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia)

где $\alpha_k^{(s)}(N) = \frac{(-1)^k s}{2\pi ik} \int_{\Gamma_N} \frac{1}{(\lambda-z)^{s+1}} [PR_0(\lambda)]^k d\lambda$ *— поправки теории возмущений,* z *— некоторое фиксированное число,* ε_s *— зависящие от* z *и* M *сколь угодно малые числа.*

За счет выбора чисел z и M, погрешности

$$\varepsilon_s = \frac{s(\lambda_N + r_N)}{M(z - \lambda_N - r_N)^{s+1}} \frac{q_N^M}{1 - q_N^M}$$

можно сделать сколь угодно малыми.

Обозначим $\beta_n = \dfrac{1}{z - \mu_n}$, $\eta_n = \dfrac{1}{z - \lambda_n}$.

Теорема 2. *Если* $\|P\| < r_n$ *и* λ_n *однократное, то собственное число* μ_n *можно вычислить по формуле*

$$\beta_n^s = \eta_n^s + s(Pv_n, v_n)\eta_n^{s+1} + \sum_{k=2}^{M-1} \alpha_k^{(s)}(n) + \varepsilon_s,$$

где $\alpha_k^{(s)}(N) = \frac{(-1)^k s}{2\pi ik} \int_{\gamma_n} \frac{1}{(\lambda-z)^{s+1}} [PR_0(\lambda)]^k d\lambda$*,* z *— некоторое фиксированное число,* ε_s *— зависящее от* z *сколь угодно малое число.*

Теорема 3.

$$c_{nk} u_k = \sum_{m=0}^{N-1} w_{km} \Big[\frac{v_n}{(z - \lambda_n)^m} + \frac{m(Pv_n, v_n)v_n}{(z - \lambda_n)^{m+1}} + \sum_{k \le N, k \ne n} \Big(\frac{(Pv_n, v_k)v_k}{(z - \lambda_n)^m (\lambda_n - \lambda_k)} + \frac{(Pv_n, v_k)v_k}{(z - \lambda_k)^m (\lambda_k - \lambda_n)} \Big) + \sum_{k > N} \frac{(Pv_n, v_k)v_k}{(z - \lambda_n)^m (\lambda_n - \lambda_k)} + R_2^m \Big].$$

Здесь

$$c_{nk}^2 = \sum_{m=0}^{N-1} w_{km} \Big(\frac{1}{(z - \lambda_n)^m} + \frac{m(Pv_n, v_n)}{(z - \lambda_n)^{m+1}} + (R_2^m, v_n) \Big),$$

$\|R_2^m\|_H \le \frac{\lambda_N + r}{(\lambda_N + r - \lambda_n)(z - \lambda_N - r)^m} \frac{q^2}{1-q}$, w_{km} — элементы обратной матрицы Вандермонда элементы которой $v_{kn} = \frac{1}{(z-\mu_k)^n}$.

Литература

1. *Седов А.И.* О вычислении сосбственных чисел и функций дискретного оператора с ядерной резольвентой, возмущенного ограниченным // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика Физика. 2019. Т.11.№1. С. 16-23.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ (ЛГФДСП)

П.М. Симонов

simonov@econ.psu.ru, simpm@mail.com

УДК 517.977

Рассматривается абстрактная гибридная система фунционально-дифференциальных уравнений. Получены условия её разрешимости в парах пространств.

Ключевые слова: гибридная система фунционально-дифференциальных уравнений, устойчивость, метод модельных уравнений

On the stability of linear hybrid functional differential systems with aftereffect (LHFDSPA)

The abstract hybrid system of the functional differential equations is considered. Conditions of its resolvability in couple of spaces are received.

Keywords: hybrid system of functional differential equations, stability, model equations

Запишем абстрактную ЛГФДСП в виде

$$\mathcal{L}_{11}x+\mathcal{L}_{12}y=\dot{x}-F_{11}x-F_{12}y=f,\ \mathcal{L}_{21}x+\mathcal{L}_{22}y=\Delta x-F_{21}x-F_{22}y=g. \quad (1)$$

Здесь и ниже $\mathbb{R}^n$ — пространство векторов $\alpha=\operatorname{col}\{\alpha^1,...,\alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $\|\alpha\|_{\mathbb{R}^n}$. Пусть пространство L локально суммируемых $f,g,y:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ с полунормами $\|f\|_{L[0,T]}=\int_0^T\|f(t)\|_{\mathbb{R}^n}\,dt$ для всех $T>0$. Пространство D локально абсолютно непрерывных функций $x:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ с полунормами $\|x\|_{D[0,T]}=\|\dot{x}\|_{L[0,T]}+\|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}$ для всех $T>0$. Операторы $\mathcal{L}_{11},F_{11}:D\to L$, $\mathcal{L}_{12},F_{12}:L\to L$, $\mathcal{L}_{21},F_{21}:D\to L$, $\mathcal{L}_{22},F_{22}:L\to L$ предполагаются линейными непрерывными и вольтерровыми. Обозначим $(\Delta y)(t)=y(t)-y(t-h)$, где $t\geqslant h>0$, и $(\Delta y)(t)=y(t)$, $t\in[0,h)$.

Пусть модельное уравнений $\mathcal{L}_{11}x=z$ и банахово пространство B с элементами из пространства L ($B\subset L$, и это вложение непрерывно) выбраны так, что решения этого уравнения обладают интересующими нас асимптотическими свойствами. Пусть оператор Коши W_{11} для уравнения $\mathcal{L}_{11}x=z$ непрерывно действует из пространства B в пространство B и вольтерров, и пусть столбцы матрицы фундаментальных решений X принадлежат пространству B. Кроме того, пусть производная решения $\dot{x}$ непрерывно лежит в B в зависимости от $z\in B$. И пусть столбцы матрицы $\dot{X}$ принадлежат B. Можно для банахова пространства $B\subset L$ ввести банахово пространство $D(\mathcal{L}_{11},B)$ с нормой $\|x\|_{D(\mathcal{L}_{11},B)}=\|\mathcal{L}_{11}x\|_B+\|x(0)\|_{\mathbb{R}^n}$. Это пространство линейно изоморфно пространству С.Л. Соболева $W_B^{(1)}([0,\infty))$ с нормой $\|x\|_{W_B^{(1)}}([0,\infty))=\|\dot{x}\|_B+\|x\|_B$. Дальше будем это пространство обозначать как W_B. При этом, $W_B\subset D$, и это вложение непрерывно. Операторы $\mathcal{L}_{11}$, $\mathcal{L}_{21}$, F_{11}, $F_{21}:D\to L$ рассматриваются как приведения на пару (W_B,B):

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00332 А).

Симонов Пётр Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, ПГНИУ (Пермь, Россия); Pyotr Simonov (Perm State National Research University, Perm, Russia)

$\mathcal{L}_{11}$, $\mathcal{L}_{21}$, F_{11}, F_{21} : $W_B \to B$. Операторы Δ, $\mathcal{L}_{12}$, $\mathcal{L}_{22}$, F_{12}, F_{22} : $L \to L$ также рассматриваются как приведения на пару (B, B): Δ, $\mathcal{L}_{12}$, $\mathcal{L}_{22}$, F_{12}, $F_{22} : B \to B$ предполагаются линейные вольтерровые и ограниченные.

Поставим задачу, когда для уравнения (1) при любом $\{f, g\} \in B \times B$ ее решения $\{x, y\} \in W_B \times B$.

Рассмотрим второе уравнения $\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = g$. Будем считать, что оператор $\mathcal{L}_{22} : B \to B$ вольтеррово обратим, то есть, существует $\mathcal{L}_{22}^{-1} : B \to B$ и оператор $\mathcal{L}_{22}^{-1} : B \to B$ вольтерров. Тогда это уравнение запишется в виде $\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21}x + y = \mathcal{L}_{22}^{-1}g$. Выразим y: $y = -\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}^{-1}g$, и подставим в первое уравнение $\mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = f$: $(\mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21})x = f - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}g$.

Обозначим $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{11} - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}\mathcal{L}_{21}$ и $f_1 = f - \mathcal{L}_{12}\mathcal{L}_{22}^{-1}g$. Получили уравнение $\mathcal{L}_1 x = f_1$. Предположим, что вольтерров оператор $\mathcal{L}_1 : W_B \to B$ вольтеррово обратим, то есть, если для уравнения $\mathcal{L}_1 x = f_1$ при любом $f_1 \in B$ его решения $x \in W_B$ и оператор ${\mathcal{L}_1}^{-1} : B \to W_B^0$ вольтерров, где $W_B^0 = \{x \in W_B, x(0) = 0\}$. Таким образом, мы решили задачу, когда для уравнения (1) при любом $\{f, g\} \in B \times B$ его решение $\{x, y\} \in W_B \times B$.

То же самое получим для уравнения $\mathcal{L}_2 x = g_1$, где $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{21}\mathcal{L}_{11}^{-1}\mathcal{L}_{12}$ и $g_1 = g - \mathcal{L}_{21}\mathcal{L}_{11}^{-1}f$.

Исследованию по устойчивости решений ЛГФДСП в случае $n = 1$ посвящены работы [1-7]. В предлагаемом докладе получено достаточное условия устойчивости решений ЛГФДСП для $n \geq 2$. Приведен пример для $n = 2$.

Литература

1. *Ларионов А.С., Симонов П.М.* Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП) // Вестник РАЕН. Темат. номер "Дифференциальные уравнения". 2013. Т. 13, № 4. С. 34–37.

2. *Симонов П.М.* Устойчивость линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ЛГФДСП) // Вестник Тамбовского ун-та. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, вып. 5. С. 2670–2672.

3. *Ларионов А.С., Симонов П.М.* Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП). II. // Вестник РАЕН. Темат. номер "Дифференциальные уравнения". 2014. Т. 14, № 5. С. 38–45.

4. *Ларионов А.С., Симонов П.М.* Устойчивость линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием // Динамика систем и процессы управления: Труды международной конференции, посв. 90-летию со дня рождения акад. Н.Н. Красовского. Екатеринбург, Россия, 15–20 сентября 2014 г. Изд-во УМЦ УПИ, 2015. С. 243–250.

5. *Симонов П.М.* К вопросу об устойчивости линейных гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ЛГФДСП) // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20, вып. 5. С. 1428–1436.

6. *Симонов П.М.* Об устойчивости линейных гибридных функционально-дифференциальных систем // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. Ижевск: Изд-во УдГУ, 2015. Вып. 2 (46). С. 184–192.

7. *Андрианов Д.Л., Арбузов В.О., Ивлиев С.В., Максимов В.П., Симонов П.М.* Динамические модели экономики: теория, приложения, программная реализация // Вестник Пермского университета. Серия: "Экономика" = Perm University Herald. Economy. 2015. № 4 (27). С. 8–32.

ПОДМОДЕЛИ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА С ДАВЛЕНИЕМ В ВИДЕ СУММЫ ФУНКЦИЙ ПЛОТНОСТИ И ЭНТРОПИИ

Д.Т. Сираева
sirdilara@gmail.com

УДК 517.958:533

Рассматриваются уравнения гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, представленного в виде суммы функций плотности и энтропии. Система инвариантна относительно группы преобразований Галилея, расширенного равномерным растяжением и переносом давления. Соответствующая группе алгебра Ли 12-мерна. По двумерным и трехмерным подалгебрам из оптимальной системы построены инвариантные подмодели ранга 2 и 1. Получены некоторые точные решения.

Ключевые слова: уравнения гидродинамического типа, уравнение состояния, алгебра Ли, подалгебра, инвариант, точное решение

Submodels of hydrodynamic type equations with pressure as the sum of density and entropy functions

Hydrodynamic type equations with the equation of state in the form of pressure, presented as the sum of the density and entropy functions, are considered. The system is invariant with respect to the group of Galilean transformations extended by uniform tension and pressure transfer. The corresponding Lie algebra is 12-dimensional. Invariant submodels of rank 2 and 1 are constructed for two- and three-dimensional subalgebras from optymal system. Some exact solutions are obtained.

Keywords: hydrodynamic type equations, equation of state, Lie algebra, subalgebra, invariant, exact solution

Рассматриваются уравнения гидродинамического типа [1]:

$$D\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = 0, \quad Dp + \rho f_\rho \mathrm{div}\vec{u} = 0, \tag{1}$$

где $D = \partial_t + (\vec{u}\cdot\nabla)$ — оператор полного дифференцирования; $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент по пространственным независимым переменным $\vec{x}$; $\vec{u}$ — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление; t — время. Уравнение состояния имеет вид [1]

$$p = f(\rho) + h(S), \tag{2}$$

в силу которого последнее уравнение системы (1) может быть записано для энтропии

$$DS = 0.$$

Уравнение состояния (2) может быть записано через внутреннюю энергию ε или температуру T из термодинамического тождества $TdS = d\varepsilon + pd\rho^{-1}$ [2]:

$$\varepsilon = \int \frac{f(\rho)}{\rho^2}d\rho - \frac{h(S)}{\rho} + H(S), \quad T = H'_S - \frac{h'_S}{\rho},$$

где $H(S)$ — произвольная функция.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10071) и частично средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0052).

Сираева Дилара Тахировна, м.н.с. ИМех УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Siraeva Dilara (Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia)

Из термодинамического тождества с учетом (2) выводятся уравнения для термодинамических величин S, T и ε при $h' \neq 0$

$$DS = 0, \quad DT + \rho^{-1}h'(S)\mathrm{div}\vec{u} = 0, \quad D\varepsilon + \rho^{-1}p\mathrm{div}\vec{u} = 0.$$

Энтропия S определена с точностью до замены $h(S) \to S$ (преобразование эквивалентности). Система (1) с учетом уравнения состояния (2) допускает двенадцатимерную алгебру Ли L_{12}. Оптимальная система неподобных подалгебр алгебры Ли L_{12} построена в работе [3].

Используя двумерные подалгебры [3], вычисляются инвариантные подмодели ранга 2 канонического вида [4-6]. Среди полученных подмоделей 15 подмоделей эволюционного типа и 24 подмодели стационарного типа. Для одной переопределенной подмодели ранга 2 эволюционного типа найдены два типа точных решений и представлено движение частиц в целом.

Вычислены инварианты трехмерных подалгебр [3], по которым построены инвариантые подмодели ранга 1 - системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены некоторые точные решения.

Литература

1. *Овсянников Л.В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика,**58**:4 (1994), 30-55.

2. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

3. *Сираева Д.Т.* Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов // Уфимский математический журнал, **6**:1 (2014), 94-107.

4. *Мамонтов Е.В.* Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики // Прикладная механика и техническая физика, **40**:2 (1999), 50-55.

5. *Хабиров С.В.* Аналитические методы в газовой динамике. — Уфа: БГУ, 2013.

6. *Хабиров С.В.* Приведение инвариантной подмодели газовой динамики к каноническому виду // Математические заметки, **66**:3 (1999), 439–444.

МНОГОТОЧЕЧНОЕ НАЧАЛЬНО-КОНЕЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ ПОЗИТИВНЫХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ МОДЕЛЕЙ

Н.Н. Соловьёва
nsolowjowa@mail.ru

УДК 517.9

Исследование позитивных решений для уравнений соболевского типа сегодня - актуальная задача. Основываясь на свойствах банаховых структур, было проведено исследование позитивных решений с многоточечным начально-конечным условием в пространствах последовательностей для математичсеких моделей соболевского типа.

Ключевые слова: позитивные решения, банаховы структуры, многоточечное начально-конечное условие, уравнения соболевского типа, пространства последовательностей

Multipoint Initial-Final Value Condition to Positive Solutions of Degenerate Models

The study of positive solutions for Sobolev type equations is an urgent task today. The research of positive solutions was conducted for mathematical models of Sobolev type in sequence spaces with a multipoint initial-final condition.

Keywords: positive solutions, Banach latices, multipoint initial-final value problem, Sobolev Type equations, sequence spaces

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ [1]. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{1}$$

Многие вырожденные модели, такие, как: модель Баренблатта–Желтова–Кочиной и модель Хоффа, сводятся к уравнениям соболевского типа [2]. Вектор-функцию $u \in C([0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C^1((0,\tau);\mathfrak{U})$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, назовем *решением уравнения* (1), если она удовлетворяет этому уравнению при некотором $f = f(t)$. Решение $u = u(t)$ уравнения (1) назовем *решением многоточечной начально-конечной задачи* [2]

$$\lim_{t\to 0+}(P_0(u(t)-u_0)) = 0, \quad P_j(u(t_j)-u_j) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

если оно вдобавок удовлетворяет условиям (2). Здесь $P : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^1$ вдоль $\mathfrak{U}^0$ – проектор. Далее, пусть $\mathfrak{U}$ – банахова структура [3], порожденная конусом $\mathfrak{U}_+$ [4]. Решение $u = u(t)$ задачи (1), (2) назовем *позитивным*, если $u(t) \in \mathfrak{U}_+$ при любом $t \in [0,\tau)$.

Рассмотрим уравнение соболевского типа вида

$$Lu_t = Mu + f, \tag{3}$$

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление №211 от 16.03.2013 г.), соглашение №02.A03.21.0011.

Соловьёва Наталья Николаевна, аспирант, ЮУрГУ (НИУ) (Челябинск, Россия); Natalya Solovyova (South Ural State University (national research university), Chelyabinsk, Russia)

заданное в соболевских пространствах последовательностей

$$l_q^m = \{u = (u_k) : \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{\frac{mq}{2}} |u_k|^q < \infty\},\ m \in \mathbb{R},\ q \in [1, +\infty). \qquad (4)$$

Причем выполняется соотношение $\deg L \geq \deg M$, которому удовлетворяют степени многочленов с действительными коэффициентами $L = L(\Lambda)$ и $M = M(\Lambda)$. Здесь Λ – перенос оператора Лапласа $-\Delta$ на пространства l_q^m, а $\{\lambda_k : \lambda_k \in \mathbb{R}_+\}$ – монотонно возрастающая последовательность: $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$. Введем в рассмотрение условие [2]

$$\left\{\begin{array}{c} \sigma^L(M) = \bigcup\limits_{j=0}^{n} \sigma_j^L(M),\ n \in \mathbb{N},\ \text{причем } \sigma_j^L(M) \neq \emptyset,\ \text{существует} \\ \text{замкнутый контур } \gamma_j \subset \mathbb{C},\ \text{ограничивающий область } D_j \supset \sigma_j^L(M), \\ \text{такой, что } \overline{D_j} \cap \sigma_0^L(M) = \emptyset,\ \overline{D_k} \cap \overline{D_l} = \emptyset\ \forall j, k, l = \overline{1, n}, k \neq l. \end{array}\right. \qquad (5)$$

Построим операторы $L = L(\Lambda)$ и $M = M(\Lambda)$, где $L(s)$ и $M(s)$ – многочлены с действительными (для простоты) коэффициентами. Если выполнено условие (5), то операторы $L,\ M \in \mathcal{L}(l_q^{m+\deg L}; l_q^m)$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in [1, +\infty)$. Действительно, $||u||_{m+\deg L, q} \geq ||u||_{m+\deg M, q}$, $u \in l_q^{m+\deg L}$, $m \in \mathbb{R}$, $q \in [1, +\infty)$. Отсюда в силу непрерывности вложения $l_q^{m+\deg L} \hookrightarrow l_q^{m+\deg M}$ следует справедливость сказанного.

Лемма 1. *Пусть*
(i) все коэффициенты многочленов $L(S)$ и $M(S)$ положительны;
(ii) выполнено условие $\deg L \geq \deg M$;
(iii) многочлены $L = L(s)$ и $M = M(s)$ имеют только действительные корни и не имеют общих корней.
Тогда оператор M сильно позитивно $(L, 0)$-ограничен.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для любой вектор-функции $f = f(t)$ такой, что $f^0 \in C^1((0, \tau); l_{q,0}^{m+\deg L})$, $-f^0(t) \in (C_q^{m+\deg L} \cap l_q^{m+\deg L})$, $t \in (0, \tau)$, а $f^1 \in C([0, \tau); C_q^{m+\deg L} \cap l_{q,1}^{m+\deg L})$; и любого вектора $u_0 \in C_q^{m+\deg L}$, такого, что $u_0^1 \in C_q^{m+\deg L} \cap l_{q,1}^{m+\deg L}$, существует единственное позитивное решение задачи (1), (2).*

Литература

1. *Свиридюк Г.А.* К общей теории полугрупп / Г.А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т.49, №4. – С.47-74

2. *Solovyova N.N., Zagrebina S.A.* Multipoint Initial-Final Value Problem for Hoff Equation in Quasi-Sobolev Spaces. Journal of Computational and Engineering Mathematics – 2017. – vol. 4, №2. – pp. 73–79.

3. *Banasiak J.* Perturbations of Positive Semigroups with Applications / J. Banasiak, L. Arlotti. – Springer-Verlag: London Ltd, 2006. – 438 p.

4. *Solovyova N.N., Zagrebina S.A., Sviridyuk G.A.* Sobolev Type Mathematical Models with Relatively Positive Operators in the Sequence Spaces. Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics, 2017, vol. 9,№. 4, pp. 27–35.

О ТЕОРЕМЕ ИСКЛЮЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КИНЕТИКИ НА ГРАФАХ

С.И. Спивак, И.А. Тодрамович

Semen.spivak@mail.ru , todr2009@yandex.ru

УДК 66.011

Разнообразие задач, возникающих при математическом моделировании кинетики сложных химических реакций, позволяет установить общность постановки со многими задачами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений в прикладных областях. Типичной в этом смысле является задача определения параметров модели по кинетическим измерениям – обратная кинетическая задача. В настоящей работе формулируется теорема о исключении параметров для моделей нестационарной химической кинетики на графах.

Ключевые слова: обратная кинетическая задача, модели химической кинетики, графы химической кинетики.

On the parameter exclusion theorem for non-stationary chemikal kinetics models on the graphs

All variety of problems emerging in mathematical modeling of kinetic complicated chemical reactions allows to establish common statement with many of problems qualitative theory of ordinary differential equations in application areas. Typical in this meaning is an problem of determination of model parameters by kinetic measurements – inverse kinetic problem. In this paper we formulate the theorem of the parameter exclusion for non-stationary chemical kinetics models.

Keywords: inverse kinetic problem, chemical kinetics models, graphs chemical kinetic.

Рассмотрим модель сложной химической реакции, записанной в соответствии с законом действующих масс:

$$\dot{x} = f(x, y, k), \tag{1}$$

$$\dot{y} = g(x, y, k), \tag{2}$$

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0. \tag{3}$$

Здесь $f(x, y, k)$ и $g(x, y, k)$ являются аналитическими функциями переменных x_i и y_j(многочлены не выше третьей степени), $x \in R^n$, $y \in R^m$ и $k \in R^s$ – вектор параметров, т.е. констант скоростей элементарных стадий.

Расширим систему (1), (2) дифференцированием системы (1) до бесконечной системы, заменяя при каждом дифференцировании производные $\dot{x_i}$ и $\dot{y_j}$ на их правые части в соответствии с (1) и (2). Получим следующую бесконечную систему уравнений:

$$\dot{x} = f(x, y, k),$$

$$\ddot{x} = F_2(x, y, k),$$

Спивак Семён Израилевич, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Semyon Spivak (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Тодрамович Илья Александрович, аспирант 2 г.о., БашГУ (Уфа, Россия); Ilya Todramovich (Bashkir State University, Ufa, Russia)

$$...$$
$$x^N = F_n(x, y, k), \tag{4}$$
$$...$$

Пусть t_k - нули якобиана правых частей первых N подсистем уравнений системы (4) на интервале $(0, T)$ и $I = (0, T) \backslash (t_k)$.

Теорема 1. *Пусть решение задачи Коши (1) – (3) продолжены на* $(0, T)$*. Тогда на интервале* I *система дифференциальных уравнений (1) – (2) с начальными условиями (3) эквивалентна следующей системе:*

$$x^{(m+1)} = \overline{F_{m+1}}(x^{(m)}, ..., x, k),$$

$$\dot{y} = g(x, y, k)$$

с начальными условиями

$$y(t_0) = y_0,$$

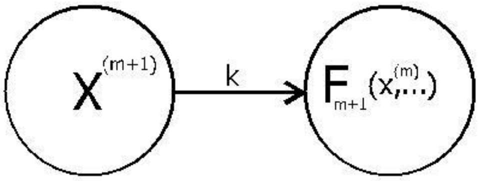
$$x(t_0) = x_0,$$

$$\dot{x}(t_0) = f(x_0, y_0, k_0) = x_{1,0},$$

$$...$$

$$x^{(m)}(t_0) = F_m(x_0, y_0, k_0) = x_{m,0}.$$

и можно построить граф вида:



где $(m + 1)$ *– индексация вершин графа, т.е. минимальной порядок производной от концентрации, скорость их включения в процесс протекания сложной реакции.*

Литература

1. *Асадуллин Р.М., Спивак С.И.* О критериях определения констант фазовых равновесий. т.54. N4 — Журнал физической химии. 1980, с.890-893.

2. *Исмагилова А.С., Спивак С.И.* Математическое моделирование химических процессов — Уфа: РИЦ БашГУ, 2014.

3. *Лукашенок В.Н.* О разрешимости задач определения кинетических констант сложной химической реакции при неполной информации о векторе концентраций. // ТОХТ. Т.14. N1, 1980, с.86-90.

4. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений// М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1950.

СИММЕТРИИ И ОБОБЩЕННЫЕ ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.Я. Старцев
startsev@anrb.ru

УДК 517.957

Рассматриваются гиперболические системы, состоящие из n уравнений в частных производных и допускающие драйверы симметрий (то есть дифференциальные операторы, которые переводят любую функцию одной из независимых переменных в симметрию соответствующей системы). Доказано, что все множество драйверов симметрий порождается базисным набором, состоящим не более чем из n драйверов симметрий. Также доказано, что если система допускает драйвер симметрий порядка $k-1$ и для нее корректно определены обобщенные инварианты Лапласа, то старший коэффициент драйвера лежит в ядре k-го инварианта Лапласа.

Ключевые слова: высшие симметрии, инварианты Лапласа, интегрируемость по Дарбу

Symmetries and generalized Laplace invariants of hyperbolic systems

The present text is devoted to hyperbolic systems which consist of n partial differential equations and possess symmetry drivers (i.e. differential operators that map any function of one independent variable into a symmetry of the corresponding system). We prove that the entire set of the symmetry drivers is generated from a basis set consisting of no more than n symmetry drivers. It is also proved that if a system admits a symmetry driver of order $k-1$ and generalized Laplace invariants are well-defined for this system, then the leading coefficient of the driver belongs to the kernel of the k-th Laplace invariant.

Keywords: higher symmetries, Laplace invariants, Darboux integrability

Рассмотрим систему уравнений в частных производных

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y), \tag{1}$$

где $u = (u^1; u^2; \ldots; u^n)$ и $F = (F^1; F^2; \ldots; F^n)$ являются n-мерными векторами. Смешанные частные производные u мы можем исключить с помощью системы (1) и ее дифференциальных следствий. Поэтому можно считать все локальные объекты (такие как симметрии и коэффициенты дифференциальных операторов) зависящими только от x, y, u и ее “несмешанных” производных $\partial^i u/\partial x^i$, $\partial^j u/\partial y^j$. В дальнейшем мы будем использовать обозначение $g[u]$ когда хотим указать, что g является функцией от конечного числа вышеуказанных переменных. Через D_x и D_y обозначим полные производные по x и y в силу системы (1).

В скалярном случае одним из наиболее известных нелинейных уравнений вида (1) является уравнение Лиувилля $u_{xy} = e^u$. Оно обладает многими интересными свойствами и, в частности, как показано в работе [1], допускает дифференциальные операторы $\sigma = D_x + u_x$ и $\bar{\sigma} = D_y + u_y$, отображающие $\ker D_y$ и $\ker D_x$ в решения f линеаризованного уравнения Лиувилля $D_x D_y(f) = e^u f$ (то есть в симметрии уравнения Луивилля).

Старцев Сергей Яковлевич, к.ф.-м.н., Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Sergey Ya. Startsev (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre of RAS, Ufa, Russia)

Аналогичным свойством обладают и многие интегрируемые системы вида (1). Например, рассмотрим систему

$$u^1_{xy} = \frac{u^2 u^1_x u^1_y}{u^1 u^2 + c}, \qquad u^2_{xy} = \frac{u^1 u^2_x u^2_y}{u^1 u^2 + c},$$

где c – ненулевая константа. Операторы

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} u^1_x \\ \\ u^2_x \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} \frac{u^1_x}{w} \\ \\ 0 \end{pmatrix} D_x + \begin{pmatrix} -u^1 \\ \\ u^2 \end{pmatrix},$$

где $\omega = u^1_x u^2_x/(u^1 u^2 + c)$, переводят любую скалярную функцию из $\ker D_y$ в симметрию этой системы. Подобные операторы, переводящие ядра D_y и D_x в симметрии системы (1), в дальнейшем мы будем назвать *драйверами* x- и y-*симметрий* соответственно.

Пусть символ $\circ$ обозначает операцию композиции операторов. Если оператор S является драйвером x-симметрий, то $S \circ \Omega$ также является драйвером x-симметрий для любого оператора $\Omega = \sum_{i=0}^{m} w_i[u] D^i_x$, такого что скалярные функции w_i лежат в ядре D_y. Аналогичное верно и для драйверов y-симметрий. Таким образом, если система (1) допускает драйверы симметрий, то их имеется бесконечно много и возникает вопрос о том, как компактно описать это множество: не удается ли породить все это множество с помощью вышеописанной композиции из некоторого конечного числа базисных драйверов симметрий? И если да, то сколько драйверов симметрий нужно для этого базисного набора (достаточно ли, например, n штук по каждой из характеристик или же их может быть и больше)? Ответ на эти вопросы получен: доказано, что множество драйверов симметрий порождается базисным набором, состоящим не более чем из n драйверов симметрий, сумма порядков которых является минимальной из возможных.

Также доказано, что если система (1) допускает драйвер симметрий порядка $k-1$ и для нее корректно определены обобщенные инварианты Лапласа, то старший коэффициент драйвера симметрий лежит в ядре k-го инварианта Лапласа. Опираясь на это утверждение, мы можем, посчитав инварианты Лапласа системы (1), получить оценку снизу для минимальных порядков драйверов симметрий этой системы и проверить можем ли мы гарантировать, что тот или иной набор драйверов является базисным. Более подробно вышеуказанные результаты изложены в [2].

Литература

1. *Жибер А.В., Шабат А.Б.* Уравнения Клейна-Гордона с нетривиальной группой // Докл. АН СССР, **247**:5 (1979), 1103-1107.

2. *Старцев С.Я.* Структура множества симметрий гиперболических систем лиувиллевского типа и обобщенные инварианты Лапласа // Уфимский мат. журнал, **10**:4 (2018), 103-110.

ИЗОМОНОДРОМНОЕ КВАНТОВАНИЕ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ ПОСРЕДСТВОМ АВТОНОМНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Б.И. Сулейманов
bisul@mail.ru

УДК 517.925.51

Строятся решения временных уравнений Шредингера, определяемых автономными гамильтоновыми системами с двумя степенями свободы, общие решения которых выписываются через решения второго уравнения Пенлеве. Эти решения уравнений Шредингера задаются через решения систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений метода изомонодромных деформаций, условием совместности которых является второе уравнение Пенлеве.

Ключевые слова: гамильтоновы системы, квантование, уравнение Шредингера, второе уравнение Пенлеве, изомонодромные деформации

Isomonodromic quantization of the first and the second Painlevé equations by autonomous Hamiltonian systems with two degrees of freedom

In the paper we have obtained the solutions of two non-stationar Schrödinger equations defined by autonomous Hamiltonian systems with two degrees of common, whose common solutions are written out in terms of the first and the second Painleve equations. These solutions are expressed as solutions of the systems of linear ordinary differential equations of the method of isomonodromic deformations for the first and the second Painlevé equations.

Keywords: Hamiltonian systems, quantization, Schrödinger equation, Painlevé equations, isomonodromic deformations

Построены гладкие решения уравнений Шредингера $i\hbar\Psi_\tau = H(x,y,-i\hbar\frac{\partial}{\partial x},-i\hbar\frac{\partial}{\partial y})\Psi$, соответствующих автономным гамильтоновым системам с двумя степенями свободы, общие решения которых выписываются через решения второго уравнения Пенлеве. Эти решения уравнений Шредингера задаются через фундаментальные решения систем линейных уравнений метода изомонодромных деформаций, условием совместности которых является второе уравнение Пенлеве $\varphi''_{\tau\tau} = \varphi^3 + \tau\varphi$. Часть из построенных решений уравнений Шредингера являются глобально гладкими и стремятся к нулю при $x^2 + y^2 \to \infty$, если данные решения линейных систем метода изомонодромных деформаций совместны на так называемых 1-усеченных решениях этого второго уравнения Пенлеве [1].

Литература

1. *Новокшенов В.Ю.* “Усеченные решения уравнения Пенлеве II” ТМФ, 172:2 (2012) С.296-307; V. Yu. Novokshenov, “Tronqueé solutions of the Painlevé II equation”. Theoret. and Math. Phys., 172:2 (2012), 1136–1146.

Сулейманов Булат Ирекович, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Bulat Suleimanov (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, Russia)

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ, СУММИРУЕМЫХ С КВАДРАТОМ НА ОТРЕЗКЕ

И.Ф. Султангужина
sultanguzhina.ilsyuyar@yandex.ru

УДК 517.51

Рассматриваются системы из экспонент в пространстве функций, суммируемых с квадратом на отрезке вещественной оси и весом, определяемым выпуклой функцией. Получены условия полноты.

Ключевые слова: система экспонент, весовые гильбертовы пространства, функции типа синуса

The completeness of systems of exponents in the space of functions cumulative with the square on the segment

Consider systems of exponent in the space of functions cumulative with the square on the segment of the real axis and with weight determined by convex function. Obtained the conditions of completeness.

Keywords: system of exponents, weighted Hilbert spaces, sine type functions

В работе изучается весовое пространство $L^2(h, I)$ функций, суммируемых с квадратом и весом $e^{-2h(x)}$, где $I = (a; b) \subset \mathbb{R}$, $h(x)$ — выпуклая функция на $(a; b)$, для которых конечен $\int_I |f(x)|^2 e^{-2h(x)} dx < +\infty$.

Классическое пространство $L^2(-\pi; \pi)$ получим, если $h(x) = 0$ при $I = (-\pi; \pi)$.

Для удобства можно считать, что для выпуклой функции $h(x) = +\infty$ при $x \notin I$. Тогда вместо $\int_I |f(x)|^2 e^{-2h(x)} dx$ можно писать $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 e^{-2h(x)} dx$.

В пространстве $L^2(h, I)$ введена норма $||f|| = \left(\int_I |f(x)|^2 e^{-2h(x)} dx\right)^{1/2}$. Как известно [1], система экспонент $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ образует ортогональный базис в $L^2(-\pi; \pi)$. В общем случае ортогонального базиса из экспонент в пространстве $L^2(h, I)$ не существует.

Пространство $L^2(h, I)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_I f(x)\overline{g(x)} e^{-2h(x)} dx.$$

В работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если система экспонент $\{e^{\lambda_n x}\}_{n=1}^{+\infty}$, где λ_1, ..., λ_n – фиксированные комплексные числа, является безусловным базисом в пространстве $L^2(h, I)$, то существует целая функция $L(\lambda)$ с простыми нулями в точках λ_n, $n = 1, 2, \ldots$, для которой выполнена оценка*

$$\frac{1}{p} K(\lambda) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|L(\lambda_n)|^2 K(\lambda_n)}{|L'(\lambda_n)|^2 |\lambda - \lambda_n|^2} \le p K(\lambda),$$

где $K(\lambda) = ||e^{\lambda x}||^2$, p – некоторая положительная константа.

Теорема 2. *Пусть h – выпуклая функция на ограниченном интервале $I \subset \mathbb{R}$, u – выпуклая функция на $\mathbb{R}$. Пусть $L(\lambda)$ – функция типа синуса,*

Султангужина Ильсюяр Фаритовна, магистрант, БашГУ (Уфа, Россия); Ilsyuyar Sultanguzhina (Bashkir State University, Ufa, Russia)

построенная по функции $u(x)$ *(см. [3]), с простыми нулями в точках* λ_n, $n = 1, 2, \ldots$. *Система экспонент* $\{e^{\lambda_n x}\}_{n=1}^{+\infty}$ *полна в пространстве* $L^2(h, I)$ *тогда и только тогда, когда не существует нелинейной выпуклой функции* v *на* $\mathbb{R}$, *которая удовлетворяет условию*

$$v(x) + u(x) \leq \tilde{h}(x), \forall x \in \mathbb{R}, \tilde{h}(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}}(xt - h(t)).$$

Литература

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа — М.: Наука, 1975. —543 с.

2. *Башмаков Р.А., Махота А.А., Трунов К.В.* Об условиях отсутствия безусловных базисов из экспонент // Уфимский математический журнал. — 2015. — Т. 7. — №2. — С. 19-34.

3. *Путинцева А.А.* Базисы Рисса в весовых пространствах. — Уфимский математический журнал. — 2011. — Т. 3. — №1. — С. 47-52.

БЕЗУСЛОВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ С ДВУМЯ ВЕСАМИ ДЛЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

М.А.Султанов

murat.sultanov@ayu.edu.kz

УДК 519.693

В работе рассмотрены вопросы устойчивости абстрактной трехслойной разностной схемы с двумя весами. Метод исследования основана на получении дискретных аналогов априорных весовых оценок карлемановского типа. На основе устойчивости разностной схемы построены безусловно устойчивые разностные схемы, аппроксимирующие некорректную задачу Коши, которая связана с одномерной коэффициентной обратной задачей. Доказана теорема сходимости решение разностой схемы к точному решению.

Ключевые слова: разностная схема, финитная устойчивость, некорректная задача, безусловная устойчивость

Unconditionally stable three-layer difference scheme with two weights for ill-posed Cauchy problem

In the paper we consider stability of an abstract three-layer difference scheme with two weights. The research method is based on obtaining discrete analogs of a priori weight Carleman type estimates. On the basis of stability of the difference scheme, unconditionally stable difference schemes have been constructed that approximate the ill-posed Cauchy problem, which is associated with the one-dimensional coefficient inverse problem. The convergence theorem is proved for the solution of a difference scheme to an exact solution.

Keywords: difference scheme, finite stability, ill-posed problem, unconditional stability

Основной результат настоящей работы связано с построением безусловно устойчивой разностной схемы для следующей некорректной задачи Коши [1, 2]:

$$w_{tt} + iw_x = \tilde{a}_1(t,x)w - 2ixw_t + Kw + f(t,x), \tag{1}$$

$$w(0,x) = \mathsf{g}(x),\ w_t(0,x) = 0). \tag{2}$$

Здесь

$$Kw = K_0 w + K_1 w,$$

$$K_0 w(t,x) = \pm \int\limits_{t-x^2}^{t} \frac{\tilde{K}(\eta, x, \pm\sqrt{\eta - t + x^2}) w(\eta, \pm\sqrt{\eta - t + x})}{2\sqrt{\eta - t + x^2}} d\eta,$$

$$K_1 w(t,x) = \pm \int\limits_{t-x^2}^{t} \frac{\tilde{K}_1(\eta, x, \pm\sqrt{\eta - t + x^2}) w_\eta(\eta, \pm\sqrt{\eta - t + x^2})}{2\sqrt{\eta - t + x^2}} d\eta.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерство образования и науки Республики Казахстан (проект № AP05133873).

Султанов Мурат Абдукадырович, к.ф.-м.н., доцент, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави (Туркестан, Казахстан); Murat Sultanov (Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan)

Построение устойчивой разностной схемы для задачи (1), (2) основана на устойчивости абстрактной «возмущенной» трехслойной разностной схемы с двумя весами. Доказательство устойчивости проводится с использованием дискретных аналогов метода априорных весовых оценок карламановского типа [3]. Ввиду сложности получения априорных оценок для трехслойной разностной схемы она расщепляется на систему двухслойных разностных схем методом факторизации и для этих схем получены теоремы устойчивости.

Литература

1. *Bukhgeim A.L.* Introduction to the Theory of Inverse Problem, VSP, Mouton De Gruyter, Germany, 2000.

2. *Sultanov M.A.* Stability of three-layer difference scheme // Siberian Electronic Mathematical Reports, Vol. 12, (2015), 28-44, DOI 10.17377/semi.2015.12.004

3. *Klibanov M.V. and Timonov A.* Carleman Estimates for Coefficient Inverse Problems and Numerical Applications, VSP, Utrecht, The Netherlands, 2004.

РАЗРАБОТКА АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СДУ БЕНДЖАМИНА–БОНА–МАХОНИ С ШУМОМ В ДИСПЕРСИИ

Д.А. Сучкова
dil9ara@rambler.ru

УДК 519.21, 517.957, 517.955.2

Разработан новый аналитический метод решения стохастического дифференциального уравнения Бенджамина–Бона–Махони (BBM) с шумом в дисперсии, который сводится к решению трех уравнений: линейного уравнения в частных производных 3 порядка, нелинейного уравнения в частных производных 3 порядка и уравнения Фредгольма 1 рода. На основе разработанного метода доказана теорема существования и единственности решения СДУ BBM.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ), уравнение длинной волны, уравнение соболевского типа, уравнение Бенджамина–Бона–Махони (BBM), стохастическое уравнение BBM с шумом в дисперсии, дисперсия волн

Development of the analytical solution method and the proof of the theorem on the existence and uniqueness of a solution to the Cauchy problem for the Benjamin–Bona–Mahony SDE with dispersion noise

The new analytical method has been developed for solving the Benjamin–Bona–Mahony (BBM) stochastic differential equation with dispersion noise, which reduces to solving three equations: a linear equation in partial derivatives of the third order, a nonlinear partial differential equation of the third order, and a Fredholm equation of the first kind. Based on the developed method, the existence and uniqueness theorem for the solution of the BBM SDE is proved.

Keywords: stochastic differential equation (SDE), long wave equation, Sobolev type equation, Benjamin–Bona–Mahony equation (BBM), stochastic equation BBM with noise in the dispersion, wave dispersion

Детерминированное уравнение BBM (Бенджамина–Бона–Махони)

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \tag{1}$$

как приближение для описания однонаправленного распространения волн с малой амплитудой и большой длиной в нелинейных дисперсивных системах, по сравнению с известным уравнением Кордевега-де-Фриза обладает рядом преимуществ [1], в частности фазовая и групповая скорости, соответствующие линеаризованному уравнению BBM (1) ограничены для любых волновых чисел, более того, стремятся к нулю при больших волновых числах.

Стохастическое уравнение BBM (регуляризованное уравнение длинной волны) с дисперсией в виде белого шума:

$$d_t u - d_t u_{xx} + u_x dt + u_x * dW + uu_x dt = 0, u(x,0,0) = u_0, (x,t) \in \mathbf{R} \times [\mathbf{0}, \mathbf{T}], \tag{2}$$

Сучкова Дилара Айратовна, магистр прикладной математики и информатики, специалист, ООО "РН-БашНИПИнефть" (Уфа, Россия); Dilara Suchkova (Master of Applied Mathematics and Computer Science, Specialist, LLC "RN-BashNIPIneft ", Ufa, Russia)

короткий вариант которого предложен в статье [2], являтся более адекватной моделью конкретных физических явлений, которые носят стохастический характер. Уравнение (2) обладает тем преимуществом, что если шум незначителен, оно является детерминированным уравнением (1).

В работе показано, что решение уравнения (2) сводится [3] к решению цепочки следующих уравнений:

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0, \qquad u_v + u_x - u_{xxv} = 0, \tag{3}$$

которые являются детерминированными, решением уравнений является функция трех переменных $u(x, t, v)$, при $v = W(t)$. Причем первое уравнение из цепочки - классическое (нелинейное) уравнение BBM на переменные t и x, где v выступает в роли параметра, а второе уравнение - линейное уравнение BBM на переменные v и x, где t выступает в роли параметра.

Применим преобразование Фурье по x для второго уравнения из (3):

$$u(x,t,v) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{C}(t,y)\, G(v, x-y)\, dy,$$

где $G(v, x-y)$ – Фурье-образ функции $e^{\frac{ipv}{1+p^2}}$. Последний интеграл является сверткой. Таким образом, фундаментальным решением линейного уравнения BBM является свертка двух функций. Получаем линейное интегральное уравнение Фредгольма 1 рода с разностным ядром и неизвестной функцией $\hat{C}(t, y)$:

$$\bar{u}(x,t,W(t)) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{C}(t,y)\, G(W(t), x-y)\, dy, \tag{4}$$

где $\bar{u}(x, t, W(t))$ - частное решение нелинейного уравнения BBM из (3), удовлетворяющее начальным условиям с учетом условия $v = W(t)$. Тогда решение $\bar{u}(x, t, W(t))$ существует и единственно в силу теоремы для детерминированного нелинейного уравнения BBM, доказанной в статье [1].

Теорема 1. *Решение стохастического уравнения длинной волны BBM с шумом в дисперсии (2) существует и единственно в классе функций, являющемся пересечением трех классов: класса функций, для которых определено единственное решение нелинейного уравнения BBM (3), класса функций, для которых определено единственное решение линейного уравнения BBM (3), и класса функций, для которых определено единственное решение линейного уравнения Фредгольма (4). Существенно, что в качестве случайной функции можно брать не только винеровский процесс, но и произвольную непрерывную с вероятностью 1 случайную функцию (реализацию случайного процесса), которая имеет неограниченную вариацию.*

Литература

1. *Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. Roy. Soc. London A 272 (1972), 47–78.

2. *Chen M., Goubet O., Mammeri Y.* Generalized regularized long wave equation with white noise dispertion // Stoch PDE: Anal Comp DOI 10.1007/s40072-016-0089-7 (2017) No. 5, 319–342.

3. *Насыров Ф.С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 212 с.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОДНОЙ СПИНОВОЙ МОДЕЛИ И ДВУХКОМПОНЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ КАМАССА-ХОЛМ

А.Г. Тайшиева, Г.Н. Нугманова, Т.Р. Мырзакул

aigulustaz@gmail.com, nugmanovagn@gmail.com

УДК 517.951, 517.957

Установлена калибровочная эквивалентность между спиновой моделью Мырзакулова-CVI и двухкомпонентным уравнением Камасса-Холм.

Ключевые слова: нелинейные эволюционные уравнения, условие нулевой кривизны, калибровочная эквивалентность

On the equivalence of one spin model and the two-component Camassa-Holm equation

A gauge equivalence between the Myrzakulov–CVI spin model and the two-component Camassa–Holm equation is established.

Keywords: nonlinear evolution equations, zero curvature condition, gauge equivalence

Теория многокомпонентных интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений привлекли в последнее время немалого количества исследователей в области теории солитонов [1-2]. Одним из таких моделей является двухкомпонентное уравнение Камасса-Холм (УКМ) [3]

$$m_t + um_x + 2mu_x - \rho\rho_x = 0, \tag{1a}$$

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{1b}$$

где $u = u(x,t)$, $\rho = \rho(x,t)$ and $m = m(x,t) \equiv u - u_{xx} + k^2$ - действительные функции от t и x.

УКМ (1) является условием совместности системы уравнений

$$\Phi_{xx} = \left(\frac{1}{4} - m\lambda + \rho^2\lambda^2\right)\Phi,$$

$$\Phi_t = -\left(\frac{1}{2\lambda} + u\right)\Phi_x + \frac{u_x}{2}\Phi,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (Договор № 132 от 12.03.18).

Тайшиева Айгуль Галимжановна, докторант PhD, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Aigul Taishiyeva (L.N.Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Нугманова Гулгасыл Нукарбаевна, к.ф.-м.н., доцент, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Gulgassyl Nugmanova (L.N.Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Мырзакул Толкынай Ратбайкызы, PhD, доцент, КазНЖПУ (Нур-Султан, Казахстан); Tolkynay Myrzakul (Kazakh National Women's teacher training University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

где λ - спектральный параметр.

Теорема 1. *Если*

$$U=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \lambda \\ m\lambda+\rho^2\lambda^3 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

и

$$V=\begin{pmatrix} \frac{u+u_x}{2}-\frac{1}{4\lambda^2} & \frac{1}{2\lambda}-u\lambda \\ \frac{m+u_x+u_{xx}}{2\lambda}-um\lambda+\frac{\lambda\rho^2}{2}-\lambda^3u\rho^2 & \frac{1}{4\lambda^2}-\frac{u+u_x}{2}\end{pmatrix}$$

удовлетворяют условию нулевой кривизны

$$U_t-V_x+[U,V]=0,$$

тогда двухкомпонентное УКХ (1) является калибровочно эквивалентным спиновой моделью

$$[A,A_{xt}+(uA_x)_x]-\frac{1}{\beta^2}A_x-4\beta\rho\rho_xZ=0,$$

где

$$m=\frac{det(A_x^2)}{4\beta^2}=u-u_{xx},\quad \rho^2=-\frac{tr(A_x^2)+2det(A_x)}{8\beta^4},$$

$u=0.25\beta^{-2}(1-\partial_x^2)^{-1}det(A_x^2)$ *- действительные функции,* $\beta=const$ *и*

$$Z=-\frac{0.5\beta}{u_x+u_{xx}}\left[A,A_t+\left(u-0.5\beta^{-2}\right)A_x\right],\quad \vec{A}=(A_1,A_2,A_3),$$

$$A=\begin{pmatrix} A_3 & A^- \\ A^+ & -A_3\end{pmatrix},\quad A^\pm=A_1\pm iA_2,\quad A^2=I,\quad \vec{A}^2=1.$$

Литература

1. *Myrzakul A., Myrzakulov R.* Integrable motion of two interacting curves, spin systems and the Manakov system // Int.Jour. Geom. Meth. Mod. Phys., **14**:7 (2017), 1750115.

2. *Kostov N., Dandoloff R., Gerdjikov V., Grahovski G.* The Manakov System as Two Moving Interacting Curves // Eds.: Sekigawa K., Dimiev S. Proc. Int. Workshop "Complex structures and vector fields". — World Scientific (2007).

3. *Camassa R., Holm D.D.* An Integrable Shallow Water Equation with Peaked Solitons. — Phys. Rev. Lett., **71** (1993), 1661-1664.

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В СЛОЕ, ЗАПОЛНЕННОМ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДОЙ.

С.В. Тихов
Tik.Stanislav2015@yandex.ru

УДК 517.927.4; 517.988.57

В статье рассматривается нелинейная задача на собственные значения для системы обыкновенных дифференцилаьных уравнений, возникающая в теории волноводов. Нелинейность характеризуется двумя неотрицательными коэффициентами α и β. При $\alpha = \beta = 0$ получаем линейную задачу, которая имеет конечное число (положительных) собственных значений. Доказано, что при $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$ существует бесконечное число положительных собственных значений, указана их асимптотика. Также доказано, что при $\alpha = 0, \beta > 0$ существует конечное число собственных значений.

Ключевые слова: нелинейная задача на собственные значения, квазилинейное дифференциальное уравнение, асимптотика собственных значений, теорема сравнения.

Nonlinear eigenvalue problem for Maxwell's equations in a layer filled with nonlinear medium.

Nonlinear eigenvalue problem for the system of ordinary differential equations that arises in electromagnetics is studied. Nonlinearity is characterised by two nonnegative coefficients α and β. For $\alpha = \beta = 0$ one obtains linear problem that has a finite number of positive eigenvalues. It is proved that for $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$ there exist infinitely many positive eigenvalues and its asymptotic is found. Also it is proved that for $\alpha = 0, \beta > 0$ there exist a finite number of eigenvalues.

Keywords: nonlinear eigenvalue problem, quasilinear differential equation, asymptotic of eigenvalues, comparison theorem.

Пусть $\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma, h$ – положительные, а α, β – неотрицательные вещественные параметры. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} -Z''(x) + \gamma X'(x) = \big(\varepsilon_z + \beta X^2(x) + \alpha Z^2(x)\big) Z(x), \\ -Z'(x) + \gamma X(x) = \gamma^{-1}\big(\varepsilon_x + \alpha X^2(x) + \beta Z^2(x)\big) X(x), \quad x \in [0, h]. \end{cases} \tag{1}$$

Задача Q заключается в нахождении тех положительных значений параметра $\gamma = \widehat{\gamma}$, для которых существуют (нетривиальные) решения $X \equiv X(x;\widehat{\gamma})$, $Z \equiv Z(x;\widehat{\gamma})$ системы уравнений (1), удовлетворяющие краевым условиям

$$\begin{aligned} &Z(0;\widehat{\gamma}) = 0, \quad X(0;\widehat{\gamma}) = X_0 > 0, \\ &Z(h;\widehat{\gamma}) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где X_0 – некоторая постоянная, которая будет выбрана специальным образом, см. п. 2.2 в работе [1]; при этом предполагается, что.

$$X \in C^1[0, h], \quad Z \in C^2[0, h]. \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-71-10015).

Тихов Станислав Вячеславович, лаборант-исследователь, ПГУ (Пенза, Россия); Stanislav Tikhov (Penza State University, Penza, Russia)

Определение 1. *Число* $\gamma = \widehat{\gamma} > 0$ *такое, что существуют (нетривиальные) функции* $X \equiv X(x;\widehat{\gamma})$, $Z \equiv Z(x;\widehat{\gamma})$, *которые удовлетворяют системе уравнений* (1), *а также условиям* (2), (3), *будем называть собственным значением задачи* Q, *а функции* $X(x;\widehat{\gamma}), Z(x;\widehat{\gamma})$, *соответствующие этому собственному значению, – собственными функциями задачи* Q.

Доказано, что задача Q имеет бесконечное число положительных собственных значений $\widehat{\gamma}_i$ с точкой накопления на бесконечности при $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$ и конечное число собственных значений $\widehat{\gamma}_i \in (0, \sqrt{\varepsilon_x})$ при $\alpha = 0$, $\beta > 0$.

При этом линейная задача (при $\alpha = \beta = 0$) имеет лишь конечное число положительных собственных значений $\widetilde{\gamma}_i \in (0, \sqrt{\varepsilon_x})$. Отсюда следует неприменимость метода возмущения для отыскания собственных значений $\widehat{\gamma} \geqslant \sqrt{\varepsilon_x}$ задачи Q. В связи с этим определенный интерес представляет указанная в [1] асимптотическая формула, которая позволяет оценить снизу и сверху собственные значения задачи Q при достаточно больших γ.

Литература

1. *Валовик Д.В., Тихов С.В.* Асимптотический анализ нелинейной задачи на собственные значения, возникающей в теории волноводов // Дифференциальные уравнения **55**, 2019 (принята к печати).

ЗАДАЧА ФЛОРИНА С ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Р.Н.Тураев
rasul.turaev@mail.ru

УДК 517.956

В данной работе рассматривается задача со свободной границей типа Флорина с двумя свободными границами. Для искомого решения установлены априорные оценки Шаудеровского типа. На основе полученных оценок доказаны теоремы единственности и существования.

Ключевые слова: Задача Флорина, поведение свободной границе, задача со свободной границей, априорные оценки, неподвижная точка

Florin's problem with two free boundaries

In this paper, we consider a problem with a free boundary of Florin type with two free borders. For the desired solution a priori estimates of the Schauder type are established. Based obtained estimates are proved uniqueness and existence theorems.

Keywords: Florin problem, free boundary behavior, free boundary problem, a priori estimates, fixed point

В настоящей время в современной науке рассматривается новые классы задач со свободной границей с двумя свободными границами, которые возникают в природных моделях, описывающие медико- биологические, экологические и химические процессы [1,2].

В данной работе изучается задача со свободной границей типа Флорина с двумя свободными границами для квазилинейного параболического уравнения.

Постановка задачи. Требуется найти функции $h\left(t\right)$, $s\left(t\right)$, $u\left(t,x\right)$ в области $D=\left\{(t,x):0<t\leq T,h\left(t\right)<x<s\left(t\right)\right\}$, удовлетворяющие условиям

$$u_t(t,x)=a(u)u_{xx}(t,x)+bu_x^2(t,x),\quad (t,x)\in D,\tag{1}$$

$$u\left(0,x\right)=u_0\left(x\right),\quad h_0\leq x\leq s_0,\tag{2}$$

$$u\left(t,s\left(t\right)\right)=0,\quad 0\leq t\leq T,\tag{3}$$

$$u\left(t,h\left(t\right)\right)=0,\quad 0\leq t\leq T,\tag{4}$$

$$u_x\left(t,s\left(t\right)\right)=p_1,\quad 0\leq t\leq T,\tag{5}$$

$$u_x\left(t,h\left(t\right)\right)=p_2,\quad 0\leq t\leq T,\tag{6}$$

где $h\left(0\right)=h_0=-s_0$, $s\left(0\right)=s_0$; $x=h\left(t\right)$ и $x=s\left(t\right)-$ свободные (неизвестные) границы, которые определяются вместе с функцией $u\left(t,x\right)$.

Относительно данных задач в работе предполагаем, что для заданных функций выполнены следующие основные условия:

1. Функции $a\left(u\right)$,$a'\left(u\right)$ и $a''\left(u\right)$ определены и непрерывны для любого значения аргумента и ограничены на любом замкнутом множестве аргументов, причем $a\left(u\right)\geq a_0>0$;

Тураев Расул Нортожиевич, к.ф.м.н.,с.н.с Институт математики АНРУз (Ташкент, Узбекистан); Rasul Turaev (Institute of Mathematics ANRUz, Tashkent, Uzbekistan)

2. Постоянные удовлетворяют следующие неравенства $s(0) = s_0 > 0, h(0) = h_0 = -s_0, p_1 \geq p_2 > 0, b \leq 0$;

3. $\varphi(x)$ трижды непрерывная функция, а также $\varphi'''(x)$ удовлетворяют условию Гельдера;

4. Выполнены условия согласования в угловых точках (в.т.ч., в рассматриваемых вспомогательных задачах). В частности

$$\varphi(s_0) = 0, \varphi(h_0) = 0, \varphi'(s_0) = p_1, \varphi'(h_0) = p_2$$

Исследование проводится по следующей схеме. Сначала устанавливаются некоторые априорные оценки для решений $s(t), h(t), u(t,x)$ и их производные. Чтобы оценить $u_x(t,x)$, а также исследовать характер и гладкость свободные границы $s(t)$ и $h(t)$ мы перейдем к задаче типа Стефана. Продифференцировав уравнение (1) в D по x, для $u_x(t,x) = v(t,x)$ получим следующую задачу

$$v_t(t,x) = a(u)v_{xx}(t,x) + a'_u(u)v(t,x) \cdot v_x(t,x) + 2b \cdot v(t,x) \cdot v_x(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{7}$$

$$v(0,x) = \varphi'(x), \quad h_0 \leq x \leq s_0, \tag{8}$$

$$v(t, s(t)) = p_1, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{9}$$

$$v(t, h(t)) = p_2, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{10}$$

$$\dot{s}(t) = -\frac{a(0)}{p_1} v_x(t, s(t)) - bp_1, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{11}$$

$$\dot{h}(t) = -\frac{a(0)}{p_2} v_x(t, h(t)) - bp_2, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{12}$$

Сначала установим некоторые априорные оценки шаудеровского типа, которые будут использованы при доказательстве глобальной разрешимости задач (1)-(6) и (7)-(12) в классе $C^{2+\alpha}$. Предварительно установим все необходимые для этого оценки.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(x) \leq 0, \varphi'(x) \geq p_1 \geq p_2 > 0, b < 0$ и выполнены условия 1-4. Тогда в $\bar{D}$ справедливы следующие оценки*

$$-M_1 = -\max_x |\varphi(x)| \leq u(t,x) \leq 0, \tag{13}$$

$$0 < p_2 \leq p_1 \leq v(t,x) = u_x(t,x) \leq \max_x |\varphi'(x)| = M_2. \tag{14}$$

Теорема 1. *Пусть $s(t), h(t), v(t,x)$ является решением задачи (7)-(12), а также $a'_u(u) \leq 0$ и выполнены условия леммы 1. Тогда существуют положительные постоянные N_1, N_2 для которых справедливы следующие оценки*

$$0 < \dot{s}(t) \leq N_1, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{15}$$

$$0 < -\dot{h}(t) \leq N_2, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{16}$$

Литература

1. *Guo J.S., Wu C.H.* Dynamics for a two-species competition-diffusion model with two free boundaries //Nonlinearity, 2015.vol. 28. pp.1-27.

2. *Lincoln Chayes and Inwon C. Kim.* A Two-Sided Contracting Stefan Problem // Communications in Partial Differential Equations, 2008. 33:12, pp. 2225-2256.

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Ф.Р. Турсунов
farhod.tursunov.76@mail.ru

УДК 517.946

В статье изучается продолжения решения задачи Коши для уравнения Лапласа в области G по ее известным значениям на гладкой части S границы ∂G . Рассматриваемая задача относится к задачам математической физики, в которых отсутствует непрерывная зависимость решений от начальных данных.

Ключевые слова: Задача Коши, некорректные задачи, функция Карлемана, регуляризованные решения, регуляризация, формулы продолжения,

Keywords:

Пусть G- ограниченная односвязная область в R^3 с границей ∂G, состоящей из компактной связной части T плоскости $y_3 = 0$ и гладкокого куска поверхности S Ляпунова лежащей в полупространстве $y_3 > 0$. Положим $\overline{G} = G \cup \partial G, \quad \partial G = S \cup T$, d/dn- оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂G.

В области G рассмотрим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_3^3} = 0 \tag{1}$$

с начальными услвиями

$$U(y)|_S = f(y), \quad \left.\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|_S = g(y), \tag{2}$$

где $f(y) \in C'(S)$ и $g(y) \in C(S)$-заданные функции. Требуется найти гармоническую функцию $U(y) = U(y_1, y_2, y_3) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$.

В работе А. Н. Тихонова [4], выяснено истинную природу некорректных задач математической физики. Он указал практическую важность неустойчивых задач и показал, что если сузить класс возможных решений до компакта, то из существования и единственности следует устойчивость решения, т.е. задача становится устойчивой.

Формулы, позволяющие находить решение эллиптического уравнения в случае, когда данные Коши известны лишь на части границы области, получили название формул типа Карлемана. В [2] Карлеман установил формулу, дающую решение уравнений Коши-Римана в области специального вида. Развивая его идею, Г. М. Голузин и В. И. Крылов [3] вывели формулу для определения значений аналитических функций по данным, известным

Турсунов Фарход Рузикулович, старший преподаватель кафедры дифференциального уравнения Самаркандского государственного университета, (Самарканд, Узбекистан)

лишь на участке границы, уже для произвольных областей. Они нашли формулу восстановления решения по ее значениям на граничном множестве положительной лебеговой меры, а также предложили новый вариант формулы продолжения. Одномерным и многомерным обобщениям формулы Карлемана посвящена монография Л.А.Айзенберга [1].

Отметим, что при решении прикладных задач следует найти приближенные значения решения $U(x)$ и $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$, $x \in G$, $i = 1, 2, 3$. В данной работе строится семейство функций $U(x, \sigma, f_\delta, g_\delta) = U_{\sigma\delta}(x)$ и $\frac{\partial U(x,\sigma,f_\delta,g_\delta)}{\partial x_i} = \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$ зависящих от параметра σ и доказывается, что при специальном выборе параметра $\sigma = \sigma(\delta)$ семейство $U_{\sigma\delta}(x)$ и $\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}$ при $\delta \to 0$ сходится в каждой точке $x \in G$ к решению $U(x)$ и его производную $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$ соответственно. Семейство функций $U(x, \sigma, f_\delta, g_\delta)$ и $\frac{\partial U(x,\sigma,f_\delta,g_\delta)}{\partial x_i}$ с указанными свойствами, называется регуляризованным решением по М.М. Лаврентьеву [6]-[7].

Конструкция функции Карлемана. Пусть $\sigma > 0$. Определим функцию $\Phi_\sigma(x, y)$ следующим равенствам:

$$\begin{gathered}\Phi_\sigma(x,y) = \frac{1}{2\pi^2} e^{-\sigma(\alpha^2+x_3^2-y_3^2)} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2} du - \right.\\ \left. - \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2}(y_3-x_3)\sin 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2}\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\right].\end{gathered} \tag{3}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$, $y' = (y_1, y_2), x' = (x_1, x_2)$, $r = |y - x|$, $\alpha = |y' - x'|$.

В работе [8] доказано, что функция определенная равенствами (3) при $\sigma > 0$ представима в виде

$$\Phi_\sigma(x, y) = F(r) + G_\sigma(x, y) \tag{4}$$

где $F(r) = \frac{1}{4\pi r}$, $G_\sigma(x, y)$-функция гармоническая по y в R^2 включая $y = x$. Отсюда следует, что функция $\Phi_\sigma(x, y)$ для любого $\sigma > 0$ по y является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Фундаментальное решение $\Phi_\sigma(x, y)$ с указанным свойством назовем функцией Карлемана для полупространства. Поэтому для функция $U(y) = U(y_1, y_2, y_3) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ и любого $x \in G$ справедлива следующая интегральная формула Грина:

$$U(x) = \int_{\partial G} \left[\frac{\partial U}{\partial n}\Phi_\sigma(x, y) - U(y)\frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n}\right] dS_y. \tag{5}$$

Положим

$$U_\sigma(x) = \int_S \left[g(y)\Phi_\sigma(x, y) - f(y)\frac{\partial \Phi_\sigma(x, y)}{\partial n}\right] dS_y. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть функция* $U(y) = U(y_1, y_2, y_3) \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ *на* S *удовлетворяет условие* (2) *и на части* T *границы* ∂G *выполнено неравенство*

$$|U(y)| + \left|\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right| \leq M, \quad y \in T, \tag{7}$$

здесь M- положительное число. Тогда для любого $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедливы оценки

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq \psi_3(\sigma) M e^{-\sigma x_3^2}, \tag{8}$$

$$\left| \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \right| \leq \theta_i(\sigma, x_3) M \exp(-\sigma x_3^2), \quad i = 1, 2, 3, \tag{9}$$

где

$$\psi_3(\sigma) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\sigma}} + \frac{1}{2\pi} \right),$$

$$\theta_1(\sigma, x_3) = \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{16\sigma x_3^2} + \frac{5\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi} x_3^2} \right), \quad \theta_2(\sigma, x_3) \equiv \theta_1(\sigma, x_3),$$

$$\theta_3(\sigma, x_3) = \left(\frac{1 + 2\sqrt{\sigma}}{2\pi} + \frac{1}{4\sqrt{\sigma\pi} x_3} + \frac{3\sqrt{\sigma} + 4\sigma\sqrt{\sigma} x_3^2}{\sqrt{\pi}} + \frac{27x_3 + 16}{27\sqrt{\sigma\pi} x_3^3} \right).$$

Следствие 1. При каждом $x \in G$ справедливо равенство

$$\lim_{\sigma \to \infty} U_\sigma(x) = U(x), \lim_{\sigma \to \infty} \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Обозначим через $\overline{G}_\varepsilon$ множество

$$\overline{G}_\varepsilon = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in G, \quad a > x_3 \geq \varepsilon, \quad a = \max_T h(x_1, x_2), \, 0 < \varepsilon < a, \right\}.$$

Легко заметить, что множество $\overline{G}_\varepsilon \subset G$ является компактным.

Следствие 2. Если $x \in \overline{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_\sigma(x)\}$и $\left\{ \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \right\}$

$$U_\sigma(x) \rightrightarrows U(x), \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \rightrightarrows \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

сходиться равномерно при $\sigma \to \infty$.

Литература

1. *Л.А.Айзенберг.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. //Новосибирск. «Наука», (1990), 247с.

2. *T. Carleman.* Les Functions quasi analytiques// Paris: , (1926), 116p.

3. *Г. М. Голузин, В. И. Крылов.* Обобщенная формула Карлемана и ее приложение к аналитическому продолжению функций// Мат. сборник, **Т.40** (1933), 144-149.

4. *А. Н.Тихонов.* Об устойчивости обратных задач //ДАН СССР, Т.39, № 5, (1943),195-198.

5. *Н.Н. Тарханов.* Об интегральном представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных и некоторых его приложениях. Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа // Красноярск, (1980), 147- 160.

6. *М.М. Лаврентьев.* О задаче Коши для уравнения Лапласа// Изв. АН СССР Сер. матем. (1956). Том 20, выпуск 6, 819-842.

7. *М.М.Лаврентьев.* О некоторых некорректных задачах математической физики. // Изд. СО АН СССР Новосибирск, (1962).

8. *Ш. Ярмухамедов.* Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши // Математические заметки , Том 83, выпуск 5.,(2008),763-778.

ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ПО СПЕЦИАЛЬНЫМ КРИВЫМ

А.В. Усманов, А.З. Хусанов
dj_neso@mail.ru, abduroziqhusanov@mail.ru

УДК 517.946

В работе рассматривается новый класс задач интегральной геометрии вольтерровского типа с весовой функцией специального вида. Доказана теорема единственности, получены оценки устойчивости в пространствах Соболева, тем самым показана слабая некорректность и доказана теорема о существовании решения задачи интегральной геометрии.

Ключевые слова: Задача интегральной геометрии, слабая и сильная некорректность, единственность и устойчивость

THE PROBLEM OF RESTORING THE FUNCTION BY SPECIAL CURVES

We study new problem of reconstruction of a function in a strip from their given integrals with known weight function along polygonal lines. We obtained two simply inversion formulas for the solution to the problem. We prove uniqueness and existence theorems for solutions and obtain stability estimates of a solution to the problem in Sobolev's spaces and thus show their weak ill-posedness.

Keywords: ill-posed problems, integral geometry problems, integral transforms, inversion formula, uniqueness, existence theorem, weak instability, perturbation

Задачи интегральной геометрии - интенсивно развивающееся направление современной математики. Оно является одним из крупнейших направлений в теории некорректных задач математической физики и анализа. Ее задачи тесно связаны с многочисленными приложениями - задачами интерпретации данных геофизических исследований, электроразведки, акустики и компьютерной томографии [1].

Одной из центральных проблем интегральной геометрии является задача восстановление функции, если известны ее интегралы по заданным многообразиям [2-3].

В работах Акр.Х. Бегматова [4-7] были получены результаты, выделяющие новые классы слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости и в n-мерном пространстве. В работе Акр.Х. Бегматова и З.Х.

Усманов Азим Валижонович, ассистент, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Azim Usmanov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Абдурозик Зарифжонович Хусанов, студент, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Abduroziq Husanov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Очилова [8] получены результаты по единственности, устойчивости и формулам обрящения для новых классов задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией.

Введем обозначения, которые будем использовать:

$$(x, y) \in R^2, (\xi, \eta) \in R^2, \lambda \in R^1, \mu \in R^1$$

Пусть $P(x, y)$ - семейство окружностей в R^2_+ , склеенных специальным образом. Произвольная кривая семейства $P(x, y)$ определяется соотношениями

$$P(x, y) = \{(\xi, \eta) : (\xi - x)^2 + \eta^2 = y^2, 0 \leq \eta \leq y, x - y \leq \xi \leq x\} \cup$$

$$\cup \{(\xi, \eta) : (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = y^2, 0 \leq \eta \leq y, x \leq \xi \leq x + y\}.$$

Задача А. Пусть от функцию двух переменных $u(x, y)$ известны интегралы:

$$\int\limits_{x-y}^{x} g(x - \xi) u(\xi, \sqrt{y^2 - (\xi - x)^2}) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{x}^{x+y} g(x - \xi) u(\xi, y - \sqrt{y^2 - (\xi - x)^2}) d\xi = f(x, y)$$

где $g(x - \xi) = |x - \xi|$.

Требуется по функции $f(x, y)$ найти $u(x, y)$.

Функция $u(x, y)$ - функция из класса U, которые имеют все непрерывные частные производные до второго порядка включительно и финитны с носителем в R^2_+:

$$supp\ u \subset D = \{(x, y) :\ -a < x < a,\ 0 < a < \infty,\ 0 < y < l,\ l < \infty\}.$$

Нами доказана теорема единственности, получена формула обращения и оценка устойчивости решения задачи А в пространствах конечной гладкости.

Литература

1. *М.М. Лаврентьев, Л.Я.Савельев* Линейные операторы и некорректные задачи.Москав: Наука, 1991. 331 с.

2. *М.М. Лаврентьев, А.Л. Бухгейм* Об одном классе задач интегральной геометрии // Докл. АН СССР. 1973. Т.311, N1.С.38-39.

3. *М.М. Лаврентьев, А.Л. Бухгейм* Об одном классе операторных уравнений первого рода//Функцион. анализ и его прил. 1973. Т.7.Вып.4.С.44-53.

4. *Акр.Х. Бегматов* Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости // Сиб. мат. журнал. 1995. Т. 36. N 2. С. 243-247.

5. *Begmatov Akram H* On a class of weakly ill-posed Volterra-type of integral geometry in the three-dimensional space // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 1995. Vol. 3 . N3. P. 231-235.

6. *Акр.Х. Бегматов* Вольтеровские задачи интегральной геометрии на плоскости для кривых с особенностями // Сиб. мат. журнал. 1997. Т. 38. N 4. С 723-737.

7. *Акр.Х. Бегматов* Задачи интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершинах // Доклады РАН. 1998. Т. 358. N 2. С. 151-153.

8. *Акр. Х. Бегматов, З.Х. Очилов* Задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией. Доклады РАН, 2009. 429. – N3. – С. 295-297.

ФОРМУЛА СЛЕДОВ НЕЯДЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

З.Ю. Фазуллин
fazullinzu@mail.ru

УДК 517.984.5

Исследуются свойства спектра и один из методов вывода формулы регуляризованного следа возмущений дискретных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве. На основе этого метода получены формулы следов для ограниченных возмущений двумерных операторов вчастных производных.

Ключевые слова: регуляризованные следы, спектр, опрератор Лапласа, оператор Шредингера, двумерный гармонический осциллятор

The formula for traces of non-nuclear perturbations of discrete operators

We investigatespectrum properties and one method for deriving the regularized trace formula for perturbations of operators with discrete spectra in the separable Hilbert space. Based on this method, we obtain the trace formula for the local perturbations of two-dimensional operators in partial derivatives.

Keywords: regularized traces, spectrum, Laplace operator, Shredinger operator, two-dimensional harmonic oscillator.

Пусть L_o самосопряженный полуограниченный снизу дискретный оператор в гильбертовом пространстве H, V ограниченный оператор, так что возмущенный оператор $L = L_0 + V$ - дискретный, полуограниченный снизу в H. Пусть $\sigma(L_0) = \{\lambda\}_{k=1}^{\infty}$ спектр оператора L_0 ($\lambda_k < \lambda_{k+1}$), P_k – ортогональный проектор, соответствующий собственному числу λ_k кратности ν_k, $\sigma(L) = \left\{\mu_i^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$, $i = \overline{1, \nu_k}$ спектр оператора L.

Вдокладе будет проанализирована справедливость следующей формулы регуляризованного следа

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{\nu_k}\left(\lambda_k - \mu_i^{(k)}\right) + trP_kV\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\lambda_n}\sum_{k=1}^{n} tr\left[P_kV^2 - (P_kV)^2\right]$$

для ограниченных возмущений двумерных операторов в частных производных математической физики: оператора Лапласа на двумерной сфере, гармонического осциллятора на $\mathbb{R}^2$ и в полосе, двумерного оператора Шредингера в однородном магнитном поле.

Фазуллин Зиганур Юсупович, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Ziganur Fazullin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Литература

1. *Маркушевич* Теория аналитических функций. Том 2/ А.И. Маркушевич.- М.: Наука, 1968.–624 с.

2. *Фазуллин З.Ю., Муртазин Х.Х.* Регуляризованный след двумерного гармонического осциллятора // Матем. сборник. – 2001. – Т.192, №5. – С. 87-124.

3. *Муртазин Х.Х., Фазуллин З.Ю.* Спектр и формула следов для двумерного оператора Шредингера в однородном магнитном поле // Диф.ур. – 2009. – Т.45, №4. – С. 564-579.

4. *Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю., Атнагулов А.И.* Свойства резольвенты оператора Лапласа на двумерной сфере и формула следов // Диф.ур. – 2016. – Т.8, №3. – С. 22-40.

5. *Фазуллин З.Ю., Нугаева И.Г.* Спектр и формула следов финитного возмущения двумерного гармонического осциллятора в полосе // Диф.ур. – 2019. – Т.55, №5. – С. 691-701.

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

О.В. Фадеева

faoks@yandex.ru

УДК 517.95

В данной работе изучена начально-граничная задача для уравнения колебаний консольной балки. Методами спектрального анализа построено решение данной начально-граничной задачи в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи. Доказаны существование и единственность поставленной задачи.

Ключевые слова: уравнение колебания балки, начальные условия, граничные условия, спектральный метод, ряд, существование, единственность.

On the correctness of a spectral problem for a fourth-order differential operator

In this paper we study the initial boundary value problem for the oscillation equation of a cantilever beam. The solution of this initial-boundary value problem in the form of the sum of a series on the system of eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem is constructed by the methods of spectral analysis. The existence and uniqueness of the problem are proved.

Keywords: equation of fluctuations of a beam, initial conditions, boundary conditions, spectral method, series, existence, uniqueness.

В области $D = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение, которое описывает вынужденные изгибные поперечные колебания однородной балки при отсутствии вращательного движения под действием внешней силы:

$$u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = F(x,t). \tag{1}$$

Фадеева Оксана Владиславовна, к.ф.-м.н., доцент, СамГТУ (Самара, Россия); Oxana Fadeeva (Samara State Technical University, Samara, Russia)

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА. В области D найти решение $u(x,t)$ уравнения (1), обладающее следующими свойствами:

$$u(x,y) \in C^{4,2}_{x,t}(D) \cap C^{2,1}_{x,t}(\overline{D}),$$

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l,$$

при этом функции $F(x,t), \varphi(x), \psi(x)$ – заданные достаточно гладкие.

Решение поставленной задачи проведено методами спектрального анализа. Для спектральной задачи методом разделения переменных найдены собственные значения как корни трансцендентного уравнения, формы собственных колебаний и составлена соответсвующая система собственных функций. Показано, что построенная система собственных функций является ортогональной и полной в пространстве L_2 . Доказательство единственности решения поставленной задачи проведено с использованием полноты системы собственных функций.

Решение данной начально-граничной задачи построено как сумма ортогонального ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи и имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) Y_n(x),$$

при этом

$$u_n(t) = \varphi_n cos\alpha d_n^2 t + \frac{\psi_n}{\alpha d_n^2} sin\alpha d_n^2 t + \frac{1}{\alpha d_n^2} \int_0^t F_n(s) sin\frac{t-s}{\alpha d_n^2} ds,$$

где $F_n(t) = \int_0^l F(x,t) Y_n(x) dx$,

$$Y_n(x) = \begin{cases} \frac{th0,5d_n l}{\sqrt{l}} \left(a_n chd_n(x-0,5l) + b_n sind_n(x-0,5l) \right), & n = 2k-1, \\ \frac{cth0,5d_n l}{\sqrt{l}} \left(c_n shd_n(x-0,5l) + f_n cosd_n(x-0,5l) \right), & n = 2k, \end{cases}$$

где $a_n = \frac{1}{sh0,5d_n l}, b_n = \frac{1}{cos0,5d_n l}, c_n = -\frac{1}{ch0,5d_n l}, f_n = \frac{1}{sin0,5d_n l}$,

d_n – корни уравнения $chdl \cdot cosdl = -1$,

$\lambda_n = -d_n^4$ –собственные значения соответствующей спектральной задачи.

Для коэффициентов полученного ряда и системы собственных функций найдены оценки, на основании которых установлены достаточные условия на начальные функции, выполнение которых обеспечивает равномерную сходимость построенного ряда в классе регулярных решений уравнения колебаний балки, то есть приведено доказательство теоремы существования решения поставленной начально-граничной задачи в следующей формулировке.

Теорема 1. *Если функции $\varphi(x), \psi(x), F(x,t)$ удовлетворяют условиям*

$\varphi(x) \in C^6[0,l], \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(l) = \varphi'''(l) = \varphi^{IV}(0) = \varphi^{V}(0) = 0,$
$\psi(x) \in C^4[0,l], \psi(0) = \psi'(0) = \psi''(l) = \psi'''(l) = 0,$
$F(x,t) \in C(\bar{D}) \bigcap C^4_x(\bar{D}), F(0,t) = F_x(0,t) = F_{xx}(l,t) = F_{xxx}(l,t) = 0,$

то существует единственное решение поставленной начально-граничной задачи.

Литература

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики – М.: Наука. — 1966. — 724 с.

2. *Сабитов К.Б.* К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференц. уравнения — 2017. — Т.53, №1. — с. 89-100.

О РАЗРЕШИМОСТИ ГОМОЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

М.Ф. Фазлытдинов

fazlitdin_marat@mail.ru

УДК 517.93

Рассматривается вопрос о разрешимости гомологических уравнений в задаче редуцирования динамической системы на центральное многообразие.

Ключевые слова: гомологическое уравнение, центральное многообразие, динамическая система

About solvability of homological equations in the problem of the central manifolds approximate construction

The question of the solvability of homological equations in the problem of reducing a dynamical system to a central manifold is considered.

Keywords: homological equation, central manifold, dynamical system

Рассматривается динамическая система, описываемая уравнением

$$x' = Ax + a(x)\,, \quad x \in R^N\,, \tag{1}$$

в которой A – квадратная матрица, а функция $a(x)$ представима в виде $a_2(x)+a_3(x)+\widehat{a}_4(x)$, где $a_2(x)$ содержит квадратичные по x слагаемые, $a_3(x)$ – слагаемые третьей степени, а $\widehat{a}_4(x)$ является C^m-гладкой и удовлетворяет соотношению $\|\widehat{a}_4(x)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \to 0$.

Предполагается, что точка равновесия $x = 0$ системы (1) является негиперболической. А именно, пусть спектр σ матрицы A состоит из двух непустых частей: $\sigma = \sigma_0 \cup \sigma^0$, где σ_0 содержит собственные значения, вещественные части которых равны нулю, а σ^0 – остальные собственные значения. Обозначим через E_0, E^0 – корневые подпространства матрицы A, отвечающие, соответственно, частям σ_0, σ^0 ее спектра. Пусть k_0, k^0 – это размерности подпространств E_0, E^0; тогда $k_0 + k^0 = N$ и $1 \leqslant k_0 \leqslant N - 1$. Пространство R^N представляется в виде прямой суммы $R^N = E_0 \bigoplus E^0$ инвариантных для оператора $A : R^N \to R^N$ подпространств E_0, E^0.

В указанных предположениях у системы (1) возникает центральное многообразие. В фазовом пространстве системы это многообразие локально

Фазлытдинов Марат Флюрович, ООО Газпромнефть НТЦ (Санкт-Петербург, Россия); Marat Fazlytdinov (LLC Gazpromneft STC, St. Petersburg, Russia)

инвариантно для ее траекторий; оно содержит точку равновесия $x = 0$ и касается в ней подпространства E_0. В естественном смысле вся нетривиальная динамика системы (1) в $x = 0$ сосредоточена на центральном многообразии. В соответствии с теоремой о центральном многообразии [1] при изучении динамики системы можно избавиться от "гиперболических переменных", оказывающих вполне предсказуемое влияние, и свести задачу к исследованию системы на центральном многообразии.

Центральное многообразие и динамика системы на нем, как правило, не могут быть точно рассчитаны. Поэтому актуальной является задача разработки соответствующих аппроксимаций. Решение этой задачи приводит к необходимости решения так называемых гомологических уравнений. Приведем соответствующие понятия.

Обозначим через F_p множество однородных порядка p (p – натуральное число) функций, определенных в подпространстве E_0 и принимающих значения в подпространстве E^0, т.е. $F_p = \{\psi(u) \mid \ \psi : E_0 \to E^0 \ , \ \psi(\alpha u) \equiv \alpha^p \psi(u), \, u \in E_0\}$.

Рассмотрим уравнение

$$L\psi(u) \stackrel{def}{=} \psi'(u)Au - A\psi(u) = v(u) \,, \tag{3}$$

где $\psi(u) \in F_p$ – неизвестная функция, $v(u) \in F_p$ – заданная функция. Уравнение (3) называется гомологическим уравнением. Верна следующая

Теорема 1. *Определенный равенством (3) линейный оператор $L : F_p \to F_p$ обратим.*

Аналогичная теорема справедлива и для гомологических уравнений, которые возникают при построении центральных многообразий дискретных динамических систем вида

$$x_{n+1} = Ax_n + a(x_n) \,, \ \ n = 0, 1, 2, \dots \,, \quad x_n \in R^N \,,$$

в которой квадратная матрица A имеет одно или несколько собственных значений, равных 1 по модулю.

Литература

1. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В. и др.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2004.

ОБ ОГРАНИЧЕНИИ РОСТА СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТИ

Б.Н. Хабибуллин, Э.Б. Меньшикова

khabib-bulat@mail.ru, algeom@bsu.bashedu.ru

УДК 517.574

Пусть $u \not\equiv -\infty$ и $M \not\equiv -\infty$ — пара субгармонических функций с мерами Рисса соответственно υ_u и μ_M в области D m-мерного векторного вещественного пространства $\mathbb{R}^m$. Мы описываем в терминах мер υ_u, μ_M условия, при которых существует такая (суб)гармоническая функция $h \not\equiv -\infty$ в области D, что $u + h \leq M$ на D.

Ключевые слова: теория потенциала, субгармоническая функция, мера Рисса, выметание мер

On limiting the growth of subharmonic functions in a domain

Let $u \not\equiv -\infty$ and $M \not\equiv -\infty$ be a pair of subharmonic functions with the Riesz measures υ_u and μ_M in a domain D of m-dimensional vector real space $\mathbb{R}^m$, respectively. We describe conditions in terms of measures υ_u, μ_M under which there is a (sub)harmonic function $h \not\equiv -\infty$ on D such that $u + h \leq M$ on D.

Keywords: potential theory, subharmonic function, Riesz measure, balayage of measures

Используем объекты и обозначения из аннотации.

Утверждения типа теорем и лемм просим оформлять по следующему образцу.

Теорема 1. *Пусть замыкание области D не совпадает с $\mathbb{R}^m$. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

[s1] *Существует субгармоническая в области D функция $h \not\equiv -\infty$, с которой всюду на D выполнено неравенство $u + h \leq M$.*

[s2] *Существует постоянная $C \in \mathbb{R}$ и компакт $K \subset D$ с непустой внутренностью, для которых*

$$\int_{D\setminus K} v \, \mathrm{d}\upsilon_u \leq \int_{D\setminus K} v \, \mathrm{d}\mu_M + C \tag{1}$$

для всех субгармонических функций $v \geq 0$ в области $D \setminus K$, удовлетворяющих двум условиям

$$\sup_{x\in D\setminus K} v \leq 1, \quad \lim_{D\ni x\to\partial D} v(x) = 0, \quad \text{где } \partial D \text{ — граница области } D. \tag{2}$$

Подобный критерий имеет место и в случае, если утверждение **[s1]** заменить высказыванием

[h1] *Существует гармоническая в области D функция h, с которой всюду на D выполнено неравенство $u + h \leq M$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 18-11-00002, Б.Н. Хабибуллин) и РФФИ (проект № 19-31-90007, Э.Б. Меньшикова).

Хабибуллин Булат Нурмиевич, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Bulat Khabibullin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Меньшикова Энже Булатовна, аспирант, БашГУ (Уфа, Россия); Enzhe Menshikova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Мы не приводим здесь этот «*гармонический*» критерий, поскольку аналог класса тестовых субгармонических функций v из **[s2]**, с которыми выполнены неравенства типа (1) определяется несколько более громоздко, чем в **[s2]**. Прежде всего в этом случае необходимо рассматривать и знакопеременные тестовые функции v, удовлетворяющие как условиям (2), так и некоторым дополнительным ограничениям снизу вблизи границ ∂D и ∂K. Основная часть описанных здесь результатов с применениями к исследованию распределения нулевых множеств голоморфных функций одной и нескольких переменных из весовых классов изложена в работах [1–5] из списка литературы ниже, а использованы методы и техника из [6].

Литература

1. *Хабибуллин Б.Н., Розит А.П.* К распределению нулевых множеств голоморфных функций // Функц. анализ и его прил., **52**:1 (2018), 26–42.

2. *Меньшикова Э.Б., Хабибуллин Б.Н.* К распределению нулевых множеств голоморфных функций. II // Функц. анализ и его прил., **53**:1 (2019), 84–87.

3. *Хабибуллин Б.Н., Хабибуллин Ф.Б.* К распределению нулевых множеств голоморфных функций. III. Теоремы обращения // Функц. анализ и его прил., **53**:2 (2019), 42–58.

4. *Меньшикова Э.Б., Хабибуллин Б.Н.* Критерий последовательности корней голоморфной функции с ограничениями на её рост // Изв. вузов. Математика (2019); направлено в журнал, см. также https://arxiv.org/abs/1812.11716v1.

5. *Khabibullin B.N., Menshikova E.B.* Affine Balayage of Measures and Distribution of Riesz Measures of Subharmonic Functions with Applications to Distribution of Zeros of Holomorphic Functions // Potential Analysis (2019); направлено в журнал.

6. *Хабибуллин Б.Н., Розит А.П., Хабибуллина Э.Б.* Порядковые версии теоремы Хана—Банаха и огибающие. II. Применения в теории функций // В кн.: Комплексный анализ. Математическая физика, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **162** (2019), ВИНИТИ РАН, М., 93–135.

КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДВУМЕРИЗОВАННЫХ ЦЕПОЧЕК ПРИ ПОМОЩИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ АЛГЕБР

И.Т. Хабибуллин, М.Н. Кузнецова
habibullinismagil@gmail.com, mariya.n.kuznetsova@gmail.com

УДК 519.6

Краткая аннотация. В докладе обсуждается разработанный авторами метод классификации интегрируемых моделей с тремя независимыми переменными, основанный на понятии характеристической алгебры Ли-Райнхарта. Эффективность метода иллюстрируется на примере дискретных уравнений. Для одного класса нелинейных дифференциально-разностных уравнений получено полное описание интегрируемых случаев.

Ключевые слова: интегрируемость по Дарбу, характеристические интегралы, алгебры Ли

Classification of integrable two-dimensional lattices via characteristic algebras

Short abstract. The report discusses a method developed by the authors for the classification of integrable models with three independent variables, based on the concept of characteristic Lie-Rinehart algebra. The effectiveness of the method is illustrated by the example of discrete equations. For one class of nonlinear differential-difference equations, a complete description of integrable cases is obtained..

Keywords: Darboux integrability, characteristic integrals, Lie algebras

В докладе будет рассмотрен метод классификации нелинейных интегрируемых уравнений с тремя независимыми переменными, основанный на понятии интегрируемых редукций. Мы называем уравнение интегрируемым, если оно допускает большой класс редукций, являющихся интегрируемыми по Дарбу системами уравнений гиперболического типа с двумя независимыми переменными, [1]. Система гиперболического типа интегрируема по Дарбу тогда и только тогда, когда обе ее характеристические алгебры Ли-Райнхарта имеют конечную размерность [2]. Наиболее естественным и удобным объектом для изучения в рамках этой схемы является класс дифференциально-разностных уравнений с одной дискретной и двумя непрерывными независимыми переменными, обобщающих известную двумеризованную цепочку Тоды. В работе [3] мы исследовали квазилинейные уравнения вида

$$u_{n,xy} = \alpha_n u_{n,x} u_{n,y} + \beta_n u_{n,x} + \gamma_n u_{n,y} + \delta_n,$$

где α_n, β_n, γ_n, δ_n являются произвольными функциями переменных u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, и получили списки интегрируемых представителей этого класса уравнений. Среди них имеются новые примеры.

Хабибуллин Исмагил Талгатович, д.ф.-м.н., зав. отделом, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Ismagil Habibullin (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)

Кузнецова Мария Николаевна, к.ф.-м.н., н.с., Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Mariya Kuznetsova (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)

Литература

1. *Habibullin I.T.* Characteristic Lie rings, finitely-generated modules and integrability conditions for (2+ 1)-dimensional lattices // Physica Scripta, **87**:6 (2013), 065005.

2. *Жибер А.В., Муртазина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б.* Характеристические кольца Ли и нелинейные интегрируемые уравнения // М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. —376 с.

3. *Хабибуллин И.Т., Попцова М.Н.* Алгебраические свойства квазилинейных двумеризованных цепочек, связанные с интегрируемостью // Уфимск. матем. журн., **10**:3 (2018), 89–109.

СТАЦИОНАРНАЯ ПЛОСКАЯ ВИХРЕВАЯ ПОДМОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

С.В. Хабиров

habirov@anrb.ru

УДК 517.958,533.7

Рассмотрена инвариантная вихревая подмодель ранга 2 по времени и по одному пространственному направлению.

Ключевые слова: инвариантная подмодель, вихревые движения, газовая динамика

Stationary plane vortex submodel of ideal gas

An invariant vortex submodel of rank 2 in time and in one spatial direction is considered.

Keywords: invariant submodel, vortex motion, gas dynamics

Подмодель идеального газа инвариантная относительно переносов по времени и по одному пространственному направлению в случае вихревых движений имеет 4 интеграла. Для функции тока и плотности получена система нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с одним произвольным элементом, включающим в себя уравнение состояния и произвольные функции интегралов. Найдены преобразования эквивалентности по произвольному элементу. Решена задача групповой классификации. Получена оптимальная система неподобных подалгебр для алгебр из групповой классификации. Рассмотрены примеры инвариантных решений, описывающие вихревые движения газа с переменной энтропией, в том числе точечный источник или сток. На двумерных подалгебрах получены аналоги простых волн.

The invariant submodel of an ideal gas with respect to transfers in time and along one spatial direction in the case of vortex motions has 4 integrals. For the streamline function and density, a system of third-order nonlinear differential equations with one arbitrary element is obtained, which includes the equation of state and arbitrary functions of the integrals. Equivalence transformations for an arbitrary element are found. The group classification problem is solved. An

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10071).

Хабиров Салават Валеевич, д.ф.-м.н., профессор, г.н.с. ИМех УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Salavat Khabirov (Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia)

optimal system of nonsimilar subalgebras for algebras from group classification is obtained. Examples of invariant solutions describing the vortex motion of a gas with variable entropy, including a point source-sink, are considered. Analogues of simple waves are obtained on two-dimensional subalgebras.

МОДЕЛИ РАСКРЫТИЯ ТРЕЩИНЫ НА ОСНОВЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

С.С. Хабиров

salavat.s.khabirov@gmail.com

УДК 517.958; 532.5

Выводятся различные модели раскрытия трещины в виде квазилинейных параболических уравнений второго порядка. Из закона сохранения массы жидкости в выделенном объеме выведены уравнения мгновенного схлопывания сечения при понижении давления. Эти уравнения определяют изменение длины трещины.

Ключевые слова: раскрытие трещины, уравнение Навте-Стокса, точные решения, квазилинейные параболические уравнения

Crack Opening Models Based The Exact Solutions of Navier-Stokes Equations

Various models of crack opening in the form of second-order quasilinear parabolic equations are derived. From the law of conservation of the mass of liquid in the selected volume, the equations of instantaneous collapse of the section with decreasing pressure are derived. These equations determine the change in crack length.

Keywords: crack opening, Navier — Stokes equations, exact solutions, quasilinear parabolic equations

Для решения задачи нахождения ширины и длины трещины образующейся при проведение гилдравлического разрыва пласта используют приближенные математические модели [1,2], основанные на законе сохранения массы жидкости в сечениях трещины, точных решениях уравнений Навье-Стокса, уравнений фильтрации жидкости в поровой среде пласта, уравнений упругости скелета поровой среды. В результате получаются краевые задачи для квазилинейных параболических уравнений с подвижными границами.

1. Закон сохранения массы

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10071 МК) и в рамках госзадания (№ 0246-2019-0052).

Хабиров Салават Салаватович, аспирант, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Salavat S Khabirov (Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia)

Трещина представляет собой беспоровый объем Ω малой толщины $2a(t,x)$, постоянной высоты $2b$ $(a \ll b)$ и большой меняющейся длины $l(t)$.

Сечение Ω плоскостью $x = \mathrm{const}$ есть плоская область площадью S с кусочно-гладкой границей длиной L. Жидкость плотности ρ и с вязкостью $\mu = \rho\nu$, поступая в трещину через сечение $x = 0$ и протекая в объеме Ω, фильтруется через поверхность трещины в поровое пространство.

В основе приближенной модели лежит закон сохранения массы жидкости в выделенном объеме трещины

$$S_t + Q_x + qL = 0, \tag{1}$$

где Q – расход жидкости в сечении, q – плотность потока жидкости через боковую поверхность трещины.

Граничные и начальные условия имеют вид $Q(t,0) = Q_0(t), \quad p(t,0) = p_0(t), \quad l(0) = a_0 = a(0,0)$.

Учитывая пористость пласта m, из закона сохранения выводится уравнение мгновенного схлопывания сечения при понижении давления

$$QS^{-1} - q = l'(1-m). \tag{2}$$

2. Движение вязкой жидкости в трещине

В области Ω вязкая жидкость двигается со скоростью $u = (u,v,w)$ согласно уравнению Навье - Стокса

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + \rho^{-1}\nabla p = \nu\Delta\mathbf{u}, \quad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0,$$

При $v = w = 0$ получаем решение

$$p = \rho {p_1}'(t)x + p_0(t), \quad u = u(t,y,z), \quad u_t = \nu\left(u_{yy} + u_{zz}\right) - {p_1}'(t), \quad u|_{\partial S} = 0.$$

Для установившихся решений $u_t = 0$, $a_t = 0$, $p_1' = P_1 = \mathrm{const}$ имеем краевую задачу

$$\nu\Delta u = P_1, \quad u|_{y=ag(z)} = 0, \quad g(0) = 1, \quad g(b) = 0. \tag{3}$$

Решение ищем в виде квадратичного многочлена $u = a_{11}y^2 + 2a_{12}yz + a_{22}z^2 + a_1 y + a_2 z + a_0$. Если контур задается линейной функцией $g(z)$, то решение принимает вид

$$u = \left(1 - \frac{y}{a} - \frac{z}{b}\right)\left[a_1 y + a_2 z - \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(\frac{a_1}{a} + \frac{a_2}{b} + \frac{P_1}{2\nu}\right)\left(1 + \frac{y}{a} + \frac{z}{b}\right)\right]. \tag{4}$$

3. Модель раскрытия трещины с линейным профилем

Используя $S = 2ab, L = 4\sqrt{a^2+b^2}, Q = \int\limits_0^b dz \int\limits_0^{ag(z)} u dy$ и (4) при $v = w = 0$ получаем уравнение раскрытия трещины с линейным профилем

$$2ba_t + \frac{1}{6}\left(a_1 a^2 b + a_2 a b^2 - \frac{1}{2}\frac{E'b^3}{\nu\rho}\left(a^2 - b^2\ln(a^2+b^2)\right)_x\right)_x + qL(a) = 0.$$

В конце трещины $x = l(t)$ выполняется условие скачка (2)

$$l^{'}(1-m)+\frac{E'b^2}{6\nu\rho}\frac{a_x a^2}{a^2+b^2}+q=0.$$

В качестве скорости фильтрации на границе можно взять автомодельный закон [10] $q = C(a+\alpha)^{-1}\left[1-\exp\left(\sigma(p_\infty - p_0(t) - E'(xa_x+a)\right)\right)]$, где $C,\ p_\infty,\ \alpha$ – постоянные.

Литература

1. *Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Чёрный С.Г.* Математические модели гидроразрыва пласта // Вычислительные технологии. 2013. Т. 19, № 2. С. 33–61.
2. *Nordgren R.P.* Propagation of a vertical hydraulic fracture // Soc. Petrol. Eng. J. 12, 306-314, 1972.
3. *Хабиров С.В., Хабиров С.С.* Автомодельный упругий режим фильтрации через подвижную границу // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 1. С. 64–72.

СИММЕТРИЙНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОПЕРАТОРА РЕКУРСИИ ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ МОДЕЛЕЙ

А.Р. Хакимова

aigul.khakimova@mail.ru

УДК 519.6

Краткая аннотация. В докладе обсуждается метод построения оператора рекурсии, предложенный в работах [1], [2]. Для построения оператора рекурсии мы используем обобщенные симметрии заданного уравнения.

Ключевые слова: оператор рекурсии, симметрия, оператор линеаризации

Symmetric method for constructing a recursion operator for integrable models

Short abstract. The report discusses the method of constructing the recursion operator proposed in [1], [2]. To construct the recursion operator, we use the generalized symmetries of the given equation.

Keywords: recursion operator, symmetry, operator linearization

Оператор рекурсии является важным атрибутом интегрируемости. Он удобен для построения высших симметрий уравнений. Поэтому задача построения рекурсионного оператора является актуальной. Поиском методов построения рекурсионного оператора занимались многие авторы. В литературе известно два подхода к решению этой проблемы. Один из них основан на использовании пары Лакса. Он достаточно эффективен, в том случае

Хакимова Айгуль Ринатовна, инженер-исследователь, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Aigul Khakimova (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)

когда известна пара Лакса рассматриваемого уравнения. Другой подход состоит в том чтобы напрямую решить определяющее уравнение

$$\frac{d}{dt}R = [F^*, R], \tag{1}$$

где R – искомый оператор рекурсии, а F^* – оператор линеаризации заданного уравнения. Общепринятый способ решения этого уравнения связан с использованием гамильтонова формализма. Здесь требуется предъявить два гамильтоновых оператора H_1 и H_2, которые, как правило, являются нелокальными и это создает основную трудность в использовании этого подхода. По известным H_1 и H_2 оператор рекурсии выражается в виде $R = H_2 H_1^{-1}$. В настоящем докладе обсуждается новый метод построения оператора рекурсии (см. [1], [2]). Он основан на понятии симметрии.

Рассмотрим интегрируемое уравнение эволюционного типа

$$u_t = f(u, u_1, u_2, ..., u_k), \quad u_j = D_x^j u$$

допускающее иерархию симметрий

$$u_\tau = g(u, u_1, u_2, ..., u_n).$$

Симметрия означает, что $\frac{d}{d\tau}f = \frac{d}{dt}g$. Известно, что рекурсионный оператор представляется в виде слабонелокального псевдодифференциального оператора вида (см. [3])

$$R = R_0 + \sum_{i=1}^{m} g^{(i)} D_x^{-1} h^{(i)} \tag{2}$$

где R_0 – дифференциальный оператор. Нелокальная часть состоит из комбинаций генераторов симметрий $u_{\tau_j} = g^{(j)}$ и вариационных производных $h^{(j)}$ плотностей законов сохранения.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Для любого слабонелокального псевдодифференциального оператора R вида (2) существует пара дифференциальных операторов L_1 и L_2, для которых выполняется следующее равенство*

$$L_1 R = L_2.$$

Следовательно, имеем следующее представление оператора рекурсии:

$$R = L_1^{-1} L_2.$$

В качестве оператора L_1 берется дифференциальный оператор такой, что фундаментальное множество решений уравнения $L_1 g = 0$ совпадает с симметриями $g^{(1)}$, $g^{(2)}$, $\ldots$, $g^{(m)}$, которые определяют нелокальную часть оператора рекурсии (2).

Представление $R = L_1^{-1} L_2$ является эффективным инструментом для решения определяющего уравнения (1) для оператора рекурсии. Подставим представление $R = L_1^{-1} L_2$ в определяющее уравнение (1) и после некоторых простых преобразований получим

$$\frac{d}{dt}(L_2) L_2^{-1} + L_2 F^* L_2^{-1} = \frac{d}{dt}(L_1) L_1^{-1} + L_1 F^* L_1^{-1} =: A. \tag{3}$$

Непосредственно из (3) следует, что операторы L_1 и L_2 являются решениями одного и того же уравнения

$$\frac{d}{dt}(L_j) = AL_j - L_jF^*, \quad j = 1, 2,$$

где A является вспомогательным дифференциальным оператором.

Эффективность метода иллюстрируется примерами дифференциальных уравнений, а также примерами дискретных автономных и неавтономных моделей.

Литература

1. *Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р.* Прямой алгоритм построения операторов рекурсии и пар Лакса для интегрируемых моделей // Теоретическая и математическая физика, **196**:2 (2018), 294-312.

2. *Habibullin I.T., Khakimova A.R.* On the recursion operators for integrable equations // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **51**:42 (2018), 22 pp.

3. *Maltsev A.Ya., Novikov S.P.* On the local Hamiltonian systems in the weakly non-local Poisson brackets // Physica D: Nonlinear Phenomena, **156**:1–2 (2001), 53-80.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.Б.Хасанов, Т.Г.Хасанов

ahasanov2002@mail.ru, temur.xasanov.2018@mail.ru

УДК 517.957

В этой работе метод обратной спектральной задачи применяется к интегрированию нагруженного уравнения Кортевега-де Фриза с источником в классе периодических функции.

Ключевые слова: Уравнение Кортевега-де Фриза, оператор Штурма-Лиувилля, обратная спектральная задача, система уравнений Дубровина, формулы следов

Korteweg-de Vries equation, Sturm-Liouville operator, inverse spectral problem, Dubrovin system of equations, trace formulas

Keywords:

В настоящей работе рассматривается задача Коши для нагруженные уравнение КдФ с источником вида

$$q_t = \alpha(t)q\,|_{x=0}\,(q_{xxx} - 6qq_x) + 2\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(t)s(\pi,\lambda_k,t)\frac{\partial}{\partial x}(\psi_+^2(x,\lambda_k,t)), \qquad (1)$$

Хасанов Акназар Бекдурдиевич, д.ф.-м.н., доцент, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан)

Хасанов Темур Гафуржанович, 1 курс магистр, Ургенчский государственный университет (Ургенч, Узбекистан)

при началных условиях

$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), x \in R, t > 0 \tag{2}$$

в классе π-периодических по x функций:

$$q(x+\pi,t) = q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0). \tag{3}$$

В уравнение (1) $\alpha(t) \in C(0,\infty)$- заданная действительная непрерывная ограниченная функция. Кроме того $\alpha_k(t), k = \overline{1,\infty}$- заданная действительная последовательность непрерывных функций удовлетворяющих условиям $\alpha_k(t) = O(\frac{1}{k^3})$, $k \to \infty$. Через $\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$ обозначено решение Флоке уравнение Хилла:

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x,t)y = \lambda y, x \in R. \tag{4}$$

$s(x,\lambda,t)$- решение уравнения (4) с начальными условиями $s(0,\lambda,t) = 0$,$s'(0,\lambda,t) = 1$. Последовательность действительных чисел $\lambda_0, \lambda_{4k-1}, \lambda_{4k}$-являются собственными значениями периодической задачи:

$$-y'' + q_0(x)y = \lambda y, y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi),$$

а λ_{4k-3},λ_{4k-2}-есть собственные значения антипериодической задачи:

$$-y'' + q_0(x)y = \lambda y, y'(0) = -y'(\pi), y'(0) = -y'(\pi).$$

Наша цель дать процедуру построения решения $q(x,t)$,$\psi_{\pm}(x,t,\lambda)$,$t > 0$ задачи (1)-(4) в рамках обратной спектральной задачи для оператора Хилла L.

Основной результат заключается в следующей теореме

Теорема 1. Пусть $q(x,t)$,$\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$,$x \in R$,$t > 0$ решение задачи (1)-(4). Тогда границы спектра $\lambda_n(t)$,$n \geq 0$ оператора $L(t)$, не зависят от параметра t, т,е. $\lambda_n(t) = \lambda_n$, а спектральные параметры $\xi_n(t)$,$\sigma_n(t)$,$n = \overline{1,\infty}$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n = 2(-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi) \times$$

$$\times \left\{ \alpha(t) q(0,t)(2q(0,t) + 4\xi_n) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s(\pi,\lambda_k,t)\alpha_k(t)}{\xi_n - \lambda_k} \right\}, \quad n = 1,2,...n \geq 1, \tag{5}$$

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, \tag{6}$$

где знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \ \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, n \geq 1 \tag{7}$$

где ξ_n^0,σ_n^0,$n \geq 1$-спектральные параметры оператора

$$L(0)y = -y'' + q_0(x)y = \lambda y, x \in R.$$

Следствие 1. Обозначим через $\lambda_n, n \geq 0, \xi_n^0(t), \sigma_n^0(t), n \geq 1$спектральные данный оператора

$$L(\tau)y \equiv -y'' + q_0(x+\tau)y = \lambda y, x \in R.$$

Пусть $q(x,t), \psi_{\pm}(x, \lambda_k, t), x \in R, t > 0$ решение задачи (1)-(4). Тогда спектральные данные $\lambda_n(\tau,t), n \geq 0, \xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t), n \geq 1$ оператора

$$L(\tau,t)y = -y'' + q(x+\tau,t)y = \lambda y, x \in R \tag{8}$$

удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\lambda_n(\tau,t) = \lambda_n, n \geq 0;$$

$$\frac{d\xi_n(\tau,t)}{dt} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi_n(\tau,t)) \times$$

$$\times \left\{ \alpha(t) q(0,t)(2q(\tau,t) + 4\xi_n(\tau,t)) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s(\pi, \lambda_k, t, \tau)\alpha_k(t)}{\xi_n - \lambda_k} \right\}, \quad n \geq 1 \tag{9}$$

где $s(x,\lambda,t,\tau)$ решение уравнение (8) с начальными условиями $s(0,\lambda,t,\tau) = 0$,$s'(0,\lambda,t,\tau) = 1$. Для функции $s(\pi,\lambda,t,\tau)$ имеет место

$$s(\pi,\lambda,t,\tau) = \pi \prod_{k=1}^{2n-1} \frac{\xi_k(\tau,t) - \lambda}{k^2}. \tag{10}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau,t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau),\ \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \geq 1. \tag{11}$$

Замечание 1. Используя формулу первого следа

$$q(\tau,t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau,t)) \tag{12}$$

систему дифференциальных уравнений (9) можем переписать в замкнутой форме.

Для нахождения решения задачи (1)-(4) сначала решаем задача Коши (9), (11) при $\tau = 0$ находим $\xi_n(0,t), n \geq 1$. Затем из формулы следа (12) определим $q(0,t)$. После этого, подставляем эти данные в систему уравнение (9) и заново решая задачу Коши (9), (11) при произвольном значении τ находим $\xi_n(\tau,t)$, $n \geq 1$. Из формулы следов (12) находим $q(\tau,t)$,т.е. решение задачи (1)-(4).

Следствие 2. Если число $\frac{\pi}{n}$ является периодом начальной функции $q_0(x)$, то лакуны, номера которых не делятся на n, исчезают. По этому $q(x,t)$ соответствуют те же лакуны, значит, по теореме Хохштадта, число $\frac{\pi}{n}$ является периодом и для функции $q(x,t)$ по переменной x. Здесь $n \geq 2$ натуральное число и лакуна $(\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$ имеет номер k.

Литература

1. *Gardner C., Green I., Kruskal M., Miura R.* A method for solving the Korteveg-de Vries equation. // Phys. Rev. Lett., –New York, **19** (1967), 1095-1098.

2. *Итс А.Р., Матвеев В.Б.* Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза// ТМФ, **23**:1 (1975), 51-68.

3. *Дубровин Б.А., Новиков С.П.* Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза// ЖЭТФ, **67**:12 (1974), 2131-2143.

4. *Lax P.D.* Periodic solutions of the KdV equations// Nonlinear Wave Motion, Lecture in Appl. Math., 15, ed. A.C.Newell, AMS, Providence, RI, 1974, 85-96.

5. *Grinevich P.G., Taimanov I.A.* Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type// Geometry, Topology and Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. transl. Ser. 2, 224, eds.V.M.Buchstaber, I.M.Krichever, AMS, Providence, RI, 2008, 125-138.

6. *Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б.* Об уравнении Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций// ТМФ, **164**:2 (2010), 214-221.

7. *Trubowitz E.* The inverse problem for periodic potentials. // Comm. Pure. Appl. Math., –New York, 1977. V. 30. – P. 321-337.

8. *Hochstadt H.* A Generalization of Borg's inverse theorem for Hill's equations // J. Math. Anal. and Appl. –Elsevier, 1984. - v. 102. – P. 599-605.

КИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ, НАГРУЖЕННЫМИ СВОБОДНЫМИ ЧЛЕНАМИ И С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ, КОГДА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ РАЗЛИЧНЫЕ КОРНИ (ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ИЛИ КОМПЛЕКСНЫЕ)

Хидиров Х.С.

УДК 517.552

В работе исследованы системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя сингулярными точками, нагруженными свободными членами. С помощью линейной алгебраической системы доказано существование и найдены его решения.

Keywords:

Рассмотрим систему уравнений

$$x(x-1)y' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + f_i(x) + \sum_{k=1}^{n} \theta_k^i(x), (i = 1, 2, ..., n) \qquad (1)$$

где $a_k(x)$ заданные непрерывные функции (без ограничения общности можем считать их вещественными). Что касается свободных членов и решений, то при $x \neq 0$, $x \neq 1$ они также считаются непрерывными, а $y_k(x)$

Хидиров Х.С. Институт технологии и инновационного менеджмента г. Куляб

непрерывно дифференцируемыми; в сингулярных точках $x = 0$, $x = 1$ они могут быть непрерывными (класс C), либо просто ограниченными (класс M_0), $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \theta_k^i(x)$ - нагрузка на свободные члены, $\alpha_k, u\theta_k^i(x)$ непрерывно дифференцируемые функции и дополнительные условия

$$\int_a^b \varphi_i(x) \cdot y_i(x)dx = p_i, (i = 1, 2, ..., n) \tag{2}$$

Рассмотрим модельную систему (1).

$$x(x-1)y' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(0)y_j + f_i(x) + \sum_{k=1}^{n} \theta_k^i(x), (i = 1, 2, ..., n) \tag{3}$$

Решаем однородную систему с постоянными коэффициентами

$$x(x-1)y' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(0)y_j \tag{I_0}$$

Таким образом, общее решение (2) определяется формулами

$$y_p(x) = \theta_{pj} = \sum_{k=1}^{n} c_{pi}\gamma_{pi} \left|1 - \frac{1}{x}\right|^{-\lambda_1} + \sum_{j=1}^{n} \xi_{pj} \left(f_j + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \theta_k^k\right) \tag{4}$$

Подставляя решение из (6) в дополнительные условия (2) , получаем два алгебраические система уравнения.

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\alpha_j = b_j, (i = 1, 2, ..., m), \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\alpha_j = l_j, (i = 1, 2, ..., m), \tag{6}$$

Всего имеется три случая: 1) $n = m$, 2) $n > m$, 3) $n < m$,

Теорема 1. *Пусть в системе (1) коэффициенты $a_{kj}(x)$ заданные непрерывные функции (без ограничения общности можем считать их вещественными) и пусть определяемое значениями $a_{kj}(0)$ характеристическое уравнение (5) имеет n различных корней $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, причем $Re\lambda_k \neq 0, k = 1, 2, ..., n$, Тогда:*

Если на линейной алгебраической системе (л.а.с)(5),(6) $n = m$ и $\Delta(x) \neq 0$, то

1) На отрезке [0,1] свободные члены из C или M_0 , всегда существует единственное частное решение неоднородной системы (1) из того же класса.

2) Однородная система I_0 имеет β линейно-независимых решений $Y^{(k)}(x)$, одних и тех же в C и M_0 , где β есть число корней λ_j, для которых $Re\lambda_j \neq 0$.

Если на (л.а.с)(5),(6) $n > m$, и $n < m$,то линейная система уравнений (1) имеет решение.

Литература

1. *Михайлов Л.Г.* Об одном способе исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярными точками. ДАН России, 1994, т. 336, № 1, с. 21-23.

2. *Михайлов Л.Г.* Интегральные уравнения с однородными ядрами степени (-1). Душанбе: Дониш, 1966, 48 с.

3. *Михайлов Л.Г., Хидиров Х.С.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя сингулярными точками. ДАН РТ, 2009, т. 52, №2, с. 169-173.

4. *Хидиров Х.С.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной сингулярной точкой, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЗАБОЛЕВАНИЯ ТУБЕРКУЛЕЗОМ

Г.К. Хисаметдинова

Gulli_ rgk@mail.ru

УДК 519.8

В статье рассматривается процесс заболевания туберкулезом как процесс многих состояний. При математическом моделировании используется Марковский процесс.

Ключевые слова: Математическое моделирование, обратная задача, Марковский процесс, интервал неопределенности.

THE MATHEMATICAL MODEL OF THE TUBERCULOSIS DISCASE

The process of tuberculosis disease is considering as process of many conditions. The theory of Markov processes in using for mathematical modeling.

Keywords: Mathematical modeling, inverse problem, Markov process, uncertain interval.

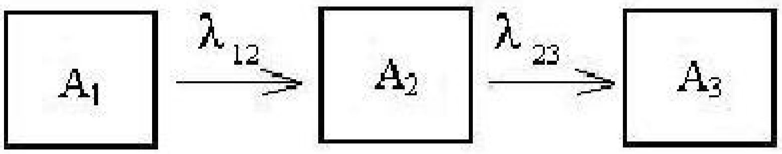
Широкое применение получил подход, позволяющий применять теорию марковских процессов для моделирования ситуации как поведение системы со многими состояниями. Рассмотрим процесс заболевания туберкулезом, как модель многих состояний, которая используется для описания состояния застрахованного лица.

При математическом моделировании на основе Марковских процессов возникают две взаимно противоположные задачи. Прямая задача состоит в расчете вероятностей соответствующих состояний при известных параметров модели. Обратная задача состоит в определении параметров модели на основе известных из эксперимента результатирующих характеристик процесса.

В любой момент времени индивид может находится в любом из перечисленных состояний. Необходимо оценить вероятность его нахождения в том или ином состоянии.

Хисаметдинова Гульназ Курбангалеевна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Gulnaz Khisametdinova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Для процесса заболевания туберкулезом рассмотрим три состояния системы: A_1 – «здоров», A_2 – «болен туберкулезом», A_3 – «смерть», где λ - интенсивности переходов из одного состояния в другое. Соответствующая схема представлена на рисунке.



Для нахождения вероятностей присутствия индивида в том или ином состоянии составим уравнения Колмогорова. Для схемы, представленной на рисунке , система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -\lambda_{12} p_1(t), \\ \frac{dp_2}{dt} = \lambda_{12} p_1(t) - \lambda_{23} p_2(t), \\ \frac{dp_3}{dt} = \lambda_{23} p_2(t) \end{cases}$$

Здесь $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ веероятности состояний системы A_1, A_2, A_3 соответственно. Для любого момента времени t выполняется нормировочное условие $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1$.

Когда интенсивности переходов известны, случай сводится к прямой задаче – решению уравнений Колмогорова. Но если интенсивности переходов неизвестны, возникает обратная задача, то есть задача оценивания интенсивностей переходов по статистическим данным. Для того чтобы расчет соответствовал реальным данным, необходимо найти такие значения интенсивностей переходов, при которых модель будет описывать экспериментальные данные, и даст возможность прогнозирования.

Для прямой и обратной задачи разработана программа в среде Фортран. Методом Кутта—Мерсона рассчитываются вероятности нахождения системы в том или ином состоянии.

Данная математическая модель описывает процесс заболевания туберкулезом. Зная значения интенсивностей переходов, мы по модели можем посчитать вероятности нахождения системы в том или ином состояние, а затем и количество человек находящихся в соответствующих состояниях.

Литература

1. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология – Москва, высшая школа 2001.

2. *Спивак С.И., Абдюшева С.Р.* Обратные задачи для марковских моделей. Системы управления и информационные технологии, 2008, №3(33), с.20-25

3. *Канторович Л.В.* Сибирский математический журнал, 1962, т.3, №5, с.701-709.

ПРОВАЛЬНАЯ СИНГУЛЯРНОСТЬ ТИПА СБОРКИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ИЗОЭНТРОПИЧЕСКОГО ГАЗА ПРИ НУЛЕВОЙ ПЛОТНОСТИ

А.М. Шавлуков
aza3727@yandex.ru

УДК 517.958

Исследуются решения системы уравнений движения одномерного изоэнтропического газа при стремлении плотности к нулю. Описана типичная сингулярность сборки таких решений. Для частного случая уравнений мелкой воды выписано явное эталонное решение с такой сингулярностью. В терминах этого явного решения строится асимптотическое решение уравнений движения одномерного изоэнтропического газа.

Ключевые слова: система уравнений движения одномерного изоэнтропического газа, система уравнений мелкой воды, провал плотности, катастрофа сборки

Dropping cusp singularity of solutions of the equations of one-dimensional isentropic gas flow

In the paper we have discussed the solutions of the equations of a one-dimensional isentropic gas flow with low density values. We have described typical singularity of these solutions corresponding to cusp catastrophe. The model solution with such singularity was obtained in the special case of shallow water equations. Within the terms of this model solution, an asymptotic solution is obtained for the equations of a one-dimensional isentropic gas flow.

Keywords: system of equations of a one-dimensional isentropic gas flow, shallow water equations, low density values, cusp catastrophe

Исследованы решения системы уравнений движения одномерного изоэнтропического газа ($\alpha(\rho) > 0$)

$$\begin{cases} \rho_T + (\rho v)_X = 0, \\ v_T + v v_X + \alpha(\rho)\rho_X = 0 \end{cases} \tag{1}$$

при малых значения плотности ρ. Описана катастрофа сборки асимптотического решения этой системы при $\rho \to 0$ (эта сингулярность аналогична исследованной в [2] для случая $\alpha(\rho) < 0$). В частном случае уравнений мелкой воды $\alpha(\rho) = const$ выписано явное эталонное решение для такой сингулярности. Данное эталонное решение задается корнем канонического кубического уравнения сборки.

В терминах этого явного решения члены вышеупомянутого асимптотического решения выписываются явно.

Из-за особенности значения $\rho = 0$ данная сингулярность отсутствует в списке типичных (с точки зрения математической теории катастроф [1]) сингулярностей решений системы (1), приведенном в [3].

Данный результат получен в соавторстве с Б. И. Сулеймановым.

Шавлуков Азамат Мавлетович, аспирант, БашГУ (Уфа, Россия); Azamat Shavlukov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Литература

1. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. / Кн. 1. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 350 с.

2. *Кудашев В.Р., Сулейманов Б.И.* Письма в ЖЭТФ 1995. Т. 62. № 4. С.358.

3. *Рахимов А.Х.* “Особенности римановых инвариантов”, Функц. анализ и его прил., 27:1 (1993), 46–59; Funct. Anal. Appl., 27:1 (1993), 39–50.

ФОРМУЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Шарипов Б.

УДК 517.956

В работах [1]-[3] были исследованы различные классы систем линейных а также системы нелинейных уравнений в полных дифференциалах (п.д.- систем) для функций двух и многих независимых переменных, с регулярными, так и с сингулярными коэффициентами. В случае тождественного выполнения условий совместности рассматриваемых систем, многообразия их решений находятся вполне определёнными формулами. А также исследованы поведение решения систем в точках линий вырождения.

Keywords:

Настоящий тезис работы содержит один класс нелинейных п.д.- систем с сингулярными коэффициентами вида

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = a_i(x_1, \ldots, x_n) \cdot p(x_{k+1}, \ldots, x_n; u),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{b_j(x_1, \ldots, x_n, u)}{x_j^k}, \quad (i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{k+1, n}), \tag{1}$$

где $a_i, p,\ b_j \in C^1\left(\overline{D} \times R^1\right)$, $u \in C^2(D_0)$. Легко заметить, что правые части системы (1) при $m \geq 1$ в точках $x_j = 0$ не интегрируемы. Поэтому потребуем, чтобы в особых точках поверхностей существовали пределы $\lim\limits_{x_j \to 0} \left(x_j^m u'_{x_j}\right) = 0$. При этом из второй группы уравнений системы (1) соответственно получим $b_j(x_1, \ldots, x_n; u) = 0$. Откуда имеем $u = H_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые могут быть, либо не быть частными решениями системы (1). Условия совместности системы (1) выполняются тождественно, если

$$\begin{array}{l} b_j(x_1, \ldots, x_n; u) = x_j^m \cdot \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_j} - \frac{\partial P}{\partial x_j}\right] \cdot p(x_{k+1}, \ldots, x_n; u) + \\ + x_j^m f_j[x_{k+1}, \ldots, x_n;\ P(x_{k+1}, \ldots, x_n; u) - \omega(x_2, \ldots, x_n) - \\ - A_1(x_1, \ldots, x_n)] p(x_{k+1}, \ldots, x_n; u)\,, (j = \overline{k+1, n}) \end{array} \tag{2}$$

Шарипов Б. Душанбе, Доцент кафедры Высшей математики ТГФЭУ

Из этих формул в (2) можно определить функции f_j следующим образом:

$$f_j(x_{k+1},\ldots,x_n;v)=\frac{b_j(x_1,\ldots,x_n;u)}{x_j^m\cdot P(x_{k+1},\ldots,x_n;u)}-\frac{\partial\omega}{\partial x_j}+\frac{\partial P}{\partial x_j},(j=k+1,...,n). \tag{3}$$

Если задача Коши для регулярной п.д.- системы полученной из системой (1) имеет решение, тогда исходная система также будет разрешимой, и многообразие ее решений определяется формулой

$$\begin{aligned}&u(x_1,\ldots,x_n)=P^{-1}[x_{k+1},\ldots,x_n;A_1(x_1,\ldots,x_n)+\omega(x_2,\ldots,x_n)+\\&+H(x_{k+1},\ldots,x_n;u_0)].\end{aligned} \tag{4}$$

Тогда многообразие решение системы (1) и функции $A_1(x_1,\ldots,x_n)$ при всех порядков особенности в $\overline{D}$, является непрерывными, потому, что особенности данной системы устраняются и решением исходной системы формулой (4) во всей данной области непрерывно.

Теорема 1. *Пусть, в п.д.- системе (1)* $a_i,b_j,p\in C^1\left(\overline{D}\times R^1\right)$, $u\in C^2(D_0)$. *Если условия совместности системы (1) выполняются, но не тождественно, тогда могут существовать некоторые частные решения системы. Для тождественного выполнения условий системы (1) необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь между функциями* $b_j(x_1,\ldots,x_n,u)$, $a_i(x_1,\ldots)$, $p(x_{k+1},\ldots,u)$ *определялись в виде формулы (2). Если задача Коши для п.д.- системы (1), где функции* f_j *определяются формулами (3), имеет решение, то исходная система также разрешима, и многообразие ее решений находится формулой вида (4), непрерывной во всей данной области.*

2.Рассмотрим п.д.- систему вида

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=a_i(x_1,\ldots,x_n)\cdot u+h_i(x_1,\ldots,x_n)\cdot u^k,\quad \frac{\partial u}{\partial x_j}=\frac{b_j(x_1,\ldots,x_n;u)}{x_j^m}, \tag{5}$$

где $a_i,\ h_i,b_j\ \in C^1\left(\overline{D}\times R^1\right)$, $u(x_1,\ldots,x_n)\in C^2(D_0)$, $i=\overline{1,r}$, $2\le r\le n-1$, $j=\overline{k+1,n}$.

Условия совместности системы (5) выполняются тождественно, тогда и только тогда, когда взаимосвязи между функциями $a_i,\ h_i,b_j$ определяются формулами

$$\begin{aligned}&b_j(x_1,\ldots,x_n,u)=\tfrac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\cdot u+\\&+\tfrac{1}{1-k}\left\{\tfrac{\partial\omega_2}{x_j}+f_j\left[x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n,e^{(k-1)\omega_1(x,..)}u^{1-k}-\omega_2(x_1,\ldots,x_n)\right]\right\}\cdot e^{(1-k)\omega_1(x_1,\ldots)}u^k\ .\end{aligned}$$

Тогда она разрешима, и многообразие ее решений определяется формулой

$$u(x_1,\ldots,x_n)=\left[\omega_2(x_1,\ldots,x_n)+H(x_{r+1},\ldots,x_n;u_0)\right]^{1/(1-k)}\cdot e^{\omega_1(x_1,\ldots,x_n)},$$

непрерывной во всей данной области.

Литература

1. *Михайлов Л.Г., Шарипов Б.* Математические Замеки,-Якутск, 2003,- том 10 (вып. 1), с.73-80.

2. *Михайлов Л.Г., Шарипов Б.* Докл. АН РТ, 2011, т.54(№8), с.701-708.

3. *Михайлов Л.Г., Шарипов Б.* Дифференциальные уравнения, -2015, т.51, с.1252-1256.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ПОДМОДЕЛИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ, ПОСТРОЕННОЙ НА 4-Х МЕРНОЙ ПОДАЛГЕБРЕ С ОПЕРАТОРАМИ ГАЛИЛЕЕВА ПЕРЕНОСА И ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ДВУХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРЕНОСА ПО ОСЯМ КООРДИНАТ.

Ю.В. Юлмухаметова
yulmukhametova.yulya@yandex.ru

УДК 517.957

Для уравнений газовой динамики рассматривается 4-х мерная подалгебра с номером 4.47 из 11-мерной алгебры Ли операторов дифференцирования первого порядка. Инварианты этой подалгебры задают представление решения для уравнений газовой динамики в декартовой системе координат. После подстановки представления решения изучена совместность полученной системы дифференциальных уравнений. Система совместна и имеет точное решение с одной произвольной функцией. Полученное решение описывает прямолинейный разлет частиц газа. Найдены моменты коллапса частиц.

Ключевые слова: подмодель, газовая динамика, подалгебра, точное решение

The exact solution of a gas dynamics submodel constructed on a 4-dimensional subalgebra with Galilean transport operators and a linear combination of two transport operators along the coordinate axes.

For gas dynamics equations, a 4-dimensional subalgebra with number 4.47 from the 11-dimensional Lie algebra of first-order differentiation operators is considered. The invariants of this subalgebra give a solution representation for the gas dynamics equations in a Cartesian coordinate system. After substituting the representation of the solution, the compatibility of the obtained system of differential equations is studied. The system is compatible and has an exact solution with one arbitrary function. The obtained solution describes the rectilinear expansion of gas particles. Moments of collapse of particles are found.

Keywords: the submodel of gas dynamics, subalgebra, the exact solution

Уравнения газовой динамики в декартовой системе координат имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \rho^{-1}p_x = 0,\\
&v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \rho^{-1}p_y = 0,\\
&w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \rho^{-1}p_z = 0, \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10071) и частично средствами государственного бюджета по госзаданию на 2019-2022 годы (№ 0246-2019-0052).

Юлмухаметова Юлия Валерьевна, к.ф.-м.н., н.с., ИМех УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Yulya Yulmukhametova (Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia)

$$\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0,$$

$$S_t + uS_x + vS_y + wS_x = 0, \quad p = f(\rho, S),$$

где t – время, $\vec{x} = (x, y, z)$ – декартовы независимые переменные, $u = u(t, \vec{x}), v = v(t, \vec{x}), w = w(t, \vec{x})$ – компоненты вектора скорости, $\rho = \rho(t, \vec{x})$ – плотность, $p = p(t, \vec{x})$ – давление, $p = f(\rho, S)$ – уравнение состояния, $S = S(t, \vec{x})$ – энтропия. В системе (1) уравнение состояния предполагается произвольного вида.

Рассмотрим 4-х мерную подалгебру с номером 4.47 из [1]. Подалгебру задают операторы $X_1 + aX_3 = \partial_x + a\partial_z, X_2 = \partial_y, X_5 = t\partial_y + \partial_v, X_6 = t\partial_z + \partial_w$, где a – некоторая постоянная. Инварианты подалгебры задают представление решения, которое имеет вид:

$$u = u(t), v = v(t, x, y, z), w = \frac{z - ax}{t} + w_1(t), p = p(t), \rho = \rho(t),$$

где $w_1(t)$ – произвольная функция. После подстановки представления решения в уравнения газовой динамики получим решения

$$S = S_0, u = 0, w = \frac{z - ax}{t}, v = \frac{y + \Phi(x, (\frac{z-ax}{t}))}{t + 1}, \rho = \frac{\rho_0}{t^2 - 1},$$

где ρ_0 – произвольная постоянная, Φ – произвольная функция двух переменных.

Из представления решения определяются мировые линии движения частиц газа как решение системы дифференциальных уравнений [2]:

$$\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = \frac{y + \Phi(x, (\frac{z-ax}{t}))}{t + 1}, \frac{dz}{dt} = \frac{z - ax}{t}.$$

Решение последней системы задает мировые линии движения частиц:

$$x = x_0, y = (t + 1)v_0 - \Phi(x_0, w_0), z = ax_0 + (t - 1)w_0,$$

где x_0, v_0, w_0 – локальные лагранжевые переменные. Последние равенства задают прямолинейный разлет частиц газа. Якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым переменным равен $t^2 - 1$ и обращается в нуль при $t = \pm 1$. Моменты времени и являются моментами коллапса частиц газа. Ранг матрицы Якоби при и равен 2. Значит коллапс частиц происходит на поверхности.

Литература

1. *Хабиров С.В.* Простые частично инвариантные решения // УМЖ. 2019. Т.11 № 1. С. 87-98.

2. *Хабиров С.В.* Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: Гилем, 2003. 192 с.

О ПРИБЛИЖЕННОМ ПОСТРОЕНИИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М.Г. Юмагулов, М.Ф. Фазлытдинов
yum_mg@mail.ru, fazlitdin_marat@mail.ru

УДК 517.91

В докладе обсуждаются новые формулы и алгоритмы построения центральных многообразий в задаче о локальных бифуркациях в динамических системах. Предлагаемые алгоритмы и формулы позволяют проводить эффективный качественный анализ бифуркаций в терминах исходных уравнений.

Ключевые слова: динамическая система, точка равновесия, бифуркация, центральное многообразие.

Approximate formulas and algorithms for constructing central manifolds

In this paper, new algorithms for constructing central manifolds in problem on local bifurcations in dynamical systems are obtained. The proposed algorithms and formulas allow for an efficient qualitative analysis of bifurcations in terms of the original equations.

Keywords: dynamical systems, equilibrium point, bifurcation, central manifold.

В докладе предлагается общая схема, позволяющая получить новые приближенные формулы для центральных многообразий динамических систем в терминах исходных уравнений. Полученные результаты относятся к динамическим системам как с непрерывным, так и с дискретным временем. Ограничимся здесь приведением некоторых результатов относительно системы с непрерывным временем:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + a(x)\,, \quad x \in R^N\,, \tag{1}$$

где A – квадратная матрица, а функция $a(x)$ является C^m-гладкой ($m \geqslant 1$) и удовлетворяет равенствам: $a(0) = 0$ и $a'(0) = 0$. Предполагается, что точка равновесия $x = 0$ системы (1) является негиперболической, т.е. матрица A имеет одно или несколько чисто мнимых собственных значений. Будем считать, что нелинейность в правой части уравнения (1) представима в виде $a(x) = a_2(x) + a_3(x) + \widehat{a}_4(x)$, где $a_2(x)$ содержит квадратичные по x слагаемые, $a_3(x)$ – слагаемые третьей степени, а $\widehat{a}_4(x)$ является C^m-гладкой и удовлетворяет соотношению: $\|\widehat{a}_4(x)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \to 0$.

Пусть спектр σ матрицы A состоит из двух непустых частей: $\sigma = \sigma_0 \cup \sigma^0$, где σ_0 содержит собственные значения, вещественные части которых равны нулю, а σ^0 – остальные собственные значения. Множество σ^0 также состоит из двух частей: $\sigma^0 = \sigma_- \cup \sigma^+$, где множество σ_- содержит собственные значения, вещественные части которых отрицательны, а σ^+ – собственные значения, вещественные части которых положительны. Обозначим через

Юмагулов Марат Гаязович, д.ф.-м.н., профессор, Башкирский государственный университет (Уфа, Россия); Yumagulov Marat Gayazovich (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Фазлытдинов Марат Флюрович, главный специалист, Газпромнефть НТЦ (Санкт-Петербург, Россия); Fazlytdinov Marat Flurovich (Gazpromneft STC, St. Petersburg, Russia)

E_0, E_- и E^+ – корневые подпространства матрицы A, отвечающие, соответственно, частям σ_0, σ_- и σ^+ ее спектра. Пусть k_0, k_- и k^+ – это размерности подпространств E_0, E_- и E^+; тогда $k_0 + k_- + k^+ = N$ и $1 \leqslant k_0 \leqslant N-1$.

Пространство R^N представляется в виде прямой суммы $R^N = E_0 \bigoplus E_- \bigoplus E^+$ инвариантных для оператора $A : R^N \to R^N$ подпространств E_0, E_- и E^+. Положим также $E^0 = E_- \bigoplus E^+$; тогда $R^N = E_0 \bigoplus E^0$. Обозначим, через $P_0 : R^N \to E_0$ и $P^0 : R^N \to E^0$ соответствующие операторы проектирования.

Теорема о центральном многообразии (см., например, [1]) утверждает, что существует δ_0-окрестность $T(0, \delta_0)$ точки $x = 0$ такая, что система (1) имеет в шаре $T(0, \delta_0)$ гладкое инвариантное k_0-мерное многообразие W_c, которое в точке $x = 0$ касается подпространства E_0. Многообразие W_c называют *центральным многообразием* системы (1). В естественном смысле вся нетривиальная динамика системы (1) в окрестности точки равновесия $x = 0$ сосредоточена на центральном многообразии.

Центральное многообразие W_c системы (1) может быть локально задано равенством

$$W_c = \{x : \, x = u + \psi(u) \ | \ \ u \in E_0 \, , \ \psi(u) \in E^0 \, , \ \psi(0) = \psi'(0) = 0 \, \} \, ,$$

где функция $v = \psi(u)$ является гладкой.

Ограничимся для простоты рассмотрением случая, когда матрица A имеет простое собственное значение 0 и не имеет других чисто мнимых собственных значений. В этом случае существуют собственные векторы e и g матрицы A и транспонированной матрицы A^* соответственно, отвечающие простому собственному значению 0 и удовлетворяющие равенствам $\|e\| = 1 \, , (e, g) = 1$. Подпространство E_0 является одномерным; оно содержит вектор e. Операторы проектирования здесь определяются равенствами $P_0 x = (x, g) e \, , P^0 = I - P_0$.

Положим $B_0 = -A + P_0$. По построению оператор $B_0 : \, R^N \to R^N$ обратим, причем подпространства E_0 и E^0 инвариантны для него. Положим, далее, для краткости: $a_2 = a_2(e) \, , a_3 = a_3(e) \, , a_2' = a_2'(e)$; здесь $a_2'(x)$ – матрица Якоби вектор-функции $a_2(x)$.

Теорема 1. *Пусть матрица A имеет простое собственное значение 0, а вещественные части остальных ее собственных значений не равны нулю. Тогда центральное многообразие W_c системы (1) может быть описано равенством*

$$W_c = \{x : \, x = \varepsilon e + \varepsilon^2 \psi_2 + \varepsilon^3 \psi_3 + \widehat{\psi}_4(\varepsilon)\} \, ,$$

где ε - малый параметр,

$$\psi_2 = B_0^{-1} P^0 a_2 \, , \quad \psi_3 = B_0^{-1} P^0 [-2(a_2, g)\psi_2 + a_2' \psi_2 + a_3] \, ,$$

а функция $\widehat{\psi}_4(\varepsilon)$ является гладкой и удовлетворяет соотношению: $\|\widehat{\psi}_4(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^4)$, $\varepsilon \to 0$.

Литература

1. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В. и др.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

РАЗРАБОТКА WEB-САЙТА UFAEYES

К.И. Юсупова, М.Л. Бердникова
lovely.96@mail.ru, ml0@mail.ru

Интернет сегодня доступен всем, там можно совершить покупку, разместить рекламу, получить любую информацию, общаться. Web-сайты сильно упрощают жизнь людям, им не приходится куда-то ходить, звонить, чтобы получить нужную информацию. Интернет стал незаменимым помощником. В наше время практически у каждой компании есть собственный сайт. Сайты, размещенные в Интернете, могут приносить своим владельцам существенные доходы. И когда компания только зарождается, первым делом возникает потребность в создании собственного web-ресурса. Способов создания сайтов существует немалое количество: 1) В блокноте с нуля; 2) С помомощью конструкторов; 3) CMS - content management system. Самыми популярными среди нынешних бесплатных CMS являются WordPress, Joomla! и Drupal. Создания сайта с нуля без помощи CMS и конструкторов для сайта лучше, потому что, о том, как устроен такой сайт, знает только разработчик. Сайт будет полностью уникальным, его легче продвигать в поисковых системах. В любой момент его можно изменить. В ходе выполнения работы выяснилось, что лучшим решением для сайта будет создание его с нуля, без помощи систем управления контентом. Принцип работы разработанного сайта UfaEyes – заказ необходимой услуги и получение исполнителя для указанной услуги. Например, Заказчик пишет в чате, что ищет мастера по ремонту ноутбука. Менеджер в чате уточняет условия выполнения работ, после чего приступает к поиску подходящих (ПРОВЕРЕННЫХ) Исполнителей. Менеджер ищет Исполнителей на сайте (Исполнители подключаются в базу в ручном режиме через Администратора сайта, и добавляются как пользователи в компонент), если в базе нет подходящих Исполнителей, то Менеджер находит подходящих Исполнителей за пределами сайта и добавляет в базу (регистрирует нового исполнителя через Администратора). После того, как Исполнитель выбран и обговорены все условия выполнения работ и цена, исполнитель начинает производить работы. В качестве программного обеспечения на стороне сервера были использованы следующие компоненты. Web-сервер Apache версии 2.2.22 – для принятия HTTP-запросов, это свободный web-сервер, который является кроссплатформенным программным обеспечением. PHP 5.6 – для обработки запросов и MySQL 5.5.54 – в качестве базы данных (тип таблиц InnoDB). Postfix 2.9.6 – для передачи почты между почтовыми клиентами пользователей, он позволяет создать надежную и быструю почтовую систему. В качестве защиты от нападения использовался Fail2Ban Intrusion Detector 0.8.6. Межсетевой экран Linux IPTables (firewall IPv4) – для защиты сегментов сети или отдельных хостов от несанкционированного доступа. Межсетевые экраны пропускают или запрещают трафик, сравнивая его характеристики с заданными шаблонами. DNS сервер BIND обеспечивает выполнение преобразования DNS-имени в IP-адрес и наоборот. Для загрузки файлов исходного кода на сервер и для дальнейшей работы с ними использовался FTP-клиент FileZilla. По сравнению с другими FTP-клиентами, этот до сих пор обновляется и поддерживается, а также предоставляет более широкий функционал для работы с сервером. Во время проектирования сайта UfaEyes было принято решение использовать в качестве каскада CMS Joomla (далее CMS), но на стадии разработки возникли некоторые трудности с этой CMS. Пытаясь реализовать начальный функционал UfaEyes выяснилось то, что методы CMS

Юсупова Кристина Игоревна, магистрант, БашГУ (Уфа, Россия); Kristina Igorevna (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Бердникова Марина Леонидовна, к.ф.-м.н., доцент, БашГу (Уфа, Россия); Marina Leonidovna (Bashkir State University, Ufa, Russia)

устроены неудобно, разработка на нем узкопрофильная. Через некоторое время, после попыток реализовать нужный функционал, было решено отказаться от этой CMS, так как все-таки Joomla! не подходит для разработки такого типа сайта, как UfaEyes. Плюсы этой системы управления контентом в базовых рядовых задачах превратились в серьезные недостатки и добавили сложности в нестандартных задачах. Было решено отказаться от сторонних решений и написать весь функционал сайта самостоятельно. Простота восприятия и многофункциональность сайта на первом месте. Для написания кода сайта использовался Notepad++. Он поддерживает синтаксис множества языков программирования и языков скриптов: PHP, JavaScript, HTML, CSS и JSON. Этот инструмент значительно упрощает и ускоряет разработку кода, нежели стандартные инструменты Windows: Блокнот и WordPad. Для создания графики использовался многофункциональный графический редактор Adobe Photoshop CC 2018. Этот сайт создан для тех, кто ищет работу и тех, кто ищет качественно оказанные услуги в любой сфере деятельности. Web-сайт – это лицо компании, которой он принадлежит. На сегодняшний день в создании сайта заинтересованно огромное количество людей, так как влияние сети Интернет на рекламу компании играет значительную роль. Каждой организации необходимо, что их web-сайт удовлетворял всем современным решениям, был красивым, информативным и что немаловажно понятным.

Литература

1. *Плюсы и минусы CMS-движков [Электронный ресурс].- https://iq-project.ru/info/pros-and-cons-of-cms*

2. *Разработанный web-сайт UfaEyes – https://www.ufaeyes.ru/index/?ownp=origin*

3. *MySQL [Электронный ресурс]. – https://www.mysql.com*

ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПОЛОСЕ НА ОКРУЖНОСТЯХ

Г.Т. Якубов, А.З. Хусанов
alisher_5869@rambler.ru, abduroziqhusanov@mail.ru

УДК 517.946

В работе рассматривается новый класс задач интегральной геометрии вольтерровского типа с весовой функцией специального вида. Доказана теорема единственности, получены оценки устойчивости в пространствах Соболева, тем самым показана слабая некорректность и доказана теорема о существовании решения задачи интегральной геометрии.

Ключевые слова: Задача интегральной геометрии, слабая и сильная некорректность, единственность и устойчивость

We study new problem of reconstruction of a function in a strip from their given integrals with known weight function along polygonal lines. We obtained two simply inversion formulas for the solution to the problem. We prove uniqueness and existence theorems for solutions and obtain stability estimates of a solution to the problem in Sobolev's spaces and thus show their weak ill-posedness.

Keywords: ill-posed problems, integral geometry problems, integral transforms, inversion formula, uniqueness, existence theorem, weak instability, perturbation

Задачи интегральной геометрии являются одним из крупнейших направлений в теории некорректных задач математической физики и анализа. Ее задачи тесно связаны с многочисленными приложениями - задачами интерпретации данных геофизических исследований, электроразведки, акустики и компьютерной томографии [1].

Одной из центральных проблем интегральной геометрии является восстановление функции, если известны ее интегралы по семействам кривых [2-3].

В работах Акр.Х. Бегматова [4-7] были получены результаты, выделяющие новые классы слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости и в n-мерном пространстве. В работе Акр.Х. Бегматова и З.Х. Очилова [8] получены результаты новые классы задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией.

Введем обозначения, которые будем использовать:

$$(x,y)\in R^2,\quad (\xi,\eta)\in R^2,\quad \lambda\in R^1,\quad \mu\in R^1$$

$$\Omega=\{(x,y):\ x\in R^1,\ y\in(0,l),\ l<\infty\},$$

$$\bar{\Omega}=\{(x,y):\ x\in R^1,\ y\in[0,l]\}.$$

Якубов Гулам Тоирович, ассистент, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Gulom Yakubov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Абдурозик Зарифжонович Хусанов, студент, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Abduroziq Husanov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Пусть $\{P(x,y)\}$ - семейство окружностей в R^2_+, склеенных специальным образом. Произвольная кривая семейства $P(x,y)$ определяется соотношениями

$$P(x,y) = \{(\xi,\eta): \ (\xi-(x-y))^2+(\eta-y)^2 = y^2, \ 0 \le \eta \le y, \ x-y \le \xi \le x\} \cup$$

$$\cup \{(\xi,\eta): (\xi-(x+y))^2+(\eta-y)^2 = y^2, \ 0 \le \eta \le y, \ x \le \xi \le x+y\}.$$

Задача A. Пусть от функцию двух переменных $u(x,y)$ известны интегралы :

$$\int_{x-y}^{x} g(x,\xi)u\left(\xi, y-\sqrt{y^2-(\xi-x+y)^2}\right) d\xi +$$

$$+\int_{x}^{x+y} g(x,\xi)u\left(\xi, y-\sqrt{y^2-(\xi-x-y)^2}\right) d\xi = f(x,y)$$

где $g(x,\xi) = |x-\xi|$.

Требуется по функции $f(x,y)$ найти $u(x,y)$.

Функция $u(x,y)$ - функция из класса U, которые имеют все непрерывные частные производные до второго порядка включительно и финитны с носителем в R^2_+:

$$supp\ u \subset D = \{(x,y): \ -a < x < a, \ 0 < a < \infty, \ 0 < y < l, \ l < \infty\}.$$

Итак, кривая по которой ведется интегрирование, имеет вид склеенных четвертинок окружностей. Доказана единственность решения исходной задачи A, получены аналитические представления искомой функции в терминах образов Фурье по первой переменной, а также в исходных переменных.

Литература

1. *М.М. Лаврентьев, Л.Я.Савельев* Линейные операторы и некорректные задачи.Москав: Наука, 1991. 331 с.

2. *М.М. Лаврентьев, А.Л. Бухгейм* Об одном классе задач интегральной геометрии // Докл. АН СССР. 1973. Т.311, N1.С.38-39.

3. *М.М. Лаврентьев, А.Л. Бухгейм* Об одном классе операторных уравнений первого рода//Функцион. анализ и его прил. 1973. Т.7.Вып.4.С.44-53.

4. *Акр.Х. Бегматов* Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости // Сиб. мат. журнал. 1995. Т. 36. N 2. С. 243-247.

5. *Begmatov Akram H* On a class of weakly ill-posed Volterra-type of integral geometry in the three-dimensional space // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 1995. Vol. 3 . N3. P. 231-235.

6. *Акр.Х. Бегматов* Вольтеровские задачи интегральной геометрии на плоскости для кривых с особенностями // Сиб. мат. журнал. 1997. Т. 38. N 4. С 723-737.

7. *Акр.Х. Бегматов* Задачи интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершинах // Доклады РАН. 1998. Т. 358. N 2. С. 151-153.

8. *Акр. Х. Бегматов, З.Х. Очилов* Задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией. Доклады РАН, 2009. 429. – N3. – С. 295-297.

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ БИФУРКАЦИЙ В МОДЕЛЯХ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

Д.А. Якшибаева
K_ dina_ a@mail.ru

УДК 517.927

Приведены основные положения операторного метода, позволяющие исследовать точки локальных бифуркаций в моделях популяционной динамики, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа.

Ключевые слова: операторный метод, точка бифуркации, модели популяционной динамики, функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего типа

Operator method of investigation of local bifurcation points in population dynamics models described in the functional-differential equations of delayed type

The main provisions of the operator method are given, allowing to investigate points of local bifurcations in models population dynamics described by functional differential equations of delayed type.

Keywords: operator method, bifurcation point, population model dynamics, functional differential equations delayed type

Интерес специалистов к исследованию моделей популяционной динамики связан с важными приложениями и с теоретическими значениями этих исследований.Существенный вклад в разработку общих методов исследования бифуркаций и их приложений к анализу бифуркаций в моделях популяционной динамики, описываемых дифференциальными уравнениями запаздывающего типа внесли А.Д. Базыкин, Дж. Гукенхеймер, М.А. Красносельский, Ю.С. Колесов, Д.С. Кащенко, М.Г. Юмагулов, Г.А. Каменский, Б.С.Разумихин, Ю.С Осипов, В.И. Борздыко, В. Вольтерра, А.Лотка, В.Б. Колмановский, Дж.Марри, Г.Ю.Ризниченко, и др.

Одной из наиболее интересных и в тоже время важной с теоретической и практической точек зрения является задача о точках локальных бифуркаций в моделях популяционной динамики, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа.

Рассмотрим систему вида

$$x'(t) = \int_0^r [d_\tau R(t,\tau,\theta)]\, x(t-\tau) + \int_0^r [d_\tau Q(t,\tau,\theta)]\, \Phi\big(t, x(t-\tau), \theta\big) +$$

$$+\Psi\big(t, x(t-\tau_1), ..., x(t-\tau_m), \theta\big), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $r \in (0,T)$, $T > 0$, θ— векторный параметр, $\tau_j \in [0,r]$,$j = \overline{1,m}$. $R(t,\tau,\theta)$, $Q(t,\tau,\theta)$ —$n \times n$ матрицы, элементы которых определены при $t \in R$ и $\tau \in [0,r]$, являются функциями ограниченной вариации по переменной τ, непрерывно дифференцируемы по θ и непрерывны в среднем

Якшибаева Дина Ахатовна, к.ф.-м.н, СИ (филиал) БашГУ (Сибай, Россия); Dina Yakshibaeva (Sibay Institute (branch) of Bashkir State University, Sibay, Russia)

по t, T—периодические по t. Вектор-функции $\Phi(t,x,\theta)$, $\Psi(t,x,\theta)$ являются T-периодическими по t, непрерывно дифференцируемыми по совокупности переменных и равномерно по θ удовлетворяют условиям $\| \Phi(t,x,\theta) \| = O\big(\| x \|^2\big)$ и $\| \Psi(t,x,\theta) \| = O\big(\| x \|^2\big)$, при $\| x \| \to 0$.

Многие популяционные модели можно представить в виде (1). Примером такой модели является уравнение Хатчинсона-Райта.

Одним из эффективных методов исследования задач о точках локальных бифуркаций является операторная схема, основанная на методе функционализации параметра. Метод основан на переходе от задачи о бифуркаци для системы (1) к эквивалентной задаче о бифуркации малых ненулевых решений операторного уравнения вида

$$u = B(\theta)u + b(u,\theta), \quad u \in H, \quad \theta \in R^m. \qquad (2)$$

Здесь H-гильбертово пространство, $B(\theta) : H \to H$ линейный вполненепрерывный оператор, гладко зависящий от векторного параметра θ, $b\big(u,\theta\big) : H \to H$ нелинейный компактный оператор, также гладко зависящий от θ и представимый в виде $b\big(u,\theta\big) = b_2\big(u,\theta\big) + b_3\big(u,\theta\big) + \widetilde{b_4}\big(u,\theta\big)$. Операторы b_2, b_3 содержат квадратичные и кубические по u слагаемые, соответственно, а $\widetilde{b_4}$ является гладким по u, при этом $\| \widetilde{b_4}\big(u,\theta\big) \| = O\big(\| u \|^4\big)$, при $\| u \| \to 0$.

Значение θ_0 параметра θ назовем точкой бифуркации уравнения (2), если существуют $\varepsilon_0 > 0$ и определенные при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ непрерывно дифференцируемые функции $\theta(\varepsilon) = \theta_0$ и $u = u(\varepsilon)$ такие, что: $\theta(0) = \theta_0$, $u(0) = 0$, $u(\varepsilon) \neq 0$ при $\varepsilon \neq 0$. Для $\forall \varepsilon \geq 0$ функция $u(\varepsilon)$ является решением уравнения (2).

Задачу о точках бифуркации рассмотрим в двух основных случаях:
S1.оператор $B(\theta_0)$ имеет простое собственное значение 1,
S2.оператор $B(\theta_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2.

Рассмотрим сначала случай S1. Здесь $\theta \in R$. Оператор $B(\theta_0)$ имеет собственный вектор e, отвечающий простому собственному значению 1. Сопряженный оператор $B^*(\theta_0) : H \to H$ также имеет простое собственное значение 1, которому соответствует собственный вектор e^*.

Теорема 1. *Пусть оператор $B(\theta_0)$ имеет простое собственное значение 1 и $(B^{'}(\theta_0)e, e^*) \neq 0$. Тогда θ_0 является точкой бифуркации уравнения (2).*

В случае S2 параметр θ естественно считать двумерным. Пусть $\theta = (\alpha, \beta)$. Пусть e и g - собственные линейно независимые векторы оператора $B(\alpha_0, \beta_0)$ соответствующие полупростому собственному значению 1 кратности 2. Сопряженный оператор $B^*(\alpha_0, \beta_0) : H \to H$ также имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2, которому отвечают собственные векторы e^*, g^*.

Теорема 2. *Пусть оператор $B(\alpha_0, \beta_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Пусть*
$(B'_\alpha(\alpha_0,\beta_0)e, e^*) \cdot \Big(B'_\beta(\alpha_0,\beta_0)e, g^*\Big) - (B'_\alpha(\alpha_0,\beta_0)e, g^*) \cdot \Big(B'_\beta(\alpha_0,\beta_0)e, e^*\Big) \neq 0.$
Тогда пара чисел α_0,β_0 является точкой бифуркации уравнения (2).

Литература

1. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966. 331 с.

2. *Юмагулов М.Г., Якшибаева Д.А* Исследование основыных сценариев локальных бифуркаций в системах функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Уфимский математический журнал. 2014. Т.6,С.104-112.

ВЫДАЮЩИЙСЯ МАТЕМАТИК, ОСНОВАТЕЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУЧНОЙ ШКОЛЫ В ТАДЖИКИСТАНЕ АКАДЕМИК АН РТ Л.Г. МИХАЙЛОВ.

Г.М.Просоедова

qambar2006@yandex.ru

УДК 517.9

Доклад посвящен памяти видного советского учёного-математика академика АН РТ Леонида Григорьевича Михайлова, для которого Башкортостан являлся малой родиной и который внес огромный вклад в развитие математической науки в Таджикистане.

Prominent mathematician, founder of mathematical scientific schools in Tajikistan academician of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan L.G. Mikhailov.

The report is dedicated to the memory of a prominent Soviet Academician of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan Leonid Grigoryevich Mikhailov, for whom Bashkortostan was a small homeland and who made a huge contribution to the development of mathematical science in Tajikistan.

Keywords:

Доклад посвящен памяти видного советского учёного-математика академика АН РТ Леонида Григорьевича Михайлова, для которого Башкортостан являлся малой родиной и который внес огромный вклад в развитие математической науки в Таджикистане. Он родился 28 февраля 1928 г. в с. Михайловка Миякинского района Башкирской АССР. В 1934 году с родителями переехал в город Регар (Турсунзаде) и вся его дальнейшая жизнь была связана с Таджикистаном.

Таджикистан - республика высочайших в Советском Союзе, а теперь СНГ, горных вершин. Михайлов Л.Г. и сам всю жизнь оставался человеком и исследователем стремившимся покорять самые разные вершины человеческого бытия, особенно в науке, такой сложной как математическая. И можно твёрдо сказать, что он этого добился, практически взяв многие научные вершины. Академик Академии наук Таджикистана, доктор физико-математических наук, профессор, Заслуженный деятель науки Республики Таджикистан, Лауреат Государственной премии Республики Таджикистан имени Абуали ибн Сино- Авиценны - это только небольшой перечень его научных званий...

Просоедова Гамбар Мухаметхановна, Академия наук Республики Таджикистан (Душанбе, Таджикистан); Prosoedova Gambar Muhamethanovna, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan (Dushanbe, Tajikistan)

А ещё он оставил добрый след тем, что создал в Таджикистане свою научную математическую школу, потенциал и вклад которой огромен. Достаточно сказать, что им лично было подготовлено два академика и свыше сорока докторов и кандидатов наук.

Вместе с тем, Леонид Михайлов по рождению в России и перебравшийся в Таджикистан вместе с семьёй в возрасте шести лет, всегда оставался своими корнями связанным с исторической Родиной - Россией. Здесь он, кстати, окончил с отличием физико-математический факультет Казанского госуниверситета. В России, уже много позже, в 70-е годы, он проработал ряд лет в Горьковском госуниверситете.

Но всё же свой главный вклад в науку и воспитание молодых учёных Леонид Михайлов осуществил в Таджикистане, который стал его родным домом. Он уже не мыслил своего существования вне уникальной горной природы этого солнечного края - его высочайших горных вершин, стремительных бурных рек, заоблачных озёр, края сочетания субтропиков и арктического холода, где буквально за один день можно побывать в самых различных климатических зонах.

Что же касается его непосредственного вклада в науку, то Леонид Михайлов первый свой опыт в этом плане, сделал ещё будучи студентом Казанского госуниверситета. В его стенах он выполнил две первые свои научные работы, отмеченные как лучшие. Его наставником был профессор Фёдор Гахов, который впоследствии и стал его куратором в разработке кандидатской диссертации на тему “Задача сопряжения решений обобщённой системы Коши-Римана”. Эта работа вызвала значительный научный интерес, о чём, в частности, свидетельствуют её краткие переизложения в известных работах - монографиях Фёдора Гахова “Краевые задачи” (Издательство “Наука”, Москва, 1977 г.) и Ильи Векуа “Обобщённые аналитические функции” (Издательство “Наука”, Москва, 1959 г.)

Уже в 1960 году Леонидом Михайловым была проведена большая исследовательская работа по проблеме “Дифференциальные уравнения с сингулярными коэффициентами”, изучению которой он в последствии отдал многие десятилетия своей жизни. Свою монографию “Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами” Леонид Михайлов представил в качестве докторской диссертации, которая им с успехом была защищена в Институте математики СО АН СССР в Новосибирске. Затем последовали переводы работ Леонида Михайлова на иностранные языки и их выход в США, Голландии и Германии. Эти издания получили одобрительные отзывы в математических и физических журналах Европы.

Научные и организаторские способности Л.Г. Михайлова получили высокую оценку. Правительством страны в 2007 году Михайлову была присуждена Государственная премия имени Абуали ибн Сино за цикл работ, в которых была развёрнута теория сингулярных дифференциальных уравнений, а также впервые был создан новый раздел математики, который Леонид Михайлов назвал Сингулярным Анализом. Эти работы были опубликованы в самых престижных журналах России, Европы, США и др. Научная деятельность Л.Г. Михайлова пользуется международным признанием. Многие годы Михайлов являлся членом редколлегии международных журналов, выходящих в США, Греции, Румынии. Он был удостоен многих престижных зарубежных наград.

Леонид Михайлов не был учёным, отрешённым от повседневной жизни. О его увлечениях туризмом, горными лыжами, классической музыкой и русской поэзией ходили легенды. Он глубоко интересовался всем тем, что происходило в стране и за рубежом, сожалел о развале великого Советского Союза. Его веру в будущее поддерживала великая Россия, которая взяла на себя роль правопреемницы и лидера новых независимых государств на постсоветском пространстве. Только в их тесных научных и других контактах, считал Михайлов Л.Г., возможно продвижение вперёд, решение самых сложных задач. На это он наставлял своих коллег, сотрудников и учеников. И они благодарны своему Наставнику и Учителю.

Предметный указатель