МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
БАШКИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ УФИЦ РАН

АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ БАШКОРТОСТАН

# *УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2021*

## *МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ*

**Том 1**

г. Уфа, 6 – 9 октября 2021 г.

Уфа
Аэтерна
2021

УДК 517
ББК 22.1
У 88

**Мероприятие проводится при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа и Академии наук Республики Башкортостан.**

**Печатается по решению Учёного совета факультета математики и информационных технологий Башкирского государственного университета.**



**У 88** **Уфимская осенняя математическая школа: Материалы международной научной конференции (г. Уфа, 6-9 октября 2021 г.). В 2 томах. Том 1 / отв. редактор З.Ю. Фазуллин. - Уфа: Аэтерна, 2021. - 244 с.**

ISBN 978-5-00177-267-5 т.1
ISBN 978-5-00177-269-9

В предоставленных материалах конференции детально обсуждаются новейшие результаты и открытые проблемы в спектральной теории, нелинейном и комплексном анализе, дифференциальных уравнениях, математическом моделировании. Материалы сборника предназначены для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся указанными проблемами.

**Организаторы конференции:** Башкирский государственный университет, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (г. Уфа), НОМЦ Приволжского федерального округа, Академия наук Республики Башкортостан.

Благодарим компании, оказавших финансовую поддержку в организации и проведении научной конференции

Башкирский государственный университет совместно с Институтом математики с ВЦ УФИЦ РАН ежегодно, начиная с 2012 г., проводит международные научные конференции, основные тематики которых связаны со спектральной теорией, с нелинейным и комплексным анализом, дифференциальными уравнениями и математическим моделированием. Выбор таких направлений определялся как активной работой в указанных областях многих математиков из Башкортостана, взаимопроникновением идей и методов спектральной теории, нелинейного и комплексного анализа при решении многих актуальных задач в указанных областях, так и соответствующим сотрудничеством с коллегами из многих научных центров России и зарубежья.

В последние годы особенно активным стало сотрудничество в указанных областях математики с учеными из ряда научных и образовательных организаций Узбекистана, Казахстана и Таджикистана. Со многими организациями заключены соответствующие Договора о научном сотрудничестве.

Важными событиями для конференции стали то, что начиная с 2020 г. в число организаторов конференции вошел Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа, а в 2021 г. - Академия наук Республики Башкортостан.

Начиная с 2019 г. конференция приобрела новый статус, преобразовавшись в "Уфимскую осеннюю математическую школу". Теперь, наряду с обсуждением новейших научных результатов и открытых проблем, важное место в работе конференции занимают обзорные лекции ведущих ученых для аспирантов и молодых ученых.

Научная программа конференции УОМШ-21 охватывает следующие направления:

- спектральная теория операторов;
- комплексный и функциональный анализ;
- нелинейные уравнения;
- дифференциальные уравнения и их приложения;
- математическое моделирование.

# МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

# «УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2021»

## СЕКЦИЯ «СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ»

г. Уфа, 6 - 9 октября 2021 г.

# ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ВРОНСКИАНЫ

**@ А.А. Аллахвердян**

*alinaallakhverdya@mail.ru*

УДК 517.41

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06*.1.

Рассматриваются новые вронскианные тождества, а также их связь с теорией интегрируемых систем и с общей теорией обратимых преобразований Дарбу для линейных дифференциальных операторов с одной независимой переменной. Объектом исследования являются отношения вронскианов, являющиеся однородными относительно группы растяжений, различных порядков $N$ и $N'$, где $N' > N$.

*Ключевые слова*: факторизация, матрица Вронского, преобразование Дарбу.

**The product of eigenfunctions and Vronskians**

New Vronskians of the identity are considered, as well as their connection with the theory of integrable systems and with the general theory of reversible Darboux transformations for linear differential operators with one independent variable. The object of the study is the relations of Vronskians, which are homogeneous with respect to the group of extensions, of different orders $N$ and $N'$, where $N' > N$.

*Keywords*: factorization, Vronsky matrix, Darboux transformation.

Задача о построении дифференциального оператора $L$ порядка $n \geq 2$ по фундаментальной системе решений уравнения $L\varphi_j = 0,\ j = \overline{1,n}$ сводится к линейной алгебре, и формулы Крамера дают нам следующую формулу с вронскианами для действия оператора $L(\varphi)$ на произвольную гладкую функцию $\varphi$:

$$L(\varphi) = \frac{< \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n >}{< \varphi_1, \ldots, \varphi_n >}, \quad \varphi_j \in \ker L$$

Здесь предполагается, что заданные функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ образуют базис $n-$мерного линейного пространства $\ker L$, а скобки $< \cdots >$ обозначают определитель матрицы Вронского, составленной из производных рассматриваемых функций $< y_1, \ldots, y_m >= \det(D_x^{k-1}(y_j)), \quad j, k = 1, \ldots, m.$

Аллахвердян Алина Альбертовна, студентка магистратуры Адыгейского государственного университета (Майкоп, Россия); Alina Allahverdyan (Adyghe State University, Maykop, Russia)

Формула, задающая оператор $L$ заменяет нам разложение обычного многочлена в произведение линейных сомножителей и играет аналогичную роль, если мы уточняем структуру ядра рассматриваемого дифференциального оператора $L$.

Согласно свойствам определителей и формулам Лейбница, справедливо:

$$y_j(x) = a(x)\hat{y}_j(x), \quad \forall\ j \Rightarrow < y_1, \ldots, y_m >= a^m < \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_m > .$$

Отметим, что на языке дифференциального оператора эта операция совпадает с операцией сопряжения

$$L \Leftrightarrow \tilde{L}, \qquad L = \frac{1}{a} \cdot \tilde{L} \circ a.$$

Для вронскианов при $a(x) = 1/\varphi_n$ данная операция соответствует переходу в матрице Вронского к *однородным координатам и их логарифмическим производным*:

$$w_n(\vec{\psi}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{< \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n >}{\psi_1\psi_2 \cdots \psi_n} =$$

$$= (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{n-1} \\ g_1' + g_1^2 & g_2' + g_2^2 & \ldots & g_{n-1}' + g_{n-1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$g_j = (\log \psi_j)_x - (\log \psi_n)_x = \frac{< \psi_j, \psi_n >}{\psi_j \psi_n}, \quad j = \overline{1, n-1}$$

При $g = \phi'/\phi = (\log \phi)_x$, согласно [1] дальнейшее дифференцирование даёт:

$$\frac{\phi''}{\phi} = g' + g^2, \quad \frac{\phi'''}{\phi} = g'' + 3gg' + g^3, \quad \frac{\phi^{(4)}}{\phi} = g^{(3)} + 4gg_{xx} + 3g_x^2 + 6g^2 g_x + g^4 ...$$

При подстановке однородных мономов $\varphi_1^j \varphi_2^k = j + k = m$ в общую формулу

$$\frac{< \varphi_1^m, \ldots \varphi_1^j \varphi_2^k, \ldots \varphi_2^m >}{(< \varphi_1, \varphi_2 >)^{10}}$$

является естественным ожидать, что коэффициенты полученного оператора могут зависеть от конкретного выбора базиса $\varphi_1$ и $\varphi_2$. Однако это не так и объяснение обнаруженной инвариантности в случае четвёртого порядка даёт следующая

**Теорема 1.** *Пусть* $\varphi_1$ *и* $\varphi_2$ *произвольные гладкие функции и* $\psi_1 = \varphi_1^3,\ \psi_2 = \varphi_1^2\varphi_2,\ \psi_3 = \varphi_1\varphi_2^2,\ \psi_4 = \varphi_2^3$. *Тогда имеет место тождество:*

$$\frac{<\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4>}{(<\varphi_1, \varphi_2>)^6} = 12.$$

Отметим, что когда $\psi_1 = \varphi_1^2\varphi_2,\ \psi_2 = \varphi_1\varphi_2^2,\ \psi_3 = \varphi_1^3,\ \psi_4 = \varphi_2^3$

$$L(\psi) = \frac{<\psi, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4>}{<\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4>} = \psi'''' - 10(u\psi'' + u'\psi') - 3(u'' - 3u^2)\psi.$$

где $\varphi'' = u(x)\varphi$.

После интегрирования уравнение $L\psi = 0$ третьего порядка приводится к виду:

$$C(\lambda) = \psi_x^2 + 4(u - \lambda)\psi^2 - 2\psi_{xx}\psi,$$

где $C(\lambda)$–постоянная интегрирования, а $\lambda$– дополнительный параметр. При $\psi = \varphi_1\varphi_2$ устнавливается связь константы интегрирования с вронскианом $w =< \varphi_1, \varphi_2 >$:

$$C(\lambda) = (f_1 - f_2)^2 =< \varphi_1, \varphi_2 - >^2 .$$

С другой стороны $(\log\psi)_x = (\log\varphi_1)_x + (\log\varphi_2)_x = f_1 + f_2$ и поэтому

$$f_1 = \frac{\psi_x - w}{2\psi}, \quad f_2 = \frac{\psi_x + w}{2\psi}$$

Полученные формулы переводят, таким образом, решение уравнения $C(\lambda) = \psi_x^2 + 4(u - \lambda)\psi^2 - 2\psi_{xx}\psi$ с "производной" Шварца в пару решений уравнения Риккати [2].

Также спараведливо и обобщение *теоремы 1* на случай пятого порядка:

**Теорема 2.** *Пусть* $\varphi_1$ *и* $\varphi_2$ *произвольные гладкие функции и* $\psi_1 = \varphi_1^4,\ \psi_2 = \varphi_1^3\varphi_2,\ \psi_3 = \varphi_1^2\varphi_2^2,\ \psi_4 = \varphi_1\varphi_2^3,\ \psi_5 = \varphi_2^4$. *Тогда имеет место тождество:*

$$\frac{<\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5>}{(<\varphi_1, \varphi_2>)^{10}} = 288.$$

Если применить формулу перехода в матрице Вронского к *однородным координатам и их логарифмическим производным* справедлива формула:

$$\frac{w_5(\vec{\psi})}{g_1 \cdots g_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ g_1^2 & g_2^2 & g_3^2 & g_4^2 \\ g_1^3 & g_2^3 & g_3^3 & g_4^3 \end{pmatrix} = \prod_{i>j}(g_i - g_j) + \ldots,$$

где многоточие - это слагаемые вида $g' + g^2$, $g'' + 3gg' + g^3$, $g^{(3)} + 4gg_{xx} + 3g_x^2 + 6g^2 g_x + g^4 \ldots$ .

Стоит отметить, что справедливость *теоремы 2* вытекает из $\frac{w_5(\vec{\psi})}{g_1 \cdots g_4}$ при $g_j' = 0$, последнее достигается в случае экспоненциальных функций $\varphi_1$ и $\varphi_2$.

В заключении отметим, что вопросы о приложениях оператора пятого порядка, а также связь с производной Шварца и уравнениями Кортевега де Фриза остаются открытыми.

**Литература**

1. *Шабат А.Б., Эфендиев М.Х.* О приложениях формулы Фаа-ди- Бруно // Уфимск. матем. журн., **9**:3 (2017), 132-137.

2. *Аллахвердян А.А.* О преобразованиях Дарбу для функций Бесселя // ВМЖ , **21**:3 (2019), 5-13.

# ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ ОПЕРАТОРА ХАРДИ НА КОНУСЕ ФУНКЦИЙ СО СВОЙСТВАМИ МОНОТОННОСТИ

**@ Э. Г. Бахтигареева, М. Л. Гольдман.**

*bakhtigareeva-eg@rudn.ru, seulydia@yandex.ru*

УДК 517.98

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.2.*

В работе представлено явное описание нормы оператора Харди на конусе функций со свойствами монотонности.

*Ключевые слова*: математика, функциональный анализ, теория операторов.

**Calculation of the norm of the Hardy operator on the cone of functions with monotonicity properties**

We present explicit description of the norm for the Hardy operator on the cones.

*Keywords*: mathematics, functional analysis, operator theory.

Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $0 < p \leq \min\{q, r\}$, $X = L_{p\beta}(a,b), Y = L_{q\gamma}(a,b)$,

$$A_{r\mu}[f]\,(x) = \left( \int\limits_{(a,x]} |f|^r d\mu \right)^{1/r}, \; x \in (a,b),$$

где $\beta, \gamma, \mu$ - неотрицательные борелевские меры на $(a,b)$. Пусть функция $k$ положительна и непрерывна на $(a,b)$; $\Omega_k$ - конус функций со свойствами $\Omega_k := \{f \in X : f \geq 0, f(t)/k(t) \downarrow; f(t) = f(t-0), t \in (a,b)\}$; $\Omega_{k,0} := \left\{k\chi_{(a,t]} : a < t < b\right\}$. Обозначим

$$\|A_{r\mu}\|_{\Omega_k} := \sup\left\{\|A_{r\mu} f\|_Y : f \in \Omega_k; \|f\|_X \leq 1\right\}.$$

**Теорема 1.** *В приведенных условиях, если* $\|k\chi_{(a,b)}\|_X = \infty$*, то справедливо равенство*

$$\|A_{r\mu}\|_{\Omega_k} = \|A_{r\mu}\|_{\Omega_{k,0}} := \sup_{t \in (a,b)} \left\{ \|A_{r\mu}\left[k\chi_{(a,t]}\right]\|_Y \|\left[k\chi_{(a,t]}\right]\|_X^{-1} \right\}.$$

---

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации, госзадание №075-03-2020-223/3 (ФССФ-2020-008) и выполнена в Российском университете дружбы народов.

Бахтигареева Эльза Гизаровна, к.ф.-м.н., ст.преподаватель, Российский университет дружбы народов (Москва, Россия); Elza Bakhtigareeva (RUDN University, Moscow, Russia)

Гольдман Михаил Львович, д.ф.-м.н., профессор, Российский университет дружбы народов (Москва, Россия); Goldman Mihail(RUDN University, Moscow, Russia)

*Если* $\|k\chi_{(a,b)}\|_X < \infty$, *то справедливо равенство*

$$\|A_{r\mu}\|_{\Omega_k} = \max\left\{\|A_{r\mu}\|_{\Omega_{k,0}}, \|A_{r\mu}\left[k\chi_{(a,b)}\right]\|_Y \|\left[k\chi_{(a,b)}\right]\|_X^{-1}\right\}.$$

## Литература

1. *Bakhtigareeva E.G., Goldman M.L.* Calculations of Norms for Monotone Operators on Cones of Functions with Monotonicity Properties // Lobachevskii J. Math, **42**:5 (2021), 857-874.

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**@ Р.А. Башмаков, К.П. Исаев, А.А. Махота**

*bashmakov_rustem@mail.ru; orbit81@list.ru; allarum@mail.ru*

УДК 517.537+517.547

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.3.*

В работе доказывается возможность представления функций из нормированного пространства $H(D)\bigcap C(\overline{D})$ рядами экспонент, сходящимися в более сильной топологии, где $D$ – выпуклая и ограниченная область комплексной плоскости.

*Ключевые слова*: аналитические функции, целые функции, преобразование Фурье–Лапласа, интерполяция, ряды экспонент.

**On representation by series of exponents in the normed space of analytic functions**

In this paper we prove the possibility of representing functions from the normed space $H(D)\bigcap C(\overline{D})$ by exponent series converging to a stronger topology, where $D$ is a convex and bounded domain on the complex plane.

*Keywords*: analytic function, entire function, Fourier–Laplace transform, interpolation, exponential series.

Пусть $D$ — ограниченная выпуклая область комплексной плоскости. В данной работе рассматривается задача о представлении функций в пространстве

$$A_0(D)=\left\{f\in H(D)\bigcap C(\overline{D}):\ \|f\|:=\sup_{z\in\overline{D}}|f(z)|\right\}$$

рядами экспонент

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}f_ke^{\lambda_k z},\quad z\in D,\quad f\in A_0(D).$$

---

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

Башмаков Рустэм Абдрауфович, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Rustem Bashmakov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Исаев Константин Петрович, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН(Уфа, Россия); Isaev Konstantin (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Center, RAS, Ufa, Russia)

Махота Алла Александровна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Alla Makhota (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Обозначение $A_0(D)$ в контексте данной работы удобнее, чем традиционное $A(D)$, поскольку будет рассматриваться параметризованное семейство нормированных пространств $A_n(D)$, $n \in \mathbb{Z}$. Возможность такого представления следует из классической теоремы А.Ф. Леонтьева (см. [1, Теорема 5.3.2]), но ряды в этой теореме сходятся в топологии пространства $H(D)$, то есть равномерно на компактах из $D$. Мы намерены доказать возможность представления функций из $A_0(D)$ рядами экспонент, сходящимися к своей сумме в существенно более сильной топологии, чем топология равномерной сходимости на компактах, но несколько более слабой, чем нормированная топология $A_0(D)$. Будут также получены формулы для коэффициентов ряда. Примеров нормированных пространств, в которых возможны разложения в ряды экспонент, сходящихся в норме пространства, то есть в которых существует базис из экспонент, известно немного. Это пространство $L_2$ на отрезке, пространство Соболева на отрезке [2] и пространства Смирнова и Бергмана на выпуклых многоугольниках ([3], [4]). В работах [5] и [6] доказано, что в пространствах Смирнова и Бергмана на выпуклых областях с гладкой границей экспоненциальных базисов не существует.

Основным в данной работе является утверждение:

Существует такое целое число $s > 0$, что

1) для любой ограниченной выпуклой области $D$ найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, такая что каждая функция $f \in H(D) \bigcap C^{(s)}(\overline{D})$ представляется в виде ряда по этой системе, сходящегося в норме пространства $A_0(D)$;

2) для любой ограниченной выпуклой области $D$ найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, такая что каждая функция $f \in A_0(D)$ представляется в виде ряда по этой системе, сходящегося в норме

$$\|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)|(d(z))^s,$$

где $d(z)$ — расстояние от точки $z$ до границы области $D$. Число $s$ связано с существованием целых функций с максимально точной асимптотической оценкой.

В частных случаях, когда $D$ — многоугольник или область с гладкой границей и кривизной границы, отделенной от нуля, можно считать $s = 4$.

### Литература


1. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.

2. *Russell D.L.* On exponential bases for the Sobolev spaces over an interval // J. Math.Anal. Appl. **87**:2 (1982), 528–550.

3. *Левин Б.Я., Любарский Ю.И.* Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент // Изв. АН

СССР. Сер. мат. **39**:3 (1975), 657–702.

4. *Исаев К.П.* Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках // Уфимск. матем. журн. **2**:1 (2010), 71–86.

5. *Луценко В.И.* Безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН. 1992.

6. *Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С.* Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками // Изв. РАН. Сер. матем. **71**:6 (2007), 69–90.

# КОНСТРУКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

**@ Н.П. Бондаренко**

*bondarenkonp@info.sgu.ru*

УДК 517.984

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.4.*

Получено конструктивное решение обратной спектральной задачи для матричного оператора Штурма-Лиувилля с сингулярным потенциалом и самосопряженными краевыми условиями общего вида.

*Ключевые слова*: матричный оператор Штурма-Лиувилля, обратная спектральная задача, метод спектральных отображений.

## Constructive solution of the inverse problem for the matrix Sturm-Liouville operator

A constructive solution of the inverse spectral problem is obtained for the matrix Sturm-Liouville operator with singular potential and with self-adjoint boundary conditions of general form.

*Keywords*: matrix Sturm-Liouville operator, inverse spectral problem, method of spectral mappings.

Обозначим через $L = L(\sigma, T_1, T_2, H_2)$ следующую краевую задачу для матричного уравнения Штурма-Лиувилля:

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda Y, \quad x \in (0, \pi),$$
$$T_1 Y^{[1]}(0) - T_1^{\perp} Y(0) = 0, \quad T_2(Y^{[1]}(\pi) - H_2 Y(\pi)) - T_2^{\perp} Y(\pi) = 0,$$

где $Y = [y_j(x)]_{j=1}^m$ — вектор-функция, $Q(x)$ — матричный потенциал из класса $W_2^{-1}((0,\pi); \mathbb{C}^{m\times m})$, т.е. $Q(x) = \sigma'(x)$, $\sigma \in L_2((0,\pi); \mathbb{C}^{m\times m})$, $\sigma(x) = (\sigma(x))^*$ п.в. на $(0,\pi)$, $Y^{[1]}(x) := Y'(x) - \sigma(x)Y(x)$ — квазипроизводная, $\lambda$ — спектральный параметр, $T_j \in \mathbb{C}^{m\times m}$ — ортогональные проекторы, $T_j^{\perp} = I - T_j$, $j = 1, 2$, $H_2 \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $H_2 = H_2^* = T_2 H_2 T_2$, $I$ — единичная $(m\times m)$-матрица, обозначение $\mathcal{A}((0,\pi); \mathbb{C}^{m\times m})$ используется для матриц-функций размера $(m \times m)$ с элементами из класса $\mathcal{A}(0,\pi)$. При данных условиях задача $L$ является самосопряженной.

Спектр задачи $L$ представляет собой счетное множество собственных значений $\{\lambda_{nk}\}$, имеющих асимптотику

$$\sqrt{\lambda_{nk}} = n + r_k + \varkappa_{nk}, \quad r_k \in [0,1), \quad \{\varkappa_{nk}\} \in l_2, \tag{1}$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-70005).

Бондаренко Наталья Павловна, к.ф.-м.н., доцент, СГУ (Саратов, Россия), Самарский университет (Самара, Россия); Natalia Bondarenko (Saratov State University, Saratov, Russia; Samara National Research University, Samara, Russia)

где $k = \overline{1, m}$, и $n \in \mathbb{N}$ или $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ в зависимости от $k$. Вместе с собственными значениями вводятся весовые матрицы $\{\alpha_{nk}\}$, обобщающие весовые числа скалярного оператора Штурма-Лиувилля (см. подробности в [1, 2]). Изучается **обратная задача**: по спектральным данным $\{\lambda_{nk}, \alpha_{nk}\}$ найти $\sigma(x)$, $T_1$, $T_2$ и $H_2$.

Вопрос единственности решения приведенной обратной задачи исследован в [1]. В [2] получен конструктивный алгоритм решения обратной задачи, а также необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Полученные результаты позволили дать характеризацию спектральных данных операторов Штурма-Лиувилля на графах (см. [2]).

В основе конструктивного решения обратной задачи лежат идеи метода спектральных отображений (см. [3]). При помощи контурного интегрирования в $\lambda$-плоскости нелинейная обратная задача сводится к линейному уравнению в определенном банаховом пространстве $\mathfrak{B}$:

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{R}(x)\varphi(x), \tag{2}$$

где $\varphi(x), \tilde{\varphi}(x) \in \mathfrak{B}$ и $\tilde{R}(x)\colon \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ — линейный ограниченный оператор при каждом фиксированном $x \in [0, \pi]$. При этом $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{R}(x)$ строятся по спектральным данным $\{\lambda_{nk}, \alpha_{nk}\}$, а неизвестный элемент $\varphi(x)$ связан с искомыми коэффициентами задачи $L$. Решение основного уравнения (2) — центральный шаг конструктивного решения обратной задачи.

В случае скалярного уравнения Штурма-Лиувилля $\mathfrak{B}$ — пространство бесконечных ограниченных последовательностей. В матричном случае потребовалось специальное построение банахового пространства $\mathfrak{B}$ с учетом разбиения собственных значений $\{\lambda_{nk}\}$ на группы в соответствии с асимптотикой (1). Кроме того, автором был выполнен перенос метода спектральных отображений на класс потенциалов из класса функций-распределений $W_2^{-1}$ (см. [4] для скалярного случая, [1,2] — для матричного). При этом были преодолены существенные трудности, связанные с доказательством однозначной разрешимости основного уравнения (2).

### Литература

1. *Bondarenko N.P.* Direct and inverse problems for the matrix Sturm-Liouville operator with general self-adjoint boundary conditions // Math. Notes, **109**:3 (2021), 358-378.

2. *Bondarenko N.P.* Inverse problem solution and spectral data characterization for the matrix Sturm-Liouville operator with singular potential // Analysis and Mathematical Physics, **11** (2021), Article number: 145.

3. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

4. *Bondarenko N.P.* Solving an inverse problem for the Sturm-Liouville operator with singular potential by Yurko's method // Tamkang J. Math., **52**:1 (2021), 125-154.

# О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

**@ С.А. Бутерин, Н. Джурич**

*buterinsa@info.sgu.ru, nebojsa.djuric@aggf.unibl.org*

УДК 517.984

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.5.*

Приводится краткий обзор результатов по обратной задаче Штурма–Лиувилля с постоянным запаздыванием, включая недавно установленную неединственность решения при малом запаздывании.

*Ключевые слова*: обратная спектральная задача, функционально-дифференциальный оператор, запаздывание.

**On non-uniqueness of solution for the inverse Sturm–Liouville problem with delay**

We give a brief survey of results for the inverse Sturm–Liouville problem with constant delay including recently established non-uniqueness of the solution for small values of the delay.

*Keywords*: inverse spectral problem, functional-differential operator, delay.

Зафиксируем $\nu \in \{0,1\}$ и обозначим через $\{\lambda_{n,j}\}$ спектр краевой задачи

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \quad 0 < x < \pi, \quad y^{(\nu)}(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \quad (1)$$

где $a \in [0,\pi)$, $q(x)$ – комплекснозначная функция из $L_2(0,\pi)$, такая что $q(x) = 0$ п.в. на $(0,a)$, а $j \in \{0,1\}$. Рассмотрим следующую обратную задачу.

**Задача 1.** По спектрам $\{\lambda_{n,0}\}$ и $\{\lambda_{n,1}\}$ найти потенциал $q(x)$.

При $a = 0$ задача 1 является классической обратной задачей Штурма–Лиувилля [1], решение которой, как известно, единственно. В дальнейшем появился интерес к нелокальному случаю $a > 0$, для которого основные методы теории обратных задач неприменимы (см. [2–11] и ссылки в них).

Как стало известно авторам, в 1979 году данный тип задач был предложен профессором В.А. Садовничим югославскому математику М. Пикуле, проходившему стажировку в Москве. Впоследствии на территории

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-70005).

Бутерин Сергей Александрович, к.ф.-м.н., доцент, СГУ (Саратов, Россия); Sergey Buterin (Saratov State University, Saratov, Russia)

Джурич Нейбойша, Университет Баня-Лука (Баня-Лука, Босния и Герцеговина); Nebojša Djurić (University of Banja Luka, Bosnia and Herzegovina)

бывшей Югославии образовалась научная школа по задачам с запаздыванием.

Давно установлено, что при $a \in [\pi/2, \pi)$ решение задачи 1 также единственно. При $a < \pi/2$ зависимость характеристической функции краевой задачи (1) от $q(x)$ становится нелинейной, и вопрос единственности решения обратной задачи в этом случае долгое время оставался основной интригой теории обратных задач для операторов с точечным запаздыванием.

Данный вопрос был решен положительно для $a \in [2\pi/5, \pi/2)$ в [4] при $\nu = 0$ и независимо в [6] при $\nu = 1$. Для $a \in [\pi/3, 2\pi/5)$ и $\nu = 0$ в [5] было показано, что задание обоих спектров однозначно определяет $q(x)$ на $(a, 3a/2) \cup (\pi - a/2, \pi)$, что справедливо и при $\nu = 1$. Однако наиболее сильная теорема единственности была получена в [7], где было установлено, что при $a \in [\pi/3, 2\pi/5)$ функция $q(x)$ однозначно определяется на объединении интервалов $I_1 := (a, 3a/2) \cup (\pi - a, 2a) \cup (\pi - a/2, \pi)$.

Среди специалистов долгое время сохранялись ожидания, что при всех $a > 0$ должна иметь место и полная единственность, которая обеспечила бы преемственность с классическим результатом Г. Борга [1] для $a = 0$.

Однако в недавней работе [8] был получен отрицательный ответ для $a \in [\pi/3, 2\pi/5)$ при $\nu = 0$. А именно, удалось построить бесконечные семейства так называемых изобиспектральных потенциалов $q_\alpha(x)$, т.е. которым соответствует одна и та же пара спектров $\{\lambda_{n,0}\}$ и $\{\lambda_{n,1}\}$. Также было дано исчерпывающее обоснование, почему идея этого контрпримера, вообще говоря, не переносится на случай $\nu = 1$, который оказался труднее.

Интересно отметить, что построенные потенциалы различаются на дополнении $I_1$, то есть теорема единственности в [7] оказалась неулучшаемой.

В [9] вопрос для $\nu = 1$ был сведен к нахождению интегрального оператора специального вида, обладающего собственной функцией с нулевым средним, но соответствующей ненулевому собственному значению. Необходимый контрпример был построен в результате серии вычислительных экспериментов, один из которых случайно дал аналитическую реализацию.

Однако работы [8, 9] оставили без внимания наиболее трудный случай малого запаздывания $a \in (0, \pi/3)$, позволяющего сколь угодно приблизиться к классической ситуации $a = 0$, когда имеет место единственность.

Отрицательный ответ и для всех $a \in (0, \pi/3)$ был получен в работе [11] при обоих значениях $\nu = 0, 1$. Таким образом, вопрос единственности решения задачи 1 оказался полностью закрыт для всех $a \in (0, \pi)$ и $\nu = 0, 1$.

В последнее время активно изучаются и другие аспекты теории обратных задача для операторов с запаздыванием, включая характеризацию спектров, а также операторы с несколькими запаздываниями и функционально-дифференциальные пучки (см. [10] и библиографию там).

### Литература


1. *Borg G.* Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe // Acta Math., **78** (1946), 1-96.

2. *Pikula M.* Determination of a Sturm–Liouville-type differential operator with delay argument from two spectra // Mat. Vestnik, **43**:3-4 (1991), 159-171.

3. *Freiling G., Yurko V.A.* Inverse problems for Sturm–Liouville differential operators with a constant delay // Appl. Math. Lett., **25** (2012), 1999-2004.

4. *Bondarenko N., Yurko V.* An inverse problem for Sturm–Liouville differential operators with deviating argument // Appl. Math. Lett., **83** (2018), 140-144.

5. *Bondarenko N., Yurko V.* Partial inverse problems for the Sturm–Liouville equation with deviating argument // Math. Meth. Appl. Sci., **41** (2018), 8350-8354.

6. *Pikula M., Vladičić V., Vojvodić B.* Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with a constant delay less than half the length of the interval and Robin boundary conditions // Results Math., **74** (2019), Art. No. 45.

7. *Djurić N., Vladičić V.* Incomplete inverse problem for Sturm–Liouville type differential equation with constant delay // Results Math., **74** (2019), Art. No. 161.

8. *Djurić N., Buterin S.* On an open question in recovering Sturm–Liouville-type operators with delay // Appl. Math. Lett., **113** (2021), Art. No. 106862.

9. *Djurić N., Buterin S.* On non-uniqueness of recovering Sturm–Liouville operators with delay // CNSNS, **102** (2021), Art. No. 105900.

10. *Buterin S.A., Malyugina M.A., Shieh C.-T.* An inverse spectral problem for second-order functional-differential pencils with two delays// Appl. Math. Comp., **411** (2021), Art. No. 126475.

11. *Djurić N., Buterin S.* Iso-bispectral potentials for Sturm–Liouville-type operators with small delay // NA: Real World Appl., **63** (2022), Art. No. 103390.

# ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

**@ Н.Ф. Валеев**

*valeevnf@yandex.ru*

УДК 517.518

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.6*.

Рассматривается новая постановка обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля (Шредингера). Основной особенностью рассматриваемых обратных спектральных задач является неполнота спектральных данных. Обратные спектральные задачи с неполными данными имеют не единственное решение и некорректны, но неполноту спектральных данных можно дополнить геометрическими условиями, которые в итоге приводят к новому классу задач. В докладе будут обсуждаться вопросы изолированности и единственности решений,а также сявзь этих задач с нелинейными дифференциальными уравнениями.

*Ключевые слова*: обратные спектральные задачи,нелинейные дифференциальные операторы, спектральная теория

## On an inverse optimization spectral problem for Sturm-Liuville operators

*Keywords*: inverse spectral problems, nonlinear differential operators, spectral theory

Пусть $L(q)$ - с.с. оператор Штурма-Лиувилля, порожденный дифференциальным выражением вида

$$l_q y := -y'' + q(x)y, \quad x \in (0,1),$$

и граничными условиями Дирихле (для определенности) $y(0) = y(1) = 0$, где $q \in L^p(0,1), 1 < p < +\infty$.

Спектр оператора $L(q)$ состоит из собственных значений: $\lambda_1(q) < \lambda_2(q) < ... < \lambda_m(q) < ...$

В докладе рассматривается оптимизационная обратная спектральная задача с неполными данными в следующей постановке.

$(\mathcal{P}^0)$ Оптимизационная обратная спектральная задача - ООСЗ

*Пусть заданы:*

*(a) числа* $\lambda_1^* < \lambda_2^* < ... < \lambda_m^* \in \mathbb{R}$- *спектральные данные задачи;*

*(b) вещественная функция* $q_0 \in L^p(0,1)$.

---

Валеев Нурмухамет Фуатович, к.ф.-м.н., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Valeev Nur (Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa, Russia)

*Требуется найти вещественный потенциал* $\hat{q} \in L^p(0,1)$*, такой, что:*

$$\lambda_k(\hat{q}) = \lambda_k^*, \quad k = 1, 2, .., m;$$

и $||q_0 - \hat{q}||_{L^2} =$

$$= \min\{||q_0 - q||_{L^2} : \lambda_k^* = \lambda_k(q), k = 1, 2, .., m; \; q \in L^2(0,1)\}.$$

Рассматриваемая ООСЗ $(\mathcal{P}^0)$ связана с нахождением решения следующей (хорошо известной в физике) системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} -u_1'' + q_0 u_1 = \lambda_1^* u_1 + \sum_{k=1}^m \sigma_k u_k^2 u_1, \\ \vdots \\ -u_m'' + q_0 u_m = \lambda_m^* u_m + \sum_{k=1}^m \sigma_k u_k^2 u_m, \end{cases}$$

subject to the zero boundary conditions

$$u_i(0) = u_i(l) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Здесь $\sigma_i \in \{0, +1, -1\}$, $i = 1, \ldots, m$.

В докладе будут обсуждаться результаты об изолированности и единственности решений ООСЗ $(\mathcal{P}^0)$.

**Литература**

1. *N. F. Valeev, Y. Sh. Ilyasov* On an inverse optimization spectral problem and a related nonlinear boundary value problem. // Math. Zametki, 104 (4) (2018), 621-625.

2. *Y. Sh. Ilyasov, N. F. Valeev* On nonlinear boundary value problem corresponding to $N$-dimensional inverse spectral problem. //arXiv preprint, arXiv:1803.01495 (2018), 1-11.

3. *Y. Sh. Ilyasov, N. F. Valeev* On an inverse spectral problem and a generalized Sturm's nodal theorem for nonlinear boundary value problems. preprint arXiv: 1809.00229 (2018), 1-9

4. *Ilyasov Y. Sh., Valeev N. F.* On nonlinear boundary value problem corresponding to $N$-dimensional inverse spectral problem, J. Diff. Eq.,2019 266.8, 4533-4543.

5. *Yavdat Ilyasov, Nur Valeev* Recovery of the nearest potential field from the m observed eigenvalues, Physica D: Nonlinear Phenomena, Volume 426, 2021,

# КОНТРПРИМЕР ТЕОРЕМЫ ЛЕВИНСОНА

**@ Н.Ф. Валеев, Э.А. Назирова, Я.Т. Султанаев**

*ellkid@gmail.com*

УДК 517.518

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.7.*

Доклад посвящен построение контрпримера к известной теореме Левинсона о построении асимптотики решений системы ОДУ первого порядка, имеющей так называемый L-диагональный вид. Описан класс систем ОДУ, для которых условия теоремы не выполняются, но возможно построение асимптотики решений.

*Ключевые слова*: системы дифференциальных уравнений, спектральная теория, теорема Левинсона.

**Counterexample of Levinson's theorem**

The report is devoted to the construction of a counterexample to the well-known Levinson theorem on the construction of the asymptotics of solutions to a first-order ODE system that has the so-called L-diagonal form. A class of ODE systems is described for which the conditions of the theorem are not satisfied, but the asymptotics of solutions can be constructed.

*Keywords*: systems of differential equations, spectral theory, Levinson's theorem.

Хорошо известно, что асимптотическое поведение на бесконечности решений системы вида

$$\frac{dY}{dx} = (\Lambda + C)Y, \quad x \in [0, +\infty) \tag{1}$$

при условии, что матрица $\Lambda(x)$ - диагональная матрица, функции $\Re(\lambda_i - \lambda_j)$ не меняют знак при достаточно больших $x$, а $C(x)$ состоит из суммируемых на $[0, +\infty)$ функций, определяется только элементами матрицы ; $\Lambda(x)$. (см.[1], с.287).

---

Работа выполнена при поддержке Гранта Республики Казахстан AP08856104-OT-20 (Султанаев Я.Т.)

Валеев Нурмухамет Фуатович, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, (Уфа, Россия); Valeev Nurmukhamet Fuatovich, Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science, Ufa, Russia

Назирова Эльвира Айратовна, к.ф.-м.н., доцент, Башкирский государственный университет (Уфа, Россия); Nazirova Elvira Ayratovna, Bashkir State University ,Ufa, Russia

Султанаев Яудат Талгатович, д.ф.-м.н., профессор, Башкирский государственный педагогичпеский университет им.Акмуллы (Уфа, Россия); Sultanaev Yaudat Talgatovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Bashkir State Pedagogical University named after Akmulla ,Ufa, Russia

Предлагается рассмотреть систему

$$\frac{dY}{dx} = (\Lambda + C + H)Y, \quad x \in [0, +\infty) \tag{2}$$

где матрицы $\Lambda, C$ удовлетворяют условиям выше, а матрица имеет вид: $H(x) = h'(x)H_0$ ,где функция $h'(x)$ не является суммируемой,

$$H_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad a, b = const$$

Обозначим через $r(x) = \lambda_2(x) - \lambda_1(x)$.

Справедлива следующая теорема:

**Теорема 1.** *Пусть*

$$\int_x^\infty r(t)h(t)dt \in L[x_0, \infty),$$

*Тогда (2) может быть приведена к системе, удовлетворяющей условиям леммы из [1, с.287].*

Теорема позволяет получать асимптотические формулы для решений систем вида (2) на бесконечности.

**Пример**

Условия теоремы выполнены, например, если $\lambda_1(x) = 1$, $\lambda_2(x) = 2$, $h'(x) = e^{2x} \sin e^{2x}$ либо же $h'(x) = x^\alpha \sin x^\beta$, $\beta > \alpha/2 + 3/2$.

1. *Наймарк М.А* . Линейные дифференциальные операторы (2-е изд.). //Москва : Гостехиздат, 1954. - 352 с.

2. *Н. Ф. Валеев, Э. А. Назирова, Я. Т. Султанаев* О новом подходе к изучению асимптотического поведения решений сингулярных дифференциальных уравнений // Уфимск. матем. журн., 7:3 (2015), 9–15

# СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**@ В.В. Власов**

*victor.vlasov@math.msu.ru*

УДК 517.968.72

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.8*.

Работа посвящена изучению асимптотических и качественных свойств решений интегро-дифференциальных и уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве методоми спектрального анализа. Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются обобщёнными линейными моделями, возникающими в теории вязкоупругости и теории распространения тепла в средах с памятью (уравнение Гуртина - Пипкина), а также имеют много других важных приложений.

*Ключевые слова*: интегро-дифференциальное уравнение, оператор-функция, спектр, вольтерров оператор

**Spectral analysis of Volterra integro-differential equations**

The work is devoted to the researching of asymptotic and qualitative properties for the solutions of integro-differential and equations with unbounded operator coefficients in Hilbert space by the method of spectral analysis. These integro-differential equations are generalized linear models of viscoelasticity, diffusion and heat propogation in media with memory (Gurtin-Pipkin equation) and have many other important applications.

*Keywords*: integro-differential equation, operator-function, spectra, Volterra operator

Исследования направлены на изучение асимптотических и качественных свойств решений интегро-дифференциальных и уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве методом спектрального анализа их символов. Главная часть рассматриваемых уравнений представляет собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Указанные интегро-дифференциальные уравнения являются обобщенными линейными моделями вязкоупругости, диффузии и теплопроводности в средах с памятью (уравнение Гуртина-Пипкина см. [1]) и имеют ряд других важных приложений.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288).

Власов Виктор Валентинович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В.Ломоносова (Москва, Россия); Victor Vlasov (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных интегро-дифференциальных уравнений, получены результаты о структуре и локализации их спектра. На этой основе установлены результаты о существовании сильных и обобщенных решений этих уравнений, а также получены результаты о представлении решений в виде суммы слагаемых, отвечающих вещественной и невещественной частям спектра упомянутых оператор-функций (см. [1]–[4]).

## Литература

1. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.

2. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и представление решений интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости// Дифференциальные уравнения, **55**:4 (2019), 574–587.

3. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ и разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений// Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, **496** (2021), 16–20.

4. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* О вольтерровых интегро-дифференциальных уравнениях с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса// Дифференциальные уравнения, **57**:4 (2021), 536–551.

# РАСЩЕПЛЕНИЕ УРОВНЕЙ ЛАНДАУ ПРИ РЕЗОНАНСЕ В ИСКРИВЛЕННОМ СЛОЕ

**@ Е.В. Выборный**

*evybornyi@hse.ru*

УДК 517.962.22

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.9.*

Рассмотрено стационарное уравнение Шредингера для заряда в сильном магнитном поле в окрестности двумерного слоя с квадратичным удерживающим потенциалом в случае резонанса циклотронной частоты и частоты поперечных колебаний. Известно, что малое искривление плоского слоя приводит к медленному дрейфу центра циклотронного движения частицы в поверхности слоя. Применяя квантовые методы усреднения, в работе построен оператор на поверхности слоя, который описывает соответствующую медленную динамику. Спектр данного оператора определяет квантование линий тока на поверхности слоя и малое расщепление уровней Ландау. В работе построена асимптотика спектральной серии для основного уровня Ландау в окрестности невырожденных стационарных точек искривленной поверхности.

*Ключевые слова*: оператор Шредингера, усреднение, уровни Ландау.

### Asymptotics of solutions of difference equations in an unbounded domain

The stationary Schrödinger equation is considered for a charge in a strong magnetic field in a neighborhood of a curved two-dimensional surface with the quadratic confinement potential. We consider the case of resonance, where the cyclotron frequency equals to the frequency of transverse oscillation. It is known that a small curvature of the layer leads to a slow drift of the center of the particle cyclotron motion on the layer surface. Using quantum averaging methods, we obtain the operator on the layer surface that describes the corresponding slow dynamic. The spectrum of this operator determines the quantization of current lines on the surface and a small splitting of the Landau levels. In this paper, we obtain the asymptotics of the spectral series for the ground Landau level in the neighborhood of nondegenerate stationary points of the curved surface.

*Keywords*: Schrödinger operator, averaging, Landau levels.

---

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Выборный Евгений Викторович, к.ф.-м.н., доцент, НИУ ВШЭ (Москва, Россия); Evgeny Vybornyi (HSE, Moscow, Russia)

В работе рассмотрена спектральная задача для магнитного оператора Шредингера, который в безразмерных координатах приобретает вид:

$$H = \frac{1}{2}\left(-ih\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{q_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-ih\frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{q_1}{2}\right)^2 - \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_3^2} + \frac{\omega^2}{2}d(q)^2.$$

Здесь однородное магнитное поле направлено вдоль координаты $q_3$, а $d(q)$ — расстояние до поверхности искривленного слоя. Предполагаем, что поверхность искривленного слоя задана явно в виде графика функции $q_3 = \varepsilon f(q_1, q_2)$, где $\varepsilon$ — малый параметр. Мы рассматриваем резонансный случай, когда $\omega = 1$, то есть частота колебаний в удерживающем потенциале у поверхности слоя совпадает с циклотронной частотой в магнитном поле.

Заметим, что данная задача имеет два естественных малых параметра: $h$ — безразмерный параметр квазиклассического приближения и $\varepsilon$ — параметр, который определяет малое возмущение плоского слоя поверхности. Данная система допускает асимптотическое разделение переменных на быстрые осцилляции и медленную динамику центров Ларморовских вихрей на двумерной поверхности слоя. Системы с аналогичными свойствами были рассмотрены ранее, например, в работах [1,2,3]. Особенность рассматриваемой системы обусловлена наличием резонанса частот, что существенно меняет подход квантового осреднения.

Отметим, что спектр оператора $H$ при $\varepsilon = 0$ представляет собой дискретный набор бесконечно вырожденных уровней Ландау $hn$, $n = 1, 2, \ldots$, а малое искривление поверхности слоя приводит к расщеплению вырожденных уровней в старших поправках по $\varepsilon$.

Переходя к криволинейным координатам в окрестности поверхности и применяя алгебраические методы квантового усреднения, в настоящей работе получен двумерный оператор, который определяет расщепление уровней и медленную динамику на поверхности (геометрический ток).

**Предложение.** Пусть гладкая функция поверхности слоя в окрестности положения равновесия имеет разложение вида:

$$f(q_1, q_2) = \frac{w_1}{2}q_1^2 + \frac{w_2}{2}q_2^2 + \cdots, \quad w_j \neq 0.$$

Тогда на подпространстве нижнего уровня Ландау исходный оператор $H$ унитарно эквивалентен усредненному оператору вида:

$$\underline{H} = h - \frac{\varepsilon^2 h}{2}\left(w_1^2 X_1^2 + w_2^2 X_2^2 + 2\mu h\right) + O(\varepsilon^2 h^2(\varepsilon + h)),$$

где $X_{1,2}$ — некоммутативные координаты ведущего центра на поверхности с коммутационными соотношениями $[X_1, X_2] = ih$, а константа $\mu = \frac{8}{3}w_1^2 + \frac{8}{3}w_2^2 - \frac{5}{6}w_1 w_2$.

Соответствующая асимптотическая спектральная серия имеет вид:

$$E_m = h\left(1 - \varepsilon^2 w_1 w_2 h(m+1/2) + \mu h \varepsilon^2 + \cdots\right), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

**Литература**

1. *M.V. Karasev* Magneto-Dimensional Resonance. Pseudospin Phase and Hidden Quantum Number // Russ. J. Math. Phys., **24**(3), 326–335 (2017)

2. *J. Brüning, S. Y. Dobrokhotov, and K. Pankrashkin* The spectral asymptotics of the two-dimensional Schrödinger operator with a strong magnetic field. I.// *Russ. J. Math. Phys.*, **9** (1), 14–49 (2002).

3. *A. Y. Anikin, J. Brüning, S. Y. Dobrokhotov, E. V. Vybornyi* Averaging and Spectral Bands for The 2-D Magnetic Schrödinger Operator with Growing and One-Direction Periodic Potential //*Russ. J. Math. Phys*, **26** (3), 265–276 (2019).

## О БАЗИСНОСТИ ПО АБЕЛЮ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С НЕСОГЛАСОВАННЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

**@ М.Г. Гадоев, Дж. С. Исхоков**
*gadoev@rambler.ru, dsiskhokov@gmail.com*

УДК 517.957

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06*.10.

В работе изучается класс эллиптических дифференциальных операторов высшего порядка в ограниченной области, коэффициенты которых имеют несогласованные степенное вырождение вдоль всей границы области. Полуторалинейная форма, связанная с исследуемым оператором, может не удовлетворять условию коэрцитивности. Установлена полнота и суммируемость в сьысле Абеля-Лидского системы корневых функций исследуемого оператора.

*Ключевые слова*: эллиптический оператор, степенное вырождение, некоэрцитивная форма, несогласованное вырождение, ограниченная область

**On the Abel basis property of the system of root vector-functions of a class of elliptic operators with uncoordinated degeneration**

We study a class of higher-order elliptic differential operators in a bounded domain whose coefficients have uncoordinated power-law degeneracy along the entire boundary of the domain. The sesquilinear form associated with the operator under consideration may not satisfy the coercivity condition. Abel basis property of the system of root vector-functions of of operators under consideration is established.

*Keywords*: elliptic operator, power degeneration, noncoercive form, uncoordinated degeneration, bounded domain

Пусть $\Omega$ – ограниченная область в $n$-мерном евклидовом пространстве $R^n$ с замкнутой $(n-1)$ -мерной границей $\partial\Omega$ и $r$ – некоторое натуральное число. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u] = \sum_{|k|=|l|=j\in J} (-1)^j \left(\rho^{2\tau_j}(x) b_{kl}(x) u^{(k)}(x)\right)^{(l)}, \qquad (1)$$

Гадоев Махмадрахим Гафурович, д.ф.-м.н.,заведующий кафедрой ФиПМ. МПТИ (ф) СВФУ им. М.К. Аммосова (РС(Я), Мирный, Россия); Mahmadrahim Gadoev ( Mirny Polytechnic Institute (branch) of North-Eastern Federal University , Mirny, Russia)

Исхоков Джафар Сулаймонович, аспирант, Институт математики им. А. Джураева НАН Таджикистана (Душанбе, Таджикистан); Djafar Iskhokov( A.D. Juraev Institute of mathematics national academy of sciences of Tajikistan, Tajikistan)

который понимается в смысле теории распределений на $\Omega$. Здесь $J$- некоторое подмножество множества $\{0, 1, ..., r\}$ причем $r \in J$, $\tau_j (j \in J)$ - вещественные числа. Коэффициенты $b_{kl}(x)$, $x \in \Omega$ являются ограниченными комплекснозначными функциями и $2\tau_j \geq -1/2$ для всех $j \in J$.

Рассмотрим интегро-дифференциальную полуторалинейную форму

$$B[u, v] = \sum_{|k|=|l|=j\in J} \int_{\Omega} \rho^{2\tau_j}(x) b_{kl}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^l(x)} dx, \tag{2}$$

связанную с оператором (1).

В работе рассматривается случай несогласованного вырождения коэффициентов оператора (1) (опр. см. [1, 2]) и допускается, что форма (2) может не удовлетворять условию коэрцитивности.

Вводим пространство $H_+$ комплекснозначных функций $u(x)$, $x \in \Omega$, с конечной нормой

$$\|u;\, H_+\| = \left\{ \sum_{h=0}^{s} \left\| u; W^{j_h}_{2;\tau_{j_h}}(\Omega) \right\|^2 \right\}^{1/2},$$

где $W^i_{p_j;\alpha_j}(\Omega)$ $(j \in N,\ \alpha_j, p_j \in R,\ 1 \leq p_j < +\infty)$ – пространство функций $u(x)$, определенных на $\Omega$, имеющих все обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные $u^{(k)}(x)$ порядка $j$ с конечной нормой

$$\|u;\, W^i_{p_j;\alpha_j}(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=i} \int_{\Omega} \rho^{p_j\alpha_j}(x) |u^{(k)}(x)|^{p_j} dx + \int_{\Omega} |u(x)|^{p_j} dx \right\}^{1/p_j}.$$

Символом $H'_+$ обозначим замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в метрике пространства $H_+$, а через $H'_-$ обозначим пространство антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $H'_+$ с нормой $\|F; H'_-\| = \sup | < F, u > |$, где верхняя грань берется по всем функциям $u \in H'_+$, таким, что $\|u; H_+\| = 1$. Здесь и далее символом $< F, u >$ обозначено значение функционала $F$ на функцию $u$.

При некоторых дополнительных условиях на коэффициенты формы (2) доказывается, что оператор $\mathcal{A}$, определенный равенством $< \mathcal{A}u, v >= B[u, v]$, $v \in H'_+$, действует из $H'_+$ в $H'_-$. Далее через $A$ обозначается сужение оператора $\mathcal{A}$ в пространстве $L_2(\Omega)$, доказывается одно полезное представление резольвенты оператора $A$ и с помощью этого представления доказывается следующий результат.

**Теорема.** *Пусть* $\varphi_m < \frac{\pi}{2\varkappa}$, *где* $\varkappa = max \left\{ \dfrac{n}{2r}, \dfrac{n-1}{2r - 2\tau_r} \right\}$. *Тогда система корневых функций оператора* $A$ *полна в* $H = L_2(\Omega)$. *Ряд Фу-*

*рье любого элемента $f \in H$ по системе корневых функций оператора $A$ суммируется к $f$ в смысле Абеля-Лидского со скобками порядка $\gamma = \varkappa + \mu$ с достаточно малым $\mu > 0$. Порядок резольвенты оператора $A$ не превосходит числа $\varkappa$.*

Сформулированный результат является обобщением соответствующих результатов работы [3] на случай несогласованного вырождения коэффициентов исследуемого оператора.

По поводу определения $\varphi_m$ см.[4].

## Литература


1. *Гадоев М.Г., Исхоков Дж. С.* Об одном классе вырождающихся эллиптических операторов в ограниченной области, порожденных некоэрцитивными формами // Доклады академии наук Республики Таджикистан, **62**:№ 7-8 (2019), 397-403.

2. *Исхоков С.А., Якушев И.А.* О разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических операторов // Чебышевский сборник, **19**:№3 (2018) 164-182.

3. *Бойматов К.Х.* О базисности по Абелю системы корневых вектор-функций вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов с сингулярными матричными коэффициентами // Сибирский математический журнал, **47**:№1 (2006) 46-57.

4. *Гадоев М.Г., Исхоков Дж. С.* О распределении собственных значений несамосопряженных эллиптических операторов в ограниченной области с несогласованным вырождением // Доклады академии наук Республики Таджикистан, **63**:№ 7-8 (2020), 441-449.

# ОБ ОПЕРАТОРЕ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА СПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ

**@ Г.Р. Галимова**

*79170419513@rambler.ru*

УДК 517.984

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*11.

В работе изучаются некоторые спектральные свойства оператора Штурма–Лиувилля на кривой $\gamma$. В частности, показано, что если $\gamma$ имеет ограниченный наклон, то система корневых векторов оператора Штурма–Лиувилля с произвольным суммируемым потенциалом образует в $L^2(\gamma)$ базис для суммирования методом Абеля–Лидского порядка, определяемого максимальным наклоном кривой.

*Ключевые слова*: оператор Штурма–Лиувилля на кривой, несамосопряженные операторы, базисность корневых векторов для суммирования методом Абеля–Лидского.

**On the Sturm–Liouville operator on a rectifiable curve**

We study some spectral properties of the Sturm–Liouville operator on a curve $\gamma$. In particular, we have shown that if $\gamma$ has a bounded slope, then the system of root vectors of the Sturm–Liouville operator with an arbitrary summable potential forms in $L^2(\gamma)$ a basis for summation by the Abel–Lidsky method of order determined by the maximal slope of the curve.

*Keywords*: Sturm–Liouville operator on a curve, non-self-adjoint operators, Abel–Lidskii basis property of system of root vectors.

Пусть $\gamma$ – спрямляемая кривая с концами 0 и 1. Будем говорить, что функция $f$ на $\gamma$ дифференцируема в точке $a \in \gamma$ если существует конечный предел $f'(a) = \lim_{z\in\gamma, z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$. Производные более высоких порядков определяются аналогично.

Пусть $q \in L^1(\gamma)$. Обозначим через $L_\gamma$ оператор с областью определения $D(L_\gamma) = \{y \in L^2(\gamma) : y' \in AC(\gamma), -y'' + qy \in L^2(\gamma), y(0) = y(1) = 0\}$, действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\gamma)$ по правилу $L_0 y = -y'' + qy$.

Если $\gamma = [0, 1]$, то справедливы утверждения (см., [1], [2, Гл. VI, § 2] и [3, Гл. I, теорема 1.3.2]):

---

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, доп. согл. № 075-02-2020-1421/1 к согл. № 075-02-2020-1421.

Галимова Гульнара, магистрант I года обучения ФМиИТ, БашГУ (Уфа, Россия); Gulnara Galimova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

1) оператор $L_\gamma$ плотно определен, замкнут;

2) спектр состоит из счетного числа собственных значений, имеющих асимптотику $\lambda_n \sim (\pi n)^2 + O(1),\ n \to \infty$;

3) $\left\|(L_\gamma - re^{i\alpha})^{-1}\right\| = O\left(r^{-1}\right), \quad r \to +\infty$, при любом $\alpha \neq 0$;

4) система собственных и присоединенных функций $\{f_n\}$ образует базис в $L^2(0,1)$: любая функция $f \in L^2(\gamma)$ единственным образом разлагается в ряд Фурье по $\{f_n\}$, равносходящийся с рядом Фурье по $\cos nx$.

Пусть $\gamma$ — произвольная спрямляемая кривая. Поставим вопрос: какие из утверждений 1) — 4) и в какой мере сохраняют силу.

**Теорема 1.** *Оператор $L_\gamma$ плотно определен, замкнут, его спектр дискретен и бесконечен.*

Луч, на котором выполняется оценка из 3), называется *лучом наилучшего убывания резольвенты.*

**Пример.** Пусть $\Gamma$ — окружность, проходящая через точки 0,1 и $1/2 - ia$ $(a > 0)$, $\gamma$ — часть $\Gamma$, лежащая ниже вещественной оси, и пусть $q = 0$. Тогда при $a > 1/2$ лучей наилучшего убывания нет.

Пусть $\Gamma$ – кривая с параметризацией $z = x + i\gamma(x),\ x \in [0,1]$, где функция $\gamma$ удовлетворяет условию Липшица $|\gamma(x_2) - \gamma(x_1)| \le M|x_2 - x_1|$ при всех $x_1 \neq x_2$, $M$ – постоянная. Такую кривую называют *кривой ограниченного наклона.*

Положим

$$M_1 = \inf_{0 \le x_1 < x_2 \le 1} \frac{\gamma(x_2) - \gamma(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad M_2 = \sup_{0 \le x_1 < x_2 \le 1} \frac{\gamma(x_2) - \gamma(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$\alpha_i = \operatorname{arctg} M_i,\ i = 1,2.$

**Теорема 2.** *Справедливы утверждения*:

(i) *Вне угла $-2\alpha_2 < \arg z < -2\alpha_1$ спектр оператора $L_\gamma$ конечен*;

(ii) *Любой луч $\arg z = \alpha$ $(\alpha \in (-2\alpha_1, \pi] \cup [-\pi, -2\alpha_2))$ является лучом наилучшего убывания резольвенты*;

(iii) *Пусть $\theta = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}$. Тогда система корневых векторов оператора L образует базис для суммирования методом Абеля–Лидского порядка $\frac{1}{2} < \delta < \frac{\pi}{2\theta}$.*

## Литература


1. *Ishkin Kh.K.* A localization criterion for the spectrum of the Sturm–Liouville operator on a curve // St. Petersburg Math. J. **28**:1 (2017), 37–63.

2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Наука, 1972.

3. *Марченко В.А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.

# БЕЗМОНОДРОМНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И СОЛИТОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

**@ А.В. Домрин, М.А. Шумкин**

*domrin@mi-ras.ru, shumkin.mikhail@yandex.ru*

УДК 517.984, 517.925

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*12.

Показано, что голоморфная по времени разрешимость задачи Коши для уравнения изоспектральной деформации оператора Шредингера или Дирака влечет безмонодромность начального условия. Даны количественные оценки нарушения обратной импликации для потенциалов, не принадлежащих классу Вейерштрасса, и приведены критерии безмонодромности операторов Дирака.

*Ключевые слова*: комплексный анализ, дифференциальные уравнения

**Monodromy-free operators and soliton equations**

We show that if the Cauchy problem for an isospectral deformation equation for a Schrödinger or Dirac operator has a holomorphic-in-time solution, then the initial condition is monodromy-free. We quantitatively estimate the violation of the inverse implication for potentials not in the Weierstrass class and present criteria for a Dirac operator to be monodromy-free.

*Keywords*: complex analysis, differential equations

Оператор Шредингера $L = \partial_x^2 + u(x)$ с потенциалом $u(x)$, мероморфным в области $D \subset \mathbb{C}$, называется *безмонодромным*, если все решения $\varphi(x)$ уравнения $L\varphi = z^2\varphi$ мероморфны в $D$ при каждом $z \in \mathbb{C}$. Описание таких операторов в различных классах мероморфных функций $u(x)$ является традиционным вопросом спектральной теории [1] и применяется к теории ортогональных многочленов и рациональных решений уравнений типа Пенлеве (см. обзор в [2]) и вопросам локализации спектра (см. обзор в [3]).

Нас интересует связь этого понятия с решениями солитонных уравнений. Известно [4], что потенциал $u(x)$ класса Вейерштрасса (состоящего из всех эллиптических функций, рациональных функций от $e^{ax}$, ограниченных на $\infty$, и рациональных функций от $x$, равных нулю на $\infty$) безмонодромен тогда и только тогда, когда он является стационарным

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00474).

Домрин Андрей Викторович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ (Москва, Россия); Andrei Domrin (Moscow State University, Moscow, Russia)

Шумкин Михаил Александрович, аспирант, МГУ (Москва, Россия); Mikhail Shumkin (Moscow State University, Moscow, Russia)

(т.е. не зависящим от $t$) решением некоторого уравнения изоспектральной деформации $L_t = [A, L]$, где оператор $A = \partial_x^m + v_1\partial_x^{m-2} + \cdots + v_{m-1}$ таков, что коммутатор $[A, L]$ является дифференциальным оператором степени нуль, т.е. оператором умножения на некоторую функцию (это при каждом нечетном $m > 1$ задает $v_1, \ldots, v_{m-1}$ почти однозначно как полиномы от функции $u$ и ее производных по $x$; например, при $m = 3$ годится $v_1 = 3u/2$ и $v_2 = 3u'/4$, что приводит к уравнению Кортевега–де Фриза $4u_t = u_{xxx} + 6uu_x$). Пользуясь [5], мы установим следующее обобщение в части необходимости.

**Теорема 1.** *Пусть функция $u_0(x)$ мероморфна в области $D$ и задача Коши $u(x, 0) = u_0(x)$ для уравнения $L_t = [A, L]$ имеет голоморфное по $x, t$ решение $u(x, t)$ на $\{|x - x_0| < \varepsilon_1,\ |t| < \varepsilon_2\}$ для каких-либо $x_0 \in D$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Тогда оператор $L_0 = \partial_x^2 + u_0(x)$ безмонодромен.*

Достаточности в общем случае нет (из безмонодромности оператора не вытекает разрешимость задачи Коши с таким начальным условием) и мы дадим количественную оценку этого явления.

Для оператора Дирака (и уравнений НУШ и мКдФ) имеет место полный аналог теоремы 1 и серия критериев безмонодромностм, аналогичных широко известным условиям из [1]. Приведем типичный результат.

**Теорема 2.** *Пусть функции $u(x), v(x)$ имеют при $x = x_0$ полюсы первого порядка. Тогда все решения $\varphi(x), \psi(x)$ системы уравнений $\varphi' = z\varphi + u\psi$, $\psi' = v\varphi - z\psi$ мероморфны в точке $x_0$ при каждом $z \in \mathbb{C}$ в том и только том случае, когда для некоторого натурального $m$ имеем $u_0v_0 = m^2$ и $u_kv_0 = (-1)^k u_0v_k$ при $k = 1, \ldots, 2m$, где $u_k$ ($v_k$) — это коэффициент при $(x - x_0)^{k-1}$ ряда Лорана функции $u(x)$ ($v(x)$) с центром $x_0$.*

### Литература

1. *Duistermaat J.J., Grünbaum F.A.* Differential equations in the spectral parameter // Commun. Math. Phys. **103** (1986), 177–240.

2. *Novokshenov V.Yu.* Generalized Hermite polynomials and monodromy-free Schrödinger operators // SIGMA **14** (2018). 106, 13 pages.

3. *Ишкин Х.К., Ахметшина А.Д.* О классе потенциалов с тривиальной монодромией // Вестник КазНУ Серия матем., мех., информ. **3**(90) (2018), 43–52.

4. *Gesztesy F., Weikard R.* Elliptic algebro-geometric solutions of the KdV and AKNS hierarchies — an analytic approach // Bull. AMS **35**:4 (1998), 271–317.

5. *Домрин А.В.* Мероморфное продолжение решений солитонных уравнений // Изв. РАН Серия матем. **74**:3 (2010), 23–44.

## SPECTRAL ANALYSIS OF LAPLACE-BELTRAMI OPERATOR ON RIEMANNIAN MANIFOLDS

**@ K. Dosmagulova**
*karlygash.dosmagulova@gmail.com*

УДК 517.984

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06*.13.

The Laplace-Beltrami operator is one of the most important geometric characteristics of a manifold. In the general case, its direct calculation is an extremely difficult task, with the exception of some rare cases.

*Keywords*: mathematics, differential equations, spectral theory

One of such cases, as this article proves, is the class of Riemannian manifolds. In this article we consider the Laplace-Beltrami operator over a smooth Riemannian manifold with smooth compact boundary. During the study, examples of constructing the Laplace-Beltrami operator are given. Further we will consider the case of the Laplace-Beltrami operator (Laplacian) defined on the set of real or complex functions of a compact Riemannian manifold. The most important concept is symmetrical spaces. These spaces are defined as pseudo-spaces. It is enough that the tensor of its curve is invariant for the connected Riemannian manifolds to be symmetrical. For a general Riemannian manifolds to be symmetric, each point must exist in the form of isometry. Although Riemannian spaces were used in physics, mathematics, and chemistry, their most important role was identified in the theory of homology.

### Литература

1. *Kanguzhin B.E.* Operators whose resolvents have convolution representations and their spectral analysis // Journal of Mathematical Sciences (United States), **252**:3 (2021), 384-398.

2. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* Clifford-Wolf homogeneous Riemannian manifolds // J. Differential Geometry, **82** (2009), 467-500.

3. *Abraham R., Marsden R., Ratiu T.* Manifolds, Tensor Analysis and Applications, second edition. — Springer-Verlag: New York, 1988.

Dosmagulova Karlygash, PhD student, Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

# КОМБИНАЦИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ СИЛИ–ДЕВИТТА И ИХ СВОЙСТВА

**@ А.В. Иванов, Н.В. Харук**

*regul1@mail.ru, natakharuk@mail.ru*

УДК 517.958

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*14.

Асимптотическое разложение теплового ядра при малых значениях собственного времени может быть записано в виде ряда с коэффициентами Сили–деВитта [1-3]. Используя эти коэффициенты, в работе [4] мы строим функции специального типа и изучаем их свойства. Рассматриваются некоторые приложения этих функций. В частности, мы показываем их связь с фундаментальным решением оператора Лапласа в $d$-мерном пространстве при $x \sim y$.

*Ключевые слова*: тепловое ядро, оператор Лапласа, коэффициент Сили–деВитта.

**Combinations of Seeley-DeWitt coefficients and their properties**

The asymptotic expansion of the heat kernel at small values of proper time can be written as a series with Seeley–DeWitt coefficients [1-3]. Using these coefficients, in the paper [4] we construct functions of a special type and study their properties. Some applications of these functions are considered. In particular, we show their relation to the fundamental solution of the Laplace operator in $d$-dimensional space at $x \sim y$.

*Keywords*: heat kernel, Laplace operator, Seeley–DeWitt coefficient.

Мы рассматриваем оператор $A$ на гладком компактном римановом многообразии $M$ без границы. Локально в некоторой окрестности $U \subset M$ такой оператор можно представить в виде

$$A(x) = -g^{-1/2}(x)D_{x^\mu}g^{1/2}(x)g^{\mu\nu}(x)D_{x^\nu} - v(x), \tag{1}$$

гду $x \in U$, $D_{x^\mu}$ – ковариантная производная, $v(x)$ – гладкий потенциал, $g^{\mu\nu}(x)$ и $g(x)$ – метрический тензор и его определитель. Спектр такого

Работа выполнена за счет гранта в форме субсидий из федерального бюджета на создание и развитие международных математических центров мирового уровня, соглашение между МОН и ПОМИ РАН № 075-15-2019-1620 от 8 ноября 2019 г. Также, Иванов А.В. является победителем конкурса «Молодая математика России» и выражает благодарность спонсорам и жюри.

Иванов Александр Валентинович, и.о. м.н.с., ПОМИ РАН, (Санкт-Петербург, Россия); Aleksandr Ivanov (PDMI RAS, St. Petersburg, Russia)

Харук Наталья Вячеславовна, аспирант, лаборант, ПОМИ РАН, (Санкт-Петербург, Россия); Natalia Kharuk (PDMI RAS, St. Petersburg, Russia)

оператора является вещественным, счетным, и единственной точкой накопления может быть $+\infty$. Для определенности мы будем предполагать, что все собственные знаяения строго больше нуля.

Для такого оператора можно поставить задачу для поиска теплового ядра. Для фиксированного $m^2 > 0$ она имеет вид

$$\begin{cases}(\partial_\tau + A(x) + m^2)K(x,y;\tau) = 0;\\ K(x,y;0) = g^{-1/2}(x)\delta(x-y),\ x,y \in U,\ \tau > 0.\end{cases} \tag{2}$$

Замкнутую формулу для решения такой задачи можно найти лишь в редких случаях. Однако, многие вопросы квантовой теории поля позволяют обойтись наличием асимптотического решения при $\tau \to +0$. Анзатц для такого решения имеет вид

$$K(x,y,\tau) = (4\pi\tau)^{-d/2}\Delta^{1/2}(x,y)e^{-\sigma(x,y)/2\tau-\tau m^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\tau^k a_k(x,y), \tag{3}$$

где $a_k(x,y)$ – коэффициенты Сили–деВитта, $\sigma(x,y)$ – функци Синджа и $\Delta(x,y)$ – детерминант Ван-Влек–Моретта.

Рассмотрим следующий ряд

$$\Delta^{1/2}\sum_{k=0}^{+\infty}\sigma^{k+\alpha}(b_k + \ln(\sigma)c_k)a_k, \tag{4}$$

где наборы $\alpha$, $\{b_k\}_{k\geqslant 0}$ и $\{c_k\}_{k\geqslant 0}$ являются комплексными числами. Оказывается, что путем выбора числовых коэффициентов можно получить семейства функций специального вида, на которых оператор Лапласа превращается в оператор сдвига. Более того, такие функции позволяют найти разложения для фундаментального решения, теплового ядра, а также для некоторых других важных физических объектов.

**Литература**

1. *Kirsten K.* Spectral Functions in Mathematics and Physics // Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2001

2. *Gilkey P.B.* Asymptotic Formulae in Spectral Geometry // CRC Press, Boca Raton, 2004

3. *Berline N., Getzler E., Vergne M.* Heat Kernels and Dirac Operators // Berlin, Springer, 2004

4. *Ivanov A.V., Kharuk N.V.* Two Function Families and Their Application to Hankel Transform of Heat Kernel // arXiv:2106.00294 [math-ph], 2021

# ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЬЮ

**@ М.Ю. Игнатьев**
*IgnatievMU@sgu.ru*

УДК 517.984

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06*.15.

Рассматриваются различные аспекты теории рассеяния для систем дифференциальных уравнений с особенностью. Основные результаты связаны с вопросами характеризации данных рассеяния.

*Ключевые слова*: дифференциальные уравнения, спектральная теория, обратные задачи.

**Characterization of scattering data for differential systems with a singularity**

We consider some aspects of scattering theory for differential systems with a singularity. Main results concerns the problem of the characterization of scattering data.

*Keywords*: differential equations, spectral theory, inverse problems.

Пусть $\Psi = \Psi(x, \rho)$ – матрица, составленная из решений типа Вейля [1] следующей системы дифференциальных уравнений

$$y' = (\rho B + x^{-1}A + q(x))y \tag{1}$$

со спектральным параметром $\rho$, где $A$ и $B$ – постоянные $n \times n$, $n > 2$ матрицы, $B = diag(b_1, \ldots, b_n)$, $b_1, \ldots, b_n$ - различные ненулевые комплексные числа, причем никакие три из них не лежат на одной прямой.

Относительно матриц $A$ и $B$ мы будем предполагать выполненными те же условия, что в работе [1]. Предположим, кроме того, что дискретный спектр отсутствует, или, более точно, что $q(\cdot) \in G_0^p(\mathcal{S})$, $p > 2$ [1] для любого открытого сектора $\mathcal{S} \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, где:

$$\Sigma = \bigcup_{(k,j):j\neq k} \{\rho : \mathrm{Re}(\rho b_j) = \mathrm{Re}(\rho b_k)\}\,.$$

При выполнении указанных условий в каждой точке $\rho \in \Sigma' := \Sigma \setminus \{0\}$ существуют пределы $\Psi^{\pm}(x, \rho) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \Psi(x, \rho \pm i\rho\varepsilon)$. *Данными рассеяния*

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-70005).

Игнатьев Михаил Юрьевич, к.ф.-м.н., доцент, СГУ (Саратов, Россия); Mikhail Ignatiev (Saratov State University, Saratov, Russia)

назовем матрицу-функцию $v = v(\rho)$ такую, что $\Psi^+(x,\rho) = \Psi^-(x,\rho)v(\rho)$ при $\rho \in \Sigma'$. Рассмотрим *обратную задачу рассеяния*, состоящую в восстановлении *потенциала* $q(\cdot)$ по заданным данным рассеяния. Справедлива следующая теорема единственности.

**Теорема 1.** *Предположим, что потенциалы* $q(\cdot)$ *и* $\tilde{q}(\cdot)$ *таковы, что соответствующие им данные рассеяния* $v(\rho)$ *и* $\tilde{v}(\rho)$ *совпадают для всех* $\rho \in \Sigma'$. *Тогда* $q(x) = \tilde{q}(x)$ *п.в.*

Решение обратной задачи рассеяния может быть найдено с помощью конструктивной процедуры, центральную роль в которой играет решение при каждом $x \in (0, \infty)$ некоторого линейного уравнения в пространстве $L_2(\Sigma)$.

Основное внимание в докладе будет уделено вопросу характеризации данных рассеяния, т.е., нахождения условий, при выполнении которых заданная матрица-функция $v(\cdot)$ является данными рассеяния для некоторой системы вида (1).

### Литература

1. *Ignatiev M. Yu.* On Weyl-type Solutions of Differential Systems with a Singularity. The Case of Discontinuous Potential // Mathematical Notes, **108**:6 (2020), 814-826.

# РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА КРИВОЙ С РЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ НА ХОРДЕ

**@ Х.К. Ишкин**

*ishkin62@mail.ru*

УДК 517.984, 517.928

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06*.16.

В работе получена формула регуляризованного следа оператора $T_0 + V$, где $L_\gamma$ – оператор Штурма–Лиувилля на гладкой кривой $\gamma$ с потенциалом $q$, имеющим полюса внутри хорды, стягивающей $\gamma$, $V$ — оператор умножения на функцию $\mathcal{V}$, голоморфную в некоторой окрестности кривой $\gamma$, содержащей хорду. Показано, что если $q$ удовлетворяет условию тривиальной монодромии около каждого своего полюса, то формула регуляризованного следа в точности совпадает с формулой Гельфанда–Левитана–Дикого для регуляризованного следа классического оператора Штурма–Лиувилля на отрезке с квадратично суммируемым потенциалом $q$, ряд Фурье которого сходится на концах отрезка.

*Ключевые слова*: спектр, оператор Штурма–Лиувилля, безмонодромные потенциалы, регуляризованные следы.

**Regularized trace of the Sturm–Liouville operator on a curve with regular singular points on the chord**

In this paper, we obtained a formula for the regularized trace of the operator $L_\gamma + V$, where $L_\gamma$ is the Sturm–Liouville operator on a smooth curve $\gamma$ with potential $q$ having poles inside the chord contracting $\gamma$, $V$ is the operator of multiplication by a function $\mathcal{V}$, which is holomorphic in some neighborhood of the curve $\gamma$ containing a chord. We have shown that if $q$ satisfies the trivial monodromy condition near each of its poles, then the regularized trace formula exactly coincides with the Gelfand–Levitan–Dikii formula for the regularized trace of the classical Sturm–Liouville operator on an interval with a square-summable potential $q$, whose Fourier series converges at the ends of the segment.

*Keywords*: spectrum, Sturm–Liouville operator, monodromy-free potentials, regularized traces.

---

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, доп. согл. № 075-02-2020-1421/1 к согл. № 075-02-2020-1421.

Ишкин Хабир Кабирович, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Khabir Ishkin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Пусть $\gamma$ – некоторая кривая на комплексной плоскости с параметризацией $z = x + ig(x)$, $x \in [0,1]$, где $g$ — кусочно-гладкая функция на $[0,1]$ и $g(0) = g(1) = 0$.

Пусть $q \in L^1(\gamma)$. Оператор $L_\gamma$, действующий в пространстве $L^2(\gamma)$ по правилу $L_\gamma y = -y'' + qy, \quad D(L_\gamma) = \{y \in L^2(\gamma) : \ y' \in AC(\gamma), -y'' + qy \in L^2(\gamma), \ y(0) = y(1) = 0\}$, будем называть *оператором Штурма–Лиувилля на кривой* $\gamma$. $L_\gamma$ — замкнут, плотно определен и имеет компактную резольвенту [1]. Если $q \in L^2(\gamma)$, то $Q$ — оператор умножения на функцию $q$ — определен на всем $L^2(\gamma)$ и ограничен. В этом случае оператор $L_\gamma = T_\gamma + Q$ является ограниченным возмущением $T_\gamma$ — оператора Штурма–Лиувилля с нулевым потенциалом, спектр которого состоит из простых собственных чисел $\lambda_n^0 = (\pi n)^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Если $\gamma \neq [0,1]$, то спектр $L_\gamma$ может сильно отличаться от спектра $T_\gamma$, даже при бесконечно гладких $q$ [1, 2]. Поэтому естественно ожидать, что класс возмущений, при которых

$$\lambda_n \sim (\pi n)^2, \ n \to \infty, \tag{1}$$

весьма узок. В работе [3, теорема 2] в случае, когда функция $g$ выпукла вниз, было получено полное описание этого класса. Этому классу принадлежит, например, функция

$$q(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{k_n(k_n - 1)}{(z - a_n)^2} + V(z), \tag{2}$$

где $a_1, \ldots, a_N \in \Omega$, $k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{N}$, $\Omega$ — область, ограниченная кривой $\gamma$ и $[0,1]$, функция $V$ принадлежит пространству Смирнова $E_1(\Omega)$ и такова, что в каждой точке $a_n$ функция (1) удовлетворяет условию тривиальной монодромии

$$q(z) = \frac{k(k+1)}{(z - a_n)^2} + \sum_{j=0}^{k} c_j (z - a_n)^{2j} + O\left((z - a_n)^{2k+1}\right). \tag{3}$$

Если функция $W(x) := \lim\limits_{\epsilon \to +0} V(x - i\epsilon)$ достаточно гладкая, то формулу (1) можно уточнить. В частности, если $W \in C^{(2)}[0,1]$, то

$$\lambda_n = (\pi n)^2 + c_0 + O\left(n^{-2}\right), \qquad c_0 = \int\limits_\gamma q(z) dz. \tag{4}$$

В связи со сказанным возникает вопрос: *Какой вид будет иметь формула (1), если отказаться от условия суммируемости функции $q$ на* $(0,1)$*? Если $q$ имеет неинтегрируемые особенности в интервале* $(0,1)$*, то каков их вклад в формулу (4)?*

Мы рассмотрим более общую ситуацию, когда функция $g$ необязательно выпукла. Пусть $D$ — область, в которой кривая $\gamma$ гомотопна $[0,1]$ и пусть функция $q$ имеет вид (2), где функция $V$ голоморфна в $D$, часть точек $a_1,\dots,a_N$ лежат в $(0,1)$, остальные — в $D\backslash\gamma$. Кроме того, будем считать, что в тех точках $a_n$, которые лежат вне $(0,1)$, условие (3) выполнено. Обозначим через $A$ множество всех полюсов $q$, через $A_1$ — тех, которые лежат в $(0,1)$, и через $A_2$ — множество остальных $a_n$. Пусть $\gamma$ — кусочно-гладкая кривая, лежащая в $D\backslash A$, соединяющая точки 0 и 1. Будем говорить, что *кривая* $\gamma$ *эквивалентна кривой* $\widetilde{\gamma}$, если $\widetilde{\gamma}$ также лежит в $D\backslash A$ и гомотопна $\gamma$ в области $D\backslash A_1$. По предположению все точки из $A_2$ удовлетворяют условию тривиальной монодромии. Поэтому для любых эквивалентных кривых $\gamma$ и $\widetilde{\gamma}$ спектры операторов $L_\gamma$ и $L_{\widetilde{\gamma}}$ совпадают. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что все полюсы $q$ лежат в интервале $(0,1)$, а кривая $\gamma$ является графиком гладкой функции.

В работе [4] показано, что в случае, когда $N=1$ и $V=0$, имеет место формула (2) так, что

$$\sum_{n=1}\left(\lambda_n-(\pi n)^2-c_0\right)=\frac{c_0}{2}-\frac{q(0)+q(1)}{4}. \tag{5}$$

Это равенство в точности совпадает с формулой Гельфанда–Левитана–Дикого для регуляризованного следа классического оператора Штурма–Лиувилля на отрезке с квадратично суммируемым потенциалом $q$, ряд Фурье которого сходится на концах отрезка.

Справедлива

**Теорема 1.** *Пусть функция $q$ имеет вид (2), где $0<a_1<\dots<a_N<1$, $k_1,\dots,k_N\in\mathbb{N}$, функция $V$ голоморфна в некоторой области $D$, содержащей отрезок* $[0,1]$. *Тогда при любой гладкой кривой $\gamma$, лежащей в $D$, соединяющей точки 0 и 1 и не проходящей через точки $a_1,\dots,a_N$, собственные числа оператора $L_\gamma$ удовлетворяют равенству (4) так, что справедлива формула (5).*

### Литература

1. *Ishkin Kh.K.* Necessary Conditions for the Localization of the Spectrum of the Sturm–Liouville Problem on a Curve // Math. Notes. **78**:1 (2005), 64-75.

2. *Ishkin Kh.K.* On the Uniqueness Criterion for Solutions of the Sturm-Liouville Equation // Math. Notes. **84**:4 (2008), 515-528.

3. *Ishkin Kh.K.* A localization criterion for the spectrum of the Sturm–Liouville operator on a curve // St. Petersburg Math. J. **28**:1 (2017), 37–63.

4. *Ishkin Kh.K., Davletova L.G.* Regularized Trace of a Sturm–Liouville Operator on a Curve with a Regular Singularity on the Chord // Differential Equations **56**:10 (2020), 1291-1303.

# РАЗВИТИЕ НОВОГО МЕТОДА НАХОЖДЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ЗАДАННЫХ НА КОМПАКТНЫХ ГРАФАХ

**@ С.Н. Какушкин**

*kakushkin-sergei@mail.ru*

УДК 519.6

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*17.

В работе приводятся основные положения нового метода нахождения собственных функций возмущенных дискретных полуограниченных операторов, заданных на компактных графах.

*Ключевые слова*: собственные функции, возмущенные операторы, компактные графы, базис энергетического пространства.

**Development of a new method for finding eigenfunctions of perturbed discrete operators given on compact graphs**

The paper presents the main provisions of a new method for finding eigenfunctions of perturbed discrete semi-bounded operators given on compact graphs.

*Keywords*: eigenfunctions, perturbed operators, compact graphs, basis of the energetic space.

Ранее было дано описание метода нахождения собственных функций возмущенных самосопряженных операторов, метод был применен при моделировании некоторых задач математической физики [1-3]. В работе представлено дальнейшее развитие метода, в применении к задачам, заданным на компактных графах.

Пусть дан конечный связанный ориентированный компактный граф $\mathbf{G}$ с множеством вершин $\{V_i\}_{i=1}^{i_0}$ и множеством ребер $\{E_j\}_{j=1}^{j_0}$, $i_0, j_0 \in \mathbb{N}$. На ребрах графа зададим оператор $L = \{T_j + P_j\}_{j=1}^{j_0}$, действующий в гильбертовом пространстве $H = \{\mathbf{g} = (g_1, ..., g_{j_0}),\ g_j \in L_2(0, l_j),\ j = \overline{1, j_0}\}$. Здесь $T = \{T_j\}_{j=1}^{j_0}$ – набор дискретных полуограниченных, а $P = \{P_j\}_{j=1}^{j_0}$ – набор ограниченных операторов. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим краевую задачу

$$(T_j + P_j)u_j = \mu u_j,\ u_j = u_j(x_j),\ x_j \in (0, l_j),\ j = \overline{1, j_0}, \tag{1}$$

Какушкин Сергей Николаевич, к.ф.-м.н., зав. сектором ИТиСО, Администрация МР Белорецкий район РБ (Белорецк, Россия); Sergey Kakushkin (Administration of the municipal district Beloretskiy district of the Republic of Bashkortostan, Beloretsk, Russia)

$$\sum_{E_k\in E^\alpha(V_s)} d_k \frac{du_k}{dx_k}\Big|_{x_k=0} - \sum_{E_m\in E^\omega(V_s)} d_m \frac{du_m}{dx_m}\Big|_{x_m=l_m} = 0, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} u_i(0)=u_k(0)=u_m(l_m)=u_h(l_h), \\ E_i,E_k\in E^\alpha(V_s),\ E_m,E_h\in E^\omega(V_s),\ \forall s\in\mathbb{N}. \end{gathered} \tag{3}$$

Через $E^\alpha(V_s)$ обозначено множество дуг с началом в вершине $V_s$, а через $E^\omega(V_s)$ – множество дуг с концом в вершине $V_s$.

Приближенное решение $\mathbf{u}(n)\in H$ задачи (1) – (3) будем искать в виде

$$\mathbf{u}(n)=\sum_{k=1}^{n} a_k\mathbf{v}_k, \tag{4}$$

т.е. (4) является решением уравнения $L^{(n)}\mathbf{u}(n)=\mu\mathbf{u}(n)$ при выполнении условий, аналогичных условиям (2) и (3) для $\mathbf{u}(n)$. Здесь $a_k$ – неизвестные пока числовые коэффициенты, а вектор-функции $\mathbf{v}_k=(v_1^{(k)},...,v_{j_0}^{(k)})$, $k=\overline{1,n}$, образуют счетный базис в пространстве $H$. Через $H_L$ обозначим пространство $H$ с энергетической нормой $\|\mathbf{v}_k\|_L=(L\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_k)^{1/2}$.

Несложно показать неравенство: $\dfrac{c}{\lambda_k}\|\mathbf{v}_k\|_T^2 \le \|\mathbf{v}_k\|_L^2 \le (1+\dfrac{\|P\|}{\lambda_k})\cdot \|\mathbf{v}_k\|_T^2$, где $c$ – нижняя грань оператора $L$, которое доказывает следующую теорему [4].

**Теорема 1.** *Если $L$ – полуограниченный снизу оператор, действующий в гильбертовом пространстве $H$, то решения задачи, состоящей из уравнений $T_jv_j^{(k)}=\lambda_kv_j^{(k)}$ и условий (2) и (3), записанных для функций $v_j^{(k)}$, $j=\overline{1,j_0}$, $k=\overline{1,n}$, образуют базис в энергетическом пространстве $H_L$.*

Справедливо неравенство: $\Big\|(L-L^{(n)})\mathbf{u}\Big\|\le(C+r_0(n))\|\mathbf{u}\|$, где $\|P\|\le C$, $r_0(n)=\inf\limits_{\zeta\in\rho_n(T)}|\zeta|$, $\rho_n(T)$ – резольвентное множество оператора $T$, из которого следует, что количество членов ряда (4) пропорционально количеству собственных чисел $\lambda_k$ оператора $T$, взятых внутри окружности, радиуса $|\lambda_{n+1}+\lambda_n|/2$, а также, что справедлива теорема 2.

**Теорема 2.** *Пусть $T$ – дискретный полуограниченный оператор, $P$ – ограниченный оператор, заданные в гильбертовом пространстве $H$, а ортонормированные вектор-функции $\{\mathbf{v}_k\}$ образуют счетный базис в $H_L$. Тогда приближенное решение (4) задачи (1) – (3) сходится к точному .*

При выполнении условий теорем 1 и 2 коэффициенты $a_k$ решения (4) можно найти следуя общей схеме большинства методов ортогональных проекций: в виде решения однородной системы линейных алгебраических уравнений $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\{(\lambda_k-\mu)\delta_{km}+V_{km}\}=0$, где $\delta_{km}$ – символ Кронекера, $V_{km}=(P\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_m)$, $k,m=\overline{1,n}$. В серии работ Кадченко С.И. доказано, что $\mu_k=\lambda_k+V_{kk}+\delta(k)$, где $\delta(k)$ – погрешность вычисления, имеющая, вообще говоря, достаточно малое по абсолютной величине значение (см., напр., [5]). Учитывая это, легко заметить, что при нахождении вектор-функции $\mathbf{u}_k(n)$, соответствующей собственному числу $\mu_k$, $k$-ый элемент главной диагонали системы будет близок к нулю, матрица однородной системы станет плохо обусловленной и решить систему известными методами будет весьма проблематично. Удобно использовать следующий прием, показавший свою стабильную работу в большом количестве вычислительных экспериментов. Необходимо отбросить $k$-ую строку системы уравнений, а элементы $k$-ого столбцу, перенести в правую часть системы с противоположным знаком. Решить полученную неоднородную систему уравнений относительно коэффициентов $a_j$, $j\neq k$, $j=\overline{1,n}$, а коэффициент $a_k$ восстановить из условия нормировки: $a_k=\sqrt{1-\sum\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} a_l^2}$.

На основе используемого в работе материала были написаны пакеты программы решения задачи (1) – (3), заданной на двух- и трехреберных графах, где в качестве невозмущенного оператора брался оператор Лапласа с различными возмущающими операторами. При подстановке полученных приближенных решений в равенства (1), (2) и (3), проведенные вычислительные эксперименты показали высокую точность и стабильность работы описанного алгоритма.

### Литература

1. *Какушкин, С. Н.* Математическое моделирование спектральной задачи об электрических колебаниях в протяженной линии методом регуляризованных следов / С. Н. Какушкин // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. - 2013. - Т. 6. - № 3. - С. 125-129.

2. *Kakushkin, S. N.* The Calculation of Values of Eigenfunctions of the Perturbed Self-Adjoint Operators by Regularized Traces Method / S. N. Kakushkin, S. I. Kadchenko // Journal of Computational and Engineering Mathematics. - 2015. - Vol. 2. - No 4. - P. 48-60. - DOI 10.14529/jcem150405.

3. *Кадченко, С. И.* Нахождение значений первых собственных функций возмущенных дискретных операторов с простым спектром / С. И. Кадченко, Н. К. Какушкин // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. - 2012. - № 5(264). - С. 25-32.

4. *Kadchenko, S. I.* Spectral Problems on Compact Graphs / S. I. Kadchenko,

S. N. Kakushkin, G. A. Zakirova // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. - 2017. - Vol. 10. - No 3. - P. 156-162. - DOI 10.14529/mmp170314.

5. *Кадченко, С. И.* Численные методы регуляризованных следов спектрального анализа / С. И. Кадченко, С. Н. Какушкин. - Челябинск : Издательский центр ЮУрГУ, 2015. - 206 с. - ISBN 9785696047508.

# ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ЗАМОРОЖЕННЫМ АРГУМЕНТОМ

**© М.А. Кузнецова**

*kuznetsovama@info.sgu.ru*

УДК 517.984.5

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*18.

В работе получены асимптотические формулы для спектра оператора Штурма–Лиувилля с замороженным аргументом. Эти формулы представляют собой полное описание класса последовательностей, являющихся спектрами рассмотренных операторов.

*Ключевые слова*: обратные спектральные задачи, замороженный аргумент, оператор Штурма–Лиувилля, необходимые и достаточные условия.

**Characterizing the spectrum of the Sturm–Liouville operator with frozen argument**

In this work, asymptotic formulae are obtained for the spectrum of the Sturm–Liouville operator with frozen argument. These formulae completely characterize the class of sequences being spectra of the considered operators.

*Keywords*: inverse spectral problems, frozen argument, Sturm–Liouville operators, necessary and sufficient conditions.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Штурма–Лиувилля с замороженным аргументом:

$$-y''(x) + q(x)y(a) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \tag{1}$$

$$y^{(\alpha)}(0) = y^{(\beta)}(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $q \in L_2(0, \pi)$, и числа $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$, $a \in [0, \pi]$ фиксированы.

Пусть функции $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ являются решениями уравнения (1) при начальных условиях

$$S(a, \lambda) = 0,\ S'(a, \lambda) = 1, \quad C(a, \lambda) = 1,\ C'(a, \lambda) = 0.$$

Тогда собственные значения краевой задачи (1)–(2) вычисляются как нули характеристической функции

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} C^{(\alpha)}(0, \lambda) & C^{(\beta)}(\pi, \lambda) \\ S^{(\alpha)}(0, \lambda) & S^{(\beta)}(\pi, \lambda) \end{vmatrix}.$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-70005).

Кузнецова Мария Андреевна, аспирант, СГУ (Саратов, Россия); Maria Kuznetsova (PhD student, Saratov State University, Saratov, Russia)

Спектром краевой задачи (1)–(2) называется последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, взятых с учетом алгебраической кратности.

**Обратная задача 1.** По спектру $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и числам $\alpha$, $\beta$ восстановить потенциал $q$.

Обратная задача 1 изучалась в работах [1–4]. В случае $a/\pi\in\mathbb{Q}$ было получено ее полное решение, включающее в себя характеризацию спектра с помощью асимптотических формул (см. [1]). Неполные результаты для случая $a/\pi\notin\mathbb{Q}$ были получены в [2]. Методы, использованные в этих работах, не позволяют получить характеризацию спектра в иррациональном случае. В настоящей работе предложен единый подход исследования двух случаев и дополнены известные результаты для $a/\pi\notin\mathbb{Q}$.

Введем следующие обозначения:

$$\varphi_\nu(x)=\left\{\begin{array}{ll}\sin x, & \nu=0,\\ \cos x, & \nu=1,\end{array}\right.\qquad z_n=n-\frac{\alpha+\beta}{2},\ n\in\mathbb{N},\quad \lambda=\rho^2.$$

Используем следующую формулу (см. [2]):

$$\Delta(\lambda)=(-1)^{\alpha(1-\beta)}\frac{\varphi_{|\beta-\alpha|}(\pi\rho)}{\rho^{1-\alpha-\beta}}+$$
$$+(-1)^\alpha\left(\frac{\varphi_\beta((\pi-a)\rho)}{\rho^{2-\alpha-\beta}}\int_0^a q(t)\varphi_\alpha(t\rho)\,dt+\frac{\varphi_\alpha(a\rho)}{\rho^{2-\alpha-\beta}}\int_a^\pi q(t)\varphi_\beta((\pi-t)\rho)\,dt\right).$$

Применяя теорему Руше и разложения тригонометрических функций в окрестности 0, можно получить следующие асимптотические формулы:

$$\lambda_n=z_n^2+\varkappa_n\varphi_\alpha(az_n),\ n\in\mathbb{N},\quad \{\varkappa_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in l_2. \tag{3}$$

**Теорема 1.** *Последовательность $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является спектром краевой задачи (1)–(2) тогда и только тогда, когда выполнены асимптотические формулы (3).*

*Схема доказательства достаточности.* 1) Строим функцию

$$\Pi(\lambda)=(-1)^\alpha\pi^{\delta(\alpha,\beta)}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k-\lambda}{\xi_k},\quad \xi_k:=\left\{\begin{array}{ll}\xi_k=z_k^2, & k\geq 2\ \text{или}\ \alpha+\beta<2;\\ \xi_k=1, & k=1\ \text{и}\ \alpha=\beta=1.\end{array}\right.$$

2) С помощью [1, лемма 6] и леммы Шварца докажем, что

$$\{z_n^{2-\alpha-\beta}\Pi(z_n^2)/\varphi_\alpha(az_n)\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\Omega}\in l_2,$$

где $\Omega=\{k\in\mathbb{N}\colon \varphi_\alpha(az_k)=0\}$.

3) Существует функция $q \in L_2(0,\pi)$, коэффициенты которой по базису $\{\varphi_\alpha(tz_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяют равенствам

$$\int_0^\pi q(t)\varphi_\alpha(tz_n)\,dt = \frac{(-1)^{n+1-\alpha}\Pi(z_n^2)}{\varphi_\alpha(z_n a)} z_n^{2-\alpha-\beta}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \Omega.$$

4) Пусть $\Delta(\lambda)$ — характеристическая функция краевой задачи (1)–(2) с построенным $q$. Тогда функция $F(\lambda) = \rho^{1-\alpha-\beta}(\Delta(\lambda)-\Pi(\lambda))/\varphi_{|\alpha-\beta|}(\pi\rho)$ целая по $\lambda$, и справедливы оценки $F(\lambda) = o(1)$. По теореме Лиувилля $F(\lambda) \equiv 0$, то есть $\Pi(\lambda) \equiv \Delta(\lambda)$.

### Литература


1. *Buterin S., Kuznetsova M.* On the inverse problem for Sturm-Liouville-type operators with frozen argument: rational case // Comput. Appl. Math., **39**:1 (2020), article 5.

2. *Wang Y.P. et al.* Reconstruction for Sturm-Liouville operators with frozen argument for irrational cases // Appl. Math. Lett., **111** (2021), article 106590.

3. *Tsai T.-M. et al.* Sturm-Liouville-type operators with frozen argument and Chebyshev polynomials [Электронный ресурс] // arXiv.org (2021), arXiv:2106.03525 [math.SP].

4. *Bondarenko N.P.* Finite-difference approximation of the inverse Sturm-Liouville problem with frozen argument [Электронный ресурс] // arXiv:2108.10578 [math.NA].

# ХАРАКТЕРИСТИКА СПЕКТРА КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ПОРОЖДЕННОЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ ДИРАКА

**@ А.С. Макин**

*alexmakin@yandex.ru*

УДК 517.984.55

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06*.19.

Изучается обратная задача для несамосопряженного оператора Дирака с квазипериодическими краевыми условиями. Устанавливаются необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять целая функция, чтобы являться характеристическим определителем указанного оператора, а также необходимые и достаточные условия того, чтобы множество комплексных чисел являлось спектром рассматриваемой краевой задачи.

*Ключевые слова*: оператор Дирака, обратная задача, спектр, квазипериодические краевые условия.

**Chararterization of spectrum of quasi-periodic problem generated by non-self-adjoint Dirac's operator**

We study the inverse problem for a non-self-adjoint Dirac operator with quasi-periodic boundary conditions. Necessary and sufficient conditions are established that an entire function must satisfy in order to be the characteristic determinant of the indicated operator, as well as necessary and sufficient conditions for a set of complex numbers to be the spectrum of the considered boundary value problem.

*Keywords*: Dirac operator, inverse problem, spectrum, quasi-periodic boundary conditions.

В настоящей работе мы изучаем обратную спектральную задачу для системы Дирака

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{1}$$

где $\mathbf{y} = \mathrm{col}(y_1(x), y_2(x))$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

комплекснозначные функции $p, q \in L_2(0, \pi)$, с квазипериодическими краевыми условиями

$$\mathbf{y}(0) = e^{it}\mathbf{y}(\pi), \tag{2}$$

Макин Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, МИРЕА (Москва, Россия); Alexander Makin (MIREA, Moscow, Russia)

где $t \in \mathbb{C}, t \neq \pi k,\ k \in Z$ .

Обозначим через

$$E(x,\lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x,\lambda) & -s_2(x,\lambda) \\ s_1(x,\lambda) & c_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

матрицу фундаментальной системы решений уравнения (1) с краевыми условиями $E(0,\lambda) = I$, где $I$ единичная матрица. Матрица $E(\pi,\lambda)$ называется матрицей монодромии оператора (1). Для ее элементов введем обозначения $c_j(\lambda) = c_j(\pi,\lambda)$, $s_j(\lambda) = s_j(\pi,\lambda)$, $j = 1,2$. Обозначим также через $PW_\sigma$ класс целых функций $f(z)$ экспоненциального типа, не превосходящего $\sigma$, таких что $\|f\|_{L_2(R)} < \infty$.

Хорошо известно, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (1), (2) может быть приведен к виду

$$\Delta(\lambda) = -\cos t + \frac{c_1(\lambda) + c_2(\lambda)}{2},$$

а собственные значения определяются асимптотическим формулами

$$\lambda_n^{\pm} = 2n \pm \frac{t}{\pi} + \varepsilon_n^{\pm}, \tag{3}$$

где $\{\varepsilon_n^{\pm}\} \in l_2$, $n \in \mathbb{Z}$.

**Теорема 1.** *Для того, чтобы функция $u(\lambda)$ являлась характеристическим определителем задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде*

$$u(\lambda) = -\cos t + \cos \pi\lambda + f(\lambda),$$

*где $f(\lambda) \in PW_\pi$ и $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty$.*

**Теорема 2.** *Для того, чтобы множество $\Lambda$ являлось спектром некоторой задачи (1), (2), необходимо и достаточно, чтобы оно состояло из двух последовательностей собственных значений $\lambda_{n,j}$, удовлетворяющих соотношению (3) и условию*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_n^+}{2n + t/\pi - k} + \frac{\varepsilon_n^-}{2n - t/\pi - k} \right| < \infty.$$

Характеристика спектра самосопряженного оператора Дирака с квазипериодическими краевыми условиями была дана в [1]. Обзор работ по обратным задачам для несамосопряженных дифференциальных систем первого порядка приведен в [2].

## Литература

1. *Набиев И.М.* Решение обратной квазипериодической задачи для системы Дирака. // Матем. заметки, **89**:6 (2011), 885-893.

2. *Yurko V.A.* Inverse Spectral Problems for Differential Systems //Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Modern Methods in Operator Theory and Harmonic Analysis (OTHA-2018). – Rostov-on-Don: Springer, **291** 2018. – 451-475.

# ОБ УСЛОВИЯХ ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРА МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ОРРА–ЗОММЕРФЕЛЬДА

**@ Р.И. Марванов**

*marvanovrustem@gmail.com*

УДК 517.984, 517.928

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*20.

Для модельного оператора $L(\varepsilon)$, связанного с уравнением Орра–Зоммерфельда, изучается вопрос о необходимости известных условий А. А. Шкаликова, достаточных для локализации спектра около графа формы ≪Y≫. Рассмотрены 2 типа потенциалов, при которых предельный спектральный граф оператора $L_(\varepsilon)$ удается построить в явном виде. Основным результатом работы является задача: если $q$ монотонна и непрерывно дифференцируема и для части спектра, удовлетворяющих определённым условиям, выполняются условия квантования типа Бора-Зоммерфельда, то $q$ допускает аналитическое продолжение в некоторую окрестность интервала $(0, 1)$.

*Ключевые слова*: уравнение Орра-Зоммерфельда, локализация спектра, предельный спектральный граф.

**On localization conditions for spectrum of model operator for orr-sommerfeld equation**

For the model operator $L_(\varepsilon)$, connected with the Orr–Sommerfeld equation, the question of the necessity of the well-known A. A. Shkalikov conditions sufficient for localizing the spectrum near the graph of the form ≪Y≫ is studied. In this paper, two types of potentials are considered for which the limiting spectral graph of an operator $L_(\varepsilon)$ can be constructed in an explicit form. The main result of this work is the problem: if q is monotone and continuosly differentiable and for a part of the spectrum of $L_(\varepsilon)$ Bohr-Sommerfeld kind quantization conditions hold, then $q$ admits an analytic continuation into some neighbourhood of the interval $(0, 1)$.

*Keywords*: Orr-Sommerfeld equation, spectrum localization, limit spectral graph.

Рассмотрим семейство операторов $L_(\varepsilon)$, порождённых в $L^2(0,1)$ дифференциальным выражением $l_\varepsilon y = i\varepsilon^2 y'' + qy$ и краевыми условиями $y(0) = y(1) = 0$, где $q$ - ограниченная, измеримая, вещественнозначная

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-90999).

Марванов Рустем Ильдарович, аспирант, БашГУ (Уфа, Россия); Rustem Marvanov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

функция, $\varepsilon$ - положительный параметр. При каждом $\varepsilon$ спектр оператора $L_(\varepsilon)$ дискретен и лежит в замыкании области

$$\Pi = \{\ z \in \mathbb{C} : m < \mathrm{Re}(z) < M, \mathrm{Im}(z) < 0\},$$

где $m = \inf\limits_{(0,1)} q$, $M = \sup\limits_{(0,1)} q$.

Оператор $L_(\varepsilon)$ принято рассматривать в качестве упрощённой модели для хорошо известного в гидродинамике оператора Орра-Зоммерфельда ([1],[2]). Через $\Gamma(c)$ обозначим часть ПГС, лежащую в полосе $\Pi_c = \{\lambda \in \mathbb{C} : m < \mathrm{Re}(\lambda) < M, \mathrm{Im}(\lambda) < -c\}$ .

**Теорема 1.** Пусть функция $q$ вещественна, возрастает на $[0, 1]$, дифференцируема и $q' \in AC[0, 1]$. Далее, пусть существует такое $c > 0$, что при стремлении $\varepsilon$ к нулю по сектору $\mathcal{E} = \{\ re^{i\phi} : r > 0, |\arg \varepsilon| \leqslant \pi/4\}$ , $\sigma(c, \varepsilon)$ - спектр оператора $L(\varepsilon)$ в области $P_{\_}(c) = \{\ re^{i\phi} : r \geq c, -\pi \leq \phi \leq 0\}$ - локализуется следующим образом:

$$\sigma(c, \varepsilon) = \{\lambda_n(\varepsilon)\}^{\infty}_{n_1(c,\varepsilon)} \tag{1}$$

$$\lambda_n(\varepsilon) = \mu_n(\varepsilon) + o(1) \tag{2}$$

где $\mu_n(\varepsilon)$- корни уравнения $\int_0^1 \sqrt{i(\mu - q(x))}\, dx = \pi n\varepsilon$, $|\mu| \geq c$, оценка $o(1)$ равномерна по $n$. Тогда функция $q$ допускает голоморфное продолжение в некоторую окрестность интервала $(0, 1)$.

## Литература


1. *Стёпин С.А.* Несамосопряженные сингулярные возмущения и спектральные свойства задачи Орра-Зоммерфельда // Мат. сборник, **188**:1, 129-146 (1997).

2. *Шкаликов А.А.* Спектральные портреты оператора Орра-Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // Труды международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям(Москва, 11-17 августа, 2002).Часть3. СМФН //М.: МАИ. 89-112 (2003).

3. *Туманов С.Н., Шкаликов А.А.* О локализации спектра задачи Орра-Зоммерфельда для больших чисел Рейнольдса// Мат. заметки. **72:4**, 561-569 (2002).

4. *Покотило В.И., Шкаликов А.А.* Квазиклассическое приближение для несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля с параболическим потенциалом// Мат. заметки. **86:3**, 469-473 (2009).

5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов// М.: Мир. (1972)

## О ИЗОСПЕКТРАЛЬНОМ ОПЕРАТОРЕ ДИРАКА НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

**@ О.Э.Мирзаев**
*olim-mirzaev@mail.ru*

УДК 517.97

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*21.

В настоящей работе предлагается алгоритм построения семейства краевых задач для система уравнений Дирака на конечном отрезке.

*Ключевые слова*: собственные значения, нормирующие константы, обратные задачи, интегральные уравнения Фредгольма второго рода.

**On the isospectral Dirac operator on the finite segment**

In this paper, we propose an algorithm for constructing a family of boundary value problems for the system of Dirac equations on the finite segment.

*Keywords*: eigenvalues, normalization constants, inverse problems, Fredholm integral equations of the second kind.

### 1. Введение

**Определение 1.1.** *Краевые задачи для системы уравнений Дирака*

$$L^0 y \equiv By' = \lambda y, \ \ (0 < x < \pi), y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$y_1(0) = 0, \ \ y_1(\pi) = 0 \tag{2}$$

*и*

$$L(p(x), q(x))y \equiv By' + Q(x)y = \lambda y, y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$y_1(0) = 0, \ \ y_1(\pi) = 0 \tag{4}$$

*называются изоспектральными, если у них имеются одинаковые собственные значения, т.е.*$\sigma(L(p(x), q(x)) = \sigma(L^0) = \{n, n \in Z\}$.

Здесь

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \ Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

а $p(x), \ q(x) \in C[0, \pi]$ - действительная непрерывная функция на отрезке $[0, \pi]$.

Мирзаев Олим Эркинович, докторант, СамГУ (Самарканд, Узбекистан); Mirzaev Olim (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Настоящая работа посвящена обратной спектральной задаче об описании всех краевых задач системы дифференциальных уравнений Дирака на конечном отрезке с одним и тем же спектром. Такие краевые задачи называются изоспектральными и были изучены в работах [1]-[5]. М.Г.Гасымов, Т.Т.Джабиев (см.[6]) показали, что оператор Дирака на конечном отрезке определяется однозначно по его собственным значениям и последовательности нормирующих констант, а также ими найдены необходимые и достаточные условия восстановления краевых задач. М.Г.Гасымовом и Б.М.Левитаном (см.[7]) были найдены необходимые и достаточные условия восстановления оператора Дирака на полуоси по их спектральным функциям. При построении изоспектральных оператора Дирака на конечном отрезке с заданным спектром $\sigma(L(p(x), q(x))) = \{\lambda_n, n \in Z\}$ нами использован метод работы Гасымова-Левитана (см.[7]). Этот метод основан восстановлении коэффициента оператора Дирака по спектральным данным с помощью интегрального уравнения Фредгольма второго рода с параметром.

Следует отметить, что изоспектральные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке изучалось в работах [8]-[16]. Теория обратных спектральных задач для оператора Штурма-Лиувилля и их приложения более подробно изложена в работах [17]-[24].

Основным результатом настоящей работы является алгоритм, восстановлении семейства операторов Дирака $L = L(p(x), q(x))$ на конечном отрезке, спектры которых удовлетворяют условия: $\sigma(L) = \{\lambda_n = n, n \in Z\}$.

## 2. Некоторые сведения об обратной задаче для оператора Дирака на конечном отрезке

Обозначим через $\varphi(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda))^T$ решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi_1(0, \lambda) = 0, \;\; \varphi_2(0, \lambda) = -1.$$

Хорошо известно [19], что решение $\varphi(x, \lambda)$ задачи (3), (5) существует, единственно и для каждого фиксированного $x \in [0, \pi]$ является целой вектор-функцией по $\lambda$. Кроме того, имеет место интегральное представления

$$\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix} + \int_0^x K(x,t) \begin{pmatrix} \sin \lambda t \\ -\cos \lambda t \end{pmatrix} dt, \tag{6}$$

притом матрица-функция $K(x, t) = \|K_{ij}(x, t)\|_{i,j=1,2}$ является решением задачи

$$BK'_x(x, t) + K'_t(x, t)B = -Q(x)K(x, t), \tag{7}$$

$$BK(x, x) - K(x, x)B = -Q(x) \tag{8}$$

$$K_{11}(x,0)=K_{21}(x,0)=0. \tag{9}$$

Очевидно, что вектор-функция $\varphi(x,\lambda)=(\varphi_1(x,\lambda),\varphi_2(x,\lambda))^T$ при любом $\lambda$ удовлетворяет граничному условию $\varphi_1(0,\lambda)=0$. Поэтому собственные значения $\lambda_n$, $n\in Z$ задачи(3),(4) суть корни уравнения

$$\Delta(\lambda)\equiv\varphi_1(\pi,\lambda)=0. \tag{10}$$

Тогда $\varphi(x,\lambda_n)=(\varphi_1(x,\lambda_n),\varphi_2(x,\lambda_n))^T$, $n\in Z$ является собственной вектор-функцией задачи(3),(4).
Положим

$$a_n=\int_0^\pi[\varphi_1^2(x,\lambda_n)+\varphi_2^2(x,\lambda_n)]dx,\ \ n\in Z. \tag{11}$$

Числа $a_n$, $n\in Z$ называются нормировочными числами краевой задачи(3),(4). Набор чисел $\{\lambda_n,a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ будем называть в дальнейшем спектральными данными задачи(3),(4).

**Теорема 2.1** ([6]). *Если $p(x)$ и $q(x)$ имеют производные $k$-порядка из $L^2[0,\pi]$, то для спектральных данных $\{\lambda_n,a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ задачи (3) – (4) справедливы равенства*

$$\lambda_n=n+\frac{\alpha_1}{n}+...+\frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{\alpha_{k,n}}{n^k}, \tag{12}$$

$$a_n=\pi+\frac{c_1}{n}+...+\frac{c_{k-1}}{n^{k-1}}+\frac{c_{k,n}}{n^k}. \tag{13}$$

*где ряды*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\alpha_{k,n}|^2<\infty,\ \ \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_{k,n}|^2<\infty$$

*сходятся.*

Следует отметить, что собственные вектор-функции $\varphi(x,\lambda_n)=(\varphi_1(x,\lambda_n),\varphi_2(x,$
$n\in Z$ задачи(3),(4), соответствующие различным собственным значениям ортогональны в гильбертовом пространстве квадратично суммируемых двух компонентных вектор-функции $L_2^2(0,\pi)$ и для произвольных вектор-функции $f(x)=(f_1(x),f_2(x))^T\in L_2^2[0,\pi]$ имеет место

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x,\lambda_n)\{\frac{1}{a_n}\int_0^\pi\varphi^T(t,\lambda_n)f(t)dt\}.$$

Отсюда получим символическое равенство:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{a_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n)=I\delta(x-t), \tag{14}$$

где $I$-единичная матрица, $\delta(x)$ - дельта функция Дирака. В частности, при $p(x) \equiv 0, \ q(x) \equiv 0$, имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} (\sin nt, -\cos nt) = I\delta(x-t). \tag{15}$$

**Теорема 2.2** ([6]). *Коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ краевой задачи(3),(4) определяется однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.*

**Лемма 2.1.** *Имеет место тождество*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a_n} \varphi(x, \lambda_n)(\sin \lambda_n t, -\cos \lambda_n t) = 0, \ \ 0 < t < x < \pi. \tag{16}$$

**Теорема 2.3** ([6]). *Ядро $K(x,t) = \|K_{ij}(x,t)\|_{i,j=1,2}$ оператора преобразования(6), удовлетворяет линейному интегральному уравнению*

$$K(x,t) + F(x,t) + \int_0^x K(x,s)F(s,t)ds = 0, \ \ (0 < t \leq x < \pi), \tag{17}$$

*где*

$$F(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a_n} \begin{pmatrix} \sin \lambda_n x \\ -\cos \lambda_n x \end{pmatrix} (\sin \lambda_n t, -\cos \lambda_n t) \right\} -$$

$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} (\sin nt, -\cos nt) \right\}. \tag{18}$$

**Теорема 2.4** ([6]). *Для того чтобы последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_n > 0$, $n \in Z$ были спектральными данными некоторой краевой задачи вида (3) – (4) с матричной функцией вида*

$$Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},$$

*где $p(x)$ и $q(x)$ имеют производные $k$-го порядка из $L^2(0,\pi)$, необходимо и достаточно, чтобы для $\lambda_n$, $n \in Z$ и $a_n$, $n \in Z$ выполнялись асимптотические формулы (12)и (13).*

Итак, пусть $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_n > 0$, $n \in Z$ удовлетворяют условиям (12)и (13). Построим матрица-функции $F(x,t)$ по формуле (18) и рассмотрим интегральных уравнений (17) относительно $K(x,t) = \|K_{ij}(x,t)\|_{i,j=1,2}$. Тогда имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.5** ([6]). *При каждом фиксированном $x \in (0,\pi)$ интегральное уравнение (17) имеет единственное решение $K(x,t) = \|K_{ij}(x,t)\|_{i,j=1,2}$.*

Теперь, решая интегральные уравнение (17), находим матрица-функции $K(x,t) = \|K_{ij}(x,t)\|_{i,j=1,2}$. Далее определим вектор-функцию $\varphi(x,\lambda) = (\varphi_1(x,\lambda), \varphi_2(x,\lambda))^T$ по формуле(6). Тогда нетрудно показать, что вектор-функция $\varphi(x,\lambda) = (\varphi_1(x,\lambda), \varphi_2(x,\lambda))^T$ удовлетворяет уравнению

$$B\varphi' + Q(x)\varphi = \lambda\varphi, \;\; Q(x) = K(x,x)B - BK(x,x)$$

и начальным условиям $\varphi_1(0,\lambda) = 0, \;\; \varphi_2(0,\lambda) = -1$.

**3. Алгоритм восстановления изоспектральных краевых задач**

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

**Теорема 3.1.** *Пусть последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_n > 0$, $n \in Z$ является спектральным данным краевой задачи(3),(4). Тогда последовательность вещественных чисел $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_n > 0$, $n \in Z$ удовлетворяющий условиям*

$$\lambda_n = n, \;\; n \in Z, \;\; \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\pi} + \frac{\gamma_n}{n^2+1}, \;\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2+1} < \infty, \;\; \gamma_n > 0, \;\; n \in Z, \tag{19}$$

*тоже является спектральным данным. Кроме того существует единственная краевая задача $L(p(x), q(x)) \equiv L(..., \gamma_{-n}, ..., \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n, ...)$ вида(3),(4) с коэффициентами*

$$\begin{array}{c} p(x) = p(x, ..., \gamma_{-n}, ..., \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n, ...), \\ q(x) = q(x, ..., \gamma_{-n}, ..., \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n, ...) \end{array} \tag{20}$$

*собственные значения которых равны $n, n \in Z$, т.е.*

$$\sigma(L(..., \gamma_{-n}, ..., \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_n, ...)) = \{n, n \in Z\}. \tag{21}$$

**Доказательство.** Легко заметить, что последовательность $\{\lambda_n, a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $a_n > 0$, $n \in Z$ определенная формулами (19) удовлетворяет условиями теоремы 2.4. Поэтому существует единственная краевая задача вида(3),(4) с коэффициентами (20), и спектром (21).

Теперь находим коэффициенты (20). Для этого определим матрица-функции $F(x,t)$ по формулам (18) и (19)

$$F(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma_n}{n^2+1} \begin{pmatrix} \sin nx \\ -\cos nx \end{pmatrix} (\sin nt, -\cos nt) \right\}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в интегральное уравнение (17) получим

$$K(x,t) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n^2+1} \varphi(x,n)(\sin nt, -\cos nt), \tag{23}$$

где

$$\varphi(x,n)=\begin{pmatrix}\sin nx\\ -\cos nx\end{pmatrix}+\int_0^x K(x,s)\begin{pmatrix}\sin ns\\ -\cos ns\end{pmatrix}ds. \tag{24}$$

Известно ([6], [19]), что вектор-функция $\varphi(x,\lambda)$ определенная по формуле(6) удовлетворяет дифференциальному уравнению вида(3) с коэффициентами (20), и начальным условиям $\varphi_1(0,\lambda)=0$, $\varphi_2(0,\lambda)=-1$, где коэффициенты определяются по формулами

$$\begin{array}{l} p(x)=p(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_{-1},\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)= \\ =\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n^2+1}[\varphi_2(x,n)\sin nt-\varphi_1(x,n)\cos nt], \\ q(x)=q(x,...,\gamma_{-n},...,\gamma_{-1},\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)= \\ =-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n^2+1}[\varphi_1(x,n)\sin nt+\varphi_2(x,n)\cos nt]. \end{array} \tag{25}$$

Далее подставляя выражение (23) в формулу (24), имеем

$$\varphi(x,n)=\begin{pmatrix}\sin nx\\ -\cos nx\end{pmatrix}-\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\gamma_p}{p^2+1}\varphi(x,p)\int_0^x(\sin ps,-\cos ps)\begin{pmatrix}\sin ns\\ -\cos ns\end{pmatrix}ds. \tag{26}$$

Отсюда, получим собственную вектор-функции

$$\varphi(x,n)=\begin{pmatrix}\frac{\sin nx}{1+\frac{x\gamma_n}{n^2+1}}\\ -\frac{\cos nx}{1+\frac{x\gamma_n}{n^2+1}}\end{pmatrix}, n\in Z,$$

соответствующую собственным значениям $\lambda_n=n,\ n\in Z$, т.к.

$$\int_0^x(\sin ps,-\cos ps)\begin{pmatrix}\sin ns\\ -\cos ns\end{pmatrix}ds=\begin{cases}x,\ p=n,\\ 0,\ \ p\neq n.\end{cases}$$

Легко проверяются выполнения граничных условий(4), т.е. $\varphi_1(0,\lambda_n)=0$, $\varphi_1(\pi,\lambda_n)=0,\ \ \lambda_n=n,\ n\in Z$.

Таким образом, в статье построено семейство операторов Дирака $L(...,\gamma_{-n},...,\gamma_{-1},\gamma_0,\gamma_1,...,\gamma_n,...)$ на конечном отрезке, собственные значения которых совпадают с заданными числами $\lambda_n=n,\ n\in Z$.

## Литература

1. *Т.Н.Арутюнян.* Изоспектральные операторы Дирака// Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, 29, №2, 1994, с.4-14.

2. *Albeverio S, Hryniv, Mykytyuk Ya.* Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials//Russian Journal of Math Physics, 12(2005), 406-423.

3. *Etibar S. Panakhov, Tuba Gulsen.* Isospectrality problem for Dirac system// National academy of sciences of Azerbaijan, v.40, Special issue, 2014, p.386-392.

4. *YU.A.Ashrafyan, T.N.Harutyunyan.* Dirac operator with linear potential and its perturbations// Mathematical Inverse Problems, Vol.3, No.1 (2016), 12-25.

5. *Y.Ashrafyan, T.Harutyunyan.* Isospectral Dirac operators// Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2017, №4, 1-9.

6. *Гасымов М.Г., Джабиев Т.Т.* Определение системы дифференциальных уравнений Дирака по двум спектрам // Труды летней школы по спектральной теории операторов и представлению теории групп – Баку: Элм, 1975, с. 46–71.

7. *Гасымов М.Г., Левитан Б.М.* Обратная задача для системы Дирака // ДАН СССР, -1966. –т.167, №5. –с.967-970.

8. *Poschel J., Trubowitz E.* Inverse spectral theory. // Academic Press, New York, 1987.

9. *Jodeit M., Levitan B.M.* The isospectrality problem for the classical Sturm-Liouville equation. // Advances in differential equations. 1997, v.2, № 2, p. 297-318.

10. *M.Jodeit, B.M.Levitan.* The izospectrality problem fo some vector boundary problems// Russian journal of mathematical physics, vol.6, No.4, 1999, pp.375-393.

11. *Ashrafyan Y.A., Harutyunyan T.N.* Inverse Sturm-Liouville problems with fixed boundary conditions. // Electronic Journal of differential equations, (2015), v. 2015, №27, p.1-8.

12. *Мирзаев О.Э., Хасанов А.Б.* О семействах изоспектральных краевых задач Штурма-Лиувилля. Уфимский математический журнал. Том 12. №2(2020). с. 28-34.

13. *О.Э. Мирзаев, А.Б. Хасанов.* Изоспектралные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. ДАН РУз. 2020, № 3, 3-9.

14. *Мирзаев О.Э., Муродов Ф.М.* Изоспектралные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Научный журнал Самаркандского университета, 2020, № 3(121), 50-55.

15. *Мирзаев О.Э.* Изоспектралные операторы Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Научный журнал Самаркандского университета, 2020, № 5(123), 60-64.

16. *Амбарцумян В.А.* Über eine Frage Eigenwerttheorie. Zeitschr, für Physik, 53,1929, pp.690-695.

17. *Алимов Ш.А.* О работах А.Н.Тихонова по обратным задачи для уравнения Штурма-Лиувилля. УМН, 6(192), 1976, 84-88.

18. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции //Изв. АН СССР, сер. матем. 1951, т. 15, №4, с. 309-360.

19. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.

20. *В.А.Марченко.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев "Наукова Думка"1977.

21. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* О свойствах отображений, связанных с обратными задачами Штурма-Лиувилля // Тр. МИАИ, 2002, Т. 260., с. 227-247.

22. *Юрко В.А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007, 284 с.

23. *A.B.Hasanov.* Shturm-Liuvill chegaraviy masalalari nazariyasiga kirish. I. ”Fan”. Toshkent, 2011.

24. *A.B.Hasanov.* Oddiy differensial tenglamalar nazariyasiga kirish. ”Turon-iqbol”. Toshkent , 2019.

# ЗНАЧЕНИЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА В НЕЧЕТНЫХ ТОЧКАХ И КРАТНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

**@ К.А. Мирзоев, Т.А. Сафонова**
*mirzoev.karahan@mail.ru, t.Safonova@narfu.ru*

УДК 517.518

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.22.*

В работе методами спектральной теории операторов Штурма-Лиуивлля найдены новые представления значений дзета-функции Римана в нечётных точках в виде кратных числовых рядов.

*Ключевые слова*: дзета-функция Римана, кратные числовые ряды.

**Values of the Riemann zeta function at odd points and multiple numerical series**

In this work, new representations of the values of the Riemann zeta function at odd points in the form of multiple numerical series are found using the methods of the spectral theory of Sturm-Liuvell operators.

*Keywords*: Riemann zeta function, multiple number series.

Символом $\zeta(s)$ обозначим дзета-функцию Римана, а символом $\eta(s)$ - функцию

$$\eta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s).$$

Нами установлена справедливость следующей теоремы.

**Теорема 1.** *При* $m = 1, 2, \ldots$ *справедливы следующие равенства*

$$\mathcal{C}_m := \pi^{2m} \left( \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{m-n}}{(2m-2n+1)!} \frac{\eta(2n-1)}{\pi^{2n-1}} \right) = \frac{(-1)^{m-1} 2^{2m-1}}{(2m)!} \int_0^{\pi/2} \frac{x^{2m}}{\sin^2 x} dx$$

*и*

$$\mathcal{D}_m = \pi^{2m+1} \left( \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{m-n}}{(2m-2n+2)!} \frac{\eta(2n-1)}{\pi^{2n-1}} - \frac{2^{2m+1}-1}{2^{2m}} \frac{\zeta(2m+1)}{\pi^{2m+1}} \right) =$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20261).

Мирзоев Карахан Агахан оглы, д.ф.-м.н., профессор, МГУ (Москва, Россия); Mirzoev Karakhan (Moscow State University, Moscow, Russia)

Сафонова Татьяна Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия); Safonova Tatyana (Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov, Arkhangelsk, Russia)

$$= \frac{(-1)^{m-1}2^{2m}}{(2m+1)!} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{x^{2m+1}}{\sin^2 x} dx.$$

Учитывая в этих соотношениях известные равенства

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}(2k+1)} \sin^{2k+1} x, \qquad x^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{2k-1}}{C_{2k}^k k^2} \sin^{2k} x,$$

$$x^3 = 3! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{C_{2k}^k}{2^{2k}(2k+1)} \left( \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(2n-1)^2} \right) \sin^{2k+1} x,$$

$$x^4 = 3 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^{2k-1}}{C_{2k}^k k^2} \left( \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} \right) \sin^{2k} x$$

(см., напр., [1, ch. 9, proposition 15]), можно доказать справедливость теоремы о представлении последовательностей $\mathcal{C}_m$ и $\mathcal{D}_m$ в виде кратных числовых рядов. В частности, справедливы равенства

$$\eta(1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(2k-1)},$$

$$\eta(3) = \frac{1}{6} \left( \pi^2 \ln 2 - 3 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(2k-1)} \left( \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} \right) \right),$$

$$\eta(5) = \frac{1}{6} \left( \pi^2 \eta(3) - \frac{\pi^4}{20} \ln 2 + \frac{2}{5} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{C_{2k}^k k^2} \left( \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2} \right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{2(k+n-1)}^{k+n-1}}{C_{2n}^n n^2} \right),$$

$$\zeta(3) = \frac{4}{7} \left( \pi^2 \ln 2 - 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{k+n} \right),$$

$$\zeta(5) = \frac{6\pi^2}{31} \zeta(3) - \frac{2\pi^4}{93} \ln 2 +$$

$$+ \frac{4}{155} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{16^k}{C_{2k}^k k^2} \left( \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2} \right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{C_{2(k+n-1)}^{k+n-1} (2n+1)(2(n+k)-1)}.$$

**Литература**


1. *Berndt B.C.* Ramanujann's Notebooks: Part I. — New York, Springer Verlag, 1985.

# О ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ НА КРИВОЙ В СЛУЧАЕ НЕТРИВИАЛЬНОЙ МОНОДРОМИИ

**@ А.А. Набиулина**

*nabiulina.alina.2000@mail.ru*

УДК 517.984, 517.928

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.23*.

В работе исследуются вопросы, связанные с локализацией и асимптотикой спектра оператора Штурма–Лиувилля на кусочно-гладкой кривой с потенциалом, мероморфным в односвязной области, содержащей кривую вместе с отрезком, соединяющим ее концы.

*Ключевые слова*: уравнение Штурма–Лиувилля, безмонодромные потенциалы.

**Spectrum localization of the Sturm–Liouville operator on a curve in the case of a nontrivial monodromy**

In this paper, we investigate questions related to the localization and asymptotics of the spectrum of the Sturm–Liouville operator on a piecewise smooth curve with a potential meromorphic in a 1-connected domain containing the curve together with the segment connecting its ends.

*Keywords*: Sturm–Liouville equation, asymptotics of solutions, monodromy-free potentials.

Пусть $\gamma$ — кривая с параметризацией $z(x) = x + ig(x),\ x \in [0,1]$, где $g$ – функция, непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0,1]$, отрицательная внутри $[0,1]$ и равна 0 на его концах, $\Omega$ – область, ограниченная кривой $\gamma$ и отрезком $[0,1]$. Далее пусть $q$ – суммируемая на $\gamma$ функция и $L_\gamma$ – оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\gamma)$ по правилу: $D(L_\gamma) = \{y \in L^2(\gamma): \quad y' \in AC(\gamma), -y'' + qy \in L^2(\gamma),\ y(0) = y(1) = 0\}, \quad L_\gamma y = -y'' + qy$. Обозначим через $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ $(-\pi/2 < \arg \lambda_k \leq \pi/2)$ собственные числа $L_\gamma$, занумерованные в порядке возрастания модулей.

Если функция $q$ а) голоморфна в области $\Omega$, ограниченной кривой $\gamma$ и отрезком $[0,1]$, б) непрерывна на замыкании $\Omega$, то спектр $L_\gamma$ совпадает со спектром оператора $L_{[0,1]}$ с потенциалом

$$p(x) := \lim_{\epsilon \to +0} q(x - i\epsilon).$$

---

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, доп. согл. № 075-02-2020-1421/1 к согл. № 075-02-2020-1421.

Набиулина Алина Аликовна, магистрант I года обучения ФМиИТ, БашГУ (Уфа, Россия); Alina Nabiulina (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Если функция $p$ достаточно гладкая, скажем, непрерывно дифференцируема, то

$$\lambda_n = (\pi n)^2 + \int_0^1 q(x)dx + O\left(n^{-2}\right). \tag{1}$$

Пусть

$$q(z) = \frac{\nu^2 - 1/4}{(z-a)^p} + V, \tag{2}$$

где $a \in \Omega,\ \operatorname{Re}\nu \geq 0,\ p \in \mathbb{N}, V$ — функция, голоморфная в области $D$, содержащей $\overline{\Omega}$.

Из результатов работы [1] следует, что оценка (1) верна тогда и только тогда, когда $p = 2,\ \nu - 1/2 \in \mathbb{N}$, и $V^{(2j-1)}(a) = 0$ при некотором $1 \leq j \leq n$. Поставим вопрос: как меняется (1) в случае нарушения указанных условий либо условия б)?

Ограничимся случаем $p = 2$.

**Теорема 1.** *Если* $\nu - 1/2 \notin \mathbb{N}$, *то* $\sigma(L_\gamma) = \{\lambda_k^{(1)}\}\bigcup\{\lambda_k^{(2)}\}$, *где* $\lambda_k^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ *при больших* $k$ *удовлетворяют оценкам*

$$\lambda_k^{(j)} \sim \left[\frac{\pi(k-1/4)}{\Delta_j}\right]^2 \left[1 + \frac{i\ln(2\cos\pi\nu)}{\Delta_j} + O\left(k^{-2}\right)\right],\ \Delta_1 = a,\ \Delta_2 = 1-a.$$

**Теорема 2.** *Если* $\nu = n + 1/2,\ n \in \mathbb{N}$, *и* $m := \min\{j :\ V_{2j-1} \neq 0\} \leq n$, *то* $\sigma(L_\gamma) = \{\lambda_k^{(1)}\}\bigcup\{\lambda_k^{(2)}\}$,

$$\lambda_k^{(j)} = \left(\frac{\pi k}{\Delta_j}\right)^2 \left[1 + \frac{2m-2}{\pi k i}\ln\left(\frac{C_j}{\sqrt[2m-2]{V_{2m-1}}}\right) + O\left(\frac{\ln^2 k}{k^2}\right)\right],$$

$C_1, C_2$ — *явно вычисляемые постоянные.*

Серии $l_k^{(1)}$ и $l_k^{(2)}$ на бесконечности локализуются около двух лучей $\arg l = 2\beta_1$ и $\arg l = -2\beta_2$, где $\beta_1 = -\arg a,\ \beta_2 = \arg(1-a):\quad 0 < \beta_{1,2} < \frac{\pi}{2}$. Если $a$ лежит на вещественной оси между 0 и 1, то эти лучи совпадают. Возникает вопрос: какова асимптотика $\{l_k\}$? сохранится ли для этой последовательности разбиение на подпоследовательности вида $l_k^{(1)}$ и $l_k^{(2)}$?

**Теорема 3.** *Пусть* $0 < a < 1$. *Тогда*

$$\sqrt{\lambda_n} \sim \rho_n + O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty, \tag{1}$$

*где* $\rho_n$ — *нули функции*

$$\Phi_0(\rho) = \cos(\pi\nu)e^{i(2a-1)\rho} - \sin\rho, \tag{2}$$

*для которых справедливы следующие утверждения:*

*1) за исключением конечного числа все* $\rho_n$ *лежат в полуполосе* $\Pi_h = \{\operatorname{Re} z > 0,\ |\operatorname{Im} z| < h\}$, *где* $h$ *— некоторая постоянная;*

*2) количество* $\rho_n$ *в прямоугольниках* $R_a = \{a < \operatorname{Re} z < a+1,\ |\operatorname{Im} z| < h\} (a > 0)$ *ограничено.*

В случае, когда $a$ делит отрезок $[0, 1]$ на соизмеримые части, функция $\Phi_0$ периодична и ее нули разбиваются на конечное число серий, соответствующих нулям из основного прямоугольника. Соответственно спектр разбивается на конечное число серий, уходящих в бесконечность вдоль «своей» параболы [2].

**Литература**

1. *Ishkin Kh.K.* A localization criterion for the spectrum of the Sturm–Liouville operator on a curve // St. Petersburg Math. J. **28**:1 (2017), 37–63.

2. *Ishkin Kh.K., Davletova L.G.* Regularized Trace of a Sturm–Liouville Operator on a Curve with a regular Singularity on the Chord // Differential Equations, **56**:10 (2020), 1257–1269.

# «КВАНТОВАНИЕ» ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ КИМУРЫ H(2+3)

**@ В.А. Павленко**
*mail@pavlenco.ru*

УДК 517.925

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*24.

Предстоящий доклад будет посвящен построению совместных решений двух аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых гамильтонианами $H^{3+2}_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)(k = 1, 2)$ гамильтоновой системы $H^{3+2}$. Данные аналоги уравнений Шредингера представляют собой линейные эволюционные уравнения с временами $s_1$ и $s_2$, каждое из которых зависит от двух пространственных переменных.

*Ключевые слова*: гамильтоновы системы, уравнения Шредингера, уравнения Пенлеве, метод изомонодроных деформаций, «квантование».

**”Quantization” of the Kimura Hamiltonian system**

The upcoming report will be devoted to the construction of joint solutions of two analogs of time equations Schrodinger, defined by the Hamiltonians $H^{3+2}_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)(k = 1, 2)$ of the Hamiltonian system $H^{3+2}$. These analogs of the Schrodinger equations are linear evolutionary equations with times $s_1$ and $s_2$, each of which depends on two spatial variables.

*Keywords*: Hamiltonian systems, Schrodinger equations, Painlevet equations, isomonodromic deformation method, ”quantization”.

В настоящее время интерес covepеменных ученых привлекают нелинейные ОДУ допускающие применение ИДМ. В частности, решения иерархии гамильтоновых вырождений системы Гарнье, выписанной в известной статье Кимуры [1]. Некоторые из них изучены автором совместно с Сулеймановым Б.И. Некоторые рассмотрены другими учеными.

В предстоящем докладе речь пойдет о Гамильтоновой системе $H^{3+2}$. А именно будут представлены решения двух аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых гамильтонианами

$$H^{3+2}_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2), \qquad k = 1, 2$$

Павленко Виктор Александрович, к.ф.-м.н., Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Уфа, Россия); Viktor Pavlenko (Institute of Mathematics with Computing Centre, UFRC, RAS, Ufa, Russia)

в рациональном и полиномиальном видах. Эти решения являются явными в терминах решений линейной системы ОДУ, которая выписана в статье Накамуры, Каваками и Саккая [2].

## Литература

1. *Kimura* The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure// Annali di Matematica pura et applicata IV. V. 155. No. 1. P. 25 – 74.

2. *H. Kawakami, A. Nakamura, H. Sakai* Degeneration scheme of 4-dimensional Painleve-type equations // arXiv:1209.3836 (2012).

# ФОРМУЛА РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО СЛЕДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

**© Д.М. Поляков**

*DmitryPolyakow@mail.ru*

УДК 517.927

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*25.

Рассматривается несамосопряженный дифференциальный оператор четвертого порядка с негладкими периодическими коэффициентами и многоточечными краевыми условиями. Получена асимптотика собственных значений при высоких энергиях, а также выписана формула регуляризованного следа.

*Ключевые слова*: дифференциальный оператор четвертого порядка, многоточечные краевые условия, формула следа.

**Trace formula for fourth-order differential operator with multi-point boundary conditions**

We consider a non-self-adjoint fourth-order differential operator with nonsmooth periodic coefficients and multi-point Dirichlet boundary conditions. We obtain high energy eigenvalues asymptotics and formula for regularized trace.

*Keywords*: fourth-order differential operator, multi-point boundary conditions, trace formula.

Рассмотрим несамосопряженный оператор $H$, действующий в пространстве $L^2(0,3)$, который определяется дифференциальным выражением

$$Hy = y^{(4)} + (py')' + qy, \quad y(0) = y(1) = y(2) = y(3) = 0, \tag{1}$$

где вещественные и 1-периодические коэффициенты $p$ и $q$ принадлежат пространству $L^1(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

С физической точки зрения оператор $H$ описывает колебания периодической балки, зафиксированной в четырех точках. Хорошо известно, что $L$-оператором в паре Лакса для уравнения Кортевега-де Фриза (KdV) на окружности является оператор Шрёдингера с периодическим потенциалом. Динамика решений начальной задачи для уравнения KdV описывается семейством изоспектральных потенциалов для оператора

Поляков Дмитрий Михайлович, к.ф.-м.н., ЮМИ ВНЦ РАН (Владикавказ, Россия); Dmitry M. Polyakov (Southern Mathematical Institute of Vladikavkaz Scientific Center of RAS, Vladikavkaz, Russia)

Шрёдингера. Каждое семейство параметризуется спектром задачи Дирихле для оператора Шрёдингера (см. [1]).

Аналогичным образом, дифференциальный оператор четвертого порядка с периодическими коэффициентами является $L$-оператором в паре Лакса для следующей системы нелинейных уравнений

$$\begin{cases} p_t = 10p''' + 6pp' - 24q', \\ q_t = 3(p^{(5)} + pp''' + p'p'') - 8q''' - 6pq'. \end{cases}$$

При этом динамика решений указанной системы описывается "изоспектральным" семейством, которое параметризуется оператором $H$. Таким образом, исследование спектральных свойств оператора $H$ играет ключевую роль для поиска решения указанной задачи.

Перейдем к формулировке основных результатов настоящей работы. Стандартным образом для некоторой функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ определим коэффициенты Фурье

$$f_0 = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

$$\widehat{f}_{cn} = \int_0^1 f(x)\cos 2\pi nx\,dx, \quad \widehat{f}_{sn} = \int_0^1 f(x)\sin 2\pi nx\,dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Первый результат посвящен асимптотическим формулам для собственных значений оператора $H$, которые мы обозначим через $\mu_n$ и $\mu_{-n}^{\pm}$.

**Теорема 1.** *Пусть $p$, $q \in L^1(\mathbb{T})$ и число $n \in \mathbb{N}$ выбрано достаточно большим. Тогда собственные значения $\mu_n$ являются простыми и вещественными, собственные значения $\mu_{-n}^{\pm}$ имеют алгебраическую кратность 1 или 2 и для $n \to +\infty$ удовлетворяют следующей асимптотике*

$$\mu_n = (\pi n)^4 - (\pi n)^2(p_0 + \widehat{p}_{cn}) + \mathcal{O}(n),$$

$$\mu_{-n}^{\pm} = -4(\pi n)^4 + 2(\pi n)^2(p_0 - \widehat{p}_{cn} \pm |\widehat{p}_{sn}|) + \mathcal{O}(n).$$

*Если дополнительно предположить, что $p'''$, $q' \in L^1(\mathbb{T})$, тогда для собственных значений $\mu_n$ и $\mu_{-n}^{\pm}$ при $n \to +\infty$ имеют место следующие формулы*

$$\mu_n = (\pi n)^4 - (\pi n)^2(p_0 + \widehat{p}_{cn}) - \widehat{q}_{cn} + \frac{p_0^2 - \|p\|^2}{8} + q_0 + \mathcal{O}(n^{-2}),$$

$$\mu_{-n}^{\pm} = -4(\pi n)^4 + 2(\pi n)^2(p_0 - \widehat{p}_{cn} \pm |\widehat{p}_{sn}|) - \widehat{q}_{cn} \pm |\widehat{q}_{sn}| - \frac{p_0^2 + \|p\|^2}{8} + q_0 + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

Второй результат посвящен формуле регуляризованного следа оператора $H$. Рассмотрим оператор со сдвигом $H_t = H(p_t, q_t)$, заданный формулой (1), где $t \in \mathbb{T}$ и $p_t = p(\cdot + t)$, $q_t = q(\cdot + t)$. Через $\mu_n(t)$ и $\mu_{-n}^{\pm}(t)$ мы обозначим собственные значения оператора $H_t$. Кроме того, введем в рассмотрению следующую функцию

$$V = \frac{3}{2}q - \frac{5}{8}p'' - \frac{1}{4}p^2.$$

**Теорема 2.** *Пусть* $p''''$, $q'' \in L^1(\mathbb{T})$. *Тогда имеет место следующая формула следа*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(\mu_n(t) - \mu_n(0) + \mu_{-n}^{+}(t) - \mu_{-n}^{+}(0) + \mu_{-n}^{-}(t) - \mu_{-n}^{-}(0)\big) = V(0) - V(t),$$

*где ряд сходится абсолютно и равномерно на* $\mathbb{T}$.

## Литература

1. *Итс А.Р., Матвеев В.Б.* Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и $N$-солитонные решения уравнения Кортевега–де Фриса // ТМФ, **23**:1 (1975), 51-68.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРАМИ, ПРЕДСТАВИМЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ СТИЛТЬЕСА

**© Н.А. Раутиан**

*nadezhda.rautian@math.msu.ru*

УДК 517.518

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.26.*

Изучаются интегро-дифференциальные и уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Для широкого класса ядер интегральных операторов получены результаты о существовании, единственности и экспоненциальной устойчивости классических решений указанных уравнений. Эти результаты получены на основе подхода, связанного с применением теории полугрупп операторов.

*Ключевые слова*: интегро-дифференциальное уравнение, оператор-функция, спектр, вольтерров оператор.

**Researching of Volterra integro-differential equations with kernels represented by Stieltjes integrals**

The integro-differential and equations with unbounded operator coefficients in Hilbert space are studied. For a wide class of kernels of integral operators, the results on existence, uniqueness and exponential stability of classical solutions of these equations are obtained. These results are obtained on the basis of the approach associated with the operator semigroup theory.

*Keywords*: integro-differential equations, semigroups, Volterra operator, correct solvability, exponential stability.

Представлены результаты, базирующиеся на подходе, связанном с исследованием однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений, примененном к исследовнию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений. Приводится метод сведения исходной начальной задачи для модельного интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка. Доказывается существование сжимающей и экспоненциально устойчивой

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00288).

Раутиан Надежда Александровна, к.ф.-м.н., доцент, МГУ имени М.В.Ломоносова (Москва, Россия); Nadezhda Rautian (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

$C_0$-полугруппы при определенных предположениях о ядрах интегральных операторов. Для широкого класса ядер интегральных операторов установливаются результаты о существовании и единственности классических решений указанных уравнений, с оценками скорости их экспоненцильного убывания. Приводятся примеры применения полученных результатов для интегро-дифференциальных уравнений с экспоненциальными и дробно-экспоненциальными ядрами (функции Работнова) интегральных операторов (см. [1]–[4]).

### Литература


1. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.

2. *Раутиан Н.А.* Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями// Дифференциальные уравнения, **56**:9 (2019), 1226–1244.

3. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ и разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений// Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, **496** (2021), 16–20.

4. *Раутиан Н.А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса// Дифференциальные уравнения, **57**:9 (2021), 1255–1272.

# О СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С УСЛОВИЯМИ НА ПОДМНОГООБРАЗИЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

**@ А.Ю. Савин, Е.Н. Семенова**

*a.yu.savin@gmail.com, semenova54380@gmail.com*

УДК 517.946

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.27.*

Для эллиптических симметрических неотрицательных операторов на гладком замкнутом многообразии с областью определения, состоящей из функций, обращающихся в нуль на подмногообразии, описывается соответствующее расширение Фридрихса и даются условия его фредгольмовости.

*Ключевые слова*: задача Соболева, эллиптический оператор, самосопряжённое расширение, относительная эллиптическая теория.

**On spectral problems with conditions on submanifolds of arbitrary dimension**

We consider elliptic nonnegative symmetric operator on a closed smooth manifold on the space of functions vanishing on a submanifold. We describe the Friedrichs extension of this operator and obtain conditions, under which this extension is Fredholm.

*Keywords*: Sobolev problem, elliptic operator, self-adjoint extention, relative elliptic theory.

Пусть $A$ — эллиптический симметрический положительный оператор на гладком замкнутом римановом многообразии $M$ порядка $d > 0$. Оператор $A$ будем рассматривать как неограниченный оператор с областью определения

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in C^\infty(M) \mid i^*(u) = 0\},$$

где $X \subset M$ — гладкое замкнутое подмногообразие коразмерности $\nu \geq 1$, через $i : X \to M$ обозначено вложение, а $i^* : C^\infty(M) \to C^\infty(X)$ — оператор сужения функций на подмногообразие.

Через $i_* : C^\infty(X) \to \mathcal{D}'(M)$ обозначим кограничный оператор, сопоставляющий функции на подмногообразии её умножение на $\delta$-функцию по нормальным переменным (см. [1,2]).

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

Савин Антон Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, Российский университет дружбы народов (Москва, Россия); Anton Savin (Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia)

Семенова Екатерина Николаевна, студент, Российский университет дружбы народов (Москва, Россия); Ekaterina Semenova (Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia)

**Теорема 1.** *1. Сопряжённый оператор $A^*$ с областью определения $\mathcal{D}(A^*)$ равен*

$$\mathcal{D}(A^*) = H^d(M) + A^{-1}i_*H^{-d+\nu/2}(X), \text{ если } d > \nu/2,$$

$$A^*(u+v) = Au, \quad \text{где } u \in H^d(M),\ v \in A^{-1}i_*H^{-d/2+\nu/2}(X).$$

*2. Расширение Фридрихса $A_F$ с областью определения $\mathcal{D}(A_F)$ равно*

$$\mathcal{D}(A_F) = (H^d(M) + A^{-1}i_*H^{-d/2+\nu/2}(X)) \cap \ker i^*, \text{ если } d > \nu,$$

$$A_F = A^*|_{\mathcal{D}(A^*)}.$$

*При этом расширение Фридрихса $A_F$ является фредгольмовым оператором, и его ядро изоморфно ядру эллиптического псевдодифференциального оператора $i^*A^{-1}i_*$ порядка $-d+\nu$ на подмногообразии $X$.*

Спектральные задачи рассматриваемого вида возникают, например, при исследовании колебаний пластин с рёбрами жёсткости и при исследовании квантовых систем с потенциалами нулевого радиуса.

## Литература


1. *Стернин Б.Ю.* Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности // Труды ММО., **15** (1966), 346–382.

2. *Новиков С.П., Стернин Б.Ю.* Эллиптические операторы и подмногообразия // Доклады АН СССР, **171**:3 (1966), 525–528.

# ОЦЕНКИ СКОРОСТИ РАВНОСХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА

**@ А.М. Савчук, И.В. Садовничая**

*savchuk@cosmos.msu.ru, ivsad@yandex.ru*

УДК 517.984.5

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.28.*

Рассматривается одномерная система Дирака с суммируемым потенциалом $P$. Изучается вопрос скорости равномерной равносходимости спектральных разложений произвольной функции $f \in L_\infty$ в зависимости от гладкости потенциала. А именно, рассматривается случай $P \in B^\theta_{1,\infty}$ — пространство Бесова, где $\theta \in (0,1)$.

*Ключевые слова*: математика, дифференциальные операторы, спектральная теория, равносходимость.

**Estimates of the equiconvergence rate of spectral decompositions for a one-dimensional Dirac system.**

One-dimensional Dirac system with a summable potential $P$ is considered. For arbitrary $f \in L_\infty$ we study the problem of the rate of uniform equiconvergence of spectral decompositions. Namely, we consider the case $P \in B^\theta_{1,\infty}$ — the Besov space, with $\theta \in (0,1)$.

*Keywords*: mathematics, differential operators, spectral theory, equiconvergence.

Рассмотрим систему вида

$$\ell_P(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P\mathbf{y}, \quad \text{где}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

в пространстве

$$L_2[0,\pi] \oplus L_2[0,\pi] \ni \mathbf{y}.$$

Функции $p_j$, $j = 1,2,3,4$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0,\pi]$ и комплекснозначными. Оператор $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{P,U}$ имеет область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,U}) = \{\mathbf{y} \in AC[0,\pi] : \ell(\mathbf{y}) \in \mathbb{H}, U(\mathbf{y}) = 0\}, \quad \text{где}$$

$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix},$$

---

Савчук Артем Маркович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В.Ломоносова (Москва, Россия); Artem Savchuk (Moscow State University, Moscow, Russia)

Садовничая Инна Викторовна, д.ф.-м.н., зав. кафедрой, МГУ имени М.В.Ломоносова (Москва, Россия); Inna Sadovnichaya (Moscow State University, Moscow, Russia)

причем строки матрицы

$$\mathcal{U} := (C,\, D) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Обозначим через $J_{ij}$ определитель, составленный из $i$-го и $j$-го столбца матрицы $\mathcal{U}$. Краевое условие, определенное формой $U$, называется *регулярным* (по Биркгофу), если

$$J_{14} \cdot J_{23} \neq 0.$$

Оператор Дирака, порожденный регулярным краевым условием $U$ (т.е. оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,U})$), будем называть *регулярным.*

Хорошо известно (см.[1]), что такой оператор имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, расположенный в горизонтальной полосе. Обозначим через $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ систему собственных и присоединенных функций, а через $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — биортогональную систему. Спектральным разложением функции $\mathbf{f}$ по системе $\{\mathbf{y}_n\}$ будем называть предел сумм

$$S_m(\mathbf{f}; P) = \sum_{|n|\le m} (\mathbf{f}, \mathbf{w}_n)\mathbf{y}_n.$$

Пространство Бесова $B^{\theta}_{1,\,\infty}$, $\theta \in (0, 1)$, определим как пространство $L_1[0, \pi]$ функций, для которых

$$\int_0^{\pi} |f(x+h) - f(x)|\, dx \le Ch^{\theta}.$$

**Теорема 1.** *Пусть* $\mathbf{f} \in L_\infty[0,\pi]$, $P_1, P_2 \in B^{\theta}_{1,\infty}[0,\pi]$. *Тогда*

$$\|S_m(\mathbf{f}; P_1) - S_m(\mathbf{f}; P_2)\|_{L_\infty} \le C\|\mathbf{f}\|_{L_\infty} m^{-\theta}, \tag{1}$$

*где* $C = C(P_1, P_2, U)$.

### Литература

1. *Савчук А.М., Садовничая И.В.* Спектральный анализ одномерной системы Дирака с суммируемым потенциалом и оператора Штурма—Лиувилля с коэффициентами-распределениями // Современная математика. Фундаментальные направления. — т. 66, No 3, 2020. — 373-530.

# STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRA AND DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF SIX ELECTRON SYSTEMS IN THE HUBBARD MODEL. FIRST QUINTET STATE

**@ S.M. Tashpulatov**

*sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru*

УДК 517.984

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*29.

Рассматривается шестиэлектронная система в модели Хаббарда. Описана структура существенного спектра и дискретный спектр в этой модели в случае первого квинтетного состояния. Доказывается, что, в одномерном случае, существенный спектр системы есть объединение семьи отрезков, а дискретный спектр системы состоит из не более одного собственного значения.

*Ключевые слова*: модель Хаббарда, шестиэлектронная система, квинтетное состояние, существенный спектр, дискретный спектр.

We consider of the energy operator of six electron systems in the Hubbard model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system in the first quintet state. We proved, that the if $\nu = 1$, then the essential spectra of the operator is consists of the union of seven segments, and discrete spectrum of the operator is consists of no more then one eigenvalue.

*Keywords*: Hubbard model,six electron systems, quintet state, essential spectra, discrete spectrum.

The Hubbard model model is currently one of the most extensively studied multielectron models of metals [1,2]. But little is known about exact results for the spectrum and wave functions of the crystal described by the Hubbard model, and obtaining the corresponding statements is great interest problem.

Consider the energy operator $H$ of six-electron systems in the Hubbard model, where

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}.$$

Here $A$ is the electron energy at a lattice site, $B$ is the is the transfer integral between neighboring sites (we assume that $B > 0$ for convenience),

Sa'dulla Tashpulatov (Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Institute of Nuclear Physics of Academy of Sciences of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

$\tau = \pm e_j, j = 1, 2, ..., \nu$, where $e_j$ are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors, $U$ is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, $\gamma$ is the spin index, $\gamma =\uparrow$ or $\gamma =\downarrow$, $\uparrow$ and $\downarrow$ denote the spin values $\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$.

The first quintet state corresponds six-electron bound states (or antibound states) to the basis functions: ${}^1q^2_{p,n,r,t,l,k\in Z^\nu} = a^+_{p,\downarrow}a^+_{n,\uparrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\uparrow}a^+_{l,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}\varphi_0$. The subspace ${}^1\widetilde{\mathcal{H}}^2_q$, corresponding to the first quintet state is the set of all vectors of the form ${}^1\psi^2_q = \sum_{p,n,r,t,l,k\in Z^\nu} f(p,n,r,t,l,k){}^1q^2_{p,n,r,t,l,k}, f \in l^{as}_2$, where $l^{as}_2$ is the subspace of antisymmetric functions in $l_2((Z^\nu)^6)$. In this case, the Hamiltonian $H$ acts in the antisymmetric Foc'k space $\widetilde{\mathcal{H}}_{as}$. Let $\varphi_0$ be the vacuum vector in the antisymmetrical Foc'k space $\widetilde{\mathcal{H}}_{as}$. Let ${}^1\widetilde{H}^2_q$ be the restriction $H$ to the subspace ${}^1\widetilde{\mathcal{H}}^2_q$. The first quintet state corresponds the free motions of six-electrons in the lattice and their interactions.

**Theorem 1.** *The subspace ${}^1\mathcal{H}^q_2$ is invariant under the operator $H$, and the operator ${}^1H^q_2$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self-adjoint operator ${}^1\overline{H}^q_2$ acting in the space $l^{as}_2$ as*

$${}^1\overline{H}^{q}_2{}^1\psi^q_2 = 6Af(p,n,r,t,l,k)+B\sum_\tau[f(p+\tau,n,r,t,l,k)+f(p,n+\tau,r,t,l,k)+$$
$$+f(p,n,r+\tau,t,l,k)+f(p,n,r,t+\tau,l,k)+f(p,n,r,t,l+\tau,k)+$$
$$+f(p,n,r,t,l,k+\tau)]+U[\delta_{p,n}+\delta_{p,r}+\delta_{p,t}+\delta_{p,l}+\delta_{p,k}]f(p,n,r,t,l,k). \quad (1)$$

*The operator ${}^1H^q_2$ acts on a vector ${}^1\psi^q_2 \in^1 \mathcal{H}^q_2$ as*

$${}^1H^q_2{}^1\psi^q_2 = \sum_{p,n,r,t,l,k\in Z^\nu}({}^1\overline{H}^q_2 f)(p,n,r,t,l,k){}^1\psi^q_2. \quad (2)$$

We set ${}^1\widetilde{H}^q_2 = \mathcal{F}\,{}^1\overline{H}^q_2\mathcal{F}^{-1}$. In the quasimomentum representation, the operator ${}^1\widetilde{H}^q_2$ acts in the Hilbert space $L^{as}_2((T^\nu)^6)$ as

$${}^1\widetilde{H}^{q}_2{}^1\psi^q_2 =$$
$$\{6A+2B\sum_{i=1}^{\nu}[cos\lambda_i+cos\mu_i+cos\gamma_i+cos\theta_i+cos\eta_i+cos\xi_i]\}f(\lambda,\mu,\gamma,\theta,\eta,\xi)+$$
$$+U\int_{T^\nu}[f(s,\lambda+\mu-s,\gamma,\theta,\eta,\xi)+f(s,\mu,\lambda+\gamma-s,\theta,\eta,\xi)+f(s,\mu,\gamma,\lambda+\theta-s,\eta,\xi)+$$
$$+f(s,\mu,\gamma,\theta,\lambda+\eta-s,\xi)+f(s,\mu,\gamma,\theta,\eta,\lambda+\xi-s)]ds, \quad (3)$$

where $L_2^{as}((T^\nu)^6)$ is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^6)$.

**Theorem 2.** *Let $\nu = 1$, and $U < 0$. Then the essential spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_2^q$ is consists of the union of seven segments: $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}_2^q) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+z_3, b+d+z_3] \cup [a+e+z_2, b+f+z_2] \cup [a+z_2+z_3, b+z_2+z_3] \cup [c+e+z_1, d+f+z_1] \cup [c+z_1+z_3, d+z_1+z_3] \cup [e+z_1+z_2, f+z_1+z_2]$, and the discrete spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}_2^q$ is consists of no more one eigenvalue: $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}_2^q) = \{z_1+z_2+z_3\}$, or $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}_2^q) = \emptyset$, Here and hereafter $a = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $b = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_1}{2}$, $c = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}$, $d = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_2}{2}$, $e = 2A - 4B\cos\frac{\Lambda_3}{2}$, $f = 2A + 4B\cos\frac{\Lambda_3}{2}$, $z_1 = 2A - 2\sqrt{U^2 + 4B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$, $z_2 = 2A + 2\sqrt{U^2 + 4B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}$, and $z_3 = 2A - \sqrt{U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_3}{2}}$. Here $\Lambda_1 = \lambda + \mu$, $\Lambda_2 = \gamma + \theta$, $\Lambda_3 = \eta + \xi$;*

**Theorem 3.** Let $\nu = 1$, and $U > 0$. Then the essential spectrum of the operator ${}^1\widetilde{H}_2^q$ is consists of the union of seven segments: $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}_2^q) = [a+c+e, b+d+f] \cup [a+c+\widetilde{z}_3, b+d+\widetilde{z}_3] \cup [a+e+\widetilde{z}_2, b+f+\widetilde{z}_2] \cup [a+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3, b+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3] \cup [c+e+\widetilde{z}_1, d+f+\widetilde{z}_1] \cup [c+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3, d+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_3] \cup [e+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2, f+\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2]$, and the discrete spectrum of operator ${}^1\widetilde{H}_2^q$ is consists of no more one eigenvalue: $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}_2^q) = \{\widetilde{z}_1+\widetilde{z}_2+\widetilde{z}_3\}$, or $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}_2^q) = \emptyset$. Here $\widetilde{z}_1 = 2A + 2\sqrt{U^2 + 4B^2\cos^2\frac{\Lambda_1}{2}}$, $\widetilde{z}_2 = 2A - 2\sqrt{U^2 + 4B^2\cos^2\frac{\Lambda_2}{2}}$, and $\widetilde{z}_3 = 2A + \sqrt{U^2 + 16B^2\cos^2\frac{\Lambda_3}{2}}$.

## Литература


1. *Hubbard J.* Electron Correlations in Narrow Energy Band // Proc. Roy. Soc. A. **276**:1365 (1963), 238– 257.

2. *Karpenko B.V., Dyakin V.V., and Budrina G.L.* Two electrons in the Hubbard Model.// Phys. Met. Metallogr. **61** (1986), 702-706.

# STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRA AND DISCRETE SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF FOUR ELECTRON SYSTEMS IN THE IMPURITY HUBBARD MODEL. THIRD TRIPLET STATE

**@ S.M. Tashpulatov and R.T. Parmanova**

*sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru, togaymurodota@gmail.com*

УДК 517.984

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*30.

Рассматривается четырехэлектронная система в примесной модели Хаббарда. Описана структура существенного спектра и дискретный спектр в этой модели в случае третьего тринлетного состояния. Доказывается, что, в одномерном случае, существенный спектр системы есть объединение не более чем шестнадцать отрезков, а дискретный спектр системы состоит из не более одинадцать собственного значение.

*Ключевые слова*: модель Хаббарда, примесной модель Хаббарда, четырехэлектронная система, триплетное состояние, существенный спектр, дискретный спектр.

We consider of the energy operator of four electron systems in the Impurity Hubbard model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system in the third triplet state. We proved, that the if $\nu = 1$, then the essential spectra of the operator is consists of the union of no mote than sixteen segments, and discrete spectrum of the operator is consists of no more then eleven eigenvalues.

*Keywords*: Hubbard model, Impurity Hubbard model, four electron systems, triplet state, essential spectra, discrete spectrum.

The Hubbard model and impurity Hubbard model is currently one of the most extensively studied multielectron models of metals [1,2]. But little is known about exact results for the spectrum and wave functions of the crystal described by the Hubbard model, and obtaining the corresponding statements is great interest problem.

We consider the energy operator $H$ of four-electron systems in the Impurity Hubbard model, where $H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_m a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + (A_0 - A)\sum_\gamma a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma} + (B_0 - B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0 - U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}$. Here $A$ $(A_0)$ is the electron energy at

---

Sa'dulla Tashpulatov (Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Institute of Nuclear Physics of Academy of Sciences of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

Ruxsat Parmanova (trainee researcher,Institute of Nuclear Physics of Academy of Sciences of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

a regular (impurity) lattice site, $B$ $(B_0)$ is the transfer integral between (between electron and impurities) neighboring sites (we assume that $B > 0$ $(B_0 > 0)$ for convenience), $\tau = \pm e_j$, $j = 1, 2, ..., \nu$, where $e_j$ are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors, $U$ $(U_0)$ is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons in the regular (impurity) sites, $\gamma$ is the spin index, $\gamma = \uparrow$ or $\gamma = \downarrow$, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$.

In the four electron systems has a quintet state, and two type singlet state, and three type triplet states. The third triplet state corresponds to the free motion of four electrons over the lattice and their interactions with the basic functions: ${}^3t^1_{p,q,r,t\in Z^\nu} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\uparrow}\varphi_0$. The subspace ${}^3\widetilde{\mathcal{H}}^1_t$, corresponding to the third triplet state is the set of all vectors of the form ${}^3\psi^1_t = \sum_{p,q,r,t\in Z^\nu} f(p,q,r,t){}^3t^1_{p,q,r,t}$, $f \in l^{as}_2$, where $l^{as}_2$ is the subspace of antisymmetric functions in $l_2((Z^\nu)^4)$. In this case, the Hamiltonian $H$ acts in the antisymmetric Foc'k space $\widetilde{\mathcal{H}}_{as}$. Let $\varphi_0$ be the vacuum vector in the antisymmetrical Foc'k space $\widetilde{\mathcal{H}}_{as}$. Let ${}^3\widetilde{H}^1_t$ be the restriction $H$ to the subspace ${}^3\widetilde{\mathcal{H}}^1_t$.

**Theorem 1.** *The subspace ${}^3\mathcal{H}^t_1$ is invariant under the operator $H$, and the operator ${}^3H^t_1$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self-adjoint operator ${}^3\overline{H}^t_1$ acting in the space $l^{as}_2$.*

We set ${}^3\widetilde{H}^t_1 = \mathcal{F}\,{}^3\overline{H}^t_1\mathcal{F}^{-1}$. In the quasimomentum representation, the operator ${}^3\widetilde{H}^t_1$ acts in the Hilbert space $L^{as}_2((T^\nu)^4)$.

**Theorem 2.** *Let $\nu = 1$, and $\varepsilon_2 = -B$, and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$, and $\varepsilon_1 > 2B$. Then the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}^t_1$ is consists of the union of $N_1$ segments, where $4 \le N_1 \le 8$ : $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}^t_1) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[3A-6B+z, 3A+6B+z]\cup[2A-4B+2z, 2A+4B+2z]\cup[A-2B+3z, A+2B+3z]\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3]\cup[A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4]$, and the discrete spectrum of operator ${}^3\widetilde{H}^t_1$ is consists of no more three eigenvalues: $\sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}^t_1) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4\}$, where $z = A+\varepsilon_1$, and $z_3$ and $z_4$ are the additional eigenvalues of operator ${}^3\widetilde{H}^t_1$.*

**Theorem 3.** *If $\nu = 1$, and $-2B < \varepsilon_2 < 0$, then the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}^t_1$ is consists of the union of $N_1$ segments, where $1 \le N_1 \le 3$ : $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}^t_1) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]$, and the discrete spectrum of operator ${}^3\widetilde{H}^t_1$ is empty set.*

**Theorem 4.** *Let $\nu = 1$, and $\varepsilon_2 > 0$, and $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$, then the essential spectrum of the operator ${}^3\widetilde{H}^t_1$ is consists of the union of the $N_1$ segment, where $10 \le N_1 \le 16$ : $\sigma_{ess}({}^3\widetilde{H}^t_1) = [4A-8B, 4A+8B]\cup$*

$[3A-6B+z_1, 3A-6B+z_1] \cup [3A-6B+z_2, 3A-6B+z_2] \cup [2A-4B+2z_1, 2A+4B+2z_1] \cup [2A-4B+2z_2, 2A+4B+2z_2] \cup [2A-4B+z_1+z_2, 2A+4B+z_1+z_2] \cup [A-2B+3z_1, A+2B+3z_1] \cup [A-2B+3z_2, A+2B+3z_2] \cup [A-2B+2z_1+z_2, A+2B+2z_1+z_2] \cup [A-2B+z_1+2z_2, A+2B+z_1+2z_2] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z_1+z_3, A+2B+z_1+z_3] \cup [A-2B+z_2+z_3, A+2B+z_2+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z_1+z_4, A+2B+z_1+z_4] \cup [A-2B+z_2+z_4, A+2B+z_2+z_4]$ *and discrete spectrum of the operator* ${}^3\widetilde{H}_1^t$ *is consists of* $N_2$ *eigenvalues, where* $5 \leq N_2 \leq 11 : \sigma_{disc}({}^3\widetilde{H}_1^t) = \{4z_1, 4z_2, 3z_1+z_2, z_1+3z_2, 2z_1+2z_2, 2z_1+z_3, z_1+z_2+z_3, 2z_2+z_3, 2z_1+z_4, z_1+z_2+z_4, 2z_2+z_4\}$.

## Литература


1. *Hubbard J.* Electron Correlations in Narrow Energy Band // Proc. Roy. Soc. A. **276**:1365 (1963), 238– 257.

2. *Karpenko B.V., Dyakin V.V., and Budrina G.L.* Two electrons in the Hubbard Model.// Phys. Met. Metallogr. **61** (1986), 702-706.

# ФОРМУЛЫ СЛЕДОВ ОТНОСИТЕЛЬНО КОМПАКТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ

**@ З.Ю. Фазуллин**
*fazullinzu@mail.ru*

УДК 517.984.4, 517.547

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*31.

В работе приводится необходимое и достаточное условие равенства нулю суммы регуляризованного следа со скобками с вычетом первой поправки теории возмущений.

*Ключевые слова*: дифференциальные операторы, спектр, формула следов.

**Trace formulas for compact perturbations of operators with discrete spectrum.**

We give the necessary and sufficient condition of vanishing of the regularized trace sum with first correction of the perturbation theory to be subtracted and with groupings.

*Keywords*: differential operators, spectrum, trace formula.

Доклад посвящен краткому обзору и современному состоянию вышеназванной темы. А также будет обсужден метод доказательства необходимого и достаточного условия равенства нулю регуляризованной суммы с вычетом первой поправки теории возмущений и его связь с тауберовой теоремой типа Келдыша.

Фазуллин Зиганур Юсупович, доктор физико-математических наук, профессор БашГУ (Уфа, Россия); Ziganur Fazullin, doctor of physical and mathematical sciences, professor (Bashkir State University, Ufa, Russia)

# SPECTRAL PROPERTIES OF ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATORS GENERATED BY FIRST ORDER SYSTEMS

**@ A.A. Shkalikov**

*avabanin@sfedu.ru*

УДК 517.977

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*32.

Мы рассматриваем спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов, порожденных системами первого порядка.

*Ключевые слова*: спектральные свойства, дифференциальные операторы.

**Spectral properties of ordinary differential operators generated by first order systems**

We consider spectral properties of ordinary differential operators generated by first order systems.

*Keywords*: spectral properties, differential operators.

We consider operators generated by differential expressions of the form

$$l(\mathbf{y}) = \mathbf{B}(x)\frac{d\mathbf{y}}{dx} + \mathbf{A}(x)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, \ \ x \in [a, b]$$

and boundary conditions

$$\mathbf{U}_0\mathbf{y}(a) + \mathbf{U}_1\mathbf{y}(b) = 0.$$

Here $\mathbf{U}_0$ and $\mathbf{U}_1$ are $n \times n$ matrices, $\mathbf{B} = \mathrm{diag}\{b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x)\}$, and it is assumed that $b_j^{-1}$ and the entries of the $n \times n$ matrix-function $\mathbf{A}$ are summable.

The results which we shall present in the talk depend essentially on conditions for the functions $b_j(x)$. The main results will be presented for the case when all the functions $b_j(x)$ are real and $b_j(x) \neq b_k(x) \neq 0$ for all $x \in [a, b]$ and $k \neq j$. This case corresponds to hyperbolic systems.

We modify the the concept of regularity (it was originated in the works of G.Birkhoff, J.Tamarkin, and R.Langer) and prove that the eigen and associated functions of a regular operator form an unconditional basis in $L_2(a, b)$. Some other properties of regular operators will also be discussed.

This investigation is supported by Russian Foundation of Fundamental Research, grant No 19-01-00240.

Shkalikov A.A., Lomonosov Moscow State University
Department of mathematics and mechanics

# ФОРМУЛА СЛЕДА ДВУМЕРНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В ПОЛОСЕ.

**@ И.Г. Яндыбаева**
*nuga-irina@yandex.ru*

УДК 517.984.4

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*33.

Данная работа посвящена вычислению формулы регуляризованного следа локальноговозмущения двумерного гармонического осциллятора в полосе.

*Ключевые слова*: дифференциальные операторы, спектр, формула следов.

**Trace formula of a two-dimensional harmonic oscillator in a strip**

This work is devoted to the calculation of the formula for the regularized trace of local perturbation of a two-dimensional harmonic oscillator in a strip.

*Keywords*: differential operators, spectrum, trace formula.

Рассмотрим оператор $L_0$ в пространстве $L_2(\Pi)$, где

$$\Pi = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in [0, \pi]\},$$

порожденный дифференциальным выражением

$$lu = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + x_1^2 u$$

и граничными условиями Дирихле:

$$u \in L_2(\Pi), \quad u(x_1, 0) = u(x_1, \pi) = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

То есть оператор $L_0$ имеет область определения

$$D(L_0) = \left\{u(x_1, x_2) : u \in W_2^2(\Pi), \quad u(x_1, 0) = u(x_1, \pi) = 0\right\}.$$

Рассмотрим оператор

$$L = L_0 + V,$$

где $V$ оператор умножения на ограниченную измеримую финитную вещественнозначную функцию $V(x)$, $x \in \Pi$.

Яндыбаева Ирина Гамировна, БашГУ (Уфа, Россия); Irina Yandybaeva (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Пусть $\lambda_n$ - собственные числа оператора $L_0$, $\mu_s^{(n)}$, $s = \overline{1, \nu_n}$ – собственные числа оператора $L$, где $\nu_n$ - кратность собственных чисел $\lambda_n = n$, , $n \in \mathbb{N}\setminus\{1;3\}$. Пусть $P_n$ - проектор на собственное подпространство, соответствующее $\lambda_n = n$, , $n \in \mathbb{N}\setminus\{1;3\}$.

Справедливо равенство [1]

$$\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{1;3\}}^{n}\left[\sum_{s=1}^{\nu_k}\left(\lambda_k - \mu_s^{(k)}\right) + SpP_kV\right] = \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{1;3\}}^{n}\alpha_k + \beta_n$$

где

$$\alpha_k = \sum_{m\neq k}\frac{SpP_mVP_kV}{\lambda_m - \lambda_k},$$

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_n} zSp\left(\left(R_0(z)V\right)^3 R(z)\right)dz,$$

$$R_0(z) = (L_0 - z)^{-1}, \quad R(z) = (L - z)^{-1}.$$

Справедливы [2]

**Теорема 1.** *Пусть* $V(x) \in C_0^2(\Pi)$. *Тогда при* $k >> 1$ *спаведливо асимптотическое равенство*

$$\alpha_k = O\left(\frac{1}{k^\gamma}\right), \quad \gamma > 1$$

*то есть, в частности, последовательность* $\alpha_k$ *абсолютно суммируема.*

**Теорема 2.** *Пусть* $V(x) \in C_0^2(\Pi)$, *тогда*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus\{1;3\}}^{n}\left[\sum_{s=1}^{\nu_k}\left(\lambda_k - \mu_s^{(k)}\right) + SpP_kV\right] = \frac{1}{12\pi}\int\limits_{\Pi} V^2(x)dx.$$

## Литература


1. *Садовничий В.А., Фазуллин З.Ю., Нугаева И.Г.* Спектр и формула следа для ограниченных возмущений дифференциальных операторов // ДАН РАН, **483**:1 (2018), 19-21.

2. *Фазуллин З.Ю., Нугаева И.Г.* Спектр и формула следов финитного возмущения двумерного гармонического осциллятора в полосе // Дифф. ур., **55**:5 (2019), 691-701.

# МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

# «УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2021»

## СЕКЦИЯ «КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

г. Уфа, 6 - 9 октября 2021 г.

# ЛИНЕЙНО СВЯЗНЫЕ КОМПОНЕНТЫ МНОЖЕСТВА (ВЕСОВЫХ) КОМПОЗИЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА

**@ А.В. Абанин**

*avabanin@sfedu.ru*

УДК 517.53, 517.9

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*34.

Дается описание линейно связных компонент множества композиционных операторов в пространствах Бергмана. Установлено, что одной из таких компонент является множество компактных композиционных операторов. С другой стороны, показано, что множество компактных композиционных операторов линейно связно, но является лишь частью соответствующей компоненты.

*Ключевые слова*: пространства Бергмана, композиционные операторы.

**Path components of the set of (weighted) composition operators on Bergman spaces**

We give a description of the set of linearly connected components of the set of composition operators on Bergman spaces. It is established that one of such a component is the set of all compact composition operators. On the other hand, it is shown that the set of all weighted composition operators is linearly connected but it is only a part of the corresponding component.

*Keywords*: Bergman spaces, composition operators.

В докладе будут представлены результаты об описании линейно связных компонент множества (весовых) композиционных операторов, действующих на пространствах Бергмана

$$A^p_\alpha := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_{p,\alpha} := \left( \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1-|z|^2)^\alpha d\lambda(z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

где $\mathbb{D}$ — единичный круг, $p \in (0,\infty)$ и $\alpha \in (-1,\infty)$. Через $\mathcal{S}(\mathbb{D})$ обозначаем множество всех голоморфных в $\mathbb{D}$ функций $\varphi$ с $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Каждая функция $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$ порождает композиционный оператор $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$,

Абанин Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, ЮМИ ВНЦ РАН (Владикавказ, Россия) и ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия); Alexander Abanin (Southern Mathematical Institute VNC RAS, Vladikavkaz, Russia andSouthern Federal University, Rostov-na-Donu, Russia)

действующий из $H(\mathbb{D})$ в $H(\mathbb{D})$. Говорят, что два композиционных оператора $C_\varphi$ и $C_\phi$ сильно линейно связаны в пространстве $\mathcal{C}(A^p_\alpha)$ всех композиционных операторов на $A^p_\alpha$, если отрезок $C_{t\varphi+(1-t)\phi}, 0 \le t \le 1$, является непрерывным путем в $\mathcal{C}(A^p_\alpha)$. Установлены следующие основные результаты, полученные автором совместно с Ле Хай Хоем и Фам Тронг Тиеном.

**Теорема 1.** *Пусть* $\varphi, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$. *Композиционные операторы* $C_\varphi$ *и* $C_\phi$ *сильно линейно связаны в* $\mathcal{C}(A^p_\alpha)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\limsup_{\rho(\varphi(z),\phi(z))\to 1} \left( \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} + \frac{1-|z|^2}{1-|\phi(z)|^2} \right) = 0,$$

*где* $\rho(z,\zeta) := \left|\frac{z-\zeta}{1-\bar{z}\zeta}\right|$ — *псевдогиперболическое расстояние в* $\mathbb{D}$.

С помощью этого критерия установлена

**Теорема 2.** *Множество всех компактных композиционных операторов на* $A^p_\alpha$ *сильно линейно связно и образует компоненту в* $\mathcal{C}(A^p_\alpha)$.

В то же время для множества $\mathcal{C}_w(A^p_\alpha)$ всех весовых композиционных операторов $C_{\psi,\varphi} : f \mapsto \psi \cdot (f \circ \varphi)$, $\psi \in H(\mathbb{D}), \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{D})$, оказалось, что аналог теоремы 2 верен лишь частично. Именно, справедлива

**Теорема 3.** *Множество всех компактных весовых композиционных операторов на* $A^p_\alpha$ *линейно связно, но является лишь частью компоненты в* $\mathcal{C}_w(A^p_\alpha)$.

Отметим, что ранее подобные результаты были известны лишь для весовых пространств с равномерной нормой или в гильбертовом случае (см. [1]–[4]).

## Литература


1. *MacCluer B.D.* Components in the space of composition operators // Integr. Equ. Oper. Theory, **12**:5 (1989), 725-738.

2. *MacCluer B.D., Ohno S., Zhao R.* Topological structure of the space of composition operators on $H^\infty$ // Integr. Equ. Oper. Theory, **40**:4 (2001), 481-494.

3. *Dai J.* Topological structure of the set of composition operators on the weighted Bergman space // J. Math. Anal. Appl., **473**:1 (2019), 444-467.

4. *Abanin A.V., Khoi L.H., Tien P.T.* Topological structure in the space of (weighted) composition operators on weighted Banach spaces of holomorphic functions // Bull. Sci. Math., **158** (2020), article 102806.

# ОПЕРАТОР ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

**@ Н.Ф. Абузярова**

*abnatf@gmail.com*

УДК 517.518

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.35.*

Рассматривается оператор дифференцирования в пространстве ультрадифференцируемых функций (УДФ) нормального типа на конечном или бесконечном интервале вещественной прямой и инвариантные относительно дифференцирования подпространства в $\mathcal{U}(a;b)$. Предложен вариант спектрального синтеза, учитывающий наличие в $\mathcal{U}(a;b)$ нетривиальных инвариантных относительно дифференцирования подпространств с пустым спектром.

*Ключевые слова*: ультрадифференцируемые функции, инвариантные подпространства, спектральный синтез, преобразование Фурье-Лапласа.

**The differentiation operator in spaces of ultradifferentiable functions**

We consider the differentiation operator in the space of ultradifferentiable function (UDF) of normal type $\mathcal{U}(a;b)$ deifned on a finite or infinite interval of the real line and study differentiation-invariant subsapces in $\mathcal{U}(a;b)$. We propose a version of spectral synthesis which takes into account the presence of non-trivial differentiation-invariant subspaces with void spectrum.

*Keywords*: ultradifferentiable functions, invariant subspaces, spectral synthesis, Fourier-Laplace transform.

Пусть $\omega : [0;\infty) \to [0;\infty)$ — непрерывная, неубывающая функция, такая, что $\varphi(e^t) := \omega(e^t)$ выпукла на $[0;\infty)$ и $\omega(x) = o(x)$, $\ln x = o(\omega(x))$, $x \to \infty$,

$$\forall \sigma > 1 \ \exists C > 0 : \ \omega(x+y) \le \sigma(\omega(x) + \omega(y)) + C, \ \forall x, y \ge 0,$$

$$\int_1^\infty \frac{\omega(x)}{x^2} \mathrm{d}x < \infty.$$

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZWU-2020-0027).

Абузярова Наталья Фаирбаховна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Natalia Abuzyarova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Функцию $\omega$ с указанными свойствами называют *неквазианалитическим весом.*

Обозначим $[-c_k; c_k]$ $k = 1, 2, \ldots$, возрастающую последовательность отрезков, исчерпывающую интервал $(-a; a)$ (конечный или бесконечный). Для $f \in C^\infty(-a; a)$, $q \in (0; 1)$, $k = 1, 2, \ldots$, положим

$$\|f\|_{\omega,q,k} = \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{|x|\le c_k} \frac{|f^{(j)}(x)|}{e^{q\varphi^*(j/q)}}$$

и определим *пространство ультрадифференцируемых функций (УДФ) нормального типа на интервале* $(-a; a)$ :

$$\mathcal{U}(-a; a) = \{f \in C^\infty(-a; a) : \ \|f\|_{\omega,q,k} < \infty \forall q \in (0; 1), \ \forall k = 1, 2, \ldots\}.$$

С топологией, задаваемой набором преднорм $\|\cdot\|_{\omega,q,k}$, пространство $\mathcal{U}(-a; a)$ становится локально-выпуклым пространством типа $(M^*)$.

Пусть $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ — оператор дифференцирования, действующий в пространстве $\mathcal{U}(-a; a)$, $W \subset \mathcal{U}(-a; a)$ — замкнутое подпространство, инвариантное относительно дифференцирования: $D(W) \subset W$ — короче, $D$-*инвариантное* подпространство.

**Теорема 1.** 1) *Спектр оператора* $D : W \to W$ *либо дискретен (в частности, пуст), либо совпадает со всей комплексной плоскостью.*
2) *Каждое* $D$-*инвариантное подпространство* $W$ *содержит резидуальное подпространство (возможно, тривиальное)*

$$W_{I_W} = \{f \in \mathcal{U}(-a; a) : \ f = 0 \quad \text{на} \quad I_W\},$$

*где* $I_W$ *— наименьший возможный для* $W$ *относительно замкнутый в* $(-a; a)$ *промежуток (называемый* резидуальным промежутком *подпространства* $W$*).*

Утверждения 1) и 2) теоремы 1 являются аналогами теорем 2.1 и 4.1 из работы [1], в которой было начато исследование задач спектрального анализа и синтеза для оператора $D$, действующего в пространстве Шварца $C^\infty(a; b)$.

Предположим теперь, что *спектр* $D$-*инвариантного подпространства* $W \subset \mathcal{U}(-a; a)$ (определяемый как спектр оператора $D : W \to W$) дискретен и равен $(-\mathrm{i}\Lambda)$, где $\Lambda \subset \mathbb{C}$ — конечная или счетная последовательность (возможно, пустая). Обозначим $\operatorname{Exp}\Lambda$ соответствующую систему экспоненциальных одночленов, $\rho(\Lambda)$ — радиус полноты системы $\operatorname{Exp}\Lambda$, $|I|$ — длина промежутка $I \subset \mathbb{R}$.

**Теорема 2.** *Пусть* $W$ *—* $D$*-инвариантное подпространство со спектром* $(-\mathrm{i}\Lambda)$ *и резидуальным промежутком* $I_W$*.*

1) *Если* $2\rho(\Lambda) < |I_W|$, *то*

$$W = \overline{W_{I_W} + \operatorname{span} \operatorname{Exp} \Lambda} \tag{1}$$

*($W$ допускает спектральный синтез в слабом смысле).*
2) *Если* $2\rho(\Lambda) > |I_W|$, *то* $W = \mathfrak{U}(-a; a)$.
3) *Среди* $D$*-инвариантных подпространств* $W$*, для которых* $2\rho(\Lambda) = |I_W|$*, имеются как подпространства, допускающие слабый спектральный синтез* (1), *так и не допускающие его.*

Теорема 2 имеет установленные ранее аналоги для слабого спектрального синтеза в пространстве Шварца $C^\infty(a; b)$ (см. [2], [3]).

Методы и подходы, применяемые для доказательства теорем 1 и 2, пригодны для изучения аналогичных вопросов в более общих пространствах УДФ, введенных в монографии А.В. Абанина [4].

### Литература


1. *Aleman A., Korenblum B.* Derivation-invariant subspaces of $C^\infty$ // Comp. Meth. and Function Theory, **8**:2 (2008), 493-512.

2. *Абузярова Н.Ф.* Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций // Доклады РАН, **457**:5 (2014), 510-513.

3. *Aleman A., Baranov A., Belov Yu.* Subspaces of $C^\infty$ invariant under the differentiation // J. of Func. Anal., **268** (2015), 2421-2439.

4. *Абанин А.В.* Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения // Москва: Наука, 2007.

# КРИТЕРИЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

**@ А.М. Абылаева, М. Алдай**

*abylayeva_b@mail.ru, saiajan@yandex.kz*

УДК 517.5

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*36.

Краткая аннотация. В работе рассматриваются вопросы ограниченности и компактности для одного класса интегральных операторов с логарифмической особенностью. В последние годы такие вопросы интенсивно исследуются в пространствах Лебега, Соболева и Морри. В работе получены критерии ограниченности и компактности интегральных операторов с логарифмической особенностью и соответствующие весовые оценки.

*Ключевые слова*: весовые пространства Лебега, интегральный оператор, весовая функция, ограниченность, компактность.

**Boundedness criterion for an integral operator with a logarithmic singularity**

The paper deals with the issues of boundedness and compactness for one class of integral operators with a logarithmic singularity. In recent years, such questions have been intensively investigated in Lebesgue, Sobolev, and Morrey spaces. In this paper, criteria for the boundedness and compactness of integral operators with a logarithmic singularity and the corresponding weighted estimates are obtained.

*Keywords*: weighted Lebesgue spaces, integral operator, weight function, boundedness, compactness.

Введение. Пусть $0 < p, q < \infty$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ и $v(t)$, $w(t) \subset L^{loc}_{(0,\infty)}$ – весовые функции, где $v(t) \geq 0$, $w(t) \geq 0$, $\forall t \in I$, $I = (0, \infty)$.

В данной работе изучается ограниченность и компактность оператора

$$K_\gamma f(x) = \int\limits_0^x W^{\gamma-1}(s) ln \frac{W(x)}{W(x) - W(s)} f(s) w(s) ds, \quad \forall x \in I, \qquad (1)$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке по бюджетной программе, подпрограмма проект по 102 ГФ, ИРН AP08856339 (проект № 321 от 19.11.2020).

Абылаева Акбота Мухамедияровна, к.ф.-м.н., ассоцированный профессор, ЕНУ им.Л.Н.Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Akbota Abylayeva (L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Алдай Мактагул, к.ф.-м.н., доцент, ЕНУ им.Л.Н.Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Maktagul Alday (L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

из пространства $L_{p,w} \equiv L_{p,w}(I)$ в пространство $L_{q,v} \equiv L_{q,v}(I)$.

Здесь обозначим через $L_{p,w}(I)$ пространство, состоящее из множества всех измеримых функций $f$ с нормой $\|f\|_{p,w} = \left(\int\limits_0^x |f(s)|^p w(s)ds\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Кроме того, пусть $W(x) = \int\limits_0^x w(s)ds$, $x > 0$. $W(x)$ – неотрицательная, строго возрастающая и локально абсолютно непрерывная функция.

Для оператора вида (1), когда $W(x) = x$, т.е. для частного случая рассматриваемого нами оператора, в работе [1] были получены ограниченность и компактность из весового пространства Лебега $L_p$ в весовое пространство Лебега $L_q$, когда параметры удовлетворяют условиям $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$ и $0 < q < p < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$, $p > 1$.

**Теорема 1.** *Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$. Тогда для ограниченности оператора $K_\gamma$ из весового пространства Лебега $L_{p,w}$ в весовое пространство $L_{q,v}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$A_\gamma = \sup_{x>0} A(x) < \infty, ; \quad A(x) = \left(\int\limits_x^\infty \frac{v(t)}{W^q(t)}dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^x W^{\gamma p'}(t)w(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

*Кроме того, $\|K_\gamma\| \approx A_\gamma$.*

**Теорема 2.** *Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$. Тогда для компактности оператора $K_\gamma$ из весового пространства Лебега $L_{p,w}$ в весовое пространство $L_{q,v}$ необходимо и достаточно выполнения условий:*

$$1. A = \sup_{s>0} A(s) < \infty$$

*и*

$$2. \lim_{s\to 0} A(s) = \lim_{s\to\infty} A(s) = 0.$$

### Литература

1. *Abylayeva A. and Person L.-E.* Hardy type inequalities and compactness of a class of integraloperators with logarithmic singularities. // Math. Inequal. Appl. (MIA), V.21, № 1, 2018, P.201-215.

# О ЛОКАЛЬНОЙ $\ell^P$-СТРУКТУРЕ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ТИПА.

**@ С.В. Асташкин**
*astash56@mail.ru*

УДК 517.982.22, 517.982.27

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*37.

Для произвольного сепарабельного симметричного пространства последовательностей $X$ фундаментального типа найдено множество всех $p \in [1, \infty]$, для которых пространство $\ell^p$ финитно представимо в $X$ таким образом, что векторы канонического базиса в $\ell^p$ ($c_0$, если $p = \infty$) соответствуют попарно дизъюнктным элементам, имеющим одинаковое порядковое распределение.

*Ключевые слова*: $\ell^p$, финитная представимость, симметричное пространство последовательностей, оператор растяжения, индексы Бойда, пространство Орлича, пространство Лоренца.

**On local $\ell^p$-structure of symmetric sequence spaces of fundamental type**

For a separable symmetric sequence space $X$ of fundamental type we identify the set of all $p \in [1, \infty]$ such that $\ell^p$ is finitely represented in $X$ in such a way that the unit basis vectors of $\ell^p$ ($c_0$ if $p = \infty$) correspond to pairwise disjoint elements with the same ordered distribution.

*Keywords*: $\ell^p$, finite representability, symmetric sequence space, dilation operator, Boyd indices, Orlicz space, Lorentz space.

Еще в 1961 г. была опубликована знаменитая теорема Дворецкого [1] о том, что $\ell^2$ финитно представимо в любом бесконечномерном банаховом пространстве $X$. Позднее, в 1976 г. Кривине [2] доказал, что для всякой нормированной последовательности $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ любого банахова пространства $X$, элементы которой не образуют предкомпактного множества в $X$, существует такое $p \in [1, \infty]$, что $\ell^p$ ($\ell^\infty \equiv c_0$) финитно представимо в ее замкнутой линейной оболочке, причем векторы канонического базиса в $\ell^p$ соответствуют последовательным элементам некоторого блок-базиса последовательности $\{z_i\}$.

---

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2021-1393.

Асташкин Сергей Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, Самарский национальный исследовательский университет (Самара, Россия); Sergey Astashkin (Samara National Research University, Samara, Russia)

В случае симметричных пространств последовательностей можно говорить о финитной представимости $\ell^p$-пространств специального вида. Напомним, что банахова решетка $X$ последовательностей вещественных чисел называется *симметричным пространством*, если из того, что $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in X$ и $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют условию $x_k^* \le y_k^*$, $k = 1, 2, \dots$, следует: $x \in X$ и $\|x\|_X \le \|y\|_X$. Здесь $(u_k^*)_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая перестановка последовательности $(|u_k|)_{k=1}^{\infty}$, т.е.

$$u_k^* := \inf_{\mathrm{card\,A}=k-1} \sup_{i \in \mathbb{N} \setminus A} |u_i|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Будем говорить, что последовательности $u = (u_k)_{k=1}^{\infty}$ и $v = (v_k)_{k=1}^{\infty}$ имеют *одинаковое порядковое распределение*, если $u_k^* = v_k^*$ для всех $k = 1, 2, \dots$

Пусть $X$ — симметричное пространство последовательностей, $1 \le p \le \infty$. Тогда пространство $\ell^p$ *симметрично финитно представимо* в $X$, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют попарно дизъюнктные элементы $x_k \in X$, $k = 1, 2, \dots, n$, имеющие одинаковое порядковое распределение, такие, что для любых $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$,

$$(1+\varepsilon)^{-1} \|(a_k)_{k=1}^n\|_{\ell^p} \le \Big\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \Big\|_X \le (1+\varepsilon) \|(a_k)_{k=1}^n\|_{\ell^p}.$$

Для любого $m \in \mathbb{N}$ определим *операторы растяжения* $\sigma_m$ и $\sigma_{1/m}$ на множестве всех последовательностей: если $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, то

$$\sigma_m a = \big(a_{[\frac{m-1+n}{m}]}\big)_{n=1}^{\infty} = \big(\overbrace{a_1, a_1, \dots, a_1}^{m}, \overbrace{a_2, a_2, \dots, a_2}^{m}, \dots\big)$$

и

$$\sigma_{1/m} a = \Big(\frac{1}{m} \sum_{k=(n-1)m+1}^{nm} a_k\Big)_{n=1}^{\infty}.$$

Эти операторы ограничены во всяком симметричном пространстве последовательностей $X$ и $\|\sigma_m\|_X \le m$, $\|\sigma_{1/m}\|_X \le 1$ для каждого $m \in \mathbb{N}$ [3]. Числа

$$\alpha_X := -\lim_{m \to +\infty} \frac{\log_2 \|\sigma_{1/m}\|_X}{\log_2 m} \quad \text{и} \quad \beta_X := \lim_{m \to +\infty} \frac{\log_2 \|\sigma_m\|_X}{\log_2 m}$$

называются *индексами Бойда* пространства $X$.

Функция $\phi_X(n) := \|\chi_{\{1,2,\dots,n\}}\|_X$, $n \in \mathbb{N}$, где $\chi_A$ — характеристическая функция множества $A \subset \mathbb{N}$, называется *фундаментальной функцией* симметричного пространства последовательностей $X$. Если

$$\alpha_X = -\lim_{m \to +\infty} \frac{\log_2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\phi_X(n)}{\phi_X(mn)}}{\log_2 m} \quad \text{и} \quad \beta_X = \lim_{m \to +\infty} \frac{\log_2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\phi_X(mn)}{\phi_X(n)}}{\log_2 m},$$

то говорят, что симметричное пространство последовательностей $X$ — пространство *фундаментального типа*.

Все наиболее известные и важные в теории и приложениях симметричные пространства, в частности, Орлича и Лоренца, являются пространствами фундаментального типа.

**Теорема.** *Если $X$ — сепарабельное симметричное пространство последовательностей фундаментального типа, то $\ell^p$ симметрично финитно представимо в $X$, если и только если $p \in [1/\beta_X, 1/\alpha_X]$.*

### Литература


1. *Dvoretzky A.* Some results on convex bodies and Banach spaces // Proc. Symp. on Linear Spaces. Jerusalem, 1961, 123–160.

2. *Krivine J. L.* Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés // Ann. Math., **104**:2 (1976), 1–29.

3. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

# О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОТЕНЦИАЛОВ

**@ А.Б. Баймурзаева, Л.К. Кусаинова**

*Ancara-muz05@mail.ru, leili2006@mail.ru*

УДК 517.982

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*38.

В работе дано определение весового пространства потенциалов $H_p^m(\Omega;\rho,\upsilon_m)$. Получено описание точечных мультипликаторов на паре этих пространств.

*Ключевые слова*: весовые пространства потециалов, мультипликаторы.

**On multipliers in weighted potential spaces**

The definition of weighted potential spaces $H_p^m(\Omega;\rho,\upsilon_m)$ is given. The description of point multipliers on a pair of these spaces is obtained.

*Keywords*: weighted potential spaces, multipliers.

Пусть $(X,Y)$ - пара банаховых пространств функций $f:\Omega\to\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$, $\Omega$ - произвольная область в $\mathbb{R}^n$. Под точечным мультипликатором на паре $(X,Y)$ мы будем понимать функцию $\gamma:\Omega\to\mathbb{R}$, задающую ограниченный оператор умножения $Tf=\gamma f$ из $X$ в $Y$. Пространство всех таких функций обозначается через $M(X\to Y)$. Вводится норма

$$\|\gamma;M(X\to Y)\|=\|T;X\to Y\|$$

(См.[1]). В данной работе получено описание мультипликаторов на паре весовых пространств $\Big(H_p^{m_0}(\Omega;\rho,\upsilon_{m_0}),H_p^{m_1}(\Omega;\rho,\upsilon_{m_1})\Big)$ положительной гладкости $m_0>m_1>0$, $1<p<\infty$. Пространства $H_p^m(\Omega;\rho,\upsilon_m)$ были введены в [2]. Приведены примеры. В общем случае $\upsilon_m(x)=\rho(x)h^{-m}(x)$, $\rho(x)>0$, $0<h(x)\le 1$ - функции в $\Omega$, подчиненные условиям:

1) $Q(x)=Q_{h(x)}(x)\subset\Omega$

2) существуют такие $\varkappa>1$, $0<\tau<1$, что

$$\varkappa^{-1}\le\frac{\rho(y)}{\rho(x)},\frac{h(y)}{h(x)}\le\varkappa,\ \text{если } y\in\tilde{Q}(x)=\tau Q(x)$$

---

Работа была проделана при поддержке гранта МОН РК AP08856104.

Баймурзаева Анар Батыргазыевна, докторант, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Anar Baimurzayeva (Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Кусаинова Лейли Кабиденовна, д.ф.-м.н., профессор, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Leili Kussainova (Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan)

Здесь $\tau Q_h(x) = Q_{\tau h}(x)$,$Q_h(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < \frac{h}{2}, 1 \le i \le n\}$.

Существует счетное конечно-кратное и конечно-разделимое семейство кубов $\hat{Q}^j = \frac{3}{4}\tilde{Q}^j$, $\tilde{Q}^j = \tilde{Q}(x^j)$ и соотнесенное ему семейство функций $\psi_j \in C_0^\infty(\tilde{Q}^j)$, $0 \le \psi_j \le 1$, $\psi_j = 1$ на $\hat{Q}^j$ такие, что:

1) $\Omega = \bigcup_{j\ge 1} \hat{Q}^j$; $\sum_{j=1}^\infty \psi_j(x) = 1$ в $\Omega$;

2) $|D^\alpha \psi_j| \le c(m)h^{-m}(x^j)$, если $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = m$ (см. [2]).

По определению $H_p^m(\Omega; \rho, \upsilon_m)$ есть пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|f; H_p^m(\Omega; \rho, \upsilon_m)\| = \left[\sum_{j\ge 1} \left(\rho^p(x^j)\|\psi_j f; H_p^m\|^p + \upsilon_m^{-mp}(x^j)\|\psi_j f; L_p\|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

В (1) $H_p^m$ - пространство бесселевых потенциалов [1, 2.1], $L_p = L_p(\mathbb{R}^n)$.

Положим [1, 2.1]

$$S_l f(x) = \begin{cases} |\nabla_l f(x)|, & \text{если } l \in \mathbb{N}, \\ \left(\int\limits_0^\infty \left[\int\limits_{B_1} |\nabla_{[l]} f(x+\xi\lambda) - \nabla_m f(x)|d\xi\right]^2 \frac{d\lambda}{\lambda^{1+2\{l\}}}\right)^{1/2}, & \end{cases}$$

если $l > 0$ -нецелое, $[l]$ - целая, $l$ - дробная части $l$. Пусть $\theta \in C_0^\infty(Q_0)$, $Q_0 = Q_1(0)$, $0 \le \theta \le 1$, $\theta = 1$ на $\tau Q_0$, $\theta_x(y) = \theta(\frac{y-x}{h(x)})$

**Теорема.** Пусть $1 < p < \infty$, $m > 0$ - целое, $mp > n$, $0 < l < m$. Тогда

$$\gamma \in M(H_p^m(\Omega; \rho, \upsilon_m) \to H_p^l(\Omega; \rho, \upsilon_l)),$$

если и только если $\gamma \in H_{p,loc}^l$ и

$$\mathcal{R}_{m,l,p}(\gamma) = \sup_{x\in\Omega} h^{m-\frac{n}{p}}(x)(\|S_l(\theta_x\gamma); L_p)\| + h^{-l}(x)\|\theta_x\gamma; L_p\|) < \infty.$$

Норма

$$\|\gamma; M(H_p^m(\Omega; \rho, \upsilon_m) \to H_p^l(\Omega; \rho, \upsilon_l)\| \sim \mathcal{R}_{m,l,p}(\gamma).$$

## Литература


1. *Мазья В.Г., Шапошникова Т.О.* Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций // Ленинградский государственный университет им. А.А. Жданова . – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1986 . – 402 с.

2. *Kussainova L.K., Sultanaev Ya.T., Murat G.K.* Approximate Estimates for a Differential Operator in a Weighted Hilbert Space // Differential Equations. 2019. Vol. 55, No 12. P. 1589-1597.

# ОЦЕНКИ ТИПА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ С ЗАДАННОЙ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ НУЛЕЙ

**@ Г.Г. Брайчев, О.В. Шерстюкова**

*braichev@mail.ru, sherov73@mail.ru*

УДК 517.547.22

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*39.

Обсуждается вопрос о том, насколько сильно может измениться тип целой функции конечного положительного порядка с заданной последовательностью нулей, если разрешить такой функции иметь дополнительно другие нули. В 2009 году Б.Н. Хабибуллиным получен общий результат по этой задаче. В докладе намечены возможности для конкретизации указанного результата, основанные на серии теорем (часть из которых доказана авторами) о вычислении экстремального типа целой функции с ограничениями на распределение нулей.

*Ключевые слова*: целая функция, последовательность нулей, тип целой функции.

**Estimates of the type of an entire function with a given subsequence of zeros.**

The question is discussed how much can change the type of the entire function of finite positive order with a given sequence of zeros if we give additional zeros to this function. The general result on this problem was obtained in 2009 by B.N. Khabibullin. Based on a series of works by the authors possibilities for concretizing this result are indicated.

*Keywords*: entire function, sequence of zeros, type of an entire function.

Пусть заданы последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ комплексных чисел, стремящаяся к бесконечности (среди точек $\lambda_n$ могут быть и повторяющиеся), и число $\rho > 0$. Следуя [1], обозначим символом $\sigma(\Lambda, \rho)$ (соответственно $\sigma^*(\Lambda, \rho)$) точную нижнюю грань чисел $\sigma > 0$, при которых $\Lambda$ — *последовательность* (соответственно *подпоследовательность*) *всех нулей* для какой-либо отличной от тождественного нуля целой функции $f(\lambda)$, имеющей тип $\sigma$ при порядке $\rho$. По определению считаем $\inf\emptyset = +\infty$.

В работе [1, следствие 1 теоремы 1] показано, что

$$\sigma^*(\Lambda, \rho) \leqslant \sigma(\Lambda, \rho) \leqslant (1 + I_\rho)\, \sigma^*(\Lambda, \rho), \tag{1}$$

Брайчев Георгий Генрихович, д.ф.-м.н., профессор, МПГУ (Москва, Россия); George Braichev (Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia)

Шерстюкова Ольга Владимировна, учитель математики, ГБОУ Школа № 1579 (Москва, Россия); Olga Sherstyukova (School № 1579, Moscow, Russia)

где при целом $\rho$ полагаем $I_\rho = +\infty$, а при нецелом $\rho$ число $I_\rho$ определено формулой

$$I_\rho \equiv \rho^2 \int\limits_0^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left( -\frac{1}{2} \ln\Bigl(1 - 2t\cos\theta + t^2\Bigr) - \sum_{n=1}^{p} \frac{t^n}{n} \cos n\theta \right)^+ d\theta \right) \frac{dt}{t^{\rho+1}}.$$

Здесь приняты обозначения $p = [\rho]$ — целая часть $\rho$, $a^+ = \max\{a, 0\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Оценка снизу в (1) очевидна и точна при любом $\rho > 0$ (см. [1, доказательство предложения 2]). Оценка сверху в (1) — ключевой результат, доказанный в [1] новым, нетрадиционным методом, с использованием субгармонической техники. Весьма вероятно (но пока не доказано), что и эта оценка точна. Сформулированный результат Б.Н. Хабибуллина допускает различные варианты конкретизации. Рассмотрим, например, практически важный случай $\rho \in (0, 1)$, а $\Lambda$ — положительная последовательность конечной верхней $\rho$-плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \equiv \varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\lambda_n^\rho} = \beta > 0$. Тогда величина $\sigma(\Lambda, \rho)$ равна типу (при порядке $\rho$) конкретного канонического произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right), \qquad \lambda \in \mathbb{C},$$

а коэффициент $1 + I_\rho$ упрощается к виду ([1, теорема 1])

$$1 + I_\rho = \frac{\Gamma(1/2 - \rho/2)}{\sqrt{\pi}\, 2^\rho\, \Gamma(1 - \rho/2)},$$

где $\Gamma$ — гамма-функция. Привлекая теперь точное неравенство [2]

$$\sigma(\Lambda, \rho) \geqslant \beta \max_{a>0} \frac{\ln(1+a)}{a^\rho} \equiv \beta\, C(\rho), \qquad \rho \in (0, 1),$$

извлекаем из (1) оценку

$$\sigma^*(\Lambda, \rho) \geqslant \beta\, \frac{\sqrt{\pi}\, 2^\rho\, \Gamma(1 - \rho/2)}{\Gamma(1/2 - \rho/2)}\, C(\rho), \qquad \rho \in (0, 1),$$

действующую для любой последовательности $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ с фиксированным значением верхней плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta > 0$. Такой комбинированный результат является простейшим на выбранном пути.

К настоящему моменту известна серия точных теорем, в которых для порядков $\rho \in (0, 1)$ и положительной последовательности $\Lambda$ с заданными плотностными характеристиками и шагом найдено наименьшее значение для величины $\sigma(\Lambda, \rho)$ (см. [2]–[6]). Отдельные результаты подобного характера имеются как для $\rho > 1$, так и для других ситуаций локализации последовательности $\Lambda$. Это открывает новые возможности по применению оценки (1), в том числе — к известной задаче о радиусе круга полноты системы экспонент с показателями, расположенными на заданном множестве.

## Литература


1. *Хабибуллин Б.Н.* Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции // Матем. сб., **200**:2 (2009), 129-158.

2. *Попов А.Ю.* Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней $\rho$-плотности // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика, 1 (2005), 31-36.

3. *Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б.* О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями // Изв. РАН. Сер. матем., **75**:1 (2011), 3-28.

4. *Брайчев Г.Г.* Наименьший тип целой функции порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными корнями заданных усредненных плотностей // Матем. сб., **203**:7 (2012), 31-56.

5. *Шерстюкова О.В.* Задача о наименьшем типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями заданных плотностей и шага // Уфимск. матем. журн., **7**:4 (2015), 146-154.

6. *Брайчев Г.Г., Шерстюков В.Б.* Точные оценки асимптотических характеристик роста целых функций с нулями на заданных множествах // Фундамент. и прикл. матем., **22**:1 (2018), 51-97.

# РЯДЫ КВАЗИПОЛИНОМОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ И СВЯЗЬ С ИНТЕРПОЛЯЦИЕЙ

**© А.М. Гайсин, Р.А. Гайсин**

*gaisinam@mail.ru, rashit.gajsin@mail.ru*

УДК 517.53

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*40.

Изучается связь между сходимостью последовательности полиномов из экспонент с вещественными показателями в некоторой полуплоскости и интерполяционностью последовательности показателей в смысле Павлова–Коревара–Диксона.

*Ключевые слова*: последовательности полиномов из экспонент, интерполяционные последовательности, условие Левинсона

**Series of quasipolynomials with positive exponents and relationship with interpolation**

We study the relationship between the convergence of a sequence of exponential polynomials with real exponents in some half-plane and the interpolation of a sequence of exponents in the sense of Pavlov–Korevaar–Dickson.

*Keywords*: sequences of polynomials of exponentials, interpolation sequences, Levinson's condition

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел, имеющая конечную плотность. А.Ф. Леонтьевым было доказано следующее утверждение (см. [1], гл. II, §4):

Для того, чтобы для любой последовательности $\{a_n\}$ комплексных чисел, удовлетворяющих условию

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} < \infty,$$

существовала целая функция $f$ экспоненциального типа, такая, что $f(\lambda_n) = a_n$ $(n \geq 1)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из эквивалентных условий:

---

Гайсина Ахтяр Магазович, д.ф.-м.н., главный научный сотрудник, ИМВЦ (Уфа, Россия); профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Ahtjar Gaisin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Institute of Mathematics with Computing Centre (Ufa, Russia); Professor, Bashkir State University (Ufa, Russia)

Гайсин Рашит Ахтярович, к.ф.-м.н., инженер-исследователь, ИМВЦ (Уфа, Россия); Rashit Gaisin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Research Engineer, Institute of Mathematics with Computing Centre (Ufa, Russia)

1) последовательность квазиполиномов

$$P_n(z) = \sum_{\lambda_\nu < r_s} \frac{a_\nu}{L'(\lambda_\nu)} e^{-\lambda_\nu z} \quad (s = 1,\, 2,\, ...)$$

сходится внутри некоторой полуплоскости $z\colon\ \mathrm{Re} z > b$. Здесь $r_s$, $0 < r_s \uparrow \infty$ — радиусы окружностей, на которых целая функция

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right)$$

удовлетворяет соответствующим оценкам снизу (см. [1], гл. II, §3, п. 1);

2) индекс конденсации последовательности $\Lambda$ конечен.

Пусть последовательность $\Lambda$ подчинена условию Левинсона. Тогда верна

**Теорема 1.** *Для того, чтобы последовательность $\Lambda$ была интерполяционной в смысле Павлова–Коревара–Диксона (см. [2]), необходимо и достаточно, чтобы для любых $a_n$, $|a_n| \le 1$ $(n = 1, 2 \ldots)$ последовательность $\{P_n(z)\}$ сходилась равномерно внутри полуплоскости $\Pi_0 = \{z = x + iy\colon\ x > 0\}$, причем для предельной функции $P(z)$ была верна оценка $|P(z)| \le H(x)$, $z = x + iy$, где $H(x)$ — некоторая убывающая при $x > 0$ функция, $H(x) \uparrow \infty$ при $x \to 0+$, удовлетворяющая билогарифмическому условию Левинсона.*

## Литература


1. *Леонтьев А.Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. — М.: Наука, 1980.

2. *Гайсин Р.А.* Интерполяционная задача Павлова–Коревара–Диксона с мажорантой из класса сходимости // Уфимский матем. журнал, **9**:4 (2017), 22–35.

# КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ МАЖОРАНТЫ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КЛАССА $E$

**@ Р.А. Гайсин**
*rashit.gajsin@mail.ru*

УДК 517.53

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*41.

Исследуются задачи о построении регулярной мажоранты последовательностей $\mu = \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ чисел $\mu_n \geq 0$, являющихся коэффициентами разложения в ряд Тейлора целых трансцендентных функций минимального экспоненциального типа. В терминах билогарифмического условия Левинсона доказан новый критерий существования регулярных минорант присоединенных последовательностей $M = \{\mu_n^{-1}\}_{n=0}^{\infty}$ расширенной полупрямой $(0, +\infty]$.

*Ключевые слова*: целая функция, билогарифмическое условие Левинсона, регулярные последовательности, преобразование Лежандра

**Criterion of existance of the special regular majorant for the sequence in the class $E$**

We investigate problems of construction of the regular majorant of sequences $\mu = \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\mu_n \geq 0$, which are Taylor's coefficients of entire transcendence functions of minimal exponential type. We have proved new criterion of existance of regular minorants of associated sequences $M = \{\mu_n^{-1}\}_{n=0}^{\infty}$ on the extended half-line $(0, +\infty]$.

*Keywords*: entire function, bilogarithmic Levinson condition, regular sequences, Legendre transform

Пусть $E$ — класс последовательностей $\mu = \{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ неотрицательных чисел $\mu_n$, представляющих собой тейлоровские коэффциенты всевозможных целых функций минимального экспоненциального типа

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z^n, \tag{1}$$

отличных от многочлена. Это означает, что бесконечно много $\mu_n \in \mu$ отлично от нуля, причем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mu_n n!} = 0.$$

---

Гайсин Рашит Ахтярович, к.ф.-м.н., научный сотрудник, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Rashit Gaisin (Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, Russia)

Пусть $M = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — присоединенная последовательность, т.е. $M = \{M_n \in (0, +\infty] : M_n = \mu_n^{-1}\}$. Ясно, что среди $M_n$ бесконечно много конечных. Не умаляя общности, в дальнейшем будем считать, что $\mu_0 = 1$.

В работах [1], [2] получены некоторые критерии существования регулярной миноранты $\{M_n^*\}$ для $\{M_n\}$, не удовлетворяющей известному условию Банга. Оказывается, эти условия допускают другую интерпретацию.

Здесь получено одно двойственное утверждение в терминах интеграла Лапласа максимального члена ряда (1).

Последовательность $\mu \in E$ назовем *слабо регулярной (регулярной)*, если присоединенная последовательность $M$ слабо регулярна (регулярна) (см. [2]).

Ставится следующая задача: найти критерий того, чтобы последовательность $\mu = \{\mu_n\}$ из $E$ допускала регулярную мажоранту $\mu^* = \{\mu_n^*\}$, такую, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{n+1}^*}{\mu_n^*} < \infty. \tag{2}$$

Пусть

$$T(r) = \max_{n \geq 0} \{\mu_n r^n\} \tag{3}$$

— максимальный член ряда (1).

**Теорема 1.** *Последовательность $\mu \in E$ имеет регулярную мажоранту $\mu^*$, удовлетворяющую условию (2) тогда и только тогда, когда выполнено любое из эквивалентных условий:*

$$1) \int_0^{p_F} \ln\ln H_F(\delta)d\delta < \infty; \qquad 2) \int_0^{p_T} \ln\ln H_T(\delta)d\delta < \infty.$$

*Здесь $H_F$ и $H_T$ — преобразования Лапласа функций (1) и (3).*

Доказательство основано на свойствах преобразования Лежандра.

Укажем одно применение данной теоремы к вопросам квазианалитичности и полноты систем экспонент.

Рассмотрим специальный случай, когда $\mu_n = M_n^{-1}$ являются модулями тейлоровских коэффициентов четной целой функции экспоненциального типа

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n} z^{2n}, \quad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \tag{4}$$

т.е. $\mu_{2n} = a_{2n}$, $\mu_{2n+1} = 0$.

**Следствие.** *Пусть $\gamma$ — дуга, полученная от дуги $\Gamma$ ограниченного наклона путем некоторого поворота вокруг одного ее концов и сдвига. Положим*

$$H_T(\delta) = \int\limits_0^\infty T(r)e^{-r\delta}\,dr \quad (\delta > 0), \qquad L_n = \sup_{\delta>0} \frac{n!}{H_T(\delta)\delta^{n+1}} \quad (n \geq 0),$$

*где $T = T(r)$ — максимальный член ряда (4).*

*Для того, чтобы $C_{00}(L_{n-3};\gamma) \neq \{\varnothing\}$, необходимо и достаточно, чтобы функция $H_T$ удовлетворяла билогарифмическому условию Левинсона (определения см. в [3]).*

Таким образом, следствие является критерием нетривиальности подкласса $C_{00}(L_{n-3};\gamma)$ класса Сиддики $C_{00}(M^c_{n-2};\gamma)$.

Достаточность следствия доказана в [3]. Необходимость вытекает из теоремы 1.

## Литература

1. *Гайсин Р.А.* Критерии квазианалитичности типа Салинаса-Коренблюма для областей общего вида // Уфимский матем. журнал, **5**:3 (2013), 28-40.

2. *Гайсин Р.А.* Регуляризация последовательностей в смысле Е.М. Дынькина // Уфимский матем. журнал, **7**:2 (2015), 66-72.

3. *Гайсин А.М., Кинзябулатов И.Г.* Теорема типа Левинсона-Щёберга. Применения // Матем. сб., **199**:7 (2008), 41-62.

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ В ПОЛУПЛОСКОСТИ С УЧЕТОМ ОЦЕНКИ ЦЕЛОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

**@ Г.А. Гайсина**

*gaisinaga@mail.ru*

УДК 517.53

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*42.

Изучается задача о представлении аналитических в полуплоскости функций рядами экспонент с учетом заданной выпуклой мажоранты роста, не ограниченной в окрестности нуля. Методы оценок основаны на свойствах преобразований Лежандра.

*Ключевые слова*: ряды экспонент, целая функция, выпуклая мажоранта

**Representation of analytic functions by series of exponentials on a half-plane with a given estimate of entire component**

We study the problem of representing analytic in a half-plane functions by exponential series taking into account a given convex majorant of growth that is not bounded in a neighborhood of zero. The estimation methods are based on the properties of the Legendre transformations.

*Keywords*: series of exponentials, entire function, convex majorant

В теории рядов экспонент одним из основных является следующий общий результат А.Ф. Леонтьева (см. [1]): для любой ограниченной выпуклой области $D$ найдется последовательность комплексных чисел $\lambda_n$, зависящая только от данной области, такая, что любую функцию $F$, аналитическую в $D$, можно разложить в ряд экспонент $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ (сходимость равномерная на компактах из $D$). Позже подобный результат был получен А.Ф. Леонтьевым для пространства аналитических функций конечного порядка $\rho$ в выпуклом многоугольнике. При этом было показано, что ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n e^{\lambda_n z}|$ имеет ту же оценку сверху, что и исходная функция $F$ (см. [2]).

Р.С. Юлмухаметовым этот результат при $\rho > 1$ доказан для произвольной ограниченной выпуклой области (см. [3]).

В [4] приведенный выше результат из [2] был перенес на случай, когда $D$ — полуплоскость $\Pi_0 = \{z = x + iy\colon\ x > 0\}$, а в статье [5] получен и более общий результат, а именно: пусть функция $F$ регулярна в $\Pi_0$,

Гайсина Галия Ахтяровна, аспирант, БашГУ (Уфа, Россия); Galiya Gaisina (Bashkir State University, Ufa, Russia)

$F(z) \to 0$ при $z \to \infty$ в любой полуплоскости $\{z = x + iy\colon\ x \geq s > 0\}$ равномерно относительно $\arg z$, причем

$$T_F(s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathrm{Re} z = s > 0} |F(z)||dz| \leq A_F H(s),$$

где $H$ — убывающая на $(0,\ \infty)$ функция, $H(s) \uparrow \infty$, $s^k H(s) \to 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$ при $s \to 0$, а функции $m(s) = \ln H(s)$ $(s > 0)$ и $m(e^{-t})$ $(t \in \mathbb{R})$ выпуклы.

Тогда существуют $\lambda_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^q} = \tau$, $0 < \tau < \infty$, $q > 1$ — любое, такие, что в полуплоскости $\Pi_0$

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\lambda_n z} + \Phi(z), \tag{1}$$

где $\Phi$ — некоторая целая функция. При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} |B_n e^{-\lambda_n z}| \leq C H^p\left(\frac{x}{p}\right),$$

$0 < C < \infty$, $p \in \mathbb{N}$.

Возникает естественный вопрос о поведении целой функции $\Phi$ в окрестности мнимой оси. Нами получен ответ на этот вопрос в одном важном частном случае.

**Теорема 1.** *Пусть $F$ — четная функция, аналитическая вне отрезка $[-ai,\ ai]$ и удовлетворяющая условиям предыдущей теоремы из [5]. Если мажоранта $H$ удовлетворяет билогарифмическому условию Левинсона*

$$\int\limits_0^b \ln\ln H(x)dx < \infty, \quad H(b) = e,$$

*то целая функция $\Phi$ из представления (1) ограничена в полосе $\{z = x + iy\colon\ |x| \leq 1\}$.*

Эта теорема выводится из теоремы Карлемана–Бёрлинга–Левинсона–Шёберга–Волфа–Домара (см. [6]).

**Литература**

1. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.

2. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. матем., **44**:6 (1980), 1308–1318.

3. *Юлмухаметов Р.С.* Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций // Доклады АН СССР, **264**:4 (1982), 839–841.

4. *Гайсин А.М.* Поведение суммы ряда Дирихле вблизи границы области регулярности. Дисс. канд. физ.-мат. наук, 1982, Уфа.

5. *Гайсина Г.А.* Представление аналитических функций рядами экспонент в полуплоскости с учетом мажоранты роста // Уфимский матем. журнал, **13**:3 (2021), 1–9 (статья находится в печати).

6. *Borichev A., Hedelmalm H.* Completennes of translates in weighted spaces on the half-plane // Acta Mathematica, **174**:1 (1995), 1–84.

# УМНОЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДЮАМЕЛЯ

**@ О.А. Иванова**

*neo_ivolga@mail.ru*

УДК 517.547, 517.982.2

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*43.

Получены реализации умножения в пространствах аналитических функционалов, заданного сдвигами для оператора Поммье, в виде обобщенного произведения Дюамеля.

*Ключевые слова*: пространство аналитических функционалов, произведение Дюамеля.

**Multiplication in spaces of analytic functionals and Duhamel product**

Realizations of the multiplication in spaces of analytic functionals defined by shifts for the Pommiez operator are obtained as a generalized Duhamel product.

*Keywords*: space of analytic functionals, Duhamel product.

Н. Уигли [1] ввел и изучил в пространстве Фреше $H(Q)$ всех функций, голоморфных в звездной относительно точки 0 области $Q \subset \mathbb{C}$, произведение Дюамеля $(f * h)(z) = f(0)h(z) + \int\limits_0^z f'(\tau)h(z-\tau)d\tau$. В докладе идет речь о бинарных операциях в пространствах голоморфных функций, частным случаем которых является операция $*$. Схема введения такого умножения $*$ следующая. Пусть $E$ — локально выпуклое пространство голоморфных функций, $E'$ — его топологическое сопряженное. С помощью сдвигов, ассоциированных с одномерным возмущением оператора Поммье, действующего в $E$, в $E'$ задается умножение $\otimes$, с которым $E'$ является алгеброй. Преобразование Фурье-Лапласа или сопряженное к нему устанавливает алгебраический изоморфизм $E'$ на пространство $G$. Произведение $*$ является реализацией $\otimes$ в $G$ при таком изоморфизме. Рассматриваются следующие ситуации:

1) $E$ — некоторое пространство целых (в $\mathbb{C}$) функций экспоненциального типа, $G$ — пространство $H(Q)$ всех функций, голоморфных в выпуклой области $Q$, содержащей точку 0 [2], [3];

2) $E$ — пространство Фреше $H(\Omega)$ всех функций, голоморфных в односвязной области $\Omega$, содержащей точку 0; $G$ — соответствующее пространство $P_\Omega$ целых функций экспоненциального типа [4].

---

Иванова Ольга Александровна, к.ф.-м.н., доцент, ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия); Olga Ivanova (Southern Federal University, Rostov on Don, Russia)

**Литература**

1. *Wigley N.* The Duhamel product of analytic functions // Duke Math. J., **41** (1974), 211–217.

2. *Ivanova O.A., Melikhov S.N.* On invariant subspaces of the Pommiez operator in the spaces of entire functions of exponential type // J. Math. Sci., **241**:6 (2019), 760–769.

3. *Ivanova O.A., Melikhov S.N.* On the Commutant of the Generalized Backward Shift Operator in Weighted Spaces of Entire Functions // Trends in Mathematics: Operator Theory and Differential Equations. Editors: A.G. Kusraev, Z.D. Totieva. — Birkhäuser, 2021. — 37–48.

4. *Иванова О.А., Мелихов С.Н.* Алгебры аналитических функционалов и обобщенное произведение Дюамеля // Владикавк. матем. журн., **22**:3 (2020), 72–84.

# НЕКОТОРОЕ ОБОБЩЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЛЕММЫ ХАРТОГСА ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

**@ С.А. Имомкулов, У.М. Собиров**

*sevdiyor_i@mail.ru, s_usmon2014@mail.ru*

УДК 517.55

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*44.

В данной работе рассматривается обобщение известной леммы Хартогса о голоморфном продолжение вдоль параллельных комплексных сечений. Доказывается вариант этой леммы для случаи когда функция голоморфно продолжается вдоль фиксированного направление с конечным числом особых точек. В данном случае функция является голоморфным за исключением некоторого аналитического множества.

*Ключевые слова*: Голоморфные функции, аналитическое множество, особенности голоморфных функций, голоморфное продолжение

**Some generalization of Hartogs's lemma about analytic extension of functions of several complex variables**

In the present work there is considered a generalization of well-known Hartogs's lemma on holomorphic extension along parallel complex lines. It is proved a variant of this lemma when function admits holomorphic extension along fixed direction with finite number of singularities. In this case given function be holomorphic out of an analytic exceptional set.

*Keywords*: Holomorphic function, analytic set, singularity of holomorphic functions, holomorphic extension

Замечательная лемма Хартогса об аналитическом продолжении голоморфных функций вдоль фиксированного направления (см.[9]) является основополагающей леммой теории аналитического продолжения функции многих комплексных переменных.

**Лемма Хартогса**. Пусть функция $f(z,w)$ голоморфна в цилиндре

$$U \times V = \{z \in \mathbb{C}^n : \ |z| < 1\} \times \{w \in \mathbb{C}: \ |w| < 1\}$$

Имомкулов Севдиёр Акрамович, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ургенч, Узбекистан); Sevdiyor Imomkulov (V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Sciences, Urgench, Uzbekistan)

Собиров Усмон Матякубович, Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ургенч, Узбекистан); Usmon Sobirov (V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Sciences, Urgench, Uzbekistan)

и при каждом фиксированном $z^0 \in U$ функция $f\ (z^0, w)$ по переменному $w$ голоморфно продолжается в большой круг $V_R = \{w \in \mathbb{C} : |w| < R\}$, $R > 1$.

Тогда функция $f(z, w)$ по совокупности переменных голоморфно продолжается в большой цилидр $U \times V_R$. Лемма Хартогса имеет многочисленное обобщения и приложения в разных областях науки: в теоретической физике, томографии и т.д. (см. например [1-13])

Мы будем докажем следующую теорему.

**Теорема 1.** *Пусть функция $f(z, w)$ голоморфно в цилиндре $U \times V \subset \mathbb{C}^n_z \times \mathbb{C}_w$ и при каждом фиксированном $z^0 \in U$ функция $f(z^0, w)$ голоморфно продолжается, по переменному $w$, в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$, $G \supset U$, за исключением конечного числа особенностей. Тогда $f(z, w)$ голоморфно продолжается в области $(U \times G) \backslash A$, где $A \subset U \times \mathbb{C}_w$ некоторое аналитическое множество.*

## Литература


1. *Chirka E. M., Ivashkovich S.M.* On nonimbeddability of Hartogs figures into complex manifols. Bull.Soc.Math. France. 134 (2), (2006), 261-267.

2. *Chirka E. M. and Sadullaev A.* On continuation of functions with polar singularities.Mat. Sb.(N.S.) 132(174) (1987), 383–390;

3. *Chirka E.M. and Rosay J.P.* Remarks on the proof of a generalized Hartogs lemma, Complex analysis and applications. Ann.Polon.Math.70. (1998), 43-47.

4. *Chirka E.M.,* The generalized Hartogs lemma and the nonlinear $\overline{\partial}$-equation. Complex analysis in modern mathematics, FAZIS, Moscow, (2001), 19-31.

5. *Imomkulov S. A.,* “On holomorphic continuation of functions defined on a pencil of boundary complex lines”, Izv. Math., **69**:2 (2005), 345–363.

6. *Ivashkovitch S.M.* The Hartogs-type extension theorem for the meromorphic maps into Kahler manifolds // Inv. Math. - 1992. - V. (109), 47-54.

7. *Ivashkovitch S.M., Silva A.* The Hartogs-type extension theorem formeromorphic mappings into q-complete complex spaces Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. 2-B (1999), 251–261.

8. *Marek Jarnicki, Peter Pflug.* Separately Analytic Functions. European Math. Society Publishing House. Switzerland 2011.

9. *Shabat B.V.,* Introduction to Complex Analysis, Part II, Moscow. Nauka. Fiz. Mat. Lit., 1985, 464, (Russian).

10. *Siciak J.* Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lowerdimensional subsets of $\mathbb{C}^n$. Ann. Polon. Math. 22 (1969), 145–171.

11. *Siciak J.* Singular sets of separately analytic functions, Colloq. Math. 60/61 (1990), 281–290.

12. *Zakharyuta V.* Separate-analytic functions, generalized Hartogs theorems and hulls of holomorphy, Math. Coll., 101 (1976), 57-76.

13. *Oktem O.* Extension of separately analytic functions and applications to range characterization of the exponential Radon transform // Ann. Polon. Math. - (1998), 195-213.

# ПРОСТРАНСТВА ДЕ БРАНЖА И КСИ-ФУНКЦИЯ РИМАНА

**@ В.В. Капустин**
*kapustin@pdmi.ras.ru*

УДК 517.9

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*45.

Показано, что кси-функция Римана после деления на многочлен степени 3 становится элементом явно описываемого пространства де Бранжа. Строится оператор в пространстве де Бранжа, спектр которого соответствует множеству нетривиальных нулей дзета-функции Римана после поворота комплексной плоскости. С помощью стандартного унитарного преобразования, связывающего пространства де Бранжа с каноническими системами, строится дифференциальный оператор с таким спектром.

*Ключевые слова*: дзета-функция Римана, спектр оператора.

**De Branges spaces and the Riemann xi function**

It is shown that after division by a polynomial of degree 3, the Riemann xi function becomes an element of an explicitly described de Branges space. An operator on the de Branges space is constructed, whose spectrum corresponds to the set of non-trivial zeros of the Riemann zeta function after a rotation of the complex plane. By using a standard unitary transformation which links de Branges spaces with canonical systems, a differential operator is constructed with this spectrum.

*Keywords*: Riemann zeta function, spectrum of an operator.

Дзета-функция Римана $\zeta$ обладает следующим свойством: функция $\frac{s-1}{s^2}\zeta(s)$ принадлежит классу Харди $H^2$ в полуплоскости $\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\}$. Рассуждения на основе функционального уравнения для дзета-функции, связанные с ядрами операторами Тёплица, позволяют прийти к предположению, что кси-функция Римана, деленная на многочлен третьей степени с нулями в нулях кси-функции, является элементом пространства де Бранжа со структурной функцией $E(z) = K_s(2\pi)$, где $K_s$ — модифицированная функция Бесселя, $s = \frac{1-iz}{2}$. Этот факт доказывается с помощью асимптоической оценки для функции Бесселя. С его помощью строится оператор в пространстве де Бранжа, спектр которого совпадает с множеством нетривиальных нулей дзета-функции, развернутым на вещественную прямую.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00565 а).

Капустин Владимир Владимирович, д.ф.-м.н., ПОМИ РАН (Санкт-Петербург, Россия); Vladimir Kapustin (St.Petersburg Department of the Steklov Mathematical Institute, St.Petersburg, Russia)

Одним из ключевых фактов теории пространств де Бранжа является существование канонической системы — дифференциального уравнения, определяющего гильбертово пространство системы и оператор в нём, и унитарного оператора, пересаживающего оператор канонической системы в пространство де Бранжа и осуществляющего его спектральное представление. Для рассматриваемого пространства де Бранжа явно строится соответствующая ему каноническая система и оператор в ней. Оператор со спектром, соответствующим множеству нетривиальных нулей дзета-функции, получается в виде одномерного возмущения оператора канонической системы.

# ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГАММА-ФУНКЦИИ

**@ А.Б. Костин, В.Б. Шерстюков**

*abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com*

УДК 517.581

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*46.

Показано, что два классических интегральных представления для гамма-функции $\Gamma(z)$ в открытой правой полуплоскости — первая формула Бине и формула Мальмстена — допускают распространение на мнимую ось с исключенной точкой $z = 0$. Отсюда получены интегральные выражения аргумента комплексной величины, являющейся значением гамма-функции в чисто мнимой точке, а также общий вариант одной формулы Славича (1975 г.) для определенного через гамма-функцию специального отношения $D(z) \equiv \Gamma(z + 1/2)/\Gamma(z + 1)$.

*Ключевые слова*: гамма-функция, первая формула Бине, формула Мальмстена.

**On integral representations of the gamma function**

It is shown that two classical integral representations for the gamma function in the open right half-plane — the first Binet formula and the Malmsten's formula — admit the extension on the imaginary axis with the excluded point $z = 0$. From this, integral expressions for the argument of the value of the gamma function at a purely imaginary point are obtained, as well as a general version of one result of Slavich (1975) for a special ratio $D(z) \equiv \Gamma(z+1/2)/\Gamma(z+1)$ defined through the gamma function.

*Keywords*: gamma function, first Binet formula, Malmsten's formula.

Как известно, *первой формулой Бине* называют представление

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \exp\left\{ z \ln z - z + \int\limits_0^{+\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{e^{-zt}}{t}\, dt \right\},$$

Костин Андрей Борисович, д.ф.-м.н., профессор, НИЯУ МИФИ (Москва, Россия); Andrey Kostin (National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia)

Шерстюков Владимир Борисович, д.ф.-м.н., профессор, НИЯУ МИФИ (Москва, Россия); Vladimir Sherstyukov (National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia)

$\operatorname{Re} z > 0$, а *формулой Мальмстена* — близкое по форме, но более компактное представление

$$\Gamma(z) = \exp\left\{ \int\limits_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-zt} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} + (z-1)e^{-t} \right) \frac{dt}{t} \right\}, \qquad \operatorname{Re} z > 0.$$

В подобном виде интегральные представления Бине и Мальмстена обычно подают в справочной литературе. По поводу доказательства этих классических результатов см. [1, гл. 12, § 12.31], [2].

Оказывается, обе формулы справедливы (при $z \neq 0$) и на мнимой оси. Отсюда, в частности, извлекаются следующие соотношения

$$y \ln y - y - \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^{+\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{\sin(yt)}{t}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left( y e^{-t} - \frac{\sin(yt)}{1 - e^{-t}} \right) \frac{dt}{t} \ \in\ \operatorname{Arg}\ \Gamma(iy), \qquad y > 0,$$

дополняющие известную явную формулу

$$|\Gamma(iy)|^2 \ =\ \frac{\pi}{y\ \operatorname{sh}(\pi y)}, \qquad y > 0.$$

Рассмотрим теперь величину

$$D(z)\ \equiv\ \frac{\Gamma(z + 1/2)}{\Gamma(z+1)}, \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0,\ z \neq 0,$$

важную уже тем, что в точках $z = n \in \mathbb{N}$ она совпадает с нормированным центральным биномиальным коэффициентом. Справедливо интегральное представление

$$D(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \exp\left\{ - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{2t}\, e^{-4tz}\, dt \right\}, \qquad \operatorname{Re} z \geqslant 0,\ z \neq 0,$$

отмеченное без доказательства в [3] на положительной полуоси $z = x > 0$. Для чисто мнимых значений переменной оно дает при $y > 0$ пару соотношений

$$|D(iy)|^2 = \frac{\operatorname{th}(\pi y)}{y} = \frac{1}{y} \exp\left\{ - \int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t} \cos(4yt)\, dt \right\},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{2t} \sin(4yt)\, dt - \frac{\pi}{4} \ \in \ \operatorname{Arg}\ D(iy).$$

Подробные доказательства результатов представлены в готовящейся к публикации работе [4].

## Литература


1. *Whittaker E.T., Watson G.N.* A Course of Modern Analysis. — Cambridge: Cambridge University Press, 1927.

2. *Malmstén C.J.* Sur la formule $hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{2!}\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{4!}\Delta u_x^{IV} +$ *etc.* // J. Reine Angew. Math., **35**:1 (1847), 55-82.

3. *Slavić D.V.* On inequalities for $\Gamma(x+1)/\Gamma(x+1/2)$ // Publikacije Elektrotehničkog fakulteta. Serija Matematika i fizika, **498/541** (1975), 17-20.

4. *Костин А.Б., Шерстюков В.Б.* Об интегральных представлениях величин, связанных с гамма-функцией // Уфимский матем. журн., **13**:4 (2021).

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ

**@ А.Ф. Кужаев**
*arsenkuzh@outlook.com*

УДК 517.5

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.47.*

Рассматриваются весовые пространства интегрируемых $L_p^\omega (p \geqslant 1)$ и непрерывных $C^\omega$ функций на вещественной прямой. Пусть $\mathcal{E}(\Lambda) = \{t^n e^{\lambda_k t}\}$ — система экспоненциальных мономов с положительными показателями. При естественных ограничениях на последовательность показателей этой системы и выпуклый вес $\omega$ формулируются условия, при которых каждая функция из этих подпространств продолжается до целой и представляется рядом по системе $\mathcal{E}(\Lambda)$, который сходится абсолютно и равномерно на компактах в плоскости.

*Ключевые слова*: весовое пространство, целая функция, индекс конденсации.

**On the representation of functions using series of exponential monomials**

We consider the weight spaces of integrable $L_p^\omega (p \geqslant 1)$ and continuous $C^\omega$ functions on the real line. Let $\mathcal{E}(\Lambda) = \{t^n e^{\lambda_k t}\}$ be a system of exponential monomials with positive exponents. Under natural constraints on the sequence of exponents of this system and the convex weight $\omega$, conditions are formulated under which each function of these subspaces continues to an entire function and is represented by a series in the system $\mathcal{E}(\Lambda)$, that converges absolutely and uniformly on compacts in the plane.

*Keywords*: weight space, entire function, condensation index

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность различных положительных чисел $\lambda_k$ и их кратностей $n_k$. Считаем, что $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ и $\lambda_k \to \infty, k \to \infty$. Символом $n(r, \Lambda)$ обозначим число точек $\lambda_k$ (с учетом их кратностей $n_k$), попавших в открытый круг $B(0, r)$, и пусть

$$\bar{n}(\Lambda) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{n(r,\Lambda)}{r}$$

— верхняя плотность последовательности $\Lambda$. Положим еще

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{n_k}{\lambda_k}, \quad \sigma_\Lambda(r) = \sum_{\lambda_k < r} \frac{n_k}{\lambda_k}.$$

---

Кужаев Арсен Фанилевич, аспирант, БашГУ, УГНТУ (Уфа, Россия); Arsen Kuzhaev (Bashkir State University, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia)

Пусть $\rho > 0$. Символом $\Omega_{\Lambda,\rho}$ обозначим множество неотрицательных выпуклых функций на оси $\mathbb{R}$ таких, что $\omega(0) = 0$, $\omega(t) \leqslant \rho|t|, t \leqslant 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \omega(t)/t = +\infty$, и, кроме того, выполнено неравенство

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\omega(2\sigma_\Lambda(t))}{t^2} dt < +\infty$$

Рассматриваются также весовые пространства комплекснозначных интегрируемых функций на вещественной прямой ($p \geqslant 1$)

$$L_p^\omega := \left\{ f : \left( \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)e^{-\omega(t)}|^p dt \right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

и непрерывных функций на вещественной прямой

$$C^\omega := \{f : \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)e^{-\omega(t)}| < +\infty\}.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$. Введем семейство экспоненциальных мономов

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{t^n e^{\lambda_k t}\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}.$$

Символами $W^p(\Lambda,\omega)(p \geqslant 1)$ и $W^0(\Lambda,\omega)$ обозначим соответственно замыкания линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространствах $L_p^\omega$ и $C^\omega$.

Отметим, что вопросы представления функций рядами экспоненциальных мономов в рассматриваемых пространствах и их частных случаях изучались, например, в работе [1]. В отличие от настоящей работы в той работе рассматривались последовательности $\Lambda$, имеющие плотность. При этом накладывалось еще условие $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant h, k \geqslant 1$. В частности, это означает, что последовательность $\Lambda$ имеет плотность

$$n(\Lambda) = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r} \leqslant 1/h.$$

В настоящей работе формулируется утверждение о представлении функций рядом по системе экспоненциальных мономов в указанных выше весовых пространствах функций, которое справедливо при значительно более слабых условиях на последовательность $\Lambda$. Для этих целей находит своё применение индекс конденсации $S_\Lambda$ последовательности $\Lambda$, введенный в работе [2]:

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to0+} \varliminf_{m\to\infty} \frac{1}{\lambda_m} \ln \left| \prod_{\lambda_k\in B(\lambda_m,\delta\lambda_m),k\neq m} \left( \frac{z-\lambda_k}{3\delta\lambda_k} \right)^{n_k} \right|.$$

Свойства индекса $S_\Lambda$ и ряд примеров на его вычисление имеется в работе [3].

**Теорема 1.** *Пусть* $\rho > 0$, *последовательность* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ *такая, что* $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < \infty$, $\sigma_\Lambda(r) \to +\infty, r \to +\infty$, $\omega_0 \in \Omega_(\Lambda, \rho)$. *Тогда каждая функция* $f \in W^p(\Lambda, \omega_0)$ *(где* $\omega(t) = \omega_0(t), t \leqslant 0, \omega(t) = \omega_0(t) + t^2, t > 0$*) продолжается до целой функции* $F$, *для которой имеет место представление вида*

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, z \in \mathbb{C}.$$

*При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.*

**Замечание.** Явные формулы для коэффициентов $a_{k,n}$ содержатся в работе [4] (Theorem 4.2).

## Литература


1. *Zikkos E.* Completeness of an Exponential System in Weighted Banach Spaces and Closure of Its Linear Span // J. Approx. Theory. – 2007. – V. 146 (1). – P. 115–148.

2. *Кривошеев А. С.* Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях // Известия РАН. Серия математическая. – 2004. – Т. 68 (2). – С. 71–136.

3. *Кривошеева О. А.* Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости // Алгебра и анализ. – 2011. –Т. 23 (2). – С. 162–205.

4. *Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A., Kuzhaev A. F.* The Representation by Series of Exponential Monomials of Functions from Weight Subspaces on a Line // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, No. 6, P. 1183–1200.

# ГРАНИЧНАЯ ТЕОРЕМА МОРЕРЫ ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ШАРЕ

**@ Б.Ж. Кутлымуратов**

*bayko-2020@mail.ru*

УДК 517.518

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*48.

В работе рассмотрены граничная теорема Мореры для интегрируемых функции в неограниченной реализации шаре.

*Ключевые слова*: интегрируемые функции, голоморфное продолжение, автоморфизм единичного шара, аналитический диск.

**Morera's boundary theorem for integrable functions in an unbounded realization of a ball**

The paper considers Morera's boundary theorem for integrable functions in an unbounded realization of a ball.

*Keywords*: integrable functions, holomorphic continuation, unit ball automorphism, analytic disc.

Пусть $D$ неограниченная область в $\mathbb{C}^{n+1}$ вида

$$D = \left\{(z, \omega) = (z, \omega_1, \omega_2 ..., \omega_n) \in \mathbb{C}^{1+n} : \operatorname{Im} z > |\omega|^2\right\}.$$

Ее граница называется сферой Пуанкаре ([3],[5]):

$$\partial D = \left\{(\varsigma, \eta) \in \mathbb{C}^{1+n} : \operatorname{Im} \varsigma = |\eta|^2\right\}.$$

Мера Лебега на $\partial D$ записывается следующим образом:

$$d\mu(\varsigma, \eta) = \left(-\frac{i}{2}\right)^n d\varsigma_1 \wedge d\eta \wedge d\overline{\eta}\,,$$

где $\varsigma_1 = \operatorname{Re} \varsigma$, $d\eta = d\eta_1 \wedge d\eta_2 \wedge ... \wedge d\eta_n$, $d\overline{\eta} = d\overline{\eta_1} \wedge d\overline{\eta}_2 \wedge ... \wedge d\overline{\eta}_n$. Обозначим через $G$ единичный шар в $\mathbb{C}^{n+1}$

$$G = \left\{(u, \nu) = (u, \nu_1, \nu_2 ..., \nu_n) \in \mathbb{C}^{1+n} : |u|^2 + |\nu|^2 < 1\right\}$$

Кутлымуратов Баймурат Жиенбаевич, докторант (Phd) кафедры Методика преподавания математики НГПИ. им. Ажинияза (Нукус, Узбекистан); Kutlimuratov Baymurat (Nukus State Pedagogical Institue, Nukus, Uzbekistan)

а через $S$ его границу

$$S = \left\{ (u, \nu) \in \mathbb{C}^{1+n} : |u|^2 + |\nu|^2 = 1 \right\}$$

Через $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2 ..., \varphi_{n+1})$ обозначим преобразование $C^{n+1}_{(u,\nu)} \to C^{1+n}_{(z,\omega)}$, где

$$z = \varphi_1 = \frac{i(1-u)}{1+u},\ \ \omega = \varphi_k = \frac{\nu}{1+u},\ (k = 2, ....n),\ \nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$$

Отображение $\varphi$ является биголоморфизмом шара $G$ на область $D$. ([4]) Как известно, автоморфизм $\varphi_\alpha$ единичного шара $G$, переставляющие точки $a$и $0 = (0, 0, ..., 0)$ имеет явный вид (см. напр. [2]):

$$\varphi_\alpha(u, \nu) = \frac{a - \left(u\bar{a}\ + \langle \nu, \bar{a} \rangle\right) \frac{a}{|a|^2} - \sqrt{1 - |a|^2} \left( (u, \nu) - \left(u\bar{a}\ + \langle \nu, \bar{a} \rangle\right) \frac{a}{|a|^2} \right)}{1 - u\bar{a}\ - \langle \nu, \bar{a} \rangle}$$

где $\langle \nu, \bar{a} \rangle = \nu_1 \bar{a}_1 + ... + \nu_n \bar{a}_n$. Используя отображения $\varphi$ и $\varphi_\alpha$ мы можем, выписать автоморфизм области $D$, переводящий точку $b = \varphi(a)$ в точку $I = (i, 0, ...0)$, в виде композиций:

$$\psi_b = \varphi \circ \varphi_a \circ \varphi^{-1}.$$

Если $\varphi_U$-унитарное преобразование единичного шара $G$, сохраняющий точку $0 = (0, ..., 0)$, то $\psi_U = \varphi \circ \varphi_U \circ \varphi^{-1}$ определяет унитарное преобразование области $D$, сохраняющий точку $i = (i, 0, ..., 0)$. Пусть $\psi$ произвольный автоморфизм, области $D$ и $\psi(I) = b$. Тогда существует унитарное преобразование $\psi_U$ области $D$, для которого

$$\psi_b = \psi_U \circ \psi^{-1}$$

Рассмотрим следующее вложение круга $\Delta$ в область $D$:

$$\left\{ \xi_t \in \mathbb{C}^n : \xi_t = \varphi(t\varphi^{-1}(\lambda^0)),\ t \in \Delta \right\}, \tag{1}$$

где $\lambda^0$ – фиксированная точка из $\partial D$. Если $\psi$-произвольный автоморфизм области $D$, то множество (1) под действием этого автоморфизма перейдет в некоторый аналитический диск с границей $\partial D$.

**Теорема 1.** Пусть $f \in L^p(\partial D)$. Если для функции $f$ выполнена условие

$$\int_T f(\psi(\xi_t) dt = 0$$

(здесь $T$ остов области $D$) для всех автоморфизмов $\psi$ области $D$ и фиксированного $\lambda^0 \in \partial D$, то функция $f$ голоморфно продолжается в область $D$.

## Литература


1. *Хуа Ло-Кен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: 1959 г.

2. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из. М.: Мир, 1984 г.

3. *Мысливец С.Г.* Граничная теорема Мореры на сфере Пуанкаре. //Комплексный анализ и дифференциальные операторы. Сб. научных трудов. Красноярск, КрасГУ, 2000.ст.97-102.

4. *Курбанов Б.Т.* Теорема Морера для-некоторых неограниченных областей. //ДАН Руз. 2001. N 8-9. ст.9-11.

5. *Отемуратов Б.П., Кутлымуратов Б.Ж.* Граничная теорема Мореры на сфере Пуанкаре для интегрируемых функции.//Узбекский матем. журнал. 2010, N 4. ст. 185-195

# ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**@ А. А. Лобода**
*orion1312@yandex.ru*

УДК 517.1

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06*.49.

Получены формулы Фейнмана – Каца, представляющие решения задачи Коши для стохастического уравнения типа Шрёдингера. При этом используется метод аналитического продолжения по аргументу функционального интеграла, представляющего решения ассоциированного уравнения теплопроводности. Результаты обобщаются на случай многомерного белого шума.

*Ключевые слова*: Функциональные интегралы, стохастические уравнения, уравнение Шрёдингера, формула Фейнмана-Каца.

**Representations of solutions of multidimensional stochastic differential equations**

The Feynman-Kac formulas representing the solutions of the Cauchy problem for a stochastic equation of the type of Schrödinger. In this case, we use the method of analytical continuation by the argument of the functional integral representing the solutions of the associated heat equation. The results are generalized to the case of multidimensional white noise.

*Keywords*: Functional integrals, stochastic equations, Schrödinger equation, Feynman-Kac formula.

Мы рассматриваем стохастическое уравнение Шрёдингера с двумерным белым шумом (также называемое уравнением Белавкина):

$$
\begin{aligned}
d\psi(t)(q_1,q_2) = &\left(\frac{i}{2}\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial q_1^2}(q_1,q_2) - \frac{i}{2}\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial q_2^2}(q_1,q_2)\right)dt+ \\
&+\left(iV(q_1,q_2) - \frac{\lambda_1}{4}q_1^2 - \frac{\lambda_2}{4}q_2^2\right)\psi(t)(q_1,q_2)dt+ \\
&+\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}q_1\psi(t)(q_1,q_2)dB_1(t) + \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}}q_2\psi(t)(q_1,q_2)dB_2(t).
\end{aligned}
$$

Здесь $\lambda_1$ и $\lambda_2$ – неотрицательные числовые параметры, отвечающие за точность измерений квантовой системы, а $B_1$ и $B_2$ – независимые броуновские движения. Определение функции $\psi$ – случайная функция, а конфигурационное пространство – двумерная вещественная плоскость.

---

Лобода Артём Александрович, к.ф.-м.н., ассистент, МГУ им. М. В. Ломоносова (Москва, Россия); Artyom Loboda (Moscow State University, Moscow, Russia)

Сначала получается формула Фейнмана – Каца для ассоциированного уравнения теплопроводности

$$
\begin{aligned}
d\psi(t)(q_1,q_2) = &\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial q_1^2}(q_1,q_2)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(t)}{\partial q_2^2}(q_1,q_2)\right)dt+\\
&+\left(V(q_1,q_2)-\frac{\lambda_1}{4}q_1^2-\frac{\lambda_2}{4}q_2^2\right)\psi(t)(q_1,q_2)dt+\\
&+\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}q_1\psi(t)(q_1,q_2)dB_1(t)+\sqrt{\frac{\lambda_2}{2}}q_2\psi(t)(q_1,q_2)dB_2(t).
\end{aligned}
$$

затем, с помощью замены переменных $\widehat{\zeta}(q_1,q_2)=(\sqrt{i}q_1,\frac{1}{\sqrt{i}}q_2)$ и аналитического продолжения, выводится формула Фейнмана-Каца для вспомогательного стохастического уравнения типа Шредингера с вещественным потенциалом, после чего при помощи ещё одного аналитического продолжения получено представление решения задачи Коши для уравнения Белавкина с двумерным белым шумом. Таким образом, справедлива теорема о представлении решения стохастического уравнения Шрёдингера функциональным интегралом.

**Теорема 1.** *Пусть функция $V$ непрерывна в области $\widehat{S}$, сужение функции $V$ на внутреннюю часть $\widehat{S}$ аналитично и ее производная в области $\widehat{S}$ непрерывна и ограничена. Пусть еще функция $\eta$, определенная на $\widehat{S}$, ограничена и непрерывна на $\widehat{S}$, аналитична внутри $\widehat{S}$ и обладает на $\widehat{S}$ ограниченными производными первых двух порядков по каждому аргументу. Тогда функция $\mathcal{F}$, определяемая равенством*

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}(t)(\widehat{q_1},\widehat{q_2})=\\
&=\int_{C_0[0,t]}\exp\left[\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}\int_0^t(\widehat{q_1}+\sqrt{i}\widehat{\xi_1}(\tau))dB_1(\tau)+\sqrt{\frac{\lambda_2}{2}}\int_0^t(\widehat{q_2}+\frac{1}{\sqrt{i}}\widehat{\xi_2}(\tau))dB_2(\tau)\right]\\
&\qquad\times\exp\left[-\int_0^t[\frac{\lambda_1}{2}(\widehat{q_1}+\sqrt{i}\widehat{\xi_1}(\tau))^2+\frac{\lambda_2}{2}(\widehat{q_2}+\frac{1}{\sqrt{i}}\widehat{\xi_2}(\tau))^2]d\tau\right]\times\\
&\qquad\times\exp\left[\int_0^t iV(\widehat{q_1}+\sqrt{i}\widehat{\xi_1}(\tau),\widehat{q_2}+\frac{1}{\sqrt{i}}\widehat{\xi_2}(\tau))]d\tau\right]\times\\
&\qquad\times\eta(\widehat{q_1}+\sqrt{i}\widehat{\xi_1}(t),\widehat{q_2}+\frac{1}{\sqrt{i}}\widehat{\xi_2}(t))w_{0,t}\widehat{\zeta}^{-1}(d\widehat{\xi_1}d\widehat{\xi_2}),
\end{aligned}
$$

*является решением задачи Коши для уравнения Белавкина.*

Для обобщения этого результата на бесконечномерный случай достаточно сделать замену переменных, при которой на корень из мнимой единицы умножаются те из аргументов, при вторых частных производных по которым в уравнении стоит знак плюс, а делятся те, при вторых частных производных по которым в уравнении стоит знак минус.

## Литература

1. *Gough J., Obrezkov O. O., Smolyanov O. G.* Randomized Hamiltonian Feynman integrals and Shcrödinger-Itô stochastic equations // Izvestiya: Mathematics, **69**:6 (2005), 1081-1098.

2. *Doss H.* Sur une Resolution Stochastique de l'Equation de Schrödinger a Coefficients Analytiques // Communications in Mathematical Physics, **73** (1980), 247-264.

3. *Loboda A.A.* The Doss Method for the Stochastic Schrödinger –Belavkin Equation // Mathematical Notes, **106**:2 (2019), 311-315.

4. *Loboda A.A.* Schrödinger Equation with Signed Hamiltonian // Russian Journal of Mathematical Physics, **27**:1 (2020), 99-103.

# О КОМПЬЮТЕРНЫХ АЛГОРИТМАХ ОПИСАНИЯ ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{R}^4$

**@ А.В. Лобода, Т.Т.З. Нгуен**

*lobvgasu@yandex.ru, nttduong@ued.udn.vn*

УДК 517.518

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06*.50.

Матричные 3-мерные алгебры Ли, отвечающие аффинно однородным поверхностям пространства $\mathbb{R}^4$, ищутся как решения (в пакете Maple) больших систем квадратичных уравнений на элементы базисных матриц алгебры и коэффициенты канонических уравнений орбит этих алгебр. Описаны все алгебры, орбиты которых «слабо вырождены» и имеют в канонических уравнениях специальный вид квадратичного и кубического многочленов.

*Ключевые слова*: однородная гиперповерхность, алгебра Ли, символьные вычисления

**On computer algorithms for describing homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$**

The matrix 3-dimensional Lie algebras corresponding to affinely homogeneous surfaces of the space $\mathbb{R}^4$ are sought as a solutions (in the Maple package) of large systems of quadratic equations for the elements of the basis matrices of the algebra and the coefficients of the canonical equations of the orbits of these algebras. All algebras are described whose orbits are “weakly degenerate” and have a special form of quadratic and cubic polynomials in the canonical equations.

*Keywords*: homogeneous hypersurface, Lie algebra, symbolic computation

Важным фрагментом классификации голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей комплексного пространства $\mathbb{C}^4$ должно стать описание трубок над аффинно однородными гиперповерхностями пространства $\mathbb{R}^4$. При этом в последней задаче к настоящему времени изучены лишь поверхности с невырожденной квадратичной формой, имеющие более чем 3-мерные алгебры Ли касательных (аффинных) векторных полей (см. [1]).

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497) и Московского Центра фундаментальной и прикладной математики (МГУ им. М.В. Ломоносова).

Лобода Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия); Alexander Loboda (Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia)

Нгуен Тхи Тхюи Зыонг, к.ф.-м.н., университет Дананга (Дананг, Вьетнам); Nguen Thi Thuy Duong (The university of DaNang - University of Science and Education, Vietnam)

Ниже обсуждаются аффинно однородные «слабо вырожденные» гиперповерхности в $\mathbb{R}^4$, являющиеся орбитами 3-мерных алгебр Ли. Уравнение любой такой орбиты задаем в виде

$$x_4 = x_1x_2 + (x_1^3 + x_1x_2x_3) + \sum_{k\geq 4} F_k(x_1, x_2, x_3). \tag{1}$$

Каждая из базисных матриц 3-мерной алгебры аффинных векторных полей содержит $16 = 4x4$ неизвестных элементов и включает в себя сдвиг по направлению одной из осей $x_1, x_2, x_3$ в касательной плоскости к орбите. Учет касания поверхности (1) полями из алгебры дает линейные ограничения на часть матричных элементов, а условие замкнутости алгебры относительно коммутатора $[E_j, E_k] = E_jE_k - E_kE_j$ базисных полей приводит к системе 48 квадратичных уравнений относительно оставшихся 24 матричных элементов.

Попытки использования команды solve и базисов Гребнера оказались безуспешными как в данной ситуации, так и в случае более общего многочлена $F_3$ из уравнения (1). В то же время обозначенный упрощенный вид многочленов $F_2 = x_1x_2$ и $F_3 = x_1^3 + x_1x_2x_3$ позволяет с помощью символьных вычислений полностью решить эту систему пошаговым методом.

**Теорема 1.** *Существует лишь 4 семейства 3-мерных матричных алгебр Ли, соответствующих решениям обозначенной системы. Два из этих семейств являются 5-параметрическими, каждое из остальных двух семейств описывается 4 параметрами.*

Базис одного 5-параметрических семейств алгебр Ли приведен ниже:

$$E_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & -1 & a_{14} & 1 \\ -3 & 0 & 0 & a_{24} & 0 \\ a_{31} & a_{14} & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (a_{34} - a_{11}a_{14})/3 & 0 \\ 0 & -(a_{24} + a_{31})/3 & -1 & a_{14} & 1 \\ a_{14} & -(a_{34} - a_{11}a_{14})/3 & 0 & -a_{14}\,(a_{24} + a_{31})/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -(a_{24} + a_{31})/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для перехода от алгебр Ли к их орбитам приходится преобразовывать базисы этих алгебр к виду, удобному для интегрирования, освобождаясь при этом от «лишних» параметров. Так, второе 5-параметрическое семейство полученных алгебр содержит 4-параметрическое подсемейство абелевых алгебр Ли. В свою очередь, это подсемейство удается свести матричными подобиями к 2-параметрическому семейству алгебр Ли с базисами вида ($\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$)

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ e_2 = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 1 \\ \mu_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Поводом к изучению однородных поверхностей вида (1) послужили линейно однородные орбиты в $\mathbb{R}^4$ именно этого семейства алгебр, описываемые (при $\mu_1 = t_1 + t_2, \mu_2 = -t_1 t_2, \ t_1 \neq t_2$) уравнениями

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = (x_2^2 - \mu_1 x_2 x_4 - \mu_2 x_4^2) \ln\left(\frac{x_4 - t_2 x_4}{x_4 - t_1 x_4}\right). \tag{4}$$

**Литература**

1. *Eastwood M.G., Ezhov V.V.* Homogeneous Hypersurfaces with Isotropy in Affine Four-Space //Труды МИАН. **235** (2001), 49–63.

# ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЯМИ ПОРЯДКА МЕНЬШЕ ПЕРВОГО В ПОЛУПЛОСКОСТИ

**@ К.Г. Малютин, М.В. Кабанко, В.А. Малютин**

*malyutinkg@gmail.com, kabankom@mail.ru, vladmaliutin2003@gmail.com*

УДК 517.518

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*51.

Решена задача простой свободной интерполяции в пространстве аналитических в верхней полуплоскости функций конечного порядка, не превосходящего единицу. Найдены критерии разрешимости в терминах канонического произведения и меры, соответствующих узлам интерполяции.

*Ключевые слова*: свободная интерполяция, полуплоскость, конечный порядок

**Interpolation by functions of order less than the first in half-plane**

The problem of simple free interpolation in the space of analytic functions in the upper half-plane of finite order not exceeding one is solved. Criteria for solvability are found in terms of the canonical product and measure corresponding to the interpolation knots.

*Keywords*: free interpolation, half-plane, finite order

Обозначим через $AK$ пространство аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$ функций $f(z)$, таких, что в каждой ограниченной области, принадлежащей верхней полуплоскости, $\ln|f(z)|$ имеет положительную гармоническую мажоранту.

Пусть функция $f \in AK$ такая, что непусто множество $\{\mu\}$ тех $\mu > 0$, для которых имеет место оценка

$$\sup_{0<\theta<\pi} \ln|f(re^{i\theta})| < r^{\mu}, \quad r > r_{\mu}\,.$$

Обозначим через $\{\nu\}$ множество таких чисел $\nu > 0$, для которых

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\nu}} \equiv 0, \quad 0 < \theta < \pi\,.$$

Малютин Константин Геннадьевич, д.ф.-м.н., профессор, КГУ (Курск, Россия); Konstantin Malyutin (Kursk State University, Kursk, Russia)

Кабанко Михаил Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, КГУ (Курск, Россия); Mikhail Kabanko (Kursk State University, Russia)

Малютин Владислав Александрович, студент, СумГУ (Сумы, Украина), Международная школа Riverstone (Бойсе, США); Vladyslav Maliutin (Sumy State University, Ukraine; Riverstone International School, Boise, USA)

Следуя Н. В. Говорову [1, Глава I, §1, Определение 1.1], введем следующее определение:

**Определение 1 (Говоров).** *Число*

$$\rho = \max\{\inf\{\mu\}, \inf\{\nu\}\}$$

*называется порядком функции $f \in AK$ в смысле Говорова.*

В отличие от целых функций, для которых порядок характеризует ее рост в окрестности бесконечной точки, для функций $f(z)$, аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, понятие порядка может характеризовать как ее рост, так и убывание при $|z| \to \infty$.

Обозначим через $AK_\rho$, $\rho > 0$ пространство аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функций $f(z)$, порядок которых в смысле эквивалентных между собой определений Н. В. Говорова [1, Глава I, §1, Определение 1.1] и Е. Титчмарша [2, с. 191] не превосходит $\rho$.

Введем следующее определение.

**Определение 2.** *Последовательность $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}_+$ называется интерполяционной последовательностью в пространстве $AK_\rho$, $0 < \rho \leqslant 1$, если для любой последовательности комплексных чисел $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяющих условиям:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln^+\ln^+|b_n|}{\ln|a_n|+1} < \infty\,, \quad \limsup_{|a_n|\to\infty} \frac{\ln^+\ln^+|b_n|}{\ln|a_n|} \leqslant \rho,$$

*существует функция $F \in AK_\rho$, решающая проблему интерполяции*

$$F(a_n) = b_n, \quad n = 1, 2, \dots .$$

В такой постановке задача интерполяции относится к задачам *свободной интерполяции*, когда на значения в узлах накладываются минимальные ограничения, обусловленные принадлежностью интерполирующей функции заданному пространству. Мы получаем критерии ее разрешимости в терминах канонического произведения, соответствующего узлам интерполяции.

**Теорема.** *Следующие два утверждения эквивалентны.*

1) *Последовательность $A$ является интерполяционной последовательностью в пространстве $AK_\rho$, $0 < \rho \leqslant 1$.*

2) *Каноническая функция $E(z)$ удовлетворяет соотношениям:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\ln|a_n|}\ln^+\ln^+\frac{1}{|E'(a_n)|\Im a_n} < \infty\,, \limsup_{|a_n|\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|}\ln^+\ln^+\frac{1}{|E'(a_n)|\Im a_n} \leqslant \rho.$$

Задачи простой и кратной интерполяции в пространстве $AK_\rho$ при $\rho > 1$ были решены в работах [3, 4, 5, 6].

## Литература

1. *Говоров Н.В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. — М.: Наука, 1986.

2. *Титчмарш Е.* Теория функций. — М.: Наука, 1980.

3. *Malyutin K.G., Gusev A.L.* The interpolation problem in the spaces of analytical functions of finite order in the half-plane // Probl. Anal. Issues Anal., **7(25)**:Special Issue (2018), 113-123.

4. *Malyutin K.G., Gusev A.L.* Geometric meaning of the interpolation conditions in the class of functions of finite order in the half-plane // Probl. Anal. Issues Anal., **8(26)**:3, 96-104.

5. *Malyutin K., Kabanko M.* Multiple Interpolation by the Functions of Finite Order in the Half-plane // Lobachevskii Journal of Mathematics, **41**:11 (2020), 2211-2222.

6. *Malyutin K., Kabanko M., Kozlova I.* Multiple Interpolation by the Functions of Finite Order in the Half-plane. II // Lobachevskii Journal of Mathematics, **42**:4 (2021), 811–822.

# ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ НОРМАЛЬНОГО ТИПА ПРИ УТОЧНЕННОМ ПОРЯДКЕ БУТРУ

**@ К.Г. Малютин, И. В. Костенко**
*malyutinkg@gmail.com, sandrakoh@mail.ru*

УДК 517.538.7

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*52.

Решена задача простой свободной интерполяции в пространстве целых функций конечного порядка и нормального типа относительно уточненного порядка в смысле Бутру. Найдены критерии разрешимости в терминах канонического произведения соответствующего узлам интерполяции.

*Ключевые слова*: свободная интерполяция, целая функция, порядок Бутру

**Interpolation by functions of order less than the first in half-plane**

The problem of simple free interpolation in the space of entire functions of finite order and normal type with respect to the improved order in the sense of Boutroux is solved. Criteria for solvability in terms of the canonical product corresponding to the interpolation nodes are found.

*Keywords*: free interpolation, entire function, Boutroux order

Абсолютно непрерывная функция $\rho(r)$, $r \in [0, +\infty)$, называется уточнённым порядком в смысле Бутру, если она удовлетворяет следующим условиям

$$-\infty < \alpha = \liminf_{r\to\infty} \rho(r) \le \rho = \limsup_{r\to\infty} \rho(r) \le +\infty,$$

$$\lim_{r\to\infty} \rho'(r) r \ln r = 0\,.$$

Здесь под $\rho'(r)$ мы понимаем наибольшее производное число. Если $\alpha = \rho$, то функция $\rho(r)$ называется уточнённым порядком в смысле Валирона (часто – просто уточнённым порядком). Нас будет интересовать случай $\alpha = 0$. Положим $V(r) = r^{\rho(r)}$, $r > 0$

---

Малютин Константин Геннадьевич, д.ф.-м.н., профессор, КГУ (Курск, Россия); Konstantin Malyutin (Kursk State University, Kursk, Russia)

Костенко Ирина Вадимовна, аспирант, КГУ (Курск, Россия); Iryna Kostenko (Kursk State University, Russia)

Обозначим через $[\rho(r),\infty)_B$ пространство целых функций $f(z)$, таких, что для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется неравенство $\ln|f(z)| \le K_f V(|z|)$, где $K_f > 0$ — постоянная, зависящая от $f$ и не зависящая от $z$.

Введем следующее определение.

**Определение 1.** *Последовательность $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ называется интерполяционной последовательностью в пространстве $[\rho(r),\infty)_B$, если для любой последовательности комплексных чисел $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяющих условию*:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln^+|b_n|}{V(|a_n|)} < \infty\,,$$

*существует функция $F \in [\rho(r),\infty)_B$, решающая проблему интерполяции*

$$F(a_n) = b_n, \quad n = 1, 2, \dots\,.$$

В такой постановке задача интерполяции относится к задачам *свободной интерполяции*, когда на значения в узлах накладываются минимальные ограничения, обусловленные принадлежностью интерполирующей функции заданному пространству. Мы получаем критерии ее разрешимости в терминах канонического произведения, соответствующего узлам интерполяции.

**Теорема.** *Следующие два утверждения эквивалентны.*

1) *Последовательность $A$ является интерполяционной последовательностью в пространстве $[\rho(r),\infty)_B$.*

2) *Каноническая функция $E(z)$ последовательности $A$ удовлетворяет соотношению*:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln^+ \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty\,.$$

Заметим, что если $\rho(r)$ — уточнённый порядок в смысле Валирона, то теорема обобщает результат О. С. Фирсаковой [1], а в случае $\rho(r) \equiv \rho > 0$ — результаты А. Ф. Леонтьева [2, 3].

## Литература

1. *Фирсакова О.С.* Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций // Докл. АН СССР, **120**:3 (1958), 447-480.

2. *Леонтьев А.Ф.* Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка нормального типа // Докл. АН СССР, **66**:2 (1949), 153-156.

3. *Леонтьев А.Ф.* К вопросу об интерполяции в классе целых функций конечного порядка // Матем. сб., **4**:1 (1957), 81-96.

# КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

**@ К.Г. Малютин, А.А. Наумова**

*malyutinkg@gmail.com, aliona.filatowa2013@yandex.ru*

УДК 517.518

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*53.

Найдены новые формулы для коэффициентов Фурье мероморфных в единичном круге функций, которые отличаются от формул, полученных ранее Рубелом и Тейлором. Коэффициенты Фурье выражаются через меру, определяемую нулями и полюсами функции.

*Ключевые слова*: коэффициент Фурье, мероморфная функция, единичный круг.

**Fourier coefficients of meromorphic functions in the unit disc**

New formulas for the Fourier coefficients of meromorphic functions in the unit disc are found. These formulash differ from the formulas obtained earlier by Rubel and Taylor. The Fourier coefficients are expressed in terms of the measure determined by the zeros and poles of the function.

*Keywords*: fourier coefficient, meromorphic function, unit disc.

Введем необходимые определения. Через $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ обозначим открытый единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ — множество целых чисел, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел. Через $C(a, r) = \{z : |z - a| < r\}$ обозначим открытый круг с центром в точке $a$ радиуса $r$. В частности, $C(r) = C(0, r)$. Пусть $\mu$ – положительная мера в круге $\mathbb{D}$; $\mu(r)$ – мера круга $C(r)$. Если не оговорено противное, всюду предполагаем, что $0 \notin \operatorname{supp}\mu$, поскольку это ограничение в рамках рассматриваемых вопросов всегда легко снимается. Пусть

$$N_\mu(r) = \int_0^r \frac{\mu(t)}{t}\, dt$$

– *проинтегрированная, или усредненная, функция меры* $\mu$. Для заданной меры $\mu$ обозначим

$$d\mu_k(\zeta) = \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k}, \quad \mu_k(r) = \mu_k((r)) \quad (k \in \mathbb{N})\,.$$

---

Малютин Константин Геннадьевич, д.ф.-м.н., профессор, КГУ (Курск, Россия); Konstantin Malyutin (Kursk State University, Kursk, Russia)

Наумова Алена Александровна, аспирант, КГУ (Курск, Россия); Alena Naumova (Kursk State University, Russia)

Пусть $f$ —мероморфная функция в круге $\mathbb{D}$, $\mathcal{Z}=\{a_n\}$, $\mathcal{P}=\{b_n\}$ — последовательности нулей и полюсов функции $f$, через $\mu_f^+$ обозначим меру $\mu_f^+(G) := \int_G d\,\delta_{\mathcal{Z}}(z)$, где $\delta_{\mathcal{Z}}$ — мера Дирака, сосредоточенная в точках $\mathcal{Z}$. Аналогично, $\mu_f^-(G) := \int_G d\,\delta_{\mathcal{P}}(z)$. Положим $\mu^f=\mu_f^+ + \mu_f^-$,

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta, \quad T(r,f)=m(r,f)+N_{\mu_f^-}(r)$$

(здесь, как обычно, $\ln^+ x=\max(\ln x,0)$ при $x\geq 0$, $\ln 0 := -\infty$),

$$c_k(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|e^{-ik\theta}\,d\theta,\ k\in\mathbb{Z},$$

– *коэффициенты Фурье функции* $f$.

В следующей лемме мы получаем выражения для коэффициентов Фурье мероморфной в круге $\mathbb{D}$ функции, которые несколько отличаются от соответствующих формул, полученных в работе [1].

**Лемма.** *Пусть $f$ — мероморфная функция в круге $C(0,1)$, $f(0)=1$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{P}$ — последовательности нулей и полюсов функции $f$,*

$$\ln f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(f)z^k=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^k$$

*— разложение в некоторой окрестности точки $z=0$.*

*Тогда для $0<r<1$ справедливо*

$$c_0(r,f)=N(r,1/f)-N(r,f);$$

$$c_k(r,f)=\frac{r^k}{2}\alpha_k+\frac{1}{2k}\iint\limits_{|\zeta|\leqslant r}\frac{r^{2k}-\tau^{2k}}{r^k}\,d\mu_k^f(\zeta), \quad z=re^{i\theta}, \zeta=\tau e^{i\varphi},$$

*при $k\geq 1$ и $c_k=\bar{c}_{-k}$ при $k\leq -1$.*

## Литература

1. *Rubel l.A., Taylor B.A.* A Fourier series method for meromorphic and entire functions // Bull. Soc. Math. France, **96** (1968), 53-96.

# ПОДПРОСТРАНСТВА, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАТОРА ОБОБЩЕННОГО ОБРАТНОГО СДВИГА, И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

**@ С.Н. Мелихов**

*snmelihov@yandex.ru, snmelihov@sfedu.ru*

УДК 517.547, 517.983.22

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06*.54.

Описаны собственные замкнутые инвариантные подпространства оператора обобщенного обратного сдвига в пространстве всех функций, голоморфных в односвязной области в комплексной плоскости, содержащей точку 0.

*Ключевые слова*: голоморфная функция, оператор обратного сдвига, инвариантное подпространство.

**Subspaces invariant under the generalized backward shift operator and rational functions**

We describe proper closed invariant subspaces of the generalized backward shift operator in the space of all holomorphic functions on a simply connected domain in the complex plane containing the point 0.

*Keywords*: holomorphic function, backward shift operator, invariant subspace.

Далее $\Omega$ — односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая точку 0; $H(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в $\Omega$ функций с топологией равномерной сходимости на компактах $\Omega$. Функция $g_0 \in H(\Omega)$ такая, что $g_0(0) = 1$, задает оператор обобщенного обратного сдвига $D_{0,g_0}(f)(t) := \frac{f(t)-g_0(t)f(0)}{t}$, линейный и непрерывный в $H(\Omega)$.

В докладе описываются собственные замкнутые $D_{0,g_0}$-инвариантные подпространства $H(\Omega)$. Пусть $\mathbb{C}[z]_n$, $n \geq 0$, — пространство всех многочленов над полем $\mathbb{C}$ степени не выше $n$; $\mathbb{C}[z]_{-\infty} := \{0\}$. Кратным многообразием в $\Omega$ называется конечная или бесконечная последовательность $W$ пар $(\lambda_k, m_k)$, где $\{\lambda_k\}$ — дискретное подмножество $\Omega$ и $m_k \in \mathbb{N}$ для любого $k$. Для непустого кратного многообразия $W = \{(\lambda_k, m_k)\}$ в $\Omega$ введем множество

$$S(W) := \{f \in H(\Omega) \,|\, f^{(j)}(\lambda_k) = 0,\ 0 \leq j \leq m_k - 1 \ \text{для любого}\ k\};$$

---

Мелихов Сергей Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия), ЮМИ ВНЦ РАН (Владикавказ, Россия); Sergej Melikhov (Southern Federal University, Rostov on Don, Russia; Southern Mathematical Institute of VSC of RAS, Vladikavkaz, Russia)

$S(W)$ — собственное замкнутое подпространство $H(\Omega)$.

Введем дроби $q_{\lambda,k}(t) := \frac{1}{(t-\lambda)^k}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Если $\Omega \neq \mathbb{C}$ и $\Upsilon$ — конечное кратное многообразие в $\mathbb{C}\backslash\Omega$, т. е. $\Upsilon = \{(\lambda, n_\lambda) \,|\, \lambda \in \Lambda\}$, где $n_\lambda \in \mathbb{N}$, $\Lambda$ — конечное подмножество $\mathbb{C}\backslash\Omega$, то положим

$$\mathbb{C}^-_\Upsilon(z) := \operatorname{span}\{q_{\lambda,k} \,|\, \lambda \in \Lambda,\, 1 \le k \le n_\lambda\}.$$

При этом $\operatorname{span} U$ обозначает линейную оболочку подмножества $U$ линейного пространства. Если $\Upsilon$ пусто, то полагаем $\mathbb{C}^-_\Upsilon(z) := \{0\}$.

Ниже символ $\mathcal{D}(g_0)$ обозначает множество всех многочленов $p$ таких, что $p(0) = 1$, функция $g_0/p$ голоморфна в $\Omega$ и $p$ не имеет корней в $\mathbb{C}\backslash\Omega$.

Пусть $W(g_0)$ — нулевое многообразие $g_0$, т. е. множество всех пар $(\mu, n(\mu))$, $\mu \in Z(g_0)$, где $Z(g_0)$ — множество всех нулей $g_0$ в $\Omega$, а $n(\mu)$ — кратность нуля $\mu \in Z(g_0)$. Для непустого кратного многообразия $W = \{(\lambda_k, m_k)\}$ в $\Omega$ будем писать $W \prec W(g_0)$, если $\{\lambda_k\} \subset Z(g_0)$ и $m_k \le n(\lambda_k)$ для любого $k$.

Приведем результат для случая, когда функция $g_0$ имеет нули в $\Omega$ и $\Omega \neq \mathbb{C}$. При этом $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\deg(p)$ — степень многочлена $p$.

**Теорема.** *Пусть $\Omega$ — односвязная область в $\mathbb{C}$, содержащая точку $0$, $\Omega \neq \mathbb{C}$ и функция $g_0$ имеет нули в $\Omega$.*
*(i) Для любого непустого кратного многообразия $W \prec W(g_0)$ в $\Omega$ множество $S(W)$ является собственным замкнутым $D_{0,g_0}$-инвариантным подпространством $H(\Omega)$.*
*(ii) Для любого многочлена $p \in \mathcal{D}(g_0)$, любого $n \in \mathbb{N}_0$ такого, что $n \ge \deg(p) - 1$, или $n = -\infty$, конечного или пустого кратного многообразия $\Upsilon = \{(\lambda, n_\lambda) \,|\, \lambda \in \Lambda\}$ в $\mathbb{C}\backslash\Omega$ множество $\frac{g_0}{p}\mathbb{C}[z]_n + g_0\mathbb{C}^-_\Upsilon(z)$ является замкнутым $D_{0,g_0}$-инвариантным подпространством $H(\Omega)$.*

*При этом оно собственное тогда и только тогда, когда $n \neq -\infty$ или $\Upsilon$ непусто.*
*(iii) Для любого собственного замкнутого $D_{0,g_0}$-инвариантного подпространства $S$ пространства $H(\Omega)$ имеет место одна из следующих ситуаций:*
*(a) существует непустое кратное многообразие $W$ в $\Omega$ такое, что $W \prec W(g_0)$ и $S = S(W)$;*
*(b) найдутся многочлен $p \in \mathcal{D}(g_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$, для которых $n \ge \deg(p) - 1$ и $S = \frac{g_0}{p}\mathbb{C}[z]_n$;*
*(c) найдется конечное многообразие $\Upsilon$ в $\mathbb{C}\backslash\Omega$, для которого $S = g_0\mathbb{C}^-_{\Upsilon(S)}(z)$;*
*(d) существуют многочлен $p \in \mathcal{D}(g_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$, для которых $n \ge \deg(p) - 1$, и конечное многообразие $\Upsilon$ в $\mathbb{C}\backslash\Omega$ такие, что $S = \frac{g_0}{p}\mathbb{C}[z]_n + g_0\mathbb{C}^-_\Upsilon(z)$.*

## Литература

1. *Иванова О.А., Мелихов С.Н., Мелихов Ю.Н.* Инвариантные подпространства оператора обобщенного обратного сдвига и рациональные функции.

# РАЗВИТИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФОРМУЛ КАРЛЕМАНА И Б.Я. ЛЕВИНА НА ОСНОВЕ ИНВЕРСИИ

**@ Э.Б. Меньшикова**

*algeomt@bsu.bashedu.ru*

УДК 517.53, 517.574

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06*.55.

При изучении взаимосвязей между распределениями нулей голоморфных и целых функций с добавлением распределений полюсов для мероморфных функций и ростом этих функций важны соотношения, связывающие эти распределения с интегральными или иными характеристиками роста. Это, как правило, разнообразные интегральные формулы. Часто осложняющим фактором при использовании таких формул является присутствие в них производных, по нормали или других, от исследуемых функций. Предлагается вариант избавления от таких сложностей за счёт использования инверсии на плоскости.

*Ключевые слова*: мероморфная функция, распределение нулей и полюсов, субгармоническая функция, мера Рисса.

**Development of integral formulas of Carleman and B.Ya. Levin on the basis of inversion**

When studying the relationships between the distributions of zeros of holomorphic and entire functions with the addition of pole distributions for meromorphic functions and the growth of these functions, the relations connecting these distributions with integral or other growth characteristics are important. These are, as a rule, various integral formulas. Often a complicating factor when using such formulas is the presence in them of derivatives, normal or otherwise, of the functions under study. A variant of getting rid of such difficulties by using inversion on the plane is proposed.

*Keywords*: meromorphic function, distribution of zeros ans poles, subharmonic funcrtion, Riesz measure

В исследованиях по теории роста целых, мероморфных, голоморфных функций $f$ важную роль играют различные интегральные формулы, устанавливающие взаимосвязи меду ростом и поведением этих функций с одной стороны и распределением их нулей и/или полюсов с другой. Среди них и классические интегральные формулы Карлемана

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90007 «Аспиранты».

Меньшикова Энже Булатовна, аспирант, БашГУ (Уфа, Россия); Enzhe Menshikova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

[1; гл. I, § 3, теорема 3.1]Menshikova:2 и Б. Я. Левина [1; гл. I, § 3, теорема 3.4]. Но в этом случае возможный осложняющий фактор для установления упомянутых взаимосвязей — присутствие в подынтегральных выражениях *частных производных* $u'_{\mathrm{rad}}$ *по радиусу в полярных координатах* для $u := \ln|f|$. Здесь мы приводим только Основную нашу теорему в субгармоническом обрамлении, из которой и получаются в [2] несколько новых интегральных формул типа Карлемана и Б. Я. Левина.

Для области $D$ с кусочно-гладкой границей $\partial D$ через $\sigma_D$ обозначаем *меру длины на* $\partial D$ в евклидовой метрике, а $\vec{\mathbf{n}}_D$ — *векторы внешней нормали* к границе $\partial D$, существующие на $\partial D$ всюду за исключением не более чем счётного числа точек из $\partial D$. Если производная по внешней нормали $\frac{\partial}{\partial \vec{\mathbf{n}}_D}$ присутствует в подынтегральном выражении для интеграла $\int_{\partial D}$ по границе $\partial D$, то нижний индекс $_D$ в обозначении внешней нормали $\vec{\mathbf{n}}_D$ часто опускаем и пишем просто $\frac{\partial}{\partial \vec{\mathbf{n}}}$ вместо $\frac{\partial}{\partial \vec{\mathbf{n}}_D}$. Производные по внешней нормали к границам кругов $D(r) \subset \mathbb{C}$ от функции $v$ — это обычные частные производные по радиусу в полярной системе координат и в этом случае, как и во введении, используем для них обозначение $v'_{\mathrm{rad}} = \frac{\partial v}{\partial \vec{\mathbf{n}}_{D(r)}}$. Через $\mathrm{d}\lambda$ обозначаем *элемент площади* на $\mathbb{C}$. *Инверсия относительно окружности* $\partial D(r)$ *радиуса* $r > 0$ *с центром в нуле* на расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}_\infty$ — это *конформная биекция* $z \underset{z\in\mathbb{C}_\infty}{\longmapsto} r^2/\bar{z}$, определяющая *инверсию множеств* $B^\star_r := \bigl\{r^2/\bar{z} \bigm| z \in B\bigr\} \subset \mathbb{C}_\infty$ и *инверсию функций* $f^\star_r(z) \underset{z\in B^\star_r}{:=} f\bigl(r^2/\bar{z}\bigr)$ для функций $f$ на $B \subset \mathbb{C}_\infty$. Множество $B \subset \mathbb{C}_\infty$ *симметрично относительно окружности* $\partial D(r)$, если $B = B^\star_r$. Через $\triangle$ обозначаем *оператор Лапласа.*

**Основная теорема** [2] *Пусть* $D \neq \emptyset$ *— ограниченная область в* $\mathbb{C}$ *с кусочно-гладкой границей* $\partial D$*, симметричная относительно окружности* $\partial D(r)$*,* $S := D \cap \partial D(r) \neq \emptyset$*,* $\arg S := \bigl\{\theta \in [0, 2\pi) \bigm| re^{\mathrm{i}\theta} \in S\bigr\} \neq \emptyset$*. Если* $V\colon \overline{D} \setminus D(r) \to \mathbb{R}$ *— гладкая функция, с непрерывными вторыми частными производными в области* $D \setminus \overline{D}(r)$*, обращающаяся в нуль на части* $\partial D \setminus \overline{D}(r)$ *границы* $\partial D$*, с инверсным продолжением, определяемым на* $\overline{D}$ *как функция*

$$V^\odot_r(z) \underset{z\in\overline{D}}{:=} \begin{cases} V(z) \text{ при } z \in \overline{D} \setminus D(r), \\ V^\star_r(z) := V\bigl(r^2/\bar{z}\bigr) \text{ при } z \in \overline{D} \cap D(r) \end{cases},$$

*то для любой разности* $U \not\equiv \pm\infty$ *субгармонических на* $\overline{D}$ *функций с* *зарядом Рисса* $\frac{1}{2\pi}\triangle U$ *имеет место равенство*

$$\int_D V_r^{\odot}\,\mathrm{d}\frac{1}{2\pi}\triangle U-\frac{1}{2\pi}\int_{D\setminus\partial D(r)}U\triangle V_r^{\odot}\,\mathrm{d}\lambda$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}U\frac{\partial V_r^{\odot}}{\partial\vec{\mathbf{n}}_D}\,\mathrm{d}\sigma_D+\frac{r}{\pi}\int_{\arg S}U(re^{\mathrm{i}\theta})V'_{\mathrm{rad}}(re^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta,$$

*что для гармонической функции* $V$ *на* $D\setminus\overline{D}(r)$ *упрощается до равенства*

$$\int_D V_r^{\odot}\,\mathrm{d}\frac{1}{2\pi}\triangle U=-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}U\frac{\partial V_r^{\odot}}{\partial\vec{\mathbf{n}}_D}\,\mathrm{d}\sigma_D+\frac{r}{\pi}\int_{\arg S}U(re^{\mathrm{i}\theta})V'_{\mathrm{rad}}(re^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

В роли $U$ может выступать $\ln|f|$, где $f\neq 0,\infty$ — мероморфная на $\overline{D}\setminus D(r)$ функция. Оба равенства показывают, что производные по нормали от $U$ в этих формулах уже отсутствуют, а присутствуют со стороны функции $U$ наряду с ней самой только её заряд Рисса $\frac{1}{2\pi}\triangle U$. Это позволяет получить новые взаимосвязи, о которых говорилось изначально в аннотации и преамбуле тезисов.

## Литература


1. *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций. — Москва: Наука, 1970.

2. *Меньшикова Э.Б.* Интегральные формулы типа Карлемана и Б. Я. Левина для мероморфных и субгармонических функций // Известия вузов. Математика. 17 стр. (принято к печати в сентябре 2021 г.).

# ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА БЕСОВА. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИИ

**@ Г. Мурат, Л.К. Кусаинова**

*gulnar_18.01@mail.ru, kussainova.leili@gmail.com*

УДК 517.982

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*56.

В работе введены весовые пространства Бесова по типу пространств $l_p(A_j)$. Доказано свойство инвариантности относительно вещестенной интерполяции. Получены теоремы вложения.

*Ключевые слова*: интерполяция весовых пространств.

**Weighted Besov spaces. Embedding and interpolation theorems**

Weighted Besov spaces according to the type of $l_p(A_j)$ spaces is introduce. The property of invariance with respect to real interpolation is proved. Embedding theorems are obtained.

*Keywords*: weighted spaces interpolation

Пусть $\rho, h(\cdot)$ - положительные функции в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, и пусть:

1) $0 < h(x) \leq 1$,

2) существуют такие $\varkappa > 1$ и $\tau \in (0,1)$, что

$$\varkappa^{-1} \leq \frac{h(y)}{h(x)} \leq \varkappa, \text{ если } y \in \widetilde{Q}(x) = \tau Q(x), \tag{1}$$

где $Q(x) = Q_h(x), \tau Q(x) = Q_{\tau h}(x)$ при $h = h(x)$, $Q_h(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_i - x_i| < h/2,\ 1 \leq i \leq n\}$. Из условий 1) и 2) на $h(\cdot)$ следует возможность представления $\mathbb{R}^n = \cup_{j=1}^n \widehat{Q}^j = \cup_{j=1}^n \widetilde{Q}^j$, где $\widehat{Q}^j = \frac{3}{4}\widetilde{Q}^j$, $\widetilde{Q}^j = \widetilde{Q}(x^j)$, а сами семейства $\{\widehat{Q}^j\}$ и $\{\widetilde{Q}^j\}$ являются конечно-кратными и конечно-разделимыми. При этом существует семейство функций $\{\psi_j\}$, $\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}$, $0 \leq \psi_j \leq 1$ такое, что supp $\psi_j \subset \widetilde{Q}^j$, $\psi_j = 1$ на кубе $\widehat{Q}^j$, $\sum_{j=1}^\infty \psi_j(x) = 1$, и $|D^\alpha \psi_j(x)| \leq c(m) h(x^j)^{-m}$ для всех $\alpha$ порядка $|\alpha| = m$. См. [1].

---

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (грант AP08856104).

Мурат Гулнар, PhD докторант, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Murat Gulnar (L.N. Gumilyov Eurasian national university, Nur-Sultan, Qazaqstan)

Кусаинова Лейли Кабиденовна, д.ф.-м.н., профессор, Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева (Нур-Султан, Казахстан); Leili Kussainova (L.N. Gumilyov Eurasian national university, Nur-Sultan, Qazaqstan)

Пусть $s > 0$, $1 < p < \infty$, $L_p$, $B_p^s$ пространство Лебега, соответственно пространство Бесова в $\mathbb{R}^n$. Положим $v_s(x) = \rho(x)h^{-s}(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$. Функционал

$$\|f; B_p^s(\rho, v_s)\| = \left( \sum_{j=1}^{\infty} \Big( \rho^p(x^j) \|\psi_j f; B_p^s\| + v_s^p(x^j) \|\psi_j f\|^p \Big) \right)^{1/p} \tag{2}$$

является нормой в $\mathcal{D}$. Через $B_p^s(\rho, v_s)$ будет обозначаться пополнение $\mathcal{D}$ по норме (2).

Определение корректно, так как любые две нормы вида (2) эквивалентны.

Для интерполяционной пары $\{A_0, A_1\}$ через $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ $(0 < \theta < 1,\ 1 \le p < \infty)$ обозначается интерполяционное пространство Петре-Леонса [2, 1.3.2].

**Теорема 1.** *Пусть* $0 \le s_1 < s_0$, $1 < p < \infty$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$. *Имеет место равенство*

$$\Big( B_p^{s_0}(\rho, v_{s_0}), B_p^{s_1}(\rho, v_{s_1}) \Big) = B_p^s(\rho, v_s).$$

Пусть $\rho \in L_{p,loc}$, $s > 0$- нецелое. Обозначим через $W_p^s(\rho, v_s)$ пополнение класса $\mathcal{D}$ по норме

$$\|f; W_p^s(\rho, v_s)\| = \|v_s f; L_p\| +$$

$+\Big(\sum_{|\alpha|=m} \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |x-y|^{-n-\lambda p} \big|\rho(x) D^\alpha f(x) - \rho(y) D^\alpha f(y)\big|^p dxdy\Big)^{1/p}$,m$-$,$\lambda$-дробная части числа s.

**Теорема 2.** *Пусть* $s > 0$- *нецелое.* $1 < p < \infty$, *и пусть* $\rho$ *непрерывно дифференцируема в* $\mathbb{R}^n$, *и существует такое* $M > 0$, *что*

$$\big|\nabla \rho(y)\big| \le M \rho(x) h^{-1}(x), \quad \text{если } y \in \widetilde{Q}(x). \tag{3}$$

*Тогда*

$$B_p^s(\rho, v_s) = W_p^s(\rho, v_s).$$

Обозначим через $W_p^m(\rho, v_m)$ $(m \in \mathbb{N})$ весовое пространство Соболева с нормой

$$\|f; W_p^m(\rho, v_m)\| = \|v_s f; L_p\| + \|\rho \nabla_m f; L_p\|.$$

**Следствие.** Пусть $0 \leq m_1 < m_0$ - целые, $m_1 < s < m_0$. Если $\rho$ удовлетворяет условию (1), то имеют место вложения

$$W_p^{m_0}(\rho, v_{m_0}) \hookrightarrow B_p^s(\rho, v_s) \hookrightarrow W_p^{m_1}(\rho, v_{m_1}).$$

Если $\rho$ подчиняется условиям теоремы 2, то при $s$-нецелых

$$W_p^{m_0}(\rho, v_{m_0}) \hookrightarrow W_p^s(\rho, v_s) \hookrightarrow W_p^{m_1}(\rho, v_{m_1}).$$

## Литература

1. *Кусаинова Л.К.* Об интерполяции весовых пространств Соболева. // Известия МН-АН РК, Серия физ.-матем. №5, 1997, С. 33-51.

2. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства. — Москва: Мир, 1980.

# ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОЛИСТНОСТИ НЕХАРИ-ПОКОРНОГО И НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ

**© Р.Г. Насибуллин**

*NasibullinRamil@gmail.com*

УДК 517.948

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.57.*

Мы получаем достаточные условия однолистности в терминах оценки модуля производной Шварца функции мероморфной в единичном круге. Мы используем связь однолистности функции с неколеблемостью решения дифференциального уравнения. Именно эта связь с неколеблемостью решения дифференциального уравнения позволяет объединить два разных объекта: неравенства Харди и достаточные условия однолистности.

*Ключевые слова*: аналитическая функция, однолистность, производная Шварца, неравенство Харди, вес Якоби.

**Nehari-Pokornii type sufficient conditions for univalence and Hardy-type inequalities**

We obtain sufficient univalence conditions in terms of estimating the modulus of the Schwarzian derivative of a function meromorphic in the unit disc. We use the connection between the univalence of a function and the non-oscillation of the solution of the differential equation. It is this connection with the non-oscillation of the solution of a differential equation that allows us to combine two different objects: Hardy's inequalities and univalence conditions.

*Keywords*: analytic function, univalence, Schwarzian derivative, Hardy inequality, Jacobi weight.

Множество работ (см., например, [1]–[4]) посвящено достаточным условиям однолистности в терминах оценки модуля производной Шварца функции $f$ мероморфной в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Напомним, что производная Шварца или Шварциан функции $f(z)$ определяется следующим образом

$$S_f(z) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 .$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №18-11-00115).

Насибуллин Рамиль Гайсаевич, к.ф.-м.н., доцент, Казанский федеральный университет (Казань, Россия); Ramil Nasibullin (Kazan Federal University, Kazan, Russia)

Мы будем использовать связь однолистности функции $f$ с неколеблемостью решения следующего дифференциального уравнения

$$w'' + \frac{1}{2} S_f(z) w = 0.$$

Например, следующая теорема Нехари, получена с использованием такого подхода.

**Теорема А.** Мероморфная в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$, если

$$|S_f(z)| < 2S(|z|), \quad |z| < 1,$$

причем мажоранта $S(r)$ является непрерывной неотрицательной функцией и удовлетворяет условиям:

1. $S(r)(1-r^2)^2$ не возрастает по $r$ при $0 < r < 1$,
2. дифференциальное уравнение $y'' + S(|t|)y = 0$ при $-1 < t < 1$ имеет решение $y_0(t) > 0$.

Мы рассматриваем примеры приложений неравенств типа Харди для расширения известных классов однолистных мероморфных функций.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Мероморфная в $\mathbb{D}$ функция $f(z)$ будет однолистной в $\mathbb{D}$, если при некотором наборе вещественных неотрицательных параметров $n, a_k$ и $\mu_k, k = \overline{1,n}$ выполняется неравенство

$$|S_f(z)| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k A(\mu_k)}{(1-|z|^2)^{\mu_k}}, \quad z \in \mathbb{D},$$

причем $b_k = \frac{2P_{2-\mu_k}}{A(\mu_k)} a_k$, $a_1 + a_2 + ... a_n \leq 1$, $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \mu_n \leq 2$, постоянные В.В. Покорного имеют вид

$$A(\mu) = \begin{cases} 2^{3\mu-1}\pi^{2(1-\mu)}, & 0 \leq \mu \leq 1, \\ 2^{3-\mu}, & 1 \leq \mu \leq 2; \end{cases}$$

и постоянная

$$P_q = \begin{cases} 1 & , \quad \text{при} \quad q = 0, \\ \lambda_q & , \quad \text{при} \quad q \in (0, q_0), \\ \left(\frac{\lambda_\alpha}{2^\alpha}\right)^{\frac{1-q}{1-\alpha}} 2^q & , \quad \text{при} \quad q \in (q_0, 1], \\ 2 & , \quad \text{при} \quad q = 1. \end{cases}$$

для любого $\alpha \in (0, q_0)$, константа $\sqrt{\lambda_q}/q$ определяется как решение следующего уравнения

$$-q^2\lambda^2 + q\lambda \frac{J_{\nu-1}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} = 0, \quad \lambda \in (0, j_\nu),$$

а $q_0 \approx \frac{\pi^2}{18}$ является корнем уравнения

$$-2^q + 2^{q/2} \frac{J_{\nu-1}\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)}{J_\nu\left(\frac{2^{q/2}}{q}\right)} = 0.$$

Здесь $j_\nu$ — первый положительный корень функции Бесселя $J_\nu$.

**Литература**


1. *Nehari Z.* The Schwarzian derivative and schlicht functions // Bull. Amer. Math. Soc., **55**:6 (1949), 545–551.

2. *Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А., Елизаров А. М.* Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., 25 (1987) 3–121.

3. *Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А.* Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // УМН, **30**:4 (1975), (184), 3–60.

4. *Yamashita S.* Inequalities for the Schwarzian derivative // Indiana Univ. Math. J., **28**:1 (1979), 131–135.

# КВАЗИКОНФОРМНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРАНИЦЫ РАВНОБЕДРЕННОЙ ТРАПЕЦИИ

**@ С.Р. Насыров**

*semen.nasyrov@yandex.ru, snasyrov@kpfu.ru*

УДК 517.54

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06*.58.

Установлена оценка коэффициента квазиконформного отражения относительно границы равнобедренной трапеции в терминах эллиптических функций и геометрических параметров трапеции.

*Ключевые слова*: квазиконформное отображение, квазиконформное отражение, эллиптические интегралы.

**Quasiconformal reflection with respect to isosceles trapezoidal polygon**

We establish an estimation for the coefficient of quasiconformal reflection with respect to an isosceles trapezoidal polygon in terms of elliptic functions and geometric parameters of the polygon.

*Keywords*: quasiconformal mapping, quasiconformal reflection, elliptic functions.

Напомним, что квазиокружностью на плоскости называется замкнутая жорданова кривая, которая является образом окружности при некотором квазиконформном автоморфизме плоскости. Кривая $L$ является квазиокружностью тогда и только тогда, когда существует квазиконформное отображение $g$ сферы Римана на себя, которое меняет ориентацию и оставляет точки $L$ на месте, т. е. удовлетворяет условию $g(z) = z$, $z \in L$. Если $g$ является $K$-квазиконформным отображением, то отображение $g$ называют $K$-квазиконформным отражением относительно кривой $L$.

Важной задачей является определение по заданной кривой $L$ минимального значения $K$ такого, что существует $K$-квазиконформное отражение относительно кривой $L$; обозначим такое значение через $K_L$. Данная проблема весьма трудна и остается открытой даже для достаточно простых кривых, например, для четырехугольников (см. [1], [2]). Даже в случае, когда $L$ является границей прямоугольника $[0, a] \times [0, 1]$, $a \geq 1$, не удается описать значение этой константы для всех значений $a$.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

Насыров Семен Рафаилович, д.ф.-м.н., профессор, КФУ (Казань, Россия); Semen Nasyrov (Kazan Federal University, Kazan, Russia).

Известно только, что при $1 \le a < 1.037$ значение $K_L = 3$, а при $a > 2.76$ имеем $K_L > 3$. Кроме того, при $a > 1$ справедлива оценка $\frac{\pi}{4}\, a < K_L < \pi a$ (см. [1]).

Мы получаем оценку снизу для величины $K_L$ в случае, когда $L$ является границей равнобедренной трапеции.

Пусть $\mathcal{K}(\lambda)$ — полный эллиптический интеграл первого рода и

$$g(\lambda) = \lambda \mathcal{K}(\lambda')/\mathcal{K}(\lambda), \quad \text{где} \quad \lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}.$$

Нетрудно показать, что функция $g(\lambda)$ имеет единственную точку максимума $\lambda = \lambda_0 = 0.7373921\ldots$, которая является решением уравнения $(\lambda')^2 \mathcal{K}(\lambda)\mathcal{K}(\lambda') = \pi/2$ на интервале $(0,1)$. При этом, $g(\lambda_0) = 0.708434\ldots$

Обозначим

$$C(\alpha) = \left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\pi\alpha)/4} - \operatorname{tg}(\pi\alpha)/2\right)^2, \quad 0 < \alpha < 1/2.$$

**Теорема.** *Пусть $L$ — граница равнобедренной трапеции с длинами оснований $c$ и $d$, $c < d$, высота которой равна 1, а острый угол равен $\pi\alpha$.*

1) *Если $\frac{c}{d} \ge \lambda_0$, то*

$$K_L \ge g(\lambda_0)(1 + C(\alpha))d.$$

2) *Если $\frac{c}{d} < \lambda_0$, то*

$$K_L \ge g(\lambda)(1 + C(\alpha))d, \quad \text{где} \quad \lambda = c/d.$$

Теорема получена в результате совместных исследований с проф. М. Вуориненом.

## Литература

1. *Kühnau R.* Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve. Jahresber. d. Deutschen Math. **90** (1988), 90-109.

2. *Kruskal S.* Quasiconformal Extensions and Reflections. In: Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory (Ed. by R. Kühnau). Amsterdam: Elsevier, NorthHolland, 2005, Vol. 2. — 507-553.

3. *Werner S.* Spiegelungskoeffizient und Fredholmscher Eigenwert für gewisse Polygone // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, Math. **22** (1997), 165-186.

# ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ЕВКЛИДОВОМ ШАРЕ

**@ М.В. Невский**

*mnevsk55@yandex.ru*

УДК 517.51, 514.17

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*59.

Приводятся оценки для норм проекторов при интерполяции непрерывных функций, заданных на евклидовом шаре в $\mathbb{R}^n$, с помощью многочленов степени $\leq 1$.

*Ключевые слова*: интерполяция, проектор, норма, шар, симплекс, оценка.

**Interpolation by linear functions on a Euclidean ball**

We present some estimates for the norms of projectors related to interpolation of continuous functions defined on a Euclidean ball in $\mathbb{R}^n$ by polynomials of degree $\leq 1$.

*Keywords*: interpolation, projector, norm, ball, simplex, estimate.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через $B_n$ евклидов единичный шар пространства $\mathbb{R}^n$, задаваемый неравенством $\|x\| \leq 1$, $\|x\| := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$. Положим $\varkappa_n := \mathrm{vol}(B_n)$. Под $C(B_n)$ будем понимать пространство непрерывных функций $f : B_n \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{C(B_n)} := \max_{x \in B_n} |f(x)|,$$

под $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — совокупность многочленов от $n$ переменных степени $\leq 1$, т. е. линейных функций на $\mathbb{R}^n$.

Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}$ — вершины $n$-мерного невырожденного симплекса $S \subset B_n$. Интерполяционный проектор $P : C(B_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$, соответствующий этому симплексу, определяется равенствами

$$Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right), \quad 1 \leq j \leq n+1.$$

Через $\|P\|_{B_n}$ обозначим норму $P$ как оператора из $C(B_n)$ в $C(B_n)$. Определим $\theta_n$ как минимальную величину нормы $P$ при условии $x^{(j)} \in B_n$.

---

Невский Михаил Викторович, д.ф.-м.н., зав. кафедрой, ЯрГУ им. П.Г. Демидова (Ярославль, Россия); Mikhail Nevskii (P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

В статье [2] предложен и реализован подход, при котором норму интерполяционного проектора удаётся оценить снизу через объём соответствующего симплекса. Этот подход опирается на некоторые специально установленные свойства классических ортогональных многочленов Лежандра. Стандартизованным многочленом Лежандра степени $n$ называется функция

$$\chi_n(t) := \frac{1}{2^n n!}\left[(t^2-1)^n\right]^{(n)}$$

(формула Родрига). Известно, что $\chi_n(1)=1$, $\chi_n(t)$ возрастает при $t\geq 1$. Обозначим через $\chi_n^{-1}$ функцию, обратную к $\chi_n$ на полуоси $[1,+\infty)$.

**Теорема 1.** *Для любого симплекса $S\subset B_n$ и соответствующего интерполяционного проектора $P: C(B_n)\to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ верно неравенство*

$$\|P\|_{B_n} \geq \chi_n^{-1}\left(\frac{\varkappa_n}{\mathrm{vol}(S)}\right). \tag{1}$$

Из (1) выводится, что существует универсальная константа $c>0$, такая что для любого $n$ и любого интерполяционного проектора $P$ справедлива оценка $\|P\|_{B_n} > c\sqrt{n}$. Как показано в [2], подходящей константой является $c=0.2135$.

Особый интерес представляет случай, когда узлы интерполяционного проектора находятся в вершинах правильного симплекса, вписанного в шар (т. е. в граничную сферу $\|x\|=1$). Введём в рассмотрение функцию

$$\psi(t) := \frac{2\sqrt{n}}{n+1}\sqrt{t(n+1-t)} + \left|1-\frac{2t}{n+1}\right|, \quad 0\leq t\leq n+1.$$

Обозначим

$$a := \left\lfloor \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2}\right\rfloor.$$

Автором доказана следующая теорема (см. [1]).

**Теорема 2.** *Пусть $S^*$ — произвольный правильный симплекс, вписанный в $B_n$, $P^*$ — соответствующий интерполяционный проектор. Имеет место равенство*

$$\|P^*\|_{B_n} = \max\{\psi(a), \psi(a+1)\}.$$

*Всегда*

$$\sqrt{n} \leq \|P^*\|_{B_n} \leq \sqrt{n+1}.$$

*При этом $\|P^*\|_{B_n}=\sqrt{n}$ лишь в случае $n=1$, а равенство $\|P^*\|_{B_n} = \sqrt{n+1}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\sqrt{n+1}$ — целое число.*

Приведённые утверждения означают, что с константами, не зависящими от $n$, справедлива эквивалентность $\theta_n \asymp \sqrt{n}$.

По крайней мере для $1 \le n \le 4$ проектор $P^*$, соответствующий правильному вписанному симплексу, имеет минимальную норму, т. е. имеет место равенство $\theta_n = \|P^*\|_{B_n}$; два различных доказательства даны в [1] и [3]. Вопрос о справедливости этого равенства для произвольного $n$ остаётся открытым.

### Литература


1. *Невский М.В., Ухалов А.Ю.* Линейная интерполяция на евклидовом шаре в $\mathbb{R}^n$ // Модел. и анализ информ. систем, **26**:2 (2019), 279-296.

2. *Невский М.В.* Геометрические оценки при интерполяции на $n$-мерном шаре // Модел. и анализ информ. систем, **26**:3 (2019), 441-449.

3. *Невский М.В.* О свойствах правильного симплекса, вписанного в шар // Модел. и анализ информ. систем, **28**:2 (2021), 186-197.

# О СВОЙСТВАХ КОРНЕВЫХ МНОЖЕСТВ ФУНКЦИЙ ИЗ ПЛОСКИХ КЛАССОВ И. И. ПРИВАЛОВА

**@ Е.Г. Родикова**
*evheny@yandex.ru*

УДК 517.53

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*60.

В работе получено необходимое и достаточное условие на нули аналитических функций из плоских классов И. И. Привалова в круге, расположенные в углах Штольца.

*Ключевые слова*: аналитическая функция, нули, плоский класс Привалова, угол Штольца, единичный круг.

**On the properties of zero sets of functions from the Privalov classes by area**

In this paper we obtain a necessary and sufficient condition for zeros of analytic functions from area Privalov classes in a disk located at the Stolz angles.

*Keywords*: analytic function, zeros, the Privalov class by area, the Stolz angles, unit disk.

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, $D$ - единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ - множество всех функций, аналитических в $D$, $Z_f$ – множество всех нулей нетривиальной функции $f \in H(D)$, $n(r) = card\{z_k : |z_k| < r\}$ для любого $0 \leq r < 1$. При всех $0 < q < +\infty$ введем в рассмотрение класс

$$\tilde{\Pi}_q = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})|\right)^q d\theta dr < +\infty \right\}.$$

Будем называть его плоским классом И.И. Привалова или классом И.И. Привалова по площади. При $q = 1$ плоский класс Привалова совпадает с хорошо известным плоским классом Р. Неванлинны, входящим в шкалу классов Неванлинны-Джрбашяна (см. [1]).

Задачи характеризации корневых множеств аналитических функций из различных классов неоднократно поднимались специалистами в области комплексного анализа. В частности, в работах автора [3]-[6], [9]. Данная работа посвящена исследованию нулевых множеств плоского класса И.И. Привалова в круге.

---

Родикова Евгения Геннадьевна, к.ф.-м.н., доцент, БГУ имени акад. И.Г. Петровского (Брянск, Россия); Eugenia Rodikova (Bryansk State University named after Acad. I.G. Petrovsky, Bryansk, Russia)

При всех $0 < q < +\infty$ и $\alpha > -1$ рассмотрим также классы $S^q_\alpha$ (см. [7]):

$$S^q_\alpha = \left\{ \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha \left( \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \right)^q dr < +\infty \right\}.$$

Используя неравенство Гёльдера, нетрудно доказать, что

$$\tilde{\Pi}_q \subset S^q_0 \text{ при } q > 1,$$
$$\tilde{\Pi}_q \supset S^q_0 \text{ при } 0 < q < 1.$$

Из результатов Ф.А. Шамояна, полученных для классов $S^q_\alpha$, следует

**Теорема 1.** *Пусть* $\{z_k\} \subset D$. *Если* $\{z_k\} = Z_f$ *для некоторой* $f \in \tilde{\Pi}_q\,(q > 1)$, *то*

$$\int\limits_0^1 (1-r)^q n^q(r) dr < +\infty.$$

Вопрос о полной характеризации корневых множеств функций из классов $\tilde{\Pi}_q\,(0 < q < 1)$ остаётся открытым. В данной заметке нами получено описание множества нулей функций из класса $\tilde{\Pi}_q\,(0 < q < 1)$, расположенных в углах Штольца. Напомним определение:

*Углом Штольца* $\Gamma_\delta(\theta)$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$ называется угол раствора $\pi\delta$, $0 < \delta < 1$, биссектриса которого совпадает с отрезком $re^{i\theta}$, $0 \le r < 1$.

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть* $\{z_k\} \subset D$. *Если* $\{z_k\} = Z_f$ *для некоторой* $f \in \tilde{\Pi}_q\,(0 < q < 1)$, *то*

$$\int\limits_0^1 (1-r) n^q(r) dr < +\infty. \tag{1}$$

*Обратно, если точки последовательности* $\{z_k\}$ *расположены в конечном числе углов Штольца и удовлетворяют условию (1), то можно построить функцию* $g \in \tilde{\Pi}_q\,(0 < q < 1)$, *такую что* $Z_g = \{z_k\}$.

Отметим, что аналогичное утверждение для известных классов И.И. Привалова в круге (см. [2]) получено в работе [8] (см. также [6]).

## Литература


1. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции — М.-Л.: ГИТТЛ, 1941. — 388 с.

2. *Привалов И. И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций — М.: Изд. МГУ, 1941. —206 с.

3. *Родикова Е.Г.* Факторизационное представление и описание корневых множеств одного класса аналитических в круге функций // Сиб. электрон. матем. известия. — 2014. — С. 52-63.

4. *Родикова Е.Г.* О свойствах нулей функций из классов И.И. Привалова в круге // Ученые записки Брянского госуд. ун-та. – 2019. — №4. —- С. 19–22.

5. *Родикова Е.Г.* О некоторых оценках в классе И.И. Привалова по площади // Междунар. научн. конф. «Уфимская осенняя матем. школа - 2020»: сборник тезисов – Уфа: Аэтерна, 2020. – С. 149-151.

6. *Родикова Е.Г.* О нулях аналитических функций из классов И.И. Привалова // Совр. пробл. математики и матем. образования: XV Владикавказская молодеж. матем. школа – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2020. – С. 233-235.

7. *Шамоян Ф.А.* Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций // Сиб. матем. журн. — 1999. — **40**:6. — С.1422–1440.

8. *Шамоян Ф.А.* О некоторых свойствах нулевых множеств класса И.И. Привалова в круге // Записки научн. семин. ПОМИ. — 2019. — Т. 480. — С. 199–205.

9. *Шамоян Ф. А., Родикова Е. Г.* О характеризации корневых множеств одного весового класса аналитических в круге функций // Владикавказский матем. журн. — Владикавказ: Инст. прикл. матем. и инф. ВНЦ РАН. — 2014.

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ МАЛЬЯВЕНА – РУБЕЛЯ С РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ НУЛЕЙ НА КОМПЛЕКСНЫЕ

**@ А.Е.Салимова, Б.Н. Хабибуллин**

*anegorova94@bk.ru, khabib-bulat@mail.ru*

УДК 517.547.2

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*61.

Классический результат П. Мальявена и Л. А. Рубеля о малости целых функциях экспоненциального типа с заданными распределениями нулей на положительной полуоси распространяется на распределения комплексных нулей, отделенных парой вертикальных углов сколь угодно малого раствора от мнимой оси. При этом используется и развитие логарифмических характеристик для распределений комплексных точек.

*Ключевые слова*: целая функция экспоненциального типа, распределение корней, рост целой функции, логарифмические характеристики и меры.

**Extension of the Malliavin – Rubel theorem from distributions of positive zeros to complex distributions**

The classical result of P. Malliavin and L. A. Rubel on small entire functions of exponential type with given distributions of zeros on the positive semiaxis extends to distributions of complex zeros separated by a pair of vertical angles of an arbitrarily small opening from the imaginary axis. In this case, the development of logarithmic characteristics for the distributions of complex points is also used.

*Keywords*: entire function of exponential type, distribution of zeros, growth of entire function, logarithmic characteristics and measures.

Всюду далее $\mathsf{Z} = \{\mathsf{z}_j\}_{j=1,2,\dots}$ и $\mathsf{W} = \{\mathsf{w}_j\}_{j=1,2,\dots} \subset \mathbb{C}$ — распределения точек на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ *конечной верхней плотности,* т.е.

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\left(\sum_{|\mathsf{z}_j|\le r} 1 + \sum_{|\mathsf{w}_j|\le r} 1\right) < +\infty.$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-31-90074).

Салимова Анна Евгениевна, аспирант, БашГУ (Уфа, Россия); Anna Salimova (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Хабибуллин Булат Нурмиевич доктор физ.-мат. наук, профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Bulat Khabibullin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

В обозначении $\mathrm{Re}^+ z := \max\{0, \mathrm{Re}\, z\}$ определим *правый* и *левый характеристические логарифмы* для $\mathsf{Z}$ соотвественно как

$$l_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{rh}}(r) := \sum_{0<|\mathsf{z}_j|\le r} \mathrm{Re}^+ \frac{1}{\mathsf{z}_j}, \quad l_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{lh}}(r) := \sum_{0<|\mathsf{z}_j|\le r} \mathrm{Re}^+ \frac{1}{-\mathsf{z}_j},$$

а также *логарифмическую субмеру интервалов* для $\mathsf{Z}$

$$l_{\mathsf{Z}}(r,R) := \max\left\{l_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{rh}}(R) - l_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{rh}}(r), l_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{lh}}(R) - l_{\mathsf{Z}}^{\mathrm{lh}}(r)\right\}, \quad 0 < r < R \le +\infty.$$

Пусть $f \ne 0$ — целая функция на $\mathbb{C}$. Через $\mathrm{Zero}_f$ обозначаем распределение всех её корней, перенумерованное с учётом кратности. Если $f$ обращается в нуль на $\mathsf{Z} \subset \mathrm{Zero}_f$ с учётом кратности, то пишем $f(\mathsf{Z}) = 0$, и $f$ — *целая функция экспоненциального типа* (ц.ф.э.т.), если $\limsup\limits_{z\to\infty} \dfrac{\ln|f(z)|}{|z|} < +\infty$. Основной результат статьи П. Мальявена и Л. А. Рубела [1; теорема 4.1] —

**Теорема Мальявена – Рубела.** *Пусть $\mathsf{Z}$ и $\mathsf{W}$ лежат на положительной полуоси $\mathbb{R}^+$ вещественной оси $\mathbb{R}$. Эквивалентны три утверждения:*

I. *Для любой ц.ф.э.т $g \ne 0$ с $g(\mathsf{W}) = 0$ найдется ц.ф.э.т. $f \ne 0$ с $f(\mathsf{Z}) = 0$, удовлетворяющая ограничению*

$$|f(iy)| \le |g(iy)| \quad \textit{для всех } y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

II. *Найдутся ц.ф.э.т $g \ne 0$ с $g(\mathsf{W}) = 0$ и $\mathsf{Zero}_g \bigcap \big\{z \in \mathbb{C} \bigm| \mathrm{Re}\, z > 0\big\} = \mathsf{W}$, а также ц.ф.э.т. $f \ne 0$ с $f(\mathsf{Z}) = 0$, удовлетворяющие* (1).

III. *Существует $C \in \mathbb{R}$, для которого $l_{\mathsf{Z}}(r,R) \le l_{\mathsf{W}}(r,R) + C$ при всех значениях $0 < r < R < +\infty$.*

Наше развитие теоремы Мвльявена – Рубела из [2; теорема 2.1] —

**Теорема.** *Для $\mathsf{Z} \subset \mathbb{C}$ и $\mathsf{W} \subset \big\{z \in \mathbb{C} \bigm| \mathrm{Re}\, z > 0\big\}$ при условиях*

$$\liminf_{j\to\infty} \frac{|\mathrm{Re}\, \mathsf{z}_j|}{|\mathsf{z}_j|} > 0, \quad \liminf_{j\to\infty} \frac{\mathrm{Re}\, \mathsf{w}_j}{|\mathsf{z}_j|} > 0$$

*все три утверждения* I–III *из теоремы Мальявена – Рубела по-прежнему остаются эквивалентными.*

### Литература

1. *Malliavin P., Rubel L.A.* On small entire functions of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France., **89**:2 (1961), 175–201.

2. *Салимова А.Е., Хабибуллин Б. Н.* Рост целых функций экспоненциального типа и характеристики распределений точек вдоль прямой на комплексной плоскости // Уфимский математический журнал, **13**:3 (2021), 116–128.

# BOUNDEDNESS OF THE HILBERT TRANSFORM IN MARCINKIEWICZ SPACES WITH APPLICATIONS

**@ K.S. Tulenov**

*tulenov@math.kz*

УДК 517.51

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*62.

Это совместная работа с австралийскими математиками профессором Ф. Сукочевым и доктором Заниным (UNSW, Сидней, Австралия). В этой работе мы имеем дело с характеристикой оптимального ранга для оператора Кальдерона и преобразования Гильберта в функциональных пространствах Марцинкевича. Эти результаты в дальнейшем используются в качестве достаточного условия для получения липшицевых оценок в вполне симметричных (квази)-банаховых операторных пространствах.

*Ключевые слова*: Пространство Марцинкевича, оператор Кальдерона, преобразование Гильберта, вполне симметричное пространство, оптимальный ранг, двойной операторный интеграл, оценка Липшица.

This is a joint work with Australian mathematicians Professor F. Sukochev and Dr. Zanin (UNSW, Sydney Australia). In this work, we deal with characterizing optimal range for the Calderón operator and the Hilbert transform in Marcinkiewicz function spaces. These results are further used as a sufficient condition to obtain Lipschitz estimates for commuting tuples in fully symmetric (quasi-)Banach operator spaces.

*Keywords*: Marcinkiewicz spaces, Calderón operator, Hilbert transform, fully symmetric space, optimal range, double operator integral, Lipschitz estimate.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РК (проект № AP09258335).

Туленов Канат Серикович, PhD, научный сотрудник, Институт математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан); Kanat Tulenov (Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan)

# YOUNG TYPE INEQUALITIES OF MEASURABLE OPERATORS

**@ Turdebek N. Bekjan**
*bekjant@yahoo.com*

УДК 517.986.3

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*63.

Let $(\mathcal{M},\tau)$ be a semi-finite von Neumann algebra, $L_0(\mathcal{M})$ be the set of all $\tau$-measurable operators and $\mu_t(x)$ be the generalized singular number of $x \in L_0(\mathcal{M})$. We proved that if $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $r \geq 2\min\{\frac{1}{p},\ \frac{1}{q}\}$ and $x,\ y \in L_0(\mathcal{M})$, then the Young type inequality $\mu_t(|xy^*|^r) \leq \mu_t(\frac{1}{p}|x|^{pr} + \frac{1}{q}|y|^{qr})$, for all $t > 0$ holds.

*Keywords*: generalized singular number; $\tau$-measurable operator; semifinite von Neumann algebra.

The classical Young inequality, in general, this inequality for operators does not hold. If $\mathcal{A}$ is a unital commutative $C^*$-algebra, then

$$|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q, \qquad \forall a,\ b \in \mathcal{A}$$

(see [1]). Ando obtained a generalization of the above inequality as the following: If $x\ y \in \mathbb{M}_n$, then

$$s_j(xy^*) \leq s_j(\frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q), \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$

In [4], Farenick and Manjegani extended the Ando's result as the following: if $x,\ y \in \mathcal{M}$, then

$$\mu_t(xy^*) \leq \mu_t(\frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q), \qquad t > 0,$$

where $\mathcal{M}$ is a semi-finite von Neumann algebra with a faithful normal semi-finite trace $\tau$ and $\mu_t(z)$ is the generalized singular number of $z \in \mathcal{M}$.

## Литература

1. *Ando T.* Matrix Young inequalities // Oper. Theory Adv. Appl., **75**:3(1995), 33-38.

---

The author was supported by project AP09259802 of the Science Committee of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

Bekjan T. N., PhD., professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, L.N. Gumilyov Eurasian National University (Nur-Sultan, Kazakhstan);

2. *Bhatia R.and Kittaneh F.* Notes on matrix arithmetic-geometric mean inequalities // Linear Algebra Appl., **308**:4(2000), 203-211.

3. *Erlijman J., Farenick D.R. and Zeng R.* Young's inequality in compact operator // Oper. Theory Adv. Appl. **130**:4(2001), 171-184.

4. *Farenick D. R. and Manjegani S. M.* Young's inequalities in operator algebras // J. Ramanujan Math.Soc., **20**:(2005), 107-124.

# DUAL SPACE OF NONCOMMUTATIVE WEAK ORLICZ-HARDY SPACE

**@ Turdebek N. Bekjan, Madi Raikhan**

*bekjant@yahoo.com, madi.raikhan@astanait.edu.kz*

УДК 517.986.3

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*64.

**We introduce noncommutative weak Orlicz spaces associated with a weight and study their properties.**

noncommutative Lorentz space, noncommutative Marcinkiewicz space, weak noncommutative Orlicz space, noncommutative weak Orlicz-Hardy space

*Keywords*:

Al-Rashed and Zegarliński introduced the noncommutative Orlicz spaces associated to a normal faithful state on a semifinite von Neumann algebra. Ayupov/Chilin and Abdullaev considered a certain class of noncommutative Orlicz spaces, associated with arbitrary faithful normal locally-finite weights on a semi-finite von Neumann algebra $\mathcal{M}$. Liu/ Hou and Wang have investigated weak version of Orlicz spaces. The weak noncommutative Orlicz spaces were investigated by Bekjan/ Chen/ Liu and Jiao. We extend the results of Ayupov/Chilin and Abdullaev to the weak noncommutative Orlicz space case. We introduce noncommutative weak Orlicz spaces associated with a weight and study their properties. The dual spaces of commutative weak $L_p$-spaces were characterized by Cwikel and Sagher, its noncommutative versions proved by Ciach (independently, by Han and Shao). Ciach introduced noncommutative Lorentz space and noncommutative Marcinkiewicz space, and discussed their dual spaces. We also define noncommutative weak Orlicz-Hardy spaces and characterize their dual spaces.

## Литература

1. *Al-Rashed M. H. A., Zegarlisnski B.* Noncommutative Orlicz spaces associated to a state // Studia Math., **180**:3(2007), 199-207.

2. *Ayupov Sh. A., Chilin V. I., Abdullaev R. Z.* Orlicz spaces associated with a semi-finite von Neumann algebra // Comment. Math. Univ. Carolin., **53**:4(2012), 519-533.

---

The authors were supported by project AP09259802 of the Science Committee of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

Bekjan T. N., PhD., professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, L.N. Gumilyov Eurasian National University (Nur-Sultan, Kazakhstan);

Raikhan Madi, PhD., associate Professor, Department of Computational Mathematics and Database Analysis, Astana IT University (Nur-Sultan, Kazakhstan);

3. *Liu P., Hou Y. and Wang M.* Weak Orlicz space and its applications to martingale theory // Sci. China Math **53**:4(2010), 905-916.

4. *Bekjan T. N., Chen Z., Liu P. and Jiao Y.* Noncommutative weak Orlicz spaces and martingale inequalities // Studia Math., **204**:(2011), 195-212.

# ОГИБАЮЩИЕ ИЗ ПОДКЛАССОВ ПОЧТИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

**@ Б.Н. Хабибуллин**
*khabib-bulat@mail.ru*

УДК 517.518

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*65.

Наше функционально-аналитическое двойственное описание огибающих относительно конусов в проективных пределах упорядоченных пространств адаптировано к пространствам локально интегрируемых функций и конусам почти (плюри)субгармонических функций с приложениями к различным задачах комплексного анализа.

*Ключевые слова*: локально интегрируемая функция, почти субгармоническая функция, нижняя огибающая, двойственное представление.

**Envelopes from subclasses of almost subharmonic functions and their applications**

Our functional-analytic dual description of envelopes with respect to cones in the projective limits of ordered spaces are adapted to spaces of locally integrable functions and cones of almost (pluri)subharmonic functions with applications in various problems of complex analysis.

*Keywords*: locally integrable function, almost subharmonic function, lower envelope, dual representation

Пусть $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ и $\mathbb{R}$ — множества *натуральных* и *вещественных* чисел, $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ — арифметическое векторное пространство размерности $\mathsf{d} \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ — непустая *область,* а понятия (локальной) суммируемости и почти всюду (п.в.) понимаются относительно меры Лебега $\lambda$ на $D$. Векторное пространство над $\mathbb{R}$ локально суммируемых функций, п.в. определённых на $D$ значениями из расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$, после факторизации относительно отношения поточечного равенства п.в. будем обозначать как $\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(D)$, снабжая его топологией $L^1$ сходимости на компактах и отношением поточечного порядка $\leq$ п.в. В терминологии из [1; § 1], [2], [3; 3.2, пример 3] это пространство — приведённый правильный проективный предел векторных решёток Фреше с двойственным

---

Работа выполнена в рамках Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

Хабибуллин Булат Нурмиевич, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Bulat Khabibullin (Bashkir State University, Ufa, Russia)

пространством $L_0^\infty(D)$ ограниченных п.в. функций на $D$ со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ и с компактным носителем в $D$.

Функция $v \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(D)$ называется *почти субгармонической,* если для замкнутых шаров $\overline{B}_x(r) \subset D$ радиуса $r > 0$ с центром $x \in D$ её средние

$$\frac{1}{\lambda\bigl(\overline{B}_x(r)\bigr)} \int_{\overline{B}_x(r)} v \,\mathrm{d}\lambda$$

по этим шарам для почти всех точек $x \in D$ возрастают по $r > 0$ [4;гл. II, § 9], [5]. Развитие наших результатов [2; теорема 7.1], [3; теорема 6] —

**Теорема.** *Пусть $H \subset \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(D)$ — непустой выпуклый конус, состоящий из почти субгармонических функций на $D$, и для каждого компакта $K$ для любой константы $c \in \mathbb{R}$ найдётся $h \in H$, для которой $h \leq c$ п.в. на $K$. Допустим, что выполнено одно из условий*

(i) *для любой локально ограниченной сверху последовательности функций $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ верхний предел*

$$\limsup_{k\to\infty} h_k := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} h_k$$

*принадлежит $H$;*

(ii) *множество $H$ секвенциально замкнуто в $\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(D)$.*

*Тогда для каждой функции $F \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(D)$, локально ограниченной на $D$, при любой функции $0 \neq g \in L_0^\infty(D)$ имеет место равенство*

$$\sup\left\{ \int hg \,\mathrm{d}\lambda \;\middle|\; h \in H, h \leq F \right\}$$
$$= \inf\left\{ \int FG \,\mathrm{d}\lambda \;\middle|\; G \in L_0^\infty(D), \int hg \,\mathrm{d}\lambda \leq \int hG \,\mathrm{d}\lambda \quad \text{при всех } h \in H \right\}.$$

Условиям теоремы на выпуклый конус $H$ удовлетворяют конус всех субгармонических функций (случай (i)) и пространство всех гармонических функций (случай (ii)) в областях $D$, а также , конус всех плюрисубгармонических и пространство всех плюригармонических функций из $n$-мерного комплексного пространства, отождествленного с $\mathbb{R}^{\mathsf{d}}$ с $\mathsf{d} := 2n$. Содержательный вариант приведённой теоремы возможен и для *выпуклых множеств* $H$ почти субгармонических функций с некоторыми изменениями в правой части заключительного равенства.

Одно из основных следствий этой теоремы — *существование функции $h \in H$, огибающей функцию $F$ снизу на всей области $D$, эквивалентно конечности точной нижней грани из правой части заключительного равенства теоремы.* Это следствие находит применения к проблемам о нетривиальности весовых классов голоморфных функций, об описании нулевых множеств и подмножеств в таких весовых классах, о возможности представления мероморфных функций в виде частного двух голоморфных или целых функций со специальными ограничениями на их рост, об аппроксимации экспоненциальными и иными системами функций в функциональных пространствах и проч.

## Литература


1. *Хабибуллин Б.Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. I // Изв. РАН. Сер. матем., **65**:4 (2001), 205–224; Izv. Math., **65**:4 (2001), 835–852.

2. *Хабибуллин Б.Н.* Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II // Изв. РАН. Сер. матем., **65**:5 (2001), 167–190; Izv. Math., **65**:5 (2001), 1017–1039.

3. *Хабибуллин Б.Н., Розит А.П., Хабибуллина Э.Б.* Порядковые версии теоремы Хана – Банаха и огибающие. II. Применения в теории функций // Комплексный анализ. Математическая физика, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **162**. — Москва: ВИНИТИ РАН, 2019. — 93–135. English translation in: *Khabibullin B.N., Rozit A.P., Khabibullina E.B.* Order versions of the Hahn–Banach theorem and envelopes. ii. Applications to function theory // Journal of Mathematical Sciences, **257**:3 (2021), 366–409.

4. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. — Москва: Мир, 1964.

5. *Arsove M.G.* Functions representable as differences of subharmonic functions // Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953), 327–365.

# О СПЕКТРАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ В ПРОСТРАНСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ

**@ А.Б. Шишкин**
*shishkin-home@mail.ru*

УДК 517.518

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.66.*

Экспоненциальные полиномы, удовлетворяющие однородному уравнению типа свертки, называются его элементарными решениями. Необходимо описать множество всех элементарных решений такого уравнения в терминах его характеристической функции.

*Ключевые слова*: однородные уравнения типа свертки, спектральный синтез, спектральный анализ.

**Spectral analysis in spaces of solutions of homogeneous equations of convolution type**

Exponential polynomials that satisfy a homogeneous convolution-type equation are called its elementary solutions. It is necessary to describe the set of all elementary solutions of such an equation in terms of its characteristic function.

*Keywords*: homogeneous convolution type equations, spectral synthesis, spectral analysis.

Выберем произвольный многочлен $\pi(z)$ степени $q$. Целая функция $f$ называется $\pi$-симметричной, если она представляется в виде композиции $f = g \circ \pi$, где $g$ — целая функция. Символом $O_\pi(\mathbf{C})$ обозначим семейство всех целых $\pi$-симметричных функций. Для любой целой функции $f$ имеет место единственное $\pi$-симметричное представление

$$f(z) = \sum_{p=0}^{q-1} z^p f_p(z), \quad f_p \in O_\pi(\mathbf{C}), \tag{1}$$

см. [1].

Пусть $\{a_0(z), ..., a_{q-1}(z)\}$ — произвольный набор многочленов, не все из которых равны тождественному нулю. Считаем, что степень полинома $a_p(z)$ не превосходит $p$. Рассмотрим непрерывный эндоморфизм $A$ пространства целых функций $O(\mathbf{C})$, действующий по правилу

$$A : f(z) \mapsto \sum_{p=0}^{q-1} a_p(z) f_p(z),$$

Шишкин Андрей Борисович, д.ф.-м.н., профессор, КубГУ (Краснодар, Россия); Andrey Shishkin (Kuban State University, Krasnodar, Russia)

где $f_p(z)$ — $\pi$ -симметричный коэффициент представления (1).

Пусть $\Omega_0, \Omega$ — выпуклые области в комплексной плоскости $\mathbf{C}$, $U_\varepsilon$ — круг $\{h : |h| < \varepsilon\}$. Будем считать, что $\Omega_0 + U_\varepsilon \subseteq \Omega$. Для произвольного $h \in U_\varepsilon$ линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$AT_h : f(z) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(e^{hz})^{(n)}(0)}{n!}(D^n f)(\zeta)$$

действует из пространства $O(\Omega)$ в пространство $O(\Omega_0)$ и называется оператором $\pi$-*сдвига* (на шаг $h$), см. [2].

Выберем произвольную функцию $f \in O(\Omega)$ и произвольный линейный непрерывный функционал $S_0$ на пространстве $O(\Omega_0)$. Функция $\psi(h) := \langle S_0, AT_h(f)\rangle$ называется $\pi$-*сверткой функции* $f$ *и функционала* $S_0$. Уравнение

$$\langle S_0, AT_h(f)\rangle = 0, \quad f \in O(\Omega), \tag{2}$$

называется *однородным уравнением* $\pi$-*свертки*. Целая функция $\varphi_0(\lambda) := \left\langle S_0, e^{\lambda z}\right\rangle$ называется характеристической функцией уравнения (2).

*Задача спектрального анализа* состоит в следующем: описать элементарные решения (экспоненциальные полиномы) однородного уравнения $\pi$-свертки в терминах его характеристической функции.

Пусть $\lambda \in \mathbf{C}$ и $\omega_\lambda := \pi(\lambda)$. Если функция $f(\zeta) \in O(\pi^{-1}(\omega_\lambda))$ является локально аналитической на $\pi$-слое $\pi^{-1}(\omega_\lambda)$, то функция

$$(\operatorname{sym} f)(\omega) := \frac{1}{q} \sum_{\zeta \in \pi^{-1}(\omega)} f(\zeta), \quad \omega := \pi(\zeta)$$

является аналитической в точке $\omega_\lambda$. При этом функция $(\operatorname{sym} f)(\pi(\zeta))$ представляется в виде композиции $g \circ \pi$, где $g := \operatorname{sym} f \in O(\omega_\lambda)$ и называется $\pi$-симметризацией функции $f(\zeta)$.

**Теорема.** *Элементарные решения однородного уравнения* $\pi$-*свертки исчерпываются линейными комбинациями экспоненциальных полиномов вида*

$$e(z) := \frac{\partial^m}{\partial \omega^m}\left(\operatorname{sym} \frac{c(\pi(\zeta))}{\varphi_0(\zeta)} e^{\zeta z}\right)\Bigg|_{\omega=\omega_\lambda}, \quad \lambda \in \mathbf{C},$$

*где*

$$c(\omega) \in O(\omega_\lambda), \quad \frac{c(\pi(\zeta))}{\varphi_0(\zeta)} \in O(\pi^{-1}(\omega_\lambda)).$$

## Литература

1. *Красичков-Терновский И.Ф.* Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности // Матем. сб., **182**:11 (1991), 1559-1588.

2. *Шишкин А.Б.* Экспоненциальный синтез в ядре оператора симметричной свертки // Зап. научн. сем. ПОМИ, **447** (2016), 129–170.

# СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА К ВЕСОВЫМ ПРОСТРАНСТВАМ ЛОКАЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

**@ Р.С. Юлмухаметов**

*yulmukhametov@mail.ru*

УДК 517.5

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*67.

В работе рассматриваются интегрально весовые $L_2$-пространства на выпуклых областях $\mathbb{R}^n$ и исследуется задача описания сопряженного пространства в терминах преобразования Фурье-Лапласа.

*Ключевые слова*: весовые пространства, преобразование Фурье–Лапласа, целые функции.

**Duals to weighted spaces of locally integrable functions**

The paper considers weighted $L_2$-spaces on convex domains in $\mathbb{R}^n$ and investigates the problem of describing the dual space in terms of Fourier-Laplace transform.

*Keywords*: weighted spaces, Fourier–Laplace transform, entire functions.

Пусть $D$ — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi$ — выпуклая выпуклая функция на этой области. Через $L_2(D,\varphi)$ обозначим пространство локально интегрируемых функций на $D$, для которых конечна норма

$$\|f\|^2 := \int\limits_D |f(t)|^2 e^{-2\varphi(t)} dt.$$

Система функций $e^{t\lambda}$, где $t=(t_1,...,t_n)$, $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n$ и $t\lambda = \sum_{k=1}^n t_k\lambda_k$, полна в гильбертовом пространстве $L_2(D,\varphi)$, поэтому преобразование Фурье–Лапласа

$$\mathcal{L}:\ S\to S(e^{t\lambda}),\qquad \lambda\in\mathbb{C}^n,$$

отображает сопряженное пространство $L_2^*(D,\varphi)$ на некоторое пространство $\widehat{L}_2(D,\varphi)$ функций на $\mathbb{C}^n$. В силу самосопряженности гильбертовых пространств это пространство $\widehat{L}_2(D,\varphi)$ состоит из функций вида

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_D e^{t\lambda-2\varphi(t)}\overline{f(t)}dt,\qquad f\in L_2(D,\varphi),$$

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

Юлмухаметов Ринад Салаватович, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Rinad Yulmukhametov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

в частности, $\widehat{L}_2(D,\varphi)$ является подпространством пространства целых функций. Пространство $\widehat{L}_2(D,\varphi)$ гильбертово относительно наведенного скалярного произведения $(\widehat{f},\widehat{g}) = (f,g)$.

Заметим, что точечные функционалы $\delta_\lambda : F \to F(\lambda)$ непрерывны в пространстве $\widehat{L}_2(D,\varphi)$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Функцию

$$K(\lambda) := \|\delta_\lambda\|^2, \qquad \lambda \in \mathbb{C}^n,$$

называют функцией Бергмана.

В данной работе рассматривается вопрос о весовом описании наведенной нормы в этом пространстве. В одномерном случае вопрос полностью решен ранее в работе [1].

При некоторых ограничениях на весовую функцию $\varphi$ доказано, что целая функция $F$ представляется в виде преобразования Фурье-Лапласа функции из $L_2(D,\varphi)$ тогда и только тогда, когда

$$\|F\|^2 := \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x+iy)} \det G(\widetilde{\varphi},x)dydx < \infty,$$

где $G(\widetilde{\varphi},x)$ — матрица Гессе функции $\widetilde{\varphi}$, сопряженной по Юнгу к функции $\varphi$.

В качестве примера показано, что для случая, когда $D$ — единичный шар и $\varphi(t) = a(1-|t|)^{-\beta}$, $\beta < 0$, пространство преобразований Фурье-Лапласа изоморфно пространству целых функций $F(z)$, $z = x+iy \in \mathbb{C}^n$, для которых

$$\|F\|^2 := \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^2 e^{-2|x|-2(a\beta)^{\frac{1}{\beta+1}}(a+1)|x|^{\frac{\beta}{\beta+1}}} |x|^{\frac{\alpha-3}{2}} dxdy < \infty,$$

где $\alpha = \frac{\beta}{\beta+1}$ .

## Литература

1. *Луценко В.И., Юлмухаметов Р.С.* Обобщение теоремы Пэли-Винера на весовые пространства // Матем. заметки, **48**:5 (1990), 80-87.

# МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

# «УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2021»

# СЕКЦИЯ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ»

г. Уфа, 6 - 9 октября 2021 г.

# О РЕШЕНИЯХ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БИАНАЛИТИЧИСКИХ ФУНКЦИЙ

**@ С. Байзаев, М. О. Садиков**

*sattor_ bayzoev@rambler.ru, sodikov-8686@list.ru*

УДК 517.95

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*68.

В пространстве обобщённых функций медленного роста $S\ ' = S\ '(C)$ рассмотрены комплексные системы уравнений, обобщающие уравнение бианалитических функций. Получена схема определения структуры носителя решения. На основе этого изложен способ нахождения решений.

*Ключевые слова*: пространство Шварца, носитель, теорема о структуре обобщённых функций с носителем на окружности.

**On solutions of the generalized equation of bianalytic functions**

In the space of generalized functions of slow growth, $S\ ' = S\ '(C)$ complex systems of equations that generalize the equation of bianalytic functions are considered. A scheme for determining the structure of the solution carrier is obtained. Based on this, a method for finding a solution is presented.

*Keywords*: Schwarz space, support, theorem on the structure of generalized functions supported on a circle.

Рассмотрим эллиптическую систему второго порядка, записанную в комплексной форме

$$Lw \equiv w_{\overline{z}\overline{z}} + a(z)w_{\overline{z}} + b(z)w + c(z)\overline{w} = f(z), \tag{1}$$

где $z = x + iy$, $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $a, b, c, f-$ заданные в некоторой области $G$ функции. При $a = b = c = f = 0$ получаем уравнение бианалитических функций или так называемую систему уравнений Бицадзе (см. [1], [2]), для которой задача Дирихле не является нётеровой. Для систем вида (1) задача об ограниченных на всей комплексной плоскости $C$ решениях может быть не нётеровым. Например, система

$$w_{\overline{z}\overline{z}} + c\overline{w} = 0,$$

---

Байзаев Саттор, д.ф.-м.н., профессор, ТГУПБП (Худжанд, Таджикистан); Bayzoev Sattor (Tajik State University of Law, Busines and Politic, Khujand, Tajikistan)

Садиков Маъруфджон Обидович, преподаватель, ХГУ имени Б. Гафурова (Худжанд, Таджикистан); Sodiqov Marufjon (B.G.Gafurov Khujand State University ,Khujand, Tajikistan)

где $c$—ненулевая постоянная, имеет бесконечное число линейно независимых ограниченных на $C$ решений

$$w(z) = p\omega(z) + q\overline{\omega(z)},$$

здесь $p$—произвольная постоянная, $q = \frac{|c|}{\bar{c}}\overline{p}e^{-2i\alpha}$,
$\omega(z) = \exp\left[2i\sqrt{|c|}Re\left(e^{-i\alpha}z\right)\right]$, $0 \leq \alpha < 2\pi$. Когда $a$ и $b$ являются постоянными и $c = f = 0$ система (1) превращается в уравнение метааналитических функций (см. [2]).

Эту систему будем рассматривать в пространстве Шварца $S' = S'(C)$— пространство умеренно растущих распределений на $C$. Построена схема нахождения решений однородного уравнения $Lw = 0$ в случае постоянный коэффициентов.

Введём функцию

$$\Delta(\zeta) = |\zeta|^4 - 4\,|a|^2\,|\zeta|^2 - 8Re(\bar{b}\zeta^2) + 16(|b|^2 - |c|^2) - 4iRe\left(\bar{a}\,|\zeta|^2 - 4a\bar{b}\right)\zeta.$$

Если $\Delta(\zeta) \neq 0\ \forall\zeta \in C$, то система (1) будет иметь в $S'$ только нулевое решение. Если же $\Delta(\zeta) = 0$ на каком-нибудь множестве $K$, то носитель supp$\hat{w}(\zeta)$ распределения $\hat{w}(\zeta)$ будет принадлежать множеству $K$, и зная $K$ можно определить $\hat{w}(\zeta)$ и далее $w(z)$.

Пусть $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$—множество нулей функций $\Delta(\zeta), Re\Delta(\zeta), Im\Delta(\zeta)$ соответственно. Тогда $\Gamma = \Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$ и множества $\Gamma_1, \Gamma_2$ имеют такие свойства: $\Gamma_1$—ограничено, симметрично относительно начало координат $O$, при вещественном $b$—относительно вещественной оси; $\Gamma_2 = C$ при $a = 0$, $\Gamma_2$—проходит через точку $O$. Определённы структуру множеств $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$.

Например, при $a = 0$ имеем $\Gamma_2 = C$. Если $b = c = 0$, то $\Gamma_1$—точка $\zeta = 0$ и $\Gamma = \{0\}$ и использовать теорему о структуре обобщенных функций с точечным [3] находим

$$w(z) = P_N(z) + Q_{N-1}(z)\bar{z},$$

где $P_N$ и $Q_{N-1}$—многочлены по $z$ степени $N$ и *N-1* соответственно.

Если $b = 0$ и $c \neq 0$, то $\Gamma_1$—окружность и нужно использовать теорему о структуре обобщенных функций с носителем на окружности (см. [4]).

Пусть $b \neq 0$. Если $|b| < |c|$, то $\Gamma_1$— замкнутая симметричная относительно точки О кривая, содержащая внутри эту точку. При $|b| = |c|$ $\Gamma_2$— является кривой вида "восьмёрка проходящая через начало координат. При $|b| > |c|$ $\Gamma_1$ будет объединением двух замкнутых кривых, симметричных относительно осей координат, причём одна находится в правой полуплоскости, а другая – в левой.

Исследованы все случаи и определены все решения уравнения $Lw = 0$ из пространства $S'$.

## Литература


1. *Балк М.Б.* Полианалитические функции и их обобщения. Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, 1991. Том 85. С. 187–246.

2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. – 448 с.

3. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. – 280 с.

4. *Байзаев С., Рахимова М.А.* О некоторых функциональных уравнениях в пространствах Шварца и их приложениях // Уфимский математический журнал. 2018. Т. 10, № 1. – С. 3 – 13.

# СЛАБО НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ С ВОЗМУЩЕНИЕМ

**@ А.Х. Бегматов, А.С. Исмоилов**

*akrambegmatov@mail.ru, alisher_8778@mail.ru*

УДК 517.946

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.69.*

В настоящей работе рассмотрена задача восстановления функции по семейству парабол в верхней полуплоскости с весовой функцией, имеющей особенность. Доказана теорема единственности решения уравнение и выведена формула обращения. Далее рассматривается соответствующая задача интегральной геометрии с возмущением.

*Ключевые слова*: Слабо некорректные задачи, преобразование Фурье, теоремы единственности, весовая функция, возмущение.

**Weakly ill-posed problems of integral geometry in the plane with perturbation**

In this work we consider the problem of reconstructing a function from a family of parabolas in the upper half-plane with a weight function having a singularity. The uniqueness of theorem for the solution of equation is proved and the inversion formula is derived. Further, the corresponding problem of integral geometry with perturbation is considered.

*Keywords*: ill-posed problems, integral geometry problems, integral transforms, inversion formula, uniqueness, existence theorem, perturbation.

В настоящей работе рассмотрена задача восстановления функции по семейству парабол в полосе с весовой функцией нового вида. Доказана теорема единственности и теорема существование решения задачи. Показано, что решение поставленной задачи слабо некорректно, то есть получены оценки устойчивости в пространствах конечной гладкости. Далее рассматривается соответствующая задача интегральной геометрии с возмущением. Получены теорема единственности ее решения в классе гладких финитных функций с носителем в полосе и оценка устойчивости решения в Соболевских пространствах.

---

Бегматов Акрам Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Akram Begmatov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Исмоилов Алишер Сидикович, аспирант, Самаркандский государственный университет (Самарканд, Узбекистан); Alisher Ismoilov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Мы используем определение задачи интегральной геометрии, данное в работе [1]. Единственность широкого класса задач интегральной геометрии в полосе была установлена В.Г. Романовым [2]. Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа с весовыми функциями, имеющими особенность исследовались в работах [3].

Теоремы единственности, оценки устойчивости и формулы обращения слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями вершинах получены в [4-6].

Введем обозначения, которые будем использовать далее:

$$x \in R^2, \;\; \xi \in R^2, \; \lambda \in R^1, \;\; \mu \in R^1, \quad R^2_+ = \{x = (x_1, x_2) \; : \; x_2 \geq 0\}\,;$$

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 \in R^1, \, x_2 \in [0, l],$$

здесь $0 < l < \infty$.

**Постановка задачи 1.** В полосе $\Omega$ рассмотрим семейство $P(x_1, x_2)$ кривых, которое однозначно параметризуются с помощью координат своих вершин $(x_1, x_2) \in \Omega$:

$$P(x_1, \; x_2) = \{(\xi_1, \; \xi_2) : \; x_2 - \xi_2 = (x_1 - \xi_1)^2, \quad 0 \leq \xi_2 \leq x_2\}.$$

Задача 1 является задачей интегральной геометрии вольтеровского типа. Такие задачи на линейных многообразиях и других явно заданных кривых и поверхностях имеют многочисленные приложения в компьютерной, сейсмической и ультразвуковой томографии.

Определить функцию двух переменных $u(x_1, x_2)$, если для всех $(x_1, x_2)$ из полосы $\Omega$ известны интегралы от нее параболам $P(x_1, x_2)$:

$$\int\limits_{x_1-\sqrt{x_2}}^{x_1+\sqrt{x_2}} g(x_1, \xi_1)\, u(\xi_1, x_2 - (x_1 - \xi_1)^2) d\xi_1 = f(x_1, x_2),$$

где

$$g(x_1, \xi_1) = x_1 - \xi_1.$$

**Постановка задачи 2.** Восстановить функцию двух переменных $u(x_1, x_2)$, если в полосе $\Omega$ известны суммы интегралов от нее вида

$$\int\limits_{P(x_1,x_2)} g(x_1, \xi_1) u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 + \int\limits_0^{x_2} \int\limits_{x_1-h}^{x_1+h} K(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) u(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = F(x_1, x_2),$$

где $h = \sqrt{x_2 - \xi_2}$.

Задача 2 является задачей интегральной геометрии с возмущением.

## Литература


1. *Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.* Теория операторов и некорректные задачи. - Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 1999. - 702 с.

2. *М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский.* Некорретные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.

3. *Бегматов Акр.Х.* Два класса слабо некорректных задач интегральной геомет-рии на плоскости // Сиб. мат. журнал. 1995. Т. 36. № 2. С. 243-247.

4. *Бегматов Акр.Х.* Задачи интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершинах // Доклады РАН. 1998. Т. 358. № 2. С. 151-153.

5. *Akram H. Begmatov, M.E. Muminov, Z.H. Ochilov* The Problem of Integral Geometry of Volterra Type with a Weight Function of a Special Type.// Horizon Research Publishing (HRPUB) Corporation, USA, Mathematics and statistics. Vol 3, No 5. 2015. P. 113-120.

6. *Begmatov, A.Kh., Ismoilov, A.S.* Restoring the function set by integrals for the family of parabolas on the plane // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, 2020, 3(2), 246-254.

# THE CAUCHY PROBLEM FOR THE SYSTEM OF ELASTICITY

**@ F.M. Bolikulov, I.E.Niyozov**

*bolikulovfurkat@mail.ru, iqboln@mail.ru*

УДК 517.946

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*70.

В данной работе рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений моментной теории упругости в пространственной области через ее значения и значения ее напряжений на части границы этой область, т. е. проблема Коши.

*Ключевые слова*: Задача Коши, системная теория упругости, эллиптическая система, некорректная задача, Карлеман матрица, регуляризация.

In this paper, we consider the problem of the analytical continuation of the solution of the system of equations of the moment theory of elasticity in the spatial domain in terms of its values and the values of its stresses on a part of the boundary of this domain, i.e. the Cauchy problem.

*Keywords*: Cauchy problem, system theory of elasticity, elliptic system, ill-posed problem, Carleman matrix, regularization.

In this paper, we considered the problem of analytical continuation of the solution of the system equations of the moment theory of elasticity in spacious bounded domain from its values and values of its strains on part of the boundary of this domain, i.e., the Cauchy's problem.

System equation of moment theory elasticity is elliptic. Therefore the problem Cauchy for this system is ill-posed. For ill-posed problems, one does not prove the existence theorem: the existence is assumed a priori. Moreover, the solution is assumed to belong to some given subset of the function space, usually a compact one [1]. The uniqueness of the solution follows from the general Holmgren theorem. On establishing uniqueness in the article studio of ill-posed problems, one comes across important questions concerning the derivation of estimates of conditional stability and the construction of regularizing operators.

---

Bolikulov Furkat Mamarajabovich, magistr, Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan); Фуркат Боликулов (Самаркандский госуниверситет, Самарканд, Узбекистан)

Niyozov Ikbol Ergashevich, assistant professor, Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan); Икбол Ниёзов (Самаркандский госуниверситет, Самарканд, Узбекистан)

Our aim is to construct an approximate solution using the Carleman function method [2].

Let $x = (x_1, ..., x_m)$ and $y = (y_1, ..., y_m)$ be points of the Euclidean space $E^m$, $D$ a bounded simply connected domain in $E^m$, with piecewise-smooth boundary consisting of a piece $\Sigma$ of the plane $y_m = 0$ and a smooth surface S lying in the half-space $y_m > 0$.

Suppose that vector function $U(x) = (u_1(x), ..., u_m(x), v_1(x), ..., v_m(x)) = (u(x), v(x))$ satisfied in $D$ the system equations moments theory elasticity:

$$\begin{cases} (\mu+\alpha)\Delta u + (\lambda+\mu-\alpha) graddivu + 2\alpha rotv + \rho\omega^2 u = 0, \\ (\nu+\beta)\Delta v + (\varepsilon+\nu-\beta) graddivv + 2\alpha rotu - 4\alpha v + \theta\omega^2 v = 0, \end{cases} \tag{1}$$

where $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\beta$, $\varepsilon$, $\alpha$ is coefficients which characterizing medium, satisfying the conditions $\mu > 0$, $3\lambda + 2\mu > 0$, $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, $3\varepsilon + 2\nu > 0$, $\beta > 0$, $\theta > 0$, $\rho > 0$, $\omega \in R^1$.

Then system (1) maybe write in matrix from in the following way:

$$M(\partial_x)U(x) = 0 \tag{2}$$

A solution $U$ of system (1) in the domain $D$ is said to be regular if $U \in C^1(\overline{D}) \bigcap C^2(D)$.

**Statement of the problem.** Find a regular solution $U$ of system (1) in the domain $D$ using its Cauchy data on the surface $S$:

$$U(y) = f(y), \qquad T(\partial_y, n(y))U(y) = g(y), \quad y \in S, \tag{3}$$

where $T(\partial_y, n(y))$ is the stress operator, $n(y) = (n_1(y), \ldots, n_m(y))$ is the unit outward normal vector on $\partial D$ at a point $y$, $f = (f_1, \ldots, f_{2m})$, $g = (g_1, \ldots, g_{2m})$ are given continuous vector functions on $S$.

Suppose that, instead of $f(y)$ and $g(y)$, we are given their approximations $f_\delta(y)$ and $g_\delta(y)$ with accuracy $\delta$, $0 < \delta < 1$ (in the metric of $C$) which do not necessarily belong to the class of solutions. In this paper, we construct a family of functions $U(x, f_\delta, g_\delta) = U_{\sigma\delta}(x)$ depending on the parameter $\sigma$ and prove that under certain conditions and a special choice of the parameter $\sigma(\delta)$ the family $U_{\sigma\delta}(x)$ converges in the usual sense to the solution $U(x)$ of problem (1),(3), as $\delta \to 0$.

The following formula holds [3]:

$$U(x) = \int\limits_{\partial D} (\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial_y, n)U(y)\} - \{T(\partial_y, n)\Pi(y,x,\sigma)\}^* U(y)) ds_y, \ x \in D,$$

where symbol $*$ is denote of operation transposition, $\Pi(y, x, \sigma)$ Carleman matrix of problem (1),(3) depending on the two points $y, x$ and positive numerical number parameter $\sigma$.

Now we write out a result that allows us to calculate $U(x)$ approximately if, instead of $U(y)$ and $T(\partial_y, n)U(y)$, their continuous approximations $f_\delta(y)$ and $g_\delta(y)$ are given on the surface $S$:

$$\max_S |f(y) - f_\delta(y)| + \max_S |T(\partial_y, n)U(y) - g_\delta(y)| \le \delta, \;\; 0 < \delta < 1.$$

We define a function $U_{\sigma\delta}(x)$ by setting

$$U_{\sigma\delta}(x) = \int_S [\Pi(y, x, \sigma) g_\delta(y) - \{T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)\}^* f_\delta(y)] ds_y,$$

where

$$\sigma = \frac{1}{x_m^0} ln \frac{M}{\delta}, \quad x_m^0 = \max_D x_m, \quad x_m > 0.$$

**Theorem.** *Let $U(x)$ be a regular solution of system (1) in $D$ satisfying condition*

$$|U(y)| + |T(\partial y, n)U(y)| \le M, \;\; y \in \partial D.$$

*Then the following estimate is valid:*

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \le C(x)\delta^{\frac{x_m}{x_m^0}} \left( ln \frac{M}{\delta} \right)^m, \quad x \in D.$$

## Литература


1. *M.M.Lavrent'ev.* Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics [in Russian], Computer Center of the Siberian Division of the Russian Academy of Sciences, Novosibirck (1962) 92p.

2. *Sh.Ya.Yarmukhamedov.* Cauchy problem for the Laplace equation. Dokl.Acad.Nauk SSSR [Soviet Math.Dokl.],235, No.2,p.281-283.(1977).

3. *V.D.Kupradze, T.V.Burchuladze, T.G.Gegeliya, ot.ab.* Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and ... [in Russian], Nauka, Moscow,1976.

# ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА В ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

**@ С.З. Джамалов, Х.Ш. Туракулов**

*siroj63@mail.ru, hamidtsh87@gmail.com*

УДК 517.956.6

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*71.

Краткая аннотация. В данной статье изучаются методами "$\varepsilon$- регуляризации"и априорных оценок с применением преоброзования Фурье однозначная разрешимость обобшенного решения одной нелокальной краевой задаче для трехмерного уравнения Чаплыгина в призматической неограниченной области.

*Ключевые слова*: трехмерная уравнения Чаплыгина, нелокальная краевая задача, коректность задачи,преоброзование Фурье, методы "$\varepsilon$ -регуляризации"и априорных оценок.

**On a nonlocal boundary value problem for the three-dimensional Chaplygin equation in a prismatic unbounded domain**

Short abstract. In this paper we study, the unique solvability of the generalized solution of one nonlocal boundary value problem for the three-dimensional Chaplygin equation in a prismatic unbounded domain by the methods of "$\varepsilon$-regularizations", and a priori estimates using the Fourier transform.

*Keywords*: for the three-dimensional Chaplygin equation, nonlocal boundary value problem, correctness of a problem, methods of "$\varepsilon$-regularizations" and a priori estimates, Fourier transforms.

В данной работе с использованием результатов работ [1]-[3] изучаются однозначная разрешимость обобшенного решения одной нелокальной краевой задачи для трехмерного уравнения Чаплыгина в призматической неограниченной области.

В области

$$Q = (-\alpha, \beta) \times (0, T) \times \mathbb{R} =$$

$$= Q_1 \times \mathbb{R} = \{(x, t, z); x \in (-\alpha, \beta), 0 < t < T < +\infty, z \in \mathbb{R}\},$$

---

Джамалов Сирожиддин Зухриддинович, д.ф.-м.н.,в.н.с, Институт математики АН.РУз, (г.Ташкент, Узбекистан);
Dzhamalov Sirojiddin Zuxriddinovich (Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,DSc)

Туракулов Хамидулло Шамсиддинович, докторант PhD, Институт математики АН.РУз, (г.Ташкент, Узбекистан); Turaqulov Khamidullo Shamsidinovich (Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,PhD student)

рассмотрим уравнение Чаплыгина:

$$Lu = K(x)u_{tt} - \Delta u + a\,(x,t)\,u_t + c\,(x,t)\,u = f\,(x,t,z), \qquad (1)$$

где $xK(x) > 0$,при $x \neq 0$, $-\alpha < x < \beta$, $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$- оператор Лапласа.
Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области Q.
**Нелокальная краевая задача.** Найти обобщенное решение $u(x,t,z)$ уравнения (1) из пространства $W_2^{2,3}(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p \left. u\right|_{t=0} = D_t^p \left. u\right|_{t=T}, \qquad (2)$$

$$\eta D_x^p \left. u\right|_{x=-\alpha} = D_x^p \left. u\right|_{x=\beta}, \qquad (3)$$

при $p = 0, 1$, где $D_y^p u = \frac{\partial^p u}{\partial y^p}$, $D_y^0 u = u$, $\gamma, \eta-$некоторые постоянные числа, отличные от нуля, величины которого будет уточнены ниже.
**Определение.** Обобщенным решением задачи (1)-(3) будем называть функцию $u(x,t,z) \in W_2^{2,3}(Q)$, удовлетворяющее почти всюду уравнению (1) с условиями (2)-(3) .
**Теорема.**Пусть выполнены следующее условия для коэффициентов уравнения (1); $2a(x,t) + \mu K(x) > \delta_1 > 0$, $\mu\; c(x,t) - c_t(x,t) > \delta_2 > 0$ , для всех $(x,t) \in \overline{Q_1}$, где $\mu = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ при $|\,\gamma\,| > 1$, $|\eta| \geq 1$, $a(x,0) = a(x,T)$, $c(x,0) = c(x,T)$. Тогда для любой функции $f \in W_2^{1,3}(Q)$, такой, что $\gamma \cdot f(x,0,z) = f(x,T,z)$, существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(3) из пространства $W_2^{2,3}(Q)$.
Здесь через $W_2^{l,s}(Q)$, обозначено гильбертово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{l,s}(Q)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^l(Q_1)}\, d\lambda, \qquad (A)$$

где $W_2^l(Q_1)$ пространства Соболева, $s, l-$ любые конечные положительные целые числа, а норма в пространстве Соболева $W_2^l(Q_1)$, определяется следующим образом

$$\|\vartheta\|^2_{W_2^l(Q_1)} = \sum_{|\alpha| \leq l} \int_{Q_1} |D^\alpha \vartheta|^2\, dxdt,$$

$\alpha-$ это мультииндекс, $D^\alpha-$есть обобщенная производная по переменними $x$ и $t$,а через

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z)\, e^{-i\lambda z} dz$$

обозначено преобразование Фурье по переменным $z$, функции $u(x,t,z)$.
**Замечание.** Результат справедливо для многомерного уравнения Чаплыгина.

### Литература

1. *Джамалов.С.З.* Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа первого рода.// Вестник Самарского государственного технического университета, **21**:4 (2017),с. 1–14.
2. *Джамалов.С.З., Ашуров.Р.Р.* О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве.// Казахский математ журнал, **18**:2 (2018),с. 59–70.
3. *Джамалов С.З.,Ашуров Р.Р.,Туракулов Х.Ш.* Об одной полунелокальной краевой задаче для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченной призматической области.//Вестник КРАУНЦ, **32**:2 (2021),с. 18–27.

# ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДИХОТОМИИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПО ХАЙЕРУ-УЛАМ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

**@ М. Илолов, Дж.Ш. Рахматов**

*ilolov.mamadsho@gmail.com, jamesd007@rambler.ru*

УДК 515.5

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*72.

В банаховом пространстве $X$ рассматривается уравнение $\dot{x} = A(t)x(t)$ в котором оператор A(t) является $\omega$-периодический оператор-функцией. Установлено, чтоданное уравнение устойчиво в смысле Хайера-Улам тогда и только тогда, когда его оператор монодромии является устойчивым.

*Ключевые слова*: экспоненциальная устойчивость, устойчивость по Хайеру Улам, оператор монодромии.

**On the equivalence of exponential dichotomy and Hayers-Ulam stability of linear periodic differential equations in banach space**

In a Banach space $X$, we consider the equation $\dot{x} = A(t)x(t)$ in which the operator $A(t)$ is $\omega$ -periodic operator function. It is established that this equation is stable in the Hayer-Ulam sense if and only if its monodromy operator is stable.

*Keywords*: exponential stability, Hayer Ulam stability, monodromy operator.

Концепция экспоненциальной дихотомии (э-дихотомии) дифференциальных уравнений восходит к работе О.Перрона [1]. Усилиями математиков разных стран данная концепция получила свое развитие и нашла применение при анализе свойств многих классов функциональных, в частности, дифференциальных уравнений. В конечномерном случае в работе [2] доказано, что э-дихотомия и устойчивость по Хайеру-Улам являются эквивалентными для линейных систем с периодическими коэффициентами. В настоящей работе похожий результат получен для линейных периодических уравнений в банаховом пространстве.

---

Илолов Мамадшо, д.ф.-м.н., профессор, ЦИРННТ НАНТ (Душанбе, Таджикистан); Mamadsho Ilolov (Center of Innovative Development of Science and New Technologies of National Academy of Sciences of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan)

Рахматов Джамшед Шавкатович, ЦИРННТ НАНТ (Душанбе, Таджикистан); Jamshed Sh. Rahmatov (Center of Innovative Development of Science and New Technologies of National Academy of Sciences of Tajikistan, Dushanbe, Tajikistan)

В монографии [3] рассматривается уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{1}$$

в банаховом пространстве $X$, где оператор $A(t)$ является $\omega$-периодической оператор-функцией, т.е. для некоторого $\omega > 0$

$$A(t+\omega) = A(t), 0 \leq t \leq \infty. \tag{2}$$

Оператор Коши $U(t)$ уравнения (1) удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t), \\ U(\cdot) = I \end{cases} \tag{3}$$

где $I$-тождественный оператор.

Очевидно, что с учетом (2) системе (3) удовлетворяет также и оператор

$$U_1(t) = U(t+\omega)U^{-1}(\omega).$$

В силу единственности решения системы (3) получим $U_1(t) = U(t)$, откуда $U(t+\omega) = U(t)U(\omega)$. Оператор $U(\omega)$ называется оператором монодромии уравнения (1).

**Теорема 1.** *Для того чтобы уравнение (1) было э-дихотомическим на всей оси, необходимо и достаточно, чтобы спектр $\sigma(U(\omega))$ не имеет пересечения с единичной окружностью $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.*

Далее, установим условия устойчивости в смысле Хайера-Улам для уравнения (1), или что то же самое для семейства операторов $\mathfrak{A} = \{A(t)\}_{t\geq 0}$.

Пусть $R_+ = [0, \infty]$-множество всех неотрицательных чисел и пусть $f(\cdot) - X$-значная функция определенная на $R_+$.

Рассмотрим уравнения в банаховом пространстве $X$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), t \in R \tag{4}$$

и

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), t \in R_+.$$

Пусть $\varepsilon$-положительное число. Непрерывная $X$-значная функция $y(t)$ определенная на $R_+$ называется $\varepsilon$-приближенным решением (4) если она непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}_+ \backslash (\omega\mathbb{Z}_+)$ и $\|\dot{y}(t) - A(t)y(t)\| \leq \varepsilon$.

Семейство операторов $\mathfrak{A}$ называется устойчивой в смысле Хайера-Улам, если существет неотрицательная постоянная $L$ такая, что для каждого $\varepsilon$-приближенного решения $\varphi$ уравнения (4) существует точное решение $\Theta$ (5) такое, что

$$\sup_t \|\varphi(t) - \Theta(t)\| \leq \varepsilon.$$

Справедливо основное утверждение.

**Теорема 2.** *Семейство $\mathfrak{A} = \{A(t)\}_{t\geq 0}$ устойчиво по Хайеру-Улам тогда и только тогда, когда его оператор монодрамии $U(\omega)$ является э-дихотомическим.*

### Литература


1. *Perron O.* Uber line Matrixtransformation (in German) // Math.Zeitchrift, **32**:1 (1930), 465-473.

2. *Barbu D., Buse C., Tabassum A.* Hyers-Ulam stability and exponential dichotomy of linear differential periodic systems are equivalent // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **58** (2015), 1-12.

3. *Далецкий Ю.А., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — Москва: Наука, 1970.

# MIXED CAUCHY BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONCHARACTERISTIC DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATIONS

**@ N. Kakharman**
*n.kakharman@math.kz*

УДК 517.518

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.73.*

В данной статье мы рассматриваем следующую смешанную задачу Коши

$$Lu = u_{tt} - k(t)\Delta_x u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in D = \Omega \times (0,T), \quad \Omega \subset R^n,$$

где $k(t) \geq 0$. Доказывается разрешимость этой задачи в пространствах Соболева $W_2^2(D)$ при условии $\frac{f}{k} \in W_2^1(D)$ , далее эта задача исследуется для уравнения с младшими коэффициентами.

*Ключевые слова*: Смешанная краевая задача Коши, гиперболическое уравнение, потенциал Ньютона.

In this paper, we consider the following mixed Cauchy problem

$$Lu = u_{tt} - k(t)\Delta_x u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in D = \Omega \times (0,T), \quad \Omega \subset R^n,$$

where $k(t) \geq 0$. We prove the solvability of this problem in Sobolev spaces $W_2^2(D)$ under the condition $\frac{f}{k} \in W_2^1(D)$, further, this problem is studied for an equation with lower-order coefficients.

*Keywords*: Mixed Cauchy boundary value problem, hyperbolic equation, Newton potential.

A number of works has been devoted to the study of the mixed Cauchy problem for noncharacteristically degenerate second-order hyperbolic equations, beginning with the work of M.L. Krasnov [1]. Later these works were generalized for general degenerate higher order equations by D.T. Dzhuraev [2], V.N. Vragov [3] and A.I. Kozhanov [4].

In the study of the mixed Cauchy problem in a cylindrical domain, the lateral boundary conditions are usually local boundary conditions of the Dirichlet type or periodic boundary conditions.

In the work of T.Sh. Kalmenov and D. Suragan [5], the boundary condition for the Newton (volume) potential was found, which is a new integro-differential self-adjoint boundary condition for the Laplace equation.

In this paper, we study the mixed Cauchy problem for one class of noncharacteristic degenerate hyperbolic equations using this boundary condition.

---

Kakharman Nurbek, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, (Almaty, Kazakhstan)

Unlike other works devoted to this topic, where solutions of the mixed Cauchy problem with different lateral boundary conditions of the considered problems are obtained in weighted spaces, in this paper, all solutions of the considered mixed Cauchy problems are obtained in classical Sobolev spaces.

**Литература**


1. *M. L. Krasnov* Mixed boundary problems for degenerate linear hyperbolic differential equations second order // Matematicheskii Sbornik, **91**:1 (1959), 29-84.

2. *T. D. Dzhuraev* Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types // Fan, Tashkent, 1979.

3. *V.N. Vragov* Boundary value problems for nonclassical equations of mathematical physics // Novosi- birski, NGU, 1983. (in Russian)

4. *A.I. Kozhanov* Linear inverse problems for a class of degenerate equations of Sobolev type // Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Universiteta, Seriya Matematicheskoe Modelirovanie i Programmirovanie. **11** (2012), 33-42.

5. *T. S. Kal'menov , D. Suragan D* To spectral problems for the volume potential // Doklady Mathematics, **80**:2 (2009), 646-649.

# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

**@ Д.Б. Кац**

*Katzdavid89@gmail.com*

УДК 517.53/.55

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*74.

Доклад посвящен нескольким новым результатам, связанным с классической задачей комплексного анализа - краевой задачей Римана, которая рассматривается для бианалитических функций.

*Ключевые слова*: краевая задача Римана, неспрямляемые кривые, бианалитические функции

**Riemann's boundary value problem for bianalytic functions**

The report is devoted to several new results related to the classical problem of complex analysis - the Riemann boundary value problem, which is considered for bianalytic functions.

*Keywords*: Riemann boundary value problem, non-rectifiable curves, bianalytic functions

Мы решаем краевую задачу Римана для бианалитических функций на контуре, состоящем из неспрямляемых замкнутых жордановых кривых. В классических результатах по этой задаче кривые кусочно-гладкие, однако краевая задача Римана имеет множество приложений в теории твердых сред и других областях. и некоторые из этих приложений допускают фрактальные (и, следовательно, неспрямляемые) контуры. В данном докладе демонстрируются результаты, полученные с помощью техники интегрирования по неспрямляемым кривым, недавно предложенную авторами для исследования задачи Римана на таких контурах.

Функция $\phi(z)$ называется бианалитической в области $D$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, если она дважды дифференцируема в этой области и

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\overline{z}^2} = 0, \quad z \in D.$$

Теория этих функций описана в [1]; см. также [2]. В частности, любая бианалитическая функция представима как

$$\phi(z) = \phi_0(z) + \overline{z}\phi_1(z), \quad z \in D,$$

Кац Давид Борисович, к.ф.-м.н., Московский политехнический университет (Москва, Россия); David Katz (Moscow Polytechnic University, Moscow, Russia)

где $\phi_{0,1}$ - аналитические функции. Ясно, что $\dfrac{\partial\phi}{\partial\overline{z}} = \phi_1$, и такое представление уникально.

Пусть $\Gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{m} \Gamma_j$ есть объединение взаимно непересекающихся замкнутых простых Жордановых кривых, ограничивающих конечные непересекающиеся области $D_j$ на комплексной плоскости, $D^+ := \bigcup\limits_{j=1}^{m} D_j$, $D^- := \mathbb{C} \setminus \overline{D^+}$. Результаты, о которых пойдет речь, относятся к следующей версии краевой задачи Римана для бианалитических функций:

– Найти функцию $\phi(z)$, бианалитическую в $D^+$ и $D^-$, такую, что

$(R1)$ : эта функция и ее производная $\phi_1 = \dfrac{\partial\phi}{\partial\overline{z}}$ имеют предельные значения $\phi^{\pm}(t)$, $\phi_1^{\pm}(t)$ из $D^{\pm}$ в любой точке $t \in \Gamma$, удовлетворяющие краевым условиям

$$\phi^+(t) = G(t)\phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma,$$

$$\phi_1^+(t) = G_1(t)\phi_1^-(t) + g_1(t), \quad t \in \Gamma,$$

где $G, G_1, g, g_1$ - заданные функции;

$(R2)$ : в бесконечно удаленной точке искомая функция ограничена и ее производная по $\overline{z}$ исчезает.

Классическая краевая задача Римана для аналитических функций на кусочно-гладких кривых детально изучена (см [2], [3], [4]). Для неспрямляемых контуров ее впервые решил Б.А. Кац [5] (см. также недавнюю работу [6]); затем эти результаты были улучшены Д.Б. Кацем [7], [8]. Полное решение краевой задачи Римана для бианалитических функций на гладких контурах (с другим условием на бесконечности) было получено А.П. Солдатовым и Чаном К. Выонгом [9]. В рамках этого доклада мы поговорим о ней же, но для неспрямляемых контуров.

### Литература

1. *Балк М.Б.* Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники, серия современные проблемы математики, фундаментальное направления. **85** (1991), 187-246.

2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. — Москва: Наука, 1977.

3. *Мусхелишвили Н.И.* Интегральные сингулярные уравнения. — Москва: Наука, 1962.

4. *Jian-Ke Lu* Boundary value problems for analytic functions. — Singapore: World Scientific, 1993.

5. *Кац Б.А.* Краевая задача Римана на замкнутой Жордановой кривой // Известия ВУЗов. Математика, **3** (1984), 68-80.

6. *Kats B.A.* The Riemann boundary value problem on non-rectifiable curves and related questions // Complex Variables and Elliptic Equations, **59**:8 (2014), 1053-1069.

7. *Katz D.B.* New metric characteristics of non-rectifiable curves with applications // Siberian Mathematical Journal, **57**:2 (2016), 364-372.

8. *Katz D.B.* Local and weighted Marcinkiewicz exponents with applications // J. Math. Anal. Appl. **440**:1 (2016), 74-85.

9. *Солдатов А.П., Выонг Ч.* Задача линейного сопряжения для бианалитических функций // Известия ВУЗов. Математика, **12** (2016), 76-81.

# КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В КЛАССЕ $C^1$ – ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

**@ Е.А. Мазепа, Д.К. Рябошлыкова**
*elena.mazepa@volsu.ru, daria_ryaboshlikova@volsu.ru*

УДК 517.95

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.75.*

В настоящей работе изучаются решения стационарного уравнения Шредингера на некомпактном римановом многообразии. Вводится понятие эквивалентности в классе непрерывно дифференцируемых функций на некомпактном римановом многообразие относительно некоторой нормы в этом пространстве. Также устанавливается взаимосвязь между существованием решений стационарного уравнения Шредингера на $M$ и вне некоторого компактного подмножества $B \subset M$ в заданном классе эквивалентных функций.

*Ключевые слова*: уравнение Шредингера, некомпактное риманово многообразие, краевая задача, классы эквивалентных функций.

**Boundary value problems for the stationary Schrodinger equation in the class of $C^1$ – equivalent functions on Riemannian manifolds**

In the present work we study solutions of the stationary Schrodinger equation on a non-compact Riemannian manifold. We introduce the concept of equivalence in the class of continuously differentiable functions on a non-compact Riemannian manifold with respect to a certain norm in this space. Also we establish the interrelation between problems of existence of solutions of the Schrodinger equation on $M$ and off some compact in a given class of equivalent functions.

*Keywords*: Schrodinger equation, non-compact Riemannian manifold, boundary value problem, classes of equivalent functions.

В работе изучаются некоторые крвевые задачи для стационарного уравнения Шредингера:

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = 0 \tag{1}$$

в классе $C^1$ – эквивалентных функций на произвольном гладком связном некомпактном римановом многообразии $M$. Здесь $c(x) \in C^{0,\alpha}(G)$ —

Мазепа Елена Алексеевна, к.ф.-м.н., доцент, ВолГУ (Волгоград, Россия); Elena Mazepa (Volgograd State University, Volgograd, Russia)

Рябошлыкова Дарья Константиновна, ассистент, ВолГУ (Волгоград, Россия); Daria Ryaboshlikova (Volgograd State University, Volgograd, Russia)

неотрицательная на $M$ функция, $G \subset\subset M$, $0 < \alpha \leq 1$. Под решением уравнения (1) будем понимать функцию $u \in C^2(G)$, удовлетворяющую этому уравнению на каждом компактном подмножестве $G \subset\subset M$.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – непрерывно дифференцируемые на $M$ функции, а $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ – гладкое исчерпание многообразия $M$, т.е. последовательность непустых предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия $M$ таких, что $\overline{B_k} \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

**Определение 1.** Будем говорить, что *функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *являются* $C^1$ *- эквивалентными на* $M$, и использовать обозначение $f_1 \overset{C^1}{\sim} f_2$, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия $M$ выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \|f_1(x) - f_2(x)\|_{C^1(M\setminus B_k)} = 0,$$

где $\|f(x)\|_{C^1(G)} = \sup\limits_G |f(x)| + \sup\limits_G |\nabla f|$.

Очевидно, что отношение $\ll\overset{C^1}{\sim}\gg$ является отношением эквивалентности и не зависит от выбора исчерпания многообразия и, таким образом, разбивает множество всех непрерывных на $M$ функций на классы эквивалентности. Обозначим класс $C^1$ - эквивалентных $f$ функций $[f]_{C^1}$.

**Определение 2.** Будем говорить, что для уравнения (1) на $M$ *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]_{C^1}$, если на $M$ существует решение *u(x)* уравнения (1) такое, что $u \in [f]_{C^1}$.

Пусть $B \subset M$ –произвольное связное компактное подмножество с гладкой границей и $B \subset B_k$ для всех $k$.

**Определение 3.** Будем говорить, что для уравнения (1) на $M\setminus B$ *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]_{C^1}$, если для любой непрерывной на $\partial B$ функции $\Phi(x)$ на $M\setminus B$ существует решение *u(x)* уравнения (1) такое, что $u \in [f]_{C^1}$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ – исчерпание многообразия $M$ с гладкими границами $\partial B_k$. Обозначим через $v_k$ решение уравнения (1) в $B_k\setminus B$, удовлетворяющее условиям

$$v_k|_{\partial B} = 1, \quad v_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Последовательность функций $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится на $M\setminus B$ к решению уравнения (1):

$$v = \lim_{k\to\infty} v_k, \quad 0 < v \leq 1, \quad v|_{\partial B} = 1.$$

При этом функция $v$ не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Функцию $v$ будем называть *L-потенциалом* компакта $B$ относительно многообразия $M$.

**Определение 4.** Многообразие $M$ будем называть $L_{C^1}$*-строгим многообразием*, если для некоторого компакта $G \subset M$ существует $L$-потенциал $v$ такой, что $v \in [0]_{C^1}$.

Сформулируем основные результаты, которые являются аналогами теорем Е.А. Мазепы из работы [1] в классе $C^1$ – эквивалентных функций.

**Теорема 1.** *Пусть на* $M \backslash B$ *для любой постоянной* $A$ *существует решение* $u(x)$ *уравнения (1) такое, что* $u \in [f]_{C^1}$ *и* $u|_{\partial B} = A|_{\partial B}$. *Тогда на* $M$ *для уравнения (1) разрешима краевая задача с граничными условиями из того же класса.*

**Следствие 3.** *Пусть на* $M \backslash B$ *для любой непрерывной на* $\partial B$ *функции* $\Phi(x)$ *для уравнения (1) разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]_{C^1}$. *Тогда на* $M$ *для уравнения (1) разрешима краевая задача с граничными условиями из того же класса.*

**Теорема 2.** *Пусть на* $L_{C^1}$*-строгом многообразии* $M$ *для уравнения (1) разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]_{C^1}$. *Тогда на* $M \backslash B$ *для любой непрерывной на* $\partial B$ *функции* $\Phi(x)$ *разрешима внешняя краевая задача с граничными условиями из того же класса.*

## Литература

1. *Мазепа Е.А.* Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях // Сиб. мат. журнал., **43**:3 (2002), 591-599.

# ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОЦЕНКЕ ВЫХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

**@ В.П. Максимов**

*maksimov@econ.psu.ru*

УДК 517.529

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*76.

Для широкого класса функционально дифференциальных систем с неопределенностью в входных характеристиках предлагается подход к оценке значений линейных функционалов на траекториях моделируемой системы, определяемых дополнительными функциональными условиями.

*Ключевые слова*: функционально-дифференциальные модели, системы с последействием, оценки решений

**An approach to estimating output characteristics of dynamic models with incomplete information**

For a wide class of functional differential systems with an uncertainty in input characteristics, an approach to estimating linear functionals values over trajectories of modeled systems constrained by functional conditions is proposed.

*Keywords*: functional differential models, systems with aftereffect, estimates of solutions

Рассматриваются динамические модели в форме линейных функционально-дифференциальных уравнений, для которых ставятся краевые задачи и задачи управления. Краевые условия в краевых задачах и целевые условия в задачах управления задаются с помощью линейных функционалов общего вида, определяемого фиксированным пространством фазовых переменных. В условиях неполной информации о входных характеристиках (например, о параметрах устройства, реализующего управляющие воздействия) предлагается подход к оценке значений линейных функционалов на траекториях моделируемой системы. Получаемые оценки основаны на использовании идей и результатов об обобщенной проблеме моментов и ее связи с экстремальными задачами [1]. Детально рассмотрен случай полиэдральной неопределенности, описываемой системой линейных неравенств. Предлагаемые конструкции и алгоритмы базируются на систематическом использовании представления решений функционально-дифференциальных систем с последействием

---

Максимов Владимир Петрович, д.ф.-м.н., профессор, ПГНИУ (Пермь, Россия); Vladimir Maksimov (Perm State University, Perm, Russia)

и свойствах соответствующего оператора Коши [2]. Приводятся иллюстрирующие примеры и примеры сравнения полученных оценок с оценками для случая интервальной неопределенности при задании входных параметров. Полученные результаты являются развитием результатов, изложенных в обзоре [3].

## Литература

1.*Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973.

2. *Maksimov V.P.* The structure of the Cauchy operator to a linear continuous-discrete functional differential system with aftereffect and some properties of its components // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. **29**:1 (2019), 40-51.

3. *Максимов В.П.* Непрерывно-дискретные динамические модели // Уфимский математический журнал. **13**:3 (2021), 97-106.

# АЛГОРИТМ ПРИСОЕДИНЕННОГО ВИХРЯ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ

**@ А.Н. Марковский, Д.Ю. Гамаюнова**
*mrkvsk@yandex.ru, dasha135@inbox.ru*

УДК 517.958:531.32 + 519.635.1

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.77.*

Функция тока задачи обтекания представляется в виде логарифмического потенциала по обтекаемой области. Рассматривается продолжение по непрерывности функции тока из области обтекания в обтекаемую область, которое определяет присоединенный вихрь. Для построения семейства обтекающих векторных полей и соответсвующих присоединенных вихрей строится сходящийся алгоритм, опирающийся на полную систему потенциалов. Представлены результаты вычислительных экспериментов для разных контуров.

*Ключевые слова*: задача обтекания, функция тока, вихревое течение, логарифмический потенциал, численные течения, метод базисных потенциалов

**The algorithm of the attached vortex of a flat region in the flow problem**

The current function of the flow problem is represented as a logarithmic potential over the streamlined region. The continuity continuation of the current function from the flow area into the flowing area, which determines the attached vortex, is considered. To construct a family of flowing vector fields and corresponding attached vortices, a convergent algorithm based on a complete system of potentials is constructed. The results of computational experiments for different contours are presented.

*Keywords*: flow problem, current function, vortex flow, logarithmic potential, numerical flows, method of basic potentials

1. Обозначим $Q$ – односвязную область с кусочно-гладкой границей $S = \partial Q$. Пусть в области течения $Q^+ = R^2 \backslash \overline{Q}$ требуется построить векторное поле $\overline{w}(x) = \{u(x), v(x)\}$, $x = (x_1, x_2)$, удовлетворяющее условиям: $a)$ $\operatorname{div} \overline{w}(x) = 0$, $\operatorname{rot} \overline{w}(x) = 0$, $x \in Q^+$; $b)$ $\overline{w}(\infty) = \{u_0, v_0\}$, где $u_0$ и $v_0$ заданы; $c)$ граница $S$ – линия тока поля $\overline{w}(x)$.

---

Марковский Алексей Николаевич, к.ф.-м.н., доцент, КубГУ (Краснодар, Россия); Aleksey Markovsiy (Kuban State University, Krasnodar, Russia)

Гамаюнова Дарья Юрьевна, аспирант, КубГУ (Краснодар, Россия); Daria Gamayunova (Kuban State University, Russia)

Задача обтекания $a) - c)$ в терминах функции тока может быть эквивалентно сформулирована как задача определения функции $\psi(x)$ такой, что выполняются равенства:

1. $\Delta\psi(x) = 0, \ x \in Q^+$;
2. $\nabla\psi(\infty) = \{u_0, v_0\}$;
3. $\psi(x) = C \equiv \text{const}, \ x \in S$.

Для нестандартной краевой задачи $1) - 3)$ для уравнения Лапласа в [1] доказана разрешимость, дано представление решения и указан класс единственности. Справедливо утверждение: функция тока $\psi(x)$ задачи обтекания представляется в виде

$$\psi(x) = (u_0x_2 - v_0x_1) + \iint_Q g(y)E(x-y)dy, \ x \in Q^+,$$

где $g(y) \in G(Q)$; если потенциал Робена для области $Q$ не равен нулю, то это представление единственно в подпространстве $G(Q)$ – гармонических в $L_2(Q)$ функций. Функция $E(x) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|x|}$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа в $R^2$.

Неопределенность в выборе постоянной $C$ может быть устранена минимизацией плотности потенциала. Если постоянная Робена не равна нулю, то тождественно постоянная на границе функция $\psi^*(x)$ может быть представлена логарифмическим потенциалом по области с плотностью $g^*$. Тогда функцию тока задачи обтекания можно записать в виде

$$\psi(x) = (u_0x_2 - v_0x_1) + \iint_Q g_1(y)E(x-y)dy + \gamma\psi^*(x), \ x \in Q^+.$$

Продолжая по непрерывности функцию $\psi(x)$ из $Q^+$ в обтекаемую область $Q$, будем в $Q$ иметь общий *присоединенный* вихрь $\overline{w}(x) = \nabla_c\psi(x)$ и частный *собственный* вихрь [3] $\overline{w}^*(x) = \nabla_c\psi^*(x)$. Циркуляция векторного поля $\overline{w}(x)$ имеет вид

$$\Gamma = \iint_Q g_1(y)dy + \gamma\iint_Q g^*(y)dy.$$

Меняя множитель $\gamma$, получаем обтекающее течение со всеми возможными циркуляциями.

2. Для построения однопараметрического по циркуляции семейства векторных полей, обтекающих заданный контур $S = \partial Q$ и соответсвующих присоединенных вихрей в области $Q$, используется метод базисных потенциалов [4]. Справедливо утверждение: система функций

$\gamma_m(x) = E(x^m - x)$, $x \in Q$, замкнута в $G(Q)$ и линейно независима, если последовательность $x^m$, $m = 1, 2, ...$ удовлетворяет условию базисности.

Используя полную систему базисных потенциалов $\gamma_m(x)$, $m = 1, 2, ...$, можно аппроксимировать неизвестную плотность логарифмического потенциала, сводя задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений с матрицей Грама для системы $\gamma_m(x)$.

3. В докладе будут представлены результаты вычислительных экспериментов для разных контуров, в том числе для профиля Жуковского.

**Литература**

1. *Лежнев М.В.* Задачи и алгоритмы плоскопараллельных течений: учеб. пособие. — Краснодар: КубГУ, 2009.

2. *Лежнев В.Г., Марковский А.Н.* Проекционные алгоритмы вихревых 2D течений в сложных областях // Таврический Вестник Информатики и Математики, **1**:26 (2015), 42–49

3. *Марковский А.Н., Лежнев В.Г.* Собственный вихрь области и расширенная задача Стокса // IX Международная конференция "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике посвященная 120-летию со дня рождения акад. М. А. Лаврентьева. Сб. тез. Математические проблемы механики, 2020, 60–61

4. *Лежнев А.В., Лежнев В.Г.* Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики: учеб. пособие. — Краснодар: КубГУ, 2009

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА С ТРЕМЯ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫМИ ТОЧКАМИ

**@ А.Г. Олими (А.Г. Олимов), Н.К. Охунов**
*Abdumanon1950@mail.ru, okhunov_73@mail.ru*

УДК 517.927.21

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*78.

В сообщении для уравнения, полученного итерированием обыкновенного дифференциального оператора первого порядка с тремя слабо сингулярными точками, найдено представление общего решения, которое применяется для исследования свойств решений, выяснения постановки и решения задач Коши - Рикье и типа линейного сопряжения.

*Ключевые слова*: дифференциальное уравнение специального типа, слабо сингулярная точка, общее решение, формулы обращения, свойства решений, задачи Коши - Рикье и линейного сопряжения.

## Integral representation of the general solution and boundary value problems for an ordinary differential equation of a special type with three weakly singular points

In the message for the equation obtained by iterating an ordinary first-order differential operator with three weakly singular points is found representation of the general solution, which is used to study the properties of solutions, formulation and solv of Cauchy - Riquier and linear conjugation problems.

*Keywords*: special type differential equation, weakly singular point, general solution, inversion formulas, properties of solutions, Cauchy - Riquier and linear conjugation problems.

Пусть $\Gamma = (a, b), (b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ - точки отрезка $\overline{\Gamma}$, $a = b_1 < b_2 < b_3 = b$, $\Gamma_{(b)} = \Gamma \setminus (b)$, $(\alpha) = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, 0 < \alpha_j < 1, j = \overline{1, 3}$ - действительные числа, $n$ - натуральное число. На множестве $\Gamma_{(b)}$ рассмотрим уравнение

$$A^n_{(\alpha),(b)} y = f(x) \cdot \prod_{j=1}^{3} |x - b_j|^{-\alpha_j} \tag{1}$$

Олими Абдуманон Гафорзода (Олимов Абдуманон Гафорович), к.ф.-м.н., доцент, ХГУ (Худжанд, Таджикистан); Olimi Abdumanon Gaforzoda (Olimov Abdumanon Gaforovich) (Khujand State University, Khujand, Tajikistan)

Охунов Нозимджон Кобилович, ХГУ (Худжанд, Таджикистан); Okhunov Nozimjon Kobilovich (Khujand State University, Khujand, Tajikistan)

где $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$- известные, $y(x)$- искомая функции, а

$$A_{(\alpha),(b)}y \equiv y' + p(x)\prod_{j=1}^{3}|x-b_j|^{-\alpha_j}\,y - \,q(x)\prod_{j=1}^{3}|x-b_j|^{-\alpha_j}$$

· Решение уравнения (1) определяется также как в работах [1,2].

**Теорема 1.** *Пусть в уравнении (1) функции $p(x)$ , $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $\overline{\Gamma}$ за исключением, быть может, точек $b_j$, $j=\overline{1,3}$. В этих точках они могут иметь разрыв первого рода. Пусть $\Gamma=\bigcup_{i=1}^{2}\Gamma_i$ , $\Gamma_i=(b_i\,,\ b_{i+1})$, $x_i^0$- фиксированная точка промежутка $\Gamma_i$, далее $\Gamma_i^1=$ $=(b_i\ ,\ x_i^0]$,$\Gamma_i^2=[x_i^0\ ,\ b_{i+1})$, $i=1,2$. Тогда общее решение уравнения (1), а также степени оператора $A_{(\alpha),(b)}$ от нее выражается формулой*

$$A^{s}_{(\alpha),(b)}y(x)=\begin{cases} I^{\alpha_i+}_{b_i,s}[p_i^1(x),q_i^1(x),f_i^1(x),C^1_{i\,s},\ldots,C^1_{i(n-1)}] & \text{при} x\in\Gamma_i^1\\ \\ I^{\alpha_{i+1}-}_{b_{i+1},s}[p_i^2(x),q_i^2(x),f_i^2(x),C^2_{i\,s},\ldots,C^2_{i(n-1)}] & \text{при} x\in\Gamma_i^2\end{cases},i=1,2, \quad (2)$$

*$s=\overline{0,(n-1)}$, где $p_i^k(x),q_i^k(x),f_i^k(x),k=1,2-$известные функции а $I^{\alpha_i\,,+}_{b_i,s}[...]$ и $I^{\alpha_{i+1}\,,-}_{b_{i+1},s}[...]$ известные интегральные операторы, соответственно определяемые по формулам* (1.9) *и* (2.3) *из работы* [2, с.6,7], *а $C^k_{i\,j}$,*
*$i,k=1,2$,$j=\overline{0,(n-1)}$ - произвольные постоянные.*

Представление (2) обладает следующими свойствами: а) группы произвольных постоянных $C^1_{i\,j}$ и $C^2_{i\,j}$, соответствующие значениям $i=1$ и $i=2$, $j=\overline{0,(n-1)}$ однозначно выражаются одна через другой, так что, формула зависит только от $n$ произвольных постоянных; б) представление обратимо, если известно решение уравнения (1), выражаемое формулой (2), то соответствующие ему постоянные находятся однозначно.

Выше сказанное позволяет решить следующие задачи Коши – Рикье и типа линейного сопряжения, единственное решение которых дается при помощи формулы (2): требуется найти решение уравнения (1), подчиняющееся одному из следующих групп условий:

$$1)[A^{j}_{(\alpha),(b)}y(x)]_{x=b_1+0}=y^1_{1\,j},\ \ [A^{j}_{(\alpha),(b)}y(x)]_{x=b_2+0}=y^1_{2\,j};$$

$$2)[A^{j}_{(\alpha),(b)}y(x)]_{x=b_2+0}=y^1_{2\,j},\ \ [A^{j}_{(\alpha),(b)}y(x)]_{x=b_2-0}=y^2_{1\,j};$$

$$3)[A^{j}_{(\alpha),(b)}y(x)]_{x=b_2-0}=y^2_{1\,j},\ \ [A^{j}_{(\alpha),(b)}y(x)]_{x=b_3-0}=y^2_{2\,j};$$

$$4)[A^{j}_{(\alpha),(b)}y(x)]_{x=b_1+0}=y^1_{1\,j},\ \ [A^{j}_{(\alpha),(b)}y(x)]_{x=b_3-0}=y^2_{2\,j},\ \ j=\overline{0,(n-1)};$$

$$5)\sum_{j=0}^{n-1} b_{ij}[A^j_{(\alpha),(b)}y(x)]_{x=b_1+0}+\sum_{j=0}^{n-1} b_{i(n+j)}[A^j_{(\alpha),(b)}y(x)]_{x=b_2-0}+$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1} b_{i(2n+j)}[A^j_{(\alpha),(b)}y(x)]_{x=b_2+0}+\sum_{j=0}^{n-1} b_{i(3n+j)}[A^j_{(\alpha),(b)}y(x)]_{x=b_3-0}=d_i,\ i=\overline{1,2n},$$

где $y^k_{i\,j}$,$i,k=1,2$ ,$b_{ij}$ и $d_i$,$i=\overline{1,2n}$ , $j=\overline{0,(n-1)}$- известные числа.

## Литература


1. *Rajabov N.* Introduction to ordinary differential equations with singular and super - singular coefficients. Dushanbe, (1998), 160p.

2. *Дадоджонова М.Я.,Олимов А.Г.* Интегральное представление решений и задача Коши-Рикье для двух обыкновенных дифференциальных уравнений специального типа с граничной слабо сингулярной точкой // Ученые записки. Серия естественные и экономические науки. Учредитель: Худжандский государственный университет им. Б.Г.Гафурова, 2015, №2(33), 3-10.

# О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ МНОГОМЕРНОЙ КОМПЛЕКСНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

**@ М.Р. Рахимова**
*rakhimova.mahsuda@mail.ru*

УДК 517.95

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*79.

В докладе приведены результаты исследования по нахождению многообразия решений многомерных линейных комплексных систем уравнений с частными производными от двух комплексных независимых переменных. В зависимости от собственных значений матрицы коэффициентов получены явные формулы для решения.

*Ключевые слова*: многообразия решений, линейная комплексная система, аналитические функции.

**On solutions of one multidimensional complex system with partial derivatives**

Abstract. The report presents the results of a study on finding a variety of solutions of multidimensional linear complex systems of partial differential equations of two complex independent variables. Depending on the eigenvalues coefficient matrices explicit formulas for the solution are obtained.

*Keywords*: varieties of solutions, linear complex system, analytical functions.

Рассмотрим систему уравнений в частных производных с двумя комплексными переменными вида

$$w_{z_2} = Aw_{z_1}, \tag{1}$$

где $A$—постоянная комплексная квадратная матрица порядка $n$. К таким системам приводятся условия полной разрешимости многомерных комплексных переопределенных систем уравнений в частных производных от двух комплексных переменных [1, 9]. Отметим, что система (1) в общем случае будет системой неклассического типа.

В системе (1) произведём замену $\omega = Sw$, где $S-$ матрица, приводящая матрицу $A$ к квазидиагональному жордановому виду

$$\Lambda = diag[\Lambda_1(\lambda_1), \dots, \Lambda_m(\lambda_m)], m \leq n,$$

Рахимова Махсуда Аюбовна, доцент, ТГУПБП (Худжанд, Таджикистан); Rahimova Makhsuda Aubovna (Tajik State University of law, business and politics, Khujand, Tajikistan)

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$–собственные значения матрицы $A$, $\Lambda_1(\lambda_1), \ldots, \Lambda_m(\lambda_m)$–жордановы клетки, соответствующие этим собственным значениям. Тогда из (1) следует, что

$$S^{-1}\omega_{z_2} = AS^{-1}\omega_{z_1}$$

или

$$\omega_{z_2} = \Lambda\omega_{z_1}. \tag{2}$$

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Все собственные значения матрицы $A$ простые. В этом случае квазидиагональная жорданова форма матрицы $A$ имеет вид $\Lambda = diag[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$. Тогда полагая $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)^T$, из системы (2) получим

$$\frac{\partial\omega_k}{\partial z_2} = \lambda_k \frac{\partial\omega_k}{\partial z_2}, k = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что каждое из уравнений (3) имеет решения вида

$$\omega_k(z_1, z_2) = \varphi_k(z_1 + \lambda_k z_2) \tag{4}$$

и

$$\omega_k(z_1, z_2) = \overline{\phi_k(z_1, z_2)}, \tag{5}$$

где $\varphi_k$–аналитическая функция одной комплексной переменной, а $\phi_k$–аналитическая функция двух комплексных переменных.

Случай 2. Пусть у матрицы $A$ есть хотя бы одно непростое собственное значение. Допустим, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$–различные собственные значения матрицы $A$ $(m < n)$. В этом случае жордановы клетки $\Lambda_j(\lambda_j)$ порядка $\nu_j(\nu_1 + \ldots + \nu_m = n)$ имеют вид

$$\Lambda_j(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

И вместо уравнений (3) получим следующую систему

$$\frac{\partial\vartheta_j^1}{\partial z_2} = \lambda_j \frac{\partial\vartheta_j^1}{\partial z_1} + \frac{\partial\vartheta_j^2}{\partial z_1}, \tag{6}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial\vartheta_j^{\nu_j-1}}{\partial z_2} = \lambda_j \frac{\partial\vartheta_j^{\nu_j-1}}{\partial z_1} + \frac{\partial\vartheta_j^{\nu_j}}{\partial z_1}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\vartheta_j^{\nu_j}}{\partial z_2} = \lambda_j \frac{\partial\vartheta_j^{\nu_j}}{\partial z_1}, j = 1, 2, \ldots, m. \tag{8}$$

Эту систему можно решить снизу вверх. Если взять $\vartheta_j^{\nu_j} = \varphi_j(z_1 + \lambda_j z_2)$, где $\varphi_j$—аналитическая функция одной переменной, и подставить в (7), то получим неоднородное уравнение, у которого имеется частное решение вида $z_2\varphi_j'(z_1+\lambda_j z_2)$. Поэтому можно взять $\vartheta_j^{\nu_j-1} = \phi_j(z_1+\lambda_j z_2)+ z_2\varphi_j'(z_1 + \lambda_j z_2)$, где $\phi_j$— аналитическая функция одной переменной.

Продолжая эту процедуру можно определить остальные $\vartheta_j^k$, $k = \nu_j - 2, \ldots, 1$. Если взять $\vartheta_j^{\nu_j} = \overline{\phi_{j,\nu_j}(z_1, z_2)}$, где $\phi_{j,\nu_j}$—аналитические по $z_1, z_2$, то уравнение (7) будет иметь вид (8), поэтому можно взять $\vartheta_j^{\nu_j-1} = \overline{\phi_{j,\nu_j-1}(z_1, z_2)}$, $\phi_{j,\nu_j-1}$—аналитические по $z_1, z_2$ и т.д.

Этим способом мы получим некоторое многообразие решений уравнений (2) и (1).

## Литература


1. *Левитан Б.М.* Об условиях совместности и общем решении одного класса многомерных переопределенных систем уравнений с частными производными // Международная научно-теоретическая конференция "Современные проблемы математики и их приложения,"посвященная 70-летию Таджикского национального университета и 80-летию академика Н. Раджабова, Душанбе, **123**:3 (2018), 9–14.

# АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

**@ С.В. Румянцева, Е.В. Выборный**

*srumyanceva@hse.ru, evybornyi@hse.ru*

УДК 517.962.22

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*80.

Рассматривается линейное однородное разностное уравнение 2-ого порядка с гладкими коэффициентами в квазиклассическом приближении. В настоящей работе были построены явные ограничения на гладкость и рост коэффициентов уравнения, при которых решения сохраняют ВКБ вид асимптотики в неограниченной области, не содержащей точек поворота и точек сингулярности. В качестве, была построена асимптотика многочленов Лагерра большого порядка при больших значения аргумента.

*Ключевые слова*: квазиклассическое приближение, ВКБ асимптотика, разностные уравнения.

**Asymptotics of solutions of difference equations in an unbounded domain**

We consider a linear homogeneous difference equation of the 2nd order with smooth coefficients in semiclassical approximation. We construct the explicit conditions on the smoothness and growth at infinity of the equation coefficients, such that the solution retains the WKB asymptotic form in an unbounded domain that does not contain turning points and singularities. We obtain asymptotics of Laguerre polynomials for simultaneously large values of the argument and the order of the polynomials as an example.

*Keywords*: semiclassical approximation, WKB approximation, difference equations.

Интерес к исследованиям разностных уравнений в квазиклассическом приближении вызван тем, что они возникают в различных актуальных физических задачах [1,2] и математических задачах [3]. Общие методы квазиклассического приближения для разностных уравнений были развиты, например, в работах [4,5].

---

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

Румянцева София Васильевна, НИУ ВШЭ (Москва, Россия); Sofia Rumyantseva (HSE, Moscow, Russia)

Выборный Евгений Викторович, к.ф.-м.н., доцент, НИУ ВШЭ (Москва, Россия); Evgeny Vybornyi (HSE, Moscow, Russia)

Рассматривается однородное линейное разностное уравнение 2-ого порядка с медленно меняющимися коэффициентами:

$$a(x+h)y(x+h) + b(x)y(x) + a(x)y(x-h) = 0, \tag{1}$$

где $h > 0$ — малый параметр квазиклассическкго приближения. Известно, что у уравнения (1) существуют два линейной независимых решения, которые имеют равномерную ВКБ асимптотику вида [5]:

$$y_{1,2}(x,h) = \frac{1}{\sqrt{v(x,h)}} \exp\left(\pm\frac{i}{h}\int_{x_0}^{x} p(x,h)dx\right)(1 + O(h)). \tag{2}$$

на фиксированном отрезке $[A, B]$, не содержащем точек поворота.

В настоящей работе получены строгие условия на коэффициенты уравнения (1), которые обеспечивают справедливость равномерных ВКБ оценок (2) в неограниченной области, то есть при $x \in [A, +\infty)$.

**Теорема** Пусть в уравнении (1) коэффициенты $a(x), b(x)$ — вещественнозначные функции класса $C^2(I)$, где $I = [x_0, +\infty)$. Пусть справедливы ограничения:

1. *отсутствуют точки сингулярности:* $a(x) \neq 0$, $\forall x \in I$;
2. *отсутсвуют точки поворота:* $\left|\frac{b(x)}{2a(x+h/2)}\right| \leq \delta < 1$, $\forall x \in I$;
3. *коэффициенты на бесконечности удовлетворяют оценкам:*

$$(\log(a(x)))'' = O\left(x^{-2}\right), \ (\log(b(x)))'' = O\left(x^{-2}\right) \text{ при } x \to +\infty.$$

Тогда существует пара линейно независимых решений $y_{1,2}(x,h)$ вида (2), где

$$p(x,h) = \arccos\left(-\frac{b(x)}{2a(x+\frac{h}{2})}\right), \qquad v(x,h) = -2a\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin p(x,h),$$

*Оценка (2) справедлива равномерно при $x \in I$.*

В качестве можно рассмотреть разностное уравнение на ортогональные многочлены Лагерра. Получаем асимптотическое приближение для полиномов Лагерра большого порядка при больших значениях аргумента:

$$\begin{aligned} L_n(x) =& \frac{2}{\pi}\frac{e^x}{\sqrt[4]{nx}}\cos\left(2\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)+ \\ & \frac{2}{\pi}\frac{e^x}{\sqrt[4]{nx}}\sin\left(2\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{x-6}{12}\sqrt{\frac{x}{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

Заметим, что полученная оценка многочленов Лаггера согласуется с известной оценкой, полученной из дифференциального уравнения на многочлены Лагерра.

## Литература

1. *A. Garg* Diabolical Points in Magnetic Molecules: An Exactly Solvable Model Ersin Kececioglu // Phys. Rev. B 63, 064422 – Published 23 January 2001

2. *Vybornyi E.* On discrete WKB methods for resonance electromagnetic traps // Proceedings of the International Conference DAYS on DIFFRACTION 2019. IEEE, 2019

3. *J. S. Geronimo, D. Smith, and W. Van Assche* Strong asymptotics for orthogonal polynomials with regularly and slowly varying recurrence coefficients // J. Approx. Theory,72, 1993, 141–158.

4. *Браун П.А.* Метод ВКБ для трехчленных рекуррентных соотношений и квазиэнергии ангармонического осциллятора // ТМФ, 1978, том 37, номер 3, 355–370.

5. *Costin O., Costin R.* Rigorous WKB for finite-order linear recurrence relations with smooth coefficients // SIAM J. Math. Anal., 1996,272, 110-134.

# CARLEMAN'S FORMULA OF A SOLUTIONS OF THE POISSON EQUATION IN BOUNDED DOMAIN

**@ Sattorov E.N., Ermamatova Z.E.**
*Sattorov-e@rambler.ru, zuxroermamatova@rambler.ru*

УДК 517.946

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*81.

We suggest an explicit continuation formula for are a solution to the Cauchy problem for the Poisson equation in a domain from its values and the values of its normal derivative on part of the boundary. We construct an continuation formula of this problem based on the Carleman-Yarmuhamedov function method.

*Keywords*: ill-posed problem, regular solution, Carleman - Yarmuhamedov function, Carleman formula, Mittag-Leffler entire function.

Poisson equation or potential equation [1]

$$-\triangle U(x) \equiv -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = f(x), \tag{1}$$

is the classical example for second order elliptic partial differential equations and it is a mathematical model to some important physical phenomena. It has applications in many different areas such as plasma physic, electrocardiography, and corrosion non-destructive evaluation (e.g., [2], [3],[4], [5], [6]).

In this paper, we offer an explicit formula for reconstruction of a solution of the Poisson equation in bounded domain from its values and the values of its normal derivative on part of the boundary, i.e., we give an explicit continuation formula for a solution to the Cauchy problem for the Poisson equation.

Let $R^3$ is the third dimensional real Euclidean space,

$$x = (x_1, x_2, x_3),\ \ y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3,\ \ x' = (x_1, x_2),\ \ y' = (y_1, y_2) \in R^2,$$

$$s = \alpha^2 = |y'-x'| = (y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2,\ \ r^2 = s+(y_3-x_3)^2 = |y-x|^2, \tau = tg\frac{\pi}{2\rho},$$

---

Сатторов Эрмамат Норкулович, д.ф.-м.н., доцент, СамГУ (Самарканд, Узбекистан); Ermamat Norkulovich Sattorov (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Эрмаматова Зухро Эрмаматовна, базовый докторант, СамГУ (Самарканд, Узбекистан); Zuxro Ermamatovna Ermamatova (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

$\rho > 1, \; G_\rho = \{y : |y'| < \tau y_3, \; y_3 > 0\}, \; \partial G_\rho = \{y : |y'| = \tau y_3, \; y_3 > 0\},$

$\overline{G}_\rho = G_\rho \cup \partial G_\rho, \; \varepsilon, \varepsilon_1$ and $\varepsilon_2$ sufficiently small positive constants,

$\Omega_\rho-$ is a bounded simply connected domain whose boundary in $R^3$ whose boundary $\partial\Omega_\rho$ consists of a part of the conic surface $T \equiv \partial G_\rho$ and a smooth surface $S$, lying inside the cone $\overline{G}_\rho$. Function $f$ Hölder continuous with exponent $\lambda \in (0,1)$, i.e., $f \in C^{s,\lambda}(\overline{\Omega}_\rho)$ and $s \in Z_+$.

**Problem.** Let we know the Cauchy data for a solution to system (0.1) on the surface $S$:

$$U(y) = f_1(y), \frac{\partial U(y)}{\partial n} = f_2(y), y \in S \tag{2}$$

where $n = (n_1, n_2, n_3)$ is the unit outward-pointing normal to the surface $\partial\Omega$ at a point $y$, and $f_1, f_2$ are continuous vector-functions. Given $f_1(y)$ and $f_2(y)$ on $S$, find $U(x)$ $x \in \Omega$.

The Cauchy problem (2) for the Poisson equation (1) is well-known to be ill-posed [7], [8]. Hadamard [9] noted that solution to problem is not stable. Possibility of introducing a positive parameter $\sigma$, depending on the accuracy of the initial data, was noticed by M. M. Lavrent'ev [10]. Uniqueness of the solution follows from the general theorem by Holmgren [11]. Traditionally, regularization techniques, such as Tikhonov regularization [12].

We suppose that a solution to the problem exists (in this event it is unique) and continuously differentiable in the closed domain and the Cauchy data are given exactly. In this case we establish an explicit continuation formula. This formula enables us to state a simple and convenient criterion for solvability of the Cauchy problem.

The result established here is a multidimensional analog of the theorems and Carleman-type formulas [13], by G.M.Goluzin, V.I.Krylov, V.A.Fok, and F.M.Kuni in the theory of holomorphic functions of one variable [14],[15].

## Литература

1. *Gilbarg D., Trudinger N.* Elliptic partial differential equations of second order. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

2. *Blum J.* Numerical simulation and optimal control in plasma physics. — New York, NY; John Wiley and Sons Inc., 1989.

3. *Chen G., Zhou J.* Boundary Element Methods. — Academic Press, London, 1992.

4. *Colli-Franzone P., Guerri L., Tentoni L., Viganotti L., Baruffi S., Spaggiari S., Taccardi B.* A mathematical procedure for solving the inverse potential problem of electrocardiography. Analysis of the time-space accuracy from in vitro experimental data // Mathematical Biosciences **77** (1985), 353-396.

5. *Fasino D., Inglese G.* An inverse Robin problem for Laplace's equation: theoretical results and numerical methods // Inverse problems **15** (1999), 41.

6. *Inglese G.* An inverse problem in corrosion detection // Inverse problems **13** (1997), 977.

7. *Alessandrini G., Rondi L., Rosset E., Vessella S.* The stability for the Cauchy problem for elliptic equations // Inverse problems **25** (2009), 1234.

8. *Belgacem F. B.* Why is the Cauchy problem severely ill-posed? // Inverse Problems **23** (2007), 823.

9. *Hadamard J.* Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations. — Yale University Press, New Haven, 1923.

10. *Lavrentev M. M.* Some Improperly Posed Problems in Mathematical Physics. — Springer, Berlin, 1967.

11. *Bers L., John F., Schechter M.* Partial Differential Equations. — Interscience, New York, 1964.

12. *Tikhonov A. N., Arsenin V. Y.* Solutions of ill-posed problems. — Winston, 1977.

13. *Arbuzov, E. V., Bukhgeim, A. L.* The Carleman Formula for the Maxwell's Equations on a Plane // Sib. Elektron. Mat. Izv. **5** (2008), 448-455.

14. *Goluzin G. M., Krylov V.I.* A generalized Carleman fornula and its application to analytic continuation of functions // Mat.Sb. **40**:3, (1933), 448-455.

15. Fok V.A. and Kuni F.M., "On the introduction of a 'suppressing' function in dispersion relations,"Dokl. Akad. Nauk SSSR, 127, No. 6, (1959), p. 1195-1198. *Fok V.A., Kuni F.M.* On the introduction of a 'suppressing' function in dispersion relations // Dokl. Akad. Nauk SSSR **127**:6, (1959), 1195-1198.

# О КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ С КОСЕКАНСНЫМ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ

**@ Ю.С. Солиев**

*su1951@mail.ru*

УДК 517.518.87

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.82.*

Для интегралов с косекансным и логарифмическим ядром исследованы интерполяционные квадратурные формулы с кратными узлами.

*Ключевые слова*: интеграл, косекансное ядро, логарифмическое ядро, интерполяция, квадратурная формула, кратные узлы.

**On quadrature formulas with multiple nodes for integrals with a cosecant and logarithmic kernel**

For integrals with cosecant and logarithmic kernels, interpolation quadrature formulas with multiple nodes are studied.

*Keywords*: integral, cosecant kernel, logarithmic kernel, interpolation, quadrature formula, multiple nodes.

Рассмотрим интегралы

$$Af = A(f;x) = \int_0^{2\pi} f(t) \cos ec \frac{t-x}{2} dt,\ Lf = L(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \ln\left|\sin\frac{t-x}{2}\right| dt,$$

где $f(x)$ - плотность интегралов, непрерывная $2\pi$ - периодическая функция.

Следуя [1], через $H_n f = H_n(f;x)$ обозначим тригонометрический полином порядка $n$ с равным нулю коэффициентом при $\cos nx$, интерполирующий функцию $f(x)$ в узлах $x_k = \frac{2k\pi}{n} (k = \overline{1,n})$, такой, что $H_n(x_k) = f(x_k), H_n'(x_k) = f'(x_k), k = \overline{1,n}$.

Аппроксимируя плотность интегралов полиномом $H_n f$ получим квадратурные формулы

$$Af = A(H_n f;x) + R_{n1} f = \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} (A_k(x) f(x_k) + B_k(x) f'(x_k)) + R_{n1} f,$$

Солиев Юнус Солиевич, к.ф.-м.н., доцент, Московский автомобильно - дорожный государственный технический университет (Россия); Yunus Soliev (Moscow Automobile and Road Construction State Technical University, Russia)

$$A_k(x) = n \ln \left| ctg \frac{x}{4} \right| + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \left( \cos j(x - x_k) \ln \left| ctg \frac{x}{4} \right| - C_j(x) \right),$$

$$B_k(x) = n \left( \ln \left| ctg \tfrac{x}{4} \right| \sin(x - x_k) + 2 \sin \left( x_k - \tfrac{1}{2} x \right) \right) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \left( 2 \sin(x - x_k) \cos j(x - x_k) \ln \left| ctg \frac{x}{4} \right| + S_{j+1}(x) - S_{j-1}(x) \right),$$

$$C_m(x) = 2 \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{2\mu - 1} \cos \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \right) x - m(x - x_k) \right),$$

$$S_m(x) = 2 \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{2\mu - 1} \sin \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \right) x - m(x - x_k) \right);$$

$$Lf = L(H_n f; x) + R_{n2} f = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (a_k(x) f(x_k) + b_k(x) f'(x_k)) + R_{n2} f,$$

$$a_k(x) = -2n \ln 2 - 2 \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \frac{\cos j(x - x_k)}{j},$$

$$b_k(x) = -\sin(x - x_k)(n + (n-1)\cos(x - x_k)) +$$
$$+ \sum_{j=2}^{n-1} (n-j) \left( \frac{\sin(j-1)(x - x_k)}{j-1} - \frac{\sin(j+1)(x - x_k)}{j+1} \right),$$

где $R_{nm} f = R_{nm}(f; x) (m = 1, 2)$ остаточные члены.

Пусть $H_\alpha^{(r)} (r = 0, 1, 2, \ldots, 0 < \alpha \leq 1)$ - класс $2\pi$ - периодических функций $f(x), r-$ е производные которых удовлетворяют условию Гельдера $H_\alpha$

**Теорема.** *Если* $f(x) \in H_\alpha^{(r)} (r \geq 1, 0 < \alpha \leq 1)$ , *то* $\left\| R_{nm} f \right\|_C = O \left( \frac{\ln^{2-m} n}{n^{r+\alpha-1}} \right), m = 1, 2.$

## Литература

1. *Турецкий А.Х.* Теория интерполирования в задачах. Минск: Вышэйшая школа, 1968, 320 с.

# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

**@ М.А. Султанов, В.Е. Мисилов, Е. Нурланулы**
*murat.sultanov@ayu.edu.kz, v.e.misilov@urfu.ru, erkebulan.nurlanuly@ayu.edu.kz*

УДК 519.63, 519.688

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*83.

В работе рассмотрен алгоритм решения одномерного дифференциального уравнения аномальной диффузии с дробной по времени производной. После дискретизации и аппроксимации задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений с разреженной матрицей большого размера. Для решения системы используется модифицированный итеративный метод верхней релаксации. На основе данного метода реализован параллельный алгоритм для многоядерных процессоров. Проведены численные эксперименты по оценке эффективности распараллеливания.

*Ключевые слова*: дифференциальные уравнения, дробная производная, метод верхней релаксации, параллельные алгоритмы.

**Parallel algorithm for solving the time-fractional diffusion equation**

The paper considers an algorithm for solving the one-dimensional differential equation of anomalous diffusion with a time-fractional derivative. After discretization and approximation, the problem is reduced to a system of linear algebraic equations with a large sparse matrix. The modified iterative over-relaxation method is used to solve this system. Based on this method, a parallel algorithm is implemented for multi-core processors. A numerical experiments were carried out to assess the efficiency of parallelization.

*Keywords*: differential equations, fractional derivative, over-relaxation method, parallel algorithms.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерство образования и науки Республики Казахстан (проект №AP09258836).

Султанов Мурат Абдукадырович, к.ф.-м.н., МКТУ им. Х. А. Ясави (Туркестан, Казахстан); Murat A. Sultanov (Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan)

Мисилов Владимир Евгеньевич, к.ф.-м.н., ИММ имени Н.Н.Красовского УрО РАН, УрФУ (Екатеринбург, Россия); Vladimir E. Misilov (Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia)

Нурланулы Еркебулан, докторант, МКТУ им. Х. А. Ясави (Туркестан, Казахстан); Erkebulan Nurlanuly (Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan)

В работе рассматривается параболическое уравнение в частных производных с дробной производной по времени:

$$\frac{\partial^\alpha U(x,t)}{\partial t^\alpha} = a(x)\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + c(x)U(x,t),$$

где $U(x,t)$ — искомая функция, $a(x), b(x), c(x)$ — известные функции или константы, $0 < \alpha < 1$ — параметр дробной степени производной по времени.

Задача рассматривается на пространственном отрезке $0 \leq x \leq \gamma$, временном промежутке $t > 0$, начальные и граничные условия определяются в виде

$$U(0,t) = g_0(t), \quad U(\ell,t) = g_1(t), \quad U(x,0) = f(x),$$

где $g_0(t), g_1(t), f(x)$ — известные функции.

Дробная производная Капуто в данном случае задается следующей формулой [1]:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-1)} \int\limits_0^\infty \frac{\partial u(x-s)}{\partial t}(t-s)^{-\alpha} ds.$$

После дискретизации пространства и времени на равномерной сетке и аппроксимации уравнения с использованием неявной конечно-разностной схемы (первого порядка точности по времени и второго — по пространству), задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей большого размера. Для ее решения в данной работе используется модифицированный метод ускоренной верхней релаксации [2,3].

Алгоритм реализован в виде параллельной программы для многоядерных процессоров. Проведены численные эксперименты по оценке эффективности распараллеливания.

**Литература**

1. *Zhang Y.* A Finite Difference Method For Fractional Partial Differential Equation // Applied Mathematics And Computation, **215** (2009), 524-529.

2. *Hadjidimos A.* Accelerated OverRelaxation Method // Mathematics of Computation **32** (1978), 149-157.

3. *Sunarto A., Sulaiman J., Saudi A.* Implicit finite difference solution for time-fractional diffusion equations using AOR method // Journal of Physics: Conference Series **495**(2014), 012032.

# О ГЛАДКОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОРТОТРОПНЫМИ СЖАТИЯМИ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

**@ А.Л. Тасевич**

*tasevich-al@rudn.ru*

УДК 517.954

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06*.84.

Рассмотрены результаты по исследованию гладкости обобщенных решений задачи Дирихле для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями в плоской области. Сильная эллиптичность определяется выполнением неравенства типа Гординга.

*Ключевые слова*: функционально-дифференциальное уравнение, гладкость обобщенных решений, оператор сжатия, нелокальные задачи, сильно эллиптическое уравнение.

## On smoothness of generalized solutions of the first boundary value problem for functional differential equation with orthotropic contractions inside the domain

The results on study the smoothness of generalized solutions of the Dirichlet problem for strongly elliptic functional differential equation with orthotropic contractions in the plane domain are considered. The strongly ellipticity is defined by holding the Garding-type inequality.

*Keywords*: functional differential equations, smoothness of generalized solutions, contraction operator, nonlocal problems, strongly elliptic equations.

Рассмотрим первую краевую задачу для функционально-дифференциального уравнения

$$A_R u(x_1, x_2) \equiv -\sum_{i,j=1}^{2} (R_{ij} u_{x_i}(x_1, x_2))_{x_j} = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \qquad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (номер темы FSSF-2020-0018)

Тасевич Алла Львовна, к.ф.-м.н., ассистент, Российский университет дружбы народов (Москва, Россия); Alla Tasevich (RUDN University, Moscow, Russia)

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Здесь оператор $R_{ij}$ определяется по формуле

$$R_{ij}v(x_1,x_2) = a_{ij0}v(x_1,x_2) + a_{ij1}v(q_1^{-1}x_1, q_2^{-1}x_2) + a_{ij,-1}v(q_1x_1, q_2x_2).$$

В рассматриваемой задаче числа $q_1,\ q_2 > 0$, коэффициенты уравнения $a_{ij0},\ a_{ij,\pm 1} \in \mathbb{C}\ (i,j = 1,2)$, а функция $f \in L_2(\Omega)$ является комплекснозначной. Также, мы предполагаем, что если для некоторой точки $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \Omega$ преобразованная точка $(\tilde{x}_1/q_1^{\pm 1}, \tilde{x}_2/q_2^{\pm 1})$ оказывается вне области, то $v(\tilde{x}_1/q_1^{\pm 1}, \tilde{x}_2/q_2^{\pm 1}) = 0$.

Сформулируем теперь определение сильной эллиптичности следующим образом.

**Определение 1.** Уравнение (1) будем называть сильно эллиптическим уравнением, а соответствующий оператор $A_R$ — сильно эллиптическим оператором, если существуют такие постоянные $c_1 > 0, c_2 \geq 0$, что для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется неравенство типа Гординга

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_1\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{1}$$

Задачу о нахождении алгебраических условий на коэффициенты уравнения (1), при которых оператор $A_R$ будет сильно эллиптическим, называют проблемой коэрцитивности. Исследование достаточных и необходимых условий выполнения неравенства Гординга уравнения было проведено в [1].

**Определение 2.** Функция $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи 1, если интегральное тождество

$$a_R[u,v] := \sum_{i,j=1}^{2} (R_{ij}u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (f,v)_{L_2(\Omega)}$$

выполнено для любой функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

Будут справедливы следующие теоремы о гладкости обобщенных решений.

**Теорема 1.** *Пусть уравнение (1) является сильно эллиптическим в замыкании $\overline{\Omega}$. Предположим, что функция $u$ является обобщенным решением краевой задачи (1), (2), а функция $f \in L_2(\Omega) \cap H^k_{loc}(\Omega_{sl})\quad (s \in \mathbb{N},\ l = \overline{1, l(s)})$. Тогда $u \in H^{k+2}_{loc}(\Omega_{sl})$ для всех $s, l$.*

**Теорема 2.** *Пусть уравнение (1) является сильно эллиптическим в замыкании $\overline{\Omega}$, а также $q_1 > 1,\ 1/q_2 > 1$. Предположим, что функция $u$ является обобщенным решением краевой задачи (1), (2), а функция $f \in L_2(\Omega) \cap H^k(\Omega_{sl})$ $(s \in \mathbb{N}, l = \overline{1, l(s)})$. Тогда $u \in H^{k+2}(\Omega_{sl} \setminus \overline{\mathcal{K}^\varepsilon})$ для всех $\varepsilon > 0$ $(s \in \mathbb{N},\ l = \overline{1, l(s)})$, где $\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\}$.*

Схему построения подобластей $\Omega_{sl}$ и множества $\mathcal{K}$, а также доказательства теорем можно найти в [2], где в качестве области рассмотрен круг с центром в начале координат.

Дополнительную информацию о разрешимости краевой задачи (1), (2) в пространствах Соболева и весовых пространствах можно найти в [3,4].

**Литература**

1. *Россовский Л.Е., Тасевич А.Л.* Первая краевая задача для сильно эллиптического функцинально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями // Матем. сборник, **97**:5 (2015), 733-748.

2. *Тасевич А.Л.* Гладкость обобщенных решений задачи Дирихле для сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями // Современная математика. Фундаментальные направления, **58** (2015), 153-165.

3. *Россовский Л.Е., Тасевич А.Л.* Об однозначной разрешимости функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями в весовых пространствах // Дифференц. уравнения, **53**:12 (2017), 1679-1692.

4. *Tasevich A.L.* Analysis of Functional-Differential Equation with Orthotropic Contractions // Math. Model. Nat. Phenom., **12**:6 (2017), 240-248.

# О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

**@ Ф.Р. Турсунов, Д.С. Шодиев, Ж.Д. Раззаков**

*farhod.tursunov.76@mail.ru, dilshod.shodiev.76@mail.ru*

УДК 517.946

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*85.

Работа посвящена изучению продолжения решения задачи Коши для бигармонического уравнения в области $G$ по ее известным значениям на гладкой части $S$ границы $\partial G$. Рассматриваемая задача относится к задачам математической физики, в которых отсутствует непрерывная зависимость решений от начальных данных. В работе при помощи функции Карлемана восстанавливаются по данным Коши на части границы области не только сама бигармоническая функция, но и её производные.

*Ключевые слова*: Бигармоническая уравнения, задача Коши, некорректные задачи, функция Карлемана, регуляризованные решения, регуляризация, формулы продолжения.

**On the Cauchy problem for the biharmonic equation**

Short abstract. This work is devoted to the study of the continuation of the solution of the Cauchy problem for the biharmonic equation in the domain $G$ in terms of its known values on the smooth part $S$ of the boundary $\partial G$. The problem under consideration belongs to the problems of mathematical physics in which there is no continuous dependence of solutions on the initial data. In this paper, using the Carleman function, not only the biharmonic function itself, but also its derivatives are reconstructed from the Cauchy data on a part of the boundary of the region.

*Keywords*: Biharmonic equations; Cauchy problem; ill-posed problems; Carleman function; regularized solutions; regularization; continuation formulas.

Пусть $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$ и $G$- ограниченная односвязная область в $R^2$ с границей $\partial G$, состоящей из компактной части $T = \{y_1 \in R : \ a_1 \leq y_1 \leq b_1\}$ и гладкой дуги кривой $S : y_2 = h(y_1)$, лежащей в полуплоскости $y_2 > 0$. $\bar{G} = G \cup \partial G$, $\partial G = S \cup T$.

---

Турсунов Фарход Рузикулович, д.фил.по ф-м.н., старший преподаватель, СамГУ (Самарканд, Узбекистан); Tursunov Farkhod (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Шодиев Дилшод Сирожиддинович, старший преподаватель, СамГУ, (Самарканд, Узбекистан); Shodiev Dilshod (Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan)

Раззаков Жавохир Давлатович, магистрант УрГУ, (Урганч, Узбекистан); Razzakov Javoxir (Urgench State University, Urgench, Uzbekistan)

В области $G$ рассмотрим уравнение

$$\Delta^2 U(y) = 0, \ \ y \in G, \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$ оператор Лапласа.

**Постановка задачи.** Требуется найти бигармоническую функцию $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G})$, у которого известны значения на части $S$ границы $\partial G$, т.е.:

$$\begin{gathered} U(y_1, y_2)|_S = f_1(y), \quad \Delta U(y_1, y_2)|_S = f_2(y), \\ \left.\frac{\partial U(y_1, y_2)}{\partial n}\right|_S = f_3(y), \quad \left.\frac{\partial(\Delta U(y_1, y_2))}{\partial n}\right|_S = f_4(y), \end{gathered} \tag{2}$$

здесь $f_j(y) \in C^{j-1}(S), j = 1, 2, 3, 4$ - заданные функции, а $\frac{\partial}{\partial n}$ - оператор дифференцирования по внешней нормали к $\partial G$.

Рассматриваемая задача (1) – (2) относится к некорректным задачам математической физики [5],[6],[13]. Истенную природу таких задач была выяснено впервые в работе Тихонова А.Н. [4], и им была указано практичес-кую важность неустойчивых задач, а также показал, что если сузить класс возможных решений до компакта, то из существования и единственности следует устойчивость решения.

В [2] Карлеман установил формулу, дающую решение уравнений Коши – Римана в области специального вида. Развивая его идею, Г.М. Голузин и В.И. Крылов [3] вывели формулу для определения значений аналитических функций по данным, известным лишь на части границы, уже для произвольных областей. Они нашли формулу восстановления решения по ее значениям на граничном множестве положительной лебеговой меры, а также предложили новый вариант формулы продолжения. Одномерным и многомерным обобщениям формулы Карлемана посвящена монография Л.А. Айзенберга [1]. Формула типа Карлемана, в которой используется фундаментальное решение дифференциального уравнения со специальными свойствами (функция Карлемана), была получена М.М. Лаврентьевым [7], [8]. В этих работах дано определение функции Карлемана для случая, когда данные Коши заданы приближенно, а также приведена схема регуляризации задачи Коши для уравнения Лапласа. Применяя этот метод, Ш.Я.Ярмухамедов [9], [10] построил функции Карлемана для широкого класса эллиптических операторов, заданных в пространственных областях специального вида, когда часть границы области является гиперповерхностью либо коничес-кой поверхностью.

В работы [11,12] с помощью функции Карлемана восстанавливаются по данным Коши на части границы области не только сама гармоническая функция, но и его производные для уравнение Лапласа.

Отметим, что при решении прикладных задач следует найти приближенные значения решения $U(x)$и его производный $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i},\ x \in G,\ i = 1, 2$. В данной работе строится семейство функций $U(x, \sigma, f_{k\delta}) = U_{\sigma\delta}(x)$ и $\frac{\partial U(x,\sigma,f_{k\delta})}{\partial x_i} = \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i},\ k = 1, 2, 3, 4;\ i = 1, 2$ зависящих от параметра $\sigma$и доказывается, что при специальном выборе параметра $\sigma = \sigma(\delta)$ семейство $U_{\sigma\delta}(x)$и $\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}$ при $\delta \to 0$ сходится в каждой точке $x \in G$ к решению $U(x)$ и его производную $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$ соответственно. Семейство функций $U(x, \sigma, f_{k\delta})$ и $\frac{\partial U(x,\sigma,f_{k\delta})}{\partial x_i},\ i = 1, 2$ с указанными свойствами называется регуляризованным решением по М.М. Лаврентьеву [7].

**Конструкция функции Карлемана**

Определим функцию $\Phi_\sigma(x, y)$ (см. [10]) следующим равенствам :

$$-2\pi e^{\sigma x_2^2}\Phi_\sigma(x, y) = \int_0^\infty Im\left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_2}\right]\frac{udu}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}. \tag{3}$$

Отделяя мнимую часть функции $\Phi_\sigma(x, y)$, имеем

$$\begin{gathered}\Phi_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\sigma(\alpha^2+x_2^2-y_2^2)}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_2\sqrt{u^2 + \alpha^2}udu}{u^2 + r^2} -\right.\\ \left.-\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2}(y_2 - x_2)\sin 2\sigma y_2\sqrt{u^2 + \alpha^2}}{u^2 + r^2}\frac{udu}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}\right],\end{gathered} \tag{4}$$

где $y' = (y_1, 0),\ x' = (x_1, 0), r = |y - x|,\ \alpha = |y' - x'|,\ \alpha > 0, \sigma > 0, w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2,\ u \geq 0$.

В работе [10] доказано, что функция $\Phi_\sigma(x, y)$ определенная равенствами (3) при $\sigma > 0$, представима в виде

$$\Phi_\sigma(x, y) = F(r) + G_\sigma(x, y), \tag{5}$$

где $F(r) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r},\ G_\sigma(x, y)$- гармоническая функция по $y$ в $R^2$ включая $y = x$. Отсюда следует, что функция $\Phi_\sigma(x, y)$для любого $\sigma > 0$ по $y$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Фундаментальное решение $\Phi_\sigma(x, y)$ с указанным свойством называется функцией Карлемана для полупространства [7].

Для функции $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G})$ и любого $x \in G$ справедлива следующая интегральная формула Грина [13]:

$$\begin{gathered}U(x) = \int_{\partial G}\left[U(y)\frac{\partial\left(\Delta L(x, y)\right)}{\partial n} - \Delta L(x, y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right]dS_y+\\ +\int_{\partial G}\left[\Delta U(y)\frac{\partial L(x, y)}{\partial n} - L(x, y)\frac{\partial\left(\Delta U(y)\right)}{\partial n}\right]dS_y,\ x \in G,\end{gathered} \tag{6}$$

где $L(x,y) = r^2 \ln \frac{1}{r}$ является фундаментальным решением уравнение (1).

Так как $\Phi_\sigma(x,y)$ представлена в виде (5), тогда в интегральное представление (6) $L(x,y)$ заменяя на функцию $L_\sigma(x,y) = r^2\Phi_\sigma(x,y)$, имеем:

$$\begin{gathered} U(x) = \int_{\partial G} \left[ U(y) \frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n} - \Delta L_\sigma(x,y) \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right] dS_y + \\ + \int_{\partial G} \left[ \Delta U(y) \frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n} - L_\sigma(x,y) \frac{\partial\left(\Delta U(y)\right)}{\partial n} \right] dS_y, \;\; x \in G. \end{gathered} \tag{7}$$

**Формула продолжения и регуляризация по М. М. Лаврентьеву**

Обозначим

$$\begin{gathered} U_\sigma(x) = \int_S \left[ f_1(y) \frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n} - f_3(y) \Delta L_\sigma(x,y) \right] dS_y + \\ + \int_S \left[ f_2(y) \frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n} - f_4(y) L_\sigma(x,y) \right] dS_y, \;\; x \in G. \end{gathered} \tag{8}$$

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть функция $U(y) = U(y_1, y_2) \in C^4(G) \cap C^3(\bar{G})$ на части $S$ границы $\partial G$ удовлетворяют условиям (2), и на части $T$ границы $\partial G$ выполнено неравенство

$$|U(y)| + \left| \frac{\partial U(y)}{\partial n} \right| + |\Delta U(y)| + \left| \frac{\partial \Delta U(y)}{\partial n} \right| \leq M, \;\; y \in T, M > 0. \tag{9}$$

Тогда для любого $x \in G$ и $\sigma > 0$ справедливы оценки

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq \varphi(\sigma, x_2) M e^{-\sigma x_2^2}, \tag{10}$$

$$\left| \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \right| \leq \varphi_i(\sigma, x_2) M e^{-\sigma x_2^2}, \;\; i = 1, 2, \tag{11}$$

где

$$\begin{gathered} \varphi(\sigma, x_2) = \frac{23\sqrt{\sigma\pi}}{4\sigma} + \left( \frac{3\sqrt{\sigma\pi}}{4\sigma} + 20\sqrt{\sigma\pi} + 8\sqrt{\sigma\pi}\sigma \right) x_2 + \\ + \left( 2\sqrt{\sigma\pi} + 4\sqrt{\sigma\pi}\sigma \right) x_2^2 + \frac{9\sqrt{\sigma\pi}}{2} x_2^3 + \frac{9\sqrt{\sigma\pi}}{\sigma x_2}, \end{gathered} \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(\sigma, x_2) = 10 + \frac{1}{\sigma} + \frac{13\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} + \frac{165\sqrt{\pi\sigma}}{2} + \frac{4\sqrt{\pi}\sigma^2}{\sqrt{\sigma}} + \\
\frac{4\sqrt{\pi}\sigma^3}{\sqrt{\sigma}} + \left(44\sigma + \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}} + 3 + \frac{2\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{\sigma}}\right) x_2 + \\
+ \left(\frac{17}{2} + \frac{9\sqrt{\pi}\sigma}{2\sqrt{\sigma}} + \frac{4\sqrt{\pi}\sigma^2}{\sqrt{\sigma}} + 4\sigma\right) x_2^2 + 9\sigma x_2^3 + \\
+ \left(\frac{66\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}} + \frac{4\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{\sigma}} + \frac{1}{2\sigma} + 8\right) \frac{1}{x_2} + \frac{20\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}x_2^2} + 16\sigma,
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_2(\sigma, x_2) = \frac{21\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}} + \frac{78\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{\sigma}} + \left(\sqrt{\sigma\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\sigma}} + \frac{4\sqrt{\pi}\sigma^2}{\sqrt{\sigma}}\right) x_2 + \\
+ \left(29\sqrt{\sigma\pi} + 58\sqrt{\sigma\pi}\sigma\right) x_2^2 + \frac{\sqrt{\sigma\pi}}{2} x_2^3 + 10\sqrt{\sigma\pi}\sigma x_2^4 + \frac{60\sqrt{\pi}}{\sqrt{\sigma}x_2^2}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

**Следствие 1.** *При каждом $x \in G$ справедливо равенство*

$$
\lim_{\sigma \to \infty} U_\sigma(x) = U(x), \quad \lim_{\sigma \to \infty} \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.
$$

Обозначим через $\bar{G}_\varepsilon$ множество

$$
\bar{G}_\varepsilon = \left\{(x_1, x_2) \in G, \ a > x_2 \geq \varepsilon, \ a = \max_T h(x_1), \ 0 < \varepsilon < a\right\}.
$$

Легко заметить, что множество $\bar{G}_\varepsilon \subset G$ является компактным.

**Следствие 2.** *Если $x \in \bar{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_\sigma(x)\}$ и $\left\{\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right\}$ сходится равномерно при $\sigma \to \infty$, т.е.:*

$$
U_\sigma(x) \rightrightarrows U(x), \quad \frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i} \rightrightarrows \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.
$$

Следует отметить, что множества $\Pi_\varepsilon = G \backslash \bar{G}_\varepsilon$ служит пограничным слоем данной задачи, как в теории сингулярных возмущений, где нет равномерной сходимости.

## Литература


1. *Айзенберг Л.А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. // Москва, Наука, 1990.

2. *CarlemanT.* Les Functions quasi analytiques. // Paris, 1926. 166p.

3. *Голузин Г.М., Крылов В.И.* Обобщенная формула Карлемана и ее приложение к аналитическому продолжению функций. // Мат. сб., №40, 1933,144-149.

4. *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач. //ДАН СССР, 39:5, (1943),147-160.

5. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. // Москва, Наука, 1995

6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики.// Москва, Наука, 1974.

7. *Лаврентьев М.М.* О задачи Коши для уравнения Лапласа . //Изв. АН СССР, 20:6, (1956),819-842.

8. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики . //Изд. СО АН СССР, Новосибирск,1962.

9. *Ярмухамедов Ш.* О гармоническом продолжении дифференцируемых функций заданных на куске границы. //Сибирский математический журнал, 43:1, (2002), 228-239.

10. *Ярмухамедов Ш.* Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши . // Математические заметки, 83:5, (2008), 763-778.

11. *А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов.* О задаче Коши для уравнения Лапласа. // Уфимский матем. журнал, 11:4, (2019),92-106.

12.*А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов.* Задача Коши для трехмерного уравнения Лапласа. // Известия высших учебных заведений. Математика, №2,(2021), 56-73.

13. *И.Н. Векуа.* Новые методы решения эллиптических уравнений.// ОГИЗ Государственное издательство техника -теоретической литературы. Москва. 1948.

# АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАЗРЕШАЮЩИЕ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ УРАВНЕНИЙ С ДИСКРЕТНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

**@ В.Е. Федоров, Н.В. Филин**

*kar@csu.ru, nikolay_filin@inbox.ru*

УДК 517.9

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*86.

Исследуется однозначная разрешимость линейных уравнений в банаховых пространствах с дискретно распределенной дробной производной Герасимова — Капуто в терминах аналитических разрешающих семейств операторов. Получены условия в терминах резольвенты замкнутого оператора из правой части уравнения, необходимые и достаточные для существования такого семейства операторов, а также изучены его свойства. Эти результаты использованы для доказательства существования единственного решения задачи Коши для линейного неоднородного уравнения соответствующего класса.

*Ключевые слова*: дискретно распределенная дробная производная, задача Коши, разрешающее семейство операторов.

**Analytic resolving families of operators for equations with discretely distributed fractional derivative**

We study the unique solvability of linear equations in Banach spaces with a discretely distributed Gerasimov — Caputo fractional derivative in terms of analytic resolving families of operators. Necessary and sufficient conditions for the existence of such a family of operators are obtained in terms of the resolvent of a closed operator from the right side of the equation, and their properties are studied. These results are used to prove the existence of a unique solution to the Cauchy problem for a linear inhomogeneous equation of the corresponding class.

*Keywords*: discretely distributed fractional derivative, Cauchy problem, resolving family of operators.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с дискретно распределенной дробной производной

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k D^{\alpha_k} z(t) = Az(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-51-54003).

Федоров Владимир Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор, ЧелГУ (Челябинск, Россия); Vladimir E. Fedorov (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

Филин Николай Владимирович, ЧелГУ (Челябинск, Россия); Nikolay V. Filin (Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia)

где $n \in \mathbb{N}$, $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, $m-1 < \alpha_n \le m \in \mathbb{N}$, $\omega_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $D^{\alpha_k}$ — производные Герасимова — Капуто, $k = 1, 2, \dots, n$, $A$ — линейный замкнутый плотно определенный оператор в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$. Решением уравнения (1) будем называть такую функцию $z \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z}) \cap C(\mathbb{R}_+; D_A)$, что $D^{\alpha_k} z \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, $k = 1, 2, \dots, n$, и выполняется равенство (1) при $t > 0$.

Семейство операторов $\{S_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \ge 0\}$, $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, называется *$l$-разрешающим* для уравнения (1), если выполняются следующие условия:

(i) $S_l(t)$ сильно непрерывно при $t \ge 0$;

(ii) $S_l(t)[D_A] \subset D_A$, $S_l(t)Az = AS_l(t)z$ для всех $z \in D_A$, $t \ge 0$;

(iii) $S_l(t)z_l$ является решением задачи

$$z^{(k)}(0) = 0, \quad k \in \{0, 1, \dots, m-1\} \setminus \{l\}, \quad z^{(l)}(0) = z_l$$

для уравнения (1) при любом $z_l \in D_A$.

Аналитическое в $\Sigma_\psi := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \psi,\ t \ne 0\}$ $l$-разрешающее семейство операторов $\{S_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \ge 0\}$ имеет тип $(\psi_0, a_0)$ при некоторых $\psi_0 \in (0, \pi/2]$, $a_0 \in \mathbb{R}$, если для всех $\psi \in (0, \psi_0)$, $a > a_0$ существует такое $C(\psi, a)$, что для всех $t \in \Sigma_\psi$ выполняется неравенство $\|S_l(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le C(\psi, a)e^{a\Re t}$.

Будем говорить что оператор $A$ принадлежит классу $\mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$, если выполняются условия:

1) существует такое $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \ge 0$, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k} \in \rho(A)$ для всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0,\ \mu \ne a_0\}$;

2) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta, a}$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k - 1} \left( \sum_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k} I - A \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \le \frac{K(\theta, a)}{|\lambda - a|}.$$

В работе [1] получены следующие результаты.

**Теорема 1.** *Аналитическое 0-разрешающее семейство операторов типа $(\theta_0 - \pi/2, a_0)$ при некоторых $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \ge 0$ для уравнения (1) существует тогда и только тогда, когда $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$. При этом разрешающее семейство единственно, имеет вид*

$$Z_0(t) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k - 1} \left( \sum_{k=1}^{n} \omega_k \lambda^{\alpha_k} I - A \right)^{-1} d\lambda.$$

*Здесь* $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_\pm = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + re^{\pm i\theta}, r \in (\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + \delta e^{i\varphi}, \varphi \in (-\theta, \theta)\}$ *при некоторых* $\delta > 0$, $a > a_0$, $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$.

**Теорема 2.** *Пусть* $m - 1 < \alpha_n \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_n > 1$, *существует 0-разрешающее семейство операторов* $\{S_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \geq 0\}$ *типа* $(\theta_0 - \pi/2, a_0)$, $a_0 \geq 0$, *для уравнения* (1). *Тогда существуют $l$-разрешающие семейства* $\{S_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \geq 0\}$ *типа* $(\theta_0 - \pi/2, a_0)$, $a_0 \geq 0$, $l = 1, 2, \ldots, m - 1$, *уравнения* (1).

**Теорема 3.** *Пусть* $m - 1 < \alpha_n \leq m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}_W(\theta_0, a_0)$ *при некоторых* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geq 0$, $g \in C([0, T]; D_A) \cup C^\gamma([0, T]; \mathcal{Z})$, $\gamma \in (0, 1]$, $z_l \in D_A$, $l = 0, 1, \ldots, m - 1$. *Тогда существует единственное решение задачи*

$$z^{(l)}(0) = z_l, \quad l = 0, 1, \ldots, m - 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \omega_k D^{\alpha_k} z(t) = Az(t) + g(t), \ \ t > 0.$$

## Литература

1. *Федоров В.Е., Филин Н.В.* Линейные уравнения с дискретно распределенной дробной производной в банаховых пространствах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, **27**:2 (2021), 264-280.

# ОБ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОСОБЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**@ Ф.М. Шамсудинов, С. Хомиддин**

*faizullo100@yahoo.com, smpk1992@mail.ru*

УДК 517.95

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.87.*

В работе для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка получено представление многообразия решений в явном виде, когда коэффициенты первого уравнения связанны между собой определённым образом. Изучены свойства полученных решений.

*Ключевые слова*: переопределенная система, многообразия решений, прямоугольник, суперсингулярный коэффициент, свойства решений.

**An overdetermined system of second-order equations with special coefficients**

In this work, for one overdetermined system of second-order differential equations, an explicit representation of the solution manifold is obtained, when the coefficients of the first equation are related in a certain way. The properties of the obtained solutions are studied.

*Keywords*: overdetermined system, manifold of solutions, rectangle, supersingular coefficient, properties of solutions.

Через $D$ обозначим прямоугольник

$$D = \{(x, y) : 0 < x < \delta_1, \quad 0 < y < \delta_2\}.$$

Далее обозначим

$$\Gamma_1 = \{y = 0, \ 0 < x < \delta_1\}, \quad \Gamma_2 = \{x = 0, \ 0 < y < \delta_2\}.$$

В области $D$ рассмотрим систему уравнений следующего вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{a_1(x,y)}{r^\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{r^\beta}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}u = \dfrac{f_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{a_2(x,y)}{x^\gamma}u = \dfrac{f_2(x,y)}{x^\gamma}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{b_2(x,y)}{y^\delta}u = \dfrac{f_3(x,y)}{y^\delta}, \end{array} \right. \tag{1}$$

---

Шамсудинов Файзулло Мамадуллоевич, д.ф.-м.н., доцент, БохГУ (Бохтар, Таджикистан); Shamsudinov Fayzullo (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

Сайфуллои Хомиддин, преподаватель, БохГУ (Бохтар, Таджикистан); Saifulloi Homiddin (Bokhtar State University, Bokhtar, Tajikistan)

где $r^2 = x^2 + y^2$, $a_j(x,y)$, $b_j(x,y)$, $c_1(x,y)$, $f_k(x,y), j = \overline{1,2}, k = \overline{1,3}$ – – заданные функции в области $D$, $\alpha > 2, \beta > 2, \gamma = 1, \delta > 1$, ($\alpha, \beta$– натуральные числа).

Проблеме исследования дифференциальных уравнений и переопределенных систем с регулярными, сингулярными и суперсингулярными коэффициентами посвящены работы [1]- [3].

Используя методику разработанного в [1] и [2] для системы уравнений (1) получено представление многообразия решений при помощи одной произвольной постоянной.

**Теорема 1.** *Пусть в системе уравнений (1)* $\alpha > 2, \beta > 2, \gamma = 1, \delta > 1$ *коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям*

1) $a_1(x,y) \in C^1_x(\overline{D}), a_2(x,y) \in C^1_y(\overline{D}), f_2(x,y) \in C^1_y(\overline{D})$,

$b_2(x,y) \in C^1_x(\overline{D}), f_3(x,y) \in C^1_x(\overline{D})$;

2)$c_2(x,y) = -c_1(x,y) + r^{\alpha+\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{r^\alpha}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y) = 0$;

3)$|a_2(x,y) - a_2(0,0)| \leq H_1 x^{\lambda_1}$, $H_1 = const, 0 < \lambda_1 < 1$,

$|b_2(x,y) - b_2(0,0)| \leq H_2 x^{\lambda_2}$, $H_2 = const, \lambda_2 > \delta - 1$,

4) $a_2(0,0) > 0, b_2(0,0) > 0$,

5) *a)* $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{r^\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_2(x,y)}{y^\delta}\right)$ в $D$;

b) $xf_1(x,y) = xr^{\alpha+\beta}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{f_2(x,y)}{x}) + r^\beta a_1(x,y)f_1(x,y)$ *в* $D$

*при* $r^\beta a_2(x,y) = x^\gamma b_1(x,y)$;

*c)* $a_2(x,y)f_3(x,y) + xy^\delta\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f_3(x,y)}{y^\delta}) = b_2(x,y)f_2(x,y) + xy^\delta\frac{\partial}{\partial y}(\frac{f_2(x,y)}{x})$ *в* $D$.

6) $f_2(x,y) = o(x^{\mu_2}), \mu_2 >\mid a_2(0,0) \mid$ .

*Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса* $C_2(D)$ *представимо в виде*

$$u(x,y) \equiv \Theta_1(\psi_2(y), f_2 x, y)), \tag{2}$$

*где*

$$\psi_2(y) \equiv N_1(c_1, y), \tag{3}$$

$c_1$ – *произвольная постоянная.*

## Литература

1. *Раджабов Н.*Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. – Душанбе .изд. ТГУ, 1992. - 236с.

2. *Раджабов Н., Махамед Эльсаед Абдель Аал.* Переопределеная линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями.- Lap Lambert Academic Publishing,Germany, 2011. - 234с.

3. *Тасмамбетов Ж. Н.* Построение нормальных и нормально - регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. - Актобе: 2015. - 463 с.

# МЕТОДЫ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

**@ М.Г. Юмагулов, Л.С. Ибрагимова, А.С. Белова**

*yum_mg@mail.ru, lilibr@mail.ru, 89177662488@mail.ru*

УДК 517.938

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.88.*

Предлагаются новые формулы первого приближения в задаче о возмущении дефинитных и индефинитных мультипликаторов линейных периодических гамильтоновых систем. Предлагаемые формулы приводят к новым признакам устойчивости по Ляпунову линейных периодических гамильтоновых систем в критических случаях. Полученные результаты сформулированы в терминах исходных уравнений и доведены до эффективных формул и алгоритмов.

*Ключевые слова*: гамильтонова система, устойчивость, параметрический резонанс.

**First approximation formulas in the problem of perturbation of definite and indefinite multipliers of linear Hamiltonian systems**

New formulas of the first approximation are proposed in the problem of perturbing definite and indefinite multipliers of linear periodic Hamiltonian systems. The proposed formulas lead to new criteria according to the Lyapunov stability for linear periodic Hamiltonian systems in critical cases. The results obtained are formulated in terms of the original equations and brought to effective formulas and algorithms.

*Keywords*: Hamiltonian system, stability, parametric resonance.

Рассматривается линейная периодическая гамильтонова система (ЛГПС)

$$\frac{dx}{dt} = JA_0(t)x\,, \quad x \in R^{2N}\,, \tag{1}$$

где $A_0(t)$ – вещественная симметрическая матрица, элементы которой являются непрерывными и $T$-периодическими функциями, а матрица $J$ определена равенством: $J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$; здесь $I$ – единичная $(N \times N)$ матрица.

Юмагулов Марат Гаязович, д.ф.-м.н., профессор, БашГУ (Уфа, Россия); Marat Yumagulov (Bashkir State University, Ufa, Russia)

Ибрагимова Лилия Сунагатовна, к.ф.-м.н., доцент, БашГУ (Уфа, Россия); Liliya Ibragimova (Bashkir State University, Russia)

Белова Анна Сергеевна, аспирант, БашГУ (Уфа, Россия); Anna Belova (Bashkir State University, Russia)

В докладе обсуждаются вопросы о сильной устойчивости (см., например, [1, 2]) системы (1), а также связанные с ними вопросы о поведении дефинитных и индефинитных мультипликаторов этой системы при переходе от (1) к возмущенной ЛПГС вида:

$$\frac{dx}{dt} = JA(t\,,\varepsilon)x\,, \qquad x \in R^{2N}\,, \tag{2}$$

зависящей от скалярного или векторного параметра $\varepsilon$. Здесь $A(t,\varepsilon)$ – вещественная симметрическая матрица, элементы которой являются непрерывными и $T$-периодическими по $t$ функциями и непрерывно дифференцируемо зависят от малого параметра $\varepsilon$. При этом выполнено равенство: $A(t,0) \equiv A_0(t)$.

Основное внимание в докладе будет уделено вопросу о построении формул первого приближения для возмущений кратных мультипликаторов системы (1) в следующих основных случаях, когда эта система имеет:

1) кратный (кратности 2) полупростой мультипликатор $\mu_0$ так, что $|\mu_0| = 1$ и $\mu_0 \neq \pm 1$;

2) кратный (кратности 2) неполупростой мультипликатор $\mu_0$ так, что $|\mu_0| = 1$ и $\mu_0 \neq \pm 1$;

3) мультипликатор 1 или $-1$ кратности 2.

Полученные формулы первого приближения для возмущения мультипликатора $\mu_0$ используются для изучения задачи анализа устойчивости по Ляпунову ЛПГС (2). Полученные результаты являются развитием результатов [3].

**Литература**

1. *Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах.* (М.: Наука, 1987) 328 с.

2. *Meyer K., Hall G. and Offin D. Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body* Problem. 2nd ed. // vol. 60 of Applied Mathematical Sciences. (Springer, New York, 2009).

3. *Yumagulov M.G., Ibragimova L.S., Belova A.S. Approximate research of problems on perturbation of periodic and autonomous Hamiltonian systems in critical cases.*// Lobachevskii J Math 41, 1924–1931 (2020).

# ЛАГАНЖЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ, И ПРИЛОЖЕНИЯ

**@ С.Ю. Доброхотов**

*s.dobrokhotov@gmail.com*

УДК 517.518

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*89.

**Lagange manifolds related to Bessel functions and applications**

We establish the correspondence of Bessel functions with suitable Lagrangian manifolds using new integral representations for the canonical Maslov operator recently constructed by S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaykinskii and A. I. Shafarevich. This makes it possible to obtain various "geometric" asymptotics for Bessel functions. As an application, we consider the problems of Bessel wave beams.

The work was done together with D. S. Minenkov and V. E. Nazaykinskii.

*Keywords*: mathematics, differential equations, spectral theory.

Мы устанавливаем соответствие функций Бесселя с подходящими лагранжевыми многообразиями с помощью недавно построенных С.Ю.Доброхотовым, В.Е.Назайкинским и А.И.Шафаревичем новых интегральных представлений для канонического оператора Маслова. Это дает возможность получить различные "геометрические" асимптотики для функций Бесселя. В качестве приложения мы рассматриваем задачи о бесселевых волновых пучках.

Работа выполнена выполнена совместно с Д.С.Миненковым и В.Е.Назайкинским.

---

Работа выполнена по теме государственного задания (N госрегистрации АААА-А20-120011690131-7).

Доброхотов Сергей Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, ИПМех РАН (Москва, Россия); Sergey Dobrokhotov (Ishlinsky Institute for Problem in Mechanics RAS, Moscow, Russia)

# ОБ ОРБИТАХ В $\mathbb{R}^4$ АБЕЛЕВОЙ 3-МЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

**А.В. Лобода, Б.М. Даринский**

*lobvgasu@yandex.ru, darinskii@mail.ru*

УДК 517.518

*DOI: 10.33184/mnkuomsh1t-2021-10-06.*90.

В связи с задачей описания аффинно однородных гиперповерхностей в $\mathbb{R}^4$ (и голоморфно однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^4$) изучаются орбиты двух семейств абелевых подалгебр алгебры Ли $gl(4,\mathbb{R})$. Для одного из них даны координатные описания орбит и установлена вырожденность всех полученных гиперповерхностей. Доказано, что их стабилизаторы дискретны, а размерность пространства модулей семейства этих орбит равна 2. Сформулирована общая гипотеза о размерностях таких пространств для однородных гиперповерхностей.

*Ключевые слова*: алгебра Ли, однородная гиперповерхность, стабилизатор

**Orbits in $\mathbb{R}^4$ of an abelian 3-dimensional Lie algebra**

In connection with the problem of describing affinely homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$ (and holomorphically homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^4$), we study the orbits of two families of Abelian subalgebras of the Lie algebra $gl(4,\mathbb{R})$. For one of them, coordinate descriptions of the orbits are given and the degeneracy of all obtained hypersurfaces is established. It is proved that their stabilizers are discrete, and the dimension of the moduli space of the family of these orbits is 2. A general conjecture is stated about dimensions of such spaces for homogeneous hypersurfaces.

*Keywords*: Lie algebra, homogeneous hypersurface, stabilizer

Однородные гиперповерхности в любых пространствах – это орбиты некоторых алгебр Ли векторных полей. В задаче локального описания и классификации аффинно однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{R}^4$ в настоящее время наибольший интерес представляет случай однородности, связанный с орбитами 3-мерных алгебр Ли аффинных векторных полей.

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00497) и Московского Центра фундаментальной и прикладной математики (МГУ им. М.В. Ломоносова).

Лобода Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, ВГТУ (Воронеж, Россия); Alexander Loboda (Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia)

Даринский Борис Михайлович, д.ф.-м.н., профессор ВГУ (Воронеж, Россия); Boris Darinskii (Voronezh State University, Voronezh, Russia)

Абелева алгебра Ли составляет лишь один из девяти типов (например, в классификации [1]) 3-мерных алгебр Ли. Количество же представлений абелевой $n$-мерной алгебры в $\mathbb{R}^{n+1}$ оказывается при $n > 1$ весьма большим. Так, имеется 17 типов (см. [2], Лемма 1) 2-мерных абелевых подалгебр в алгебре Ли $gl(3, \mathbb{R})$, не сводимых друг к другу матричными подобиями (сопряжениями). Аналогичный вопрос о семействах 3-мерных абелевых подалгебр в $gl(4, \mathbb{R})$ пока остается не изученным в полном объеме.

Ниже обсуждаются два семейства 3-мерных абелевых подалгебр в $gl(4, \mathbb{R})$. Эти семейства интересны, например, тем, что являются достаточно обширными, а все их орбиты имеют нулевую гауссову кривизну. Трубки в $\mathbb{C}^4$ над такими поверхностями являются представителями слабо изученного класса 2-невырожденных голоморфно однородных гиперповерхностей (вырожденных в смысле Леви).

**Пример 1.** Базис первого семейства

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; e_2 = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 1 \\ \mu_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

**Теорема 1.** *Если $a_1 > a_2$, $\mu_1 = a_1 + a_2$, $\mu_2 = -a_1 a_2$, то орбитами семейства (1) являются поверхности, описываемые (с точностью да аффинной эквивалентности) уравнениями*

$$x_1 x_4 - x_2 x_3 = (x_2^2 - \mu_1 x_2 x_4 - \mu_2 x_4^2) \ln \left( \frac{x_2 - a_2 x_4}{x_2 - a_1 x_4} \right). \tag{2}$$

*Точкам некоторого открытого подмножества плоскости параметров $(a_1, a_2)$ соответствуют аффинно различные поверхности семейства (2), имеющие дискретный аффинный стабилизатор.*

**Замечание.** Вопрос о количестве существенных параметров, описывающих семейства алгебр и их орбит, является достаточно тонким. Так, пример (1) появился из начального рассмотрения семейства алгебр, в котором базисная матрица

$$e_2 = \begin{bmatrix} \mu_1 & a & \mu_3 & c \\ 0 & \mu_1 & 0 & \mu_3 \\ \mu_2 & b & \mu_4 & d \\ 0 & \mu_2 & 0 & \mu_4 \end{bmatrix}$$

состоит из четырех клеток «жорданова типа» и содержит 8 вещественных параметров (как и семейство алгебр Ли $g =< e_1, e_2, e_3 >$).

**Пример 2.** Базис второго семейства

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} \mu_1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & \mu_1 & 0 & 1 \\ \mu_2 & a & 0 & 0 \\ -a & \mu_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

содержит три вещественных параметра $\mu_1, \mu_2, a$ и образован «блочно-поворотными» матрицами.

Естественной является гипотеза о существовании не более чем $(n-1)$-параметрических семейств вырожденных аффинно однородных гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. В обсуждаемой ситуации гипотеза о двух параметрах, описывающих семейство алгебр (3) и соответствующих им орбит, пока находится в стадии проверки.

Результаты теоремы 1 получены за счет интегрирования алгебр и изучения их орбит с помощью техники нормальных форм. Семейство (3) является более сложным для исследования в рамках таких подходов.

## Литература

1. *Мубаракзянов Г. М.* О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Матем. **1** (1963), 114–123.

2. *Komrakov B., Thourioumov A. et al.* Three-dimensional isotropically faithfull homogeneous spaces // Preprint Univ. Oslo, **35** (1993), 1-166.

# Авторский указатель

**Научное издание**

# *УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2021*

## *МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ*

**Том 1**

В авторской редакции

Подписано в печать 29.09.2021 г. Формат 60х84/16.
Печать: цифровая. Гарнитура: Times New Roman
Усл. печ. л. 13,95. Тираж 100. Заказ 1490.

**Отпечатано в редакционно-издательском отделе**
**НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА «АЭТЕРНА»**
**450076, г. Уфа, ул. М. Гафури 27/2**
**https://aeterna-ufa.ru**
**info@aeterna-ufa.ru**
**+7 (347) 266 60 68**