МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
УФИМСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ НАУКИ И ТЕХНОЛОГИЙ

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ПРИВОЛЖСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО ОКРУГА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
С ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ ЦЕНТРОМ УФИЦ РАН

МАТЕРИАЛЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ «УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2024»

Том 1

г. Уфа, 2 октября – 5 октября 2024 г.

СЕКЦИИ:

«СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ»

«КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

«НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Уфа
Аэтерна
2024

УДК 517
ББК 22.1
У 88

Мероприятие проводится при финансовой поддержке Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа.

Печатается по решению Ученого совета института информатики, математики и робототехники Уфимского университета науки и технологий.

Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 2 октября – 5 октября 2024 г.). В 2 томах. Том 1 / отв. редактор З.Ю. Фазуллин. - Уфа: Аэтерна, 2024. - 242 с.

В предоставленных материалах конференции детально обсуждаются новейшие результаты и открытые проблемы в спектральной теории, нелинейном и комплексном анализе, в теории дифференциальных уравнений, математическом моделировании. Материалы сборника предназначены для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся указанными проблемами.

Организаторы конференции: Уфимский университет науки и технологий, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН (г. Уфа), НОМЦ Приволжского федерального округа.
Благодарим компании, оказавшие поддержку проведению конференции.

ISBN 978-5-00249-058-5 т.1
ISBN 978-5-00249-060-8

Уфимский университет науки и технологий совместно с Институтом математики с ВЦ УФИЦ РАН ежегодно, начиная с 2012 г., проводит международные научные конференции, основные тематики которых связаны со спектральной теорией, с нелинейным и комплексным анализом, дифференциальными уравнениями и математическим моделированием. Выбор таких направлений определялся как активной работой в указанных областях многих математиков из Башкортостана, взаимопроникновением идей и методов спектральной теории, нелинейного и комплексного анализа при решении многих актуальных задач в указанных областях, так и сотрудничеством с коллегами из многих научных центров России и зарубежья.

В последние годы особенно активным стало сотрудничество в указанных областях математики с учеными из ряда научных и образовательных организаций Узбекистана, Казахстана и Таджикистана. Со многими организациями заключены соответствующие Договора о научном сотрудничестве.

Начиная с 2019 г. конференция приобрела новый статус, преобразовавшись в "Уфимскую осеннюю математическую школу". Теперь, наряду с обсуждением новейших научных результатов и открытых проблем, важное место в работе конференции занимают обзорные лекции ведущих ученых для аспирантов и молодых ученых.

Научная программа конференции УОМШ-24 охватывает следующие направления:

- спектральная теория операторов;
- комплексный и функциональный анализ;
- нелинейные уравнения;
- дифференциальные уравнения и их приложения;
- математическое моделирование.

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2024»

СЕКЦИЯ

«СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ»

г. Уфа, 2 октября – 5 октября 2024 г.

О МОДИФИЦИРОВАННОМ УРАВНЕНИИ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА-ЛИУВИЛЛЯ (ОМКДФ–Л) ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА

А.А. Абдивохидов,
А.Б. Хасанов,
Т.Г. Хасанов,
azamatabdivoxidov@mail.ru, ahasanov2002@mail.ru, temur.xasanov.2018@mail.ru

УДК 517.957

В тезисе метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования нелинейного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза–Лиувилля отрицательного порядка (омКдФ–Л) в классе периодических бесконечнозонных функций.

Ключевые слова: Модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза–Лиувилля отрицательного порядка (омКдФ–Л), оператор Дирака, спектральные данные, система уравнений Дубровина, формулы следов.

On the Negative order modified Korteweg-de Vries-Liouville (nmKdV-L) equation

In this thesis, the inverse spectral problem method is used to integrate the nonlinear negative order modified Korteweg-de Vries–Liouville (nmKdV–L) equation in the class of periodic infinite-gap functions.

Keywords: Negative order modified Korteweg-de Vries–Liouville equation (nmKdV–L), Dirac operator, spectral data, Dubrovin system of equations, trace formulas.

Абдивохидов Азамат Авазхон угли, Аспирант, СамГУ (Самарканд, Узбекистан); Abdivokhidov Azamat (Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan)

Хасанов Акназар Бекдурдиевич, д.ф.-м.н., Профессор, СамГУ (Самарканд, Узбекистан); Khasanov Aknazar (Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan)

Хасанов Темур Гафуржанович, Аспирант, УрГУ (Ургенч, Узбекистан); Khasanov Temur (Urgench State University, Urgench, Uzbekistan)

In this work, we consider a mixed problem for the negative order modified Kortewegde Vries-Liouville (nmKdV-L) equation of the form

$$\begin{cases} b(t)\left(u_{xt}-e^{2u}\right)-a(t)\left(u_{xxxt}-\left(2u_x\mu_{xt}\right)_x\right)=0, \\ \mu_{xx}=u_x^2, \end{cases} \tag{1}$$

under conditions

$$\begin{cases} u(x,t)|_{t=0}=u_0(x), \quad u_0(x+\pi)=u_0(x)\in C^5(\mathbb{R}), \\ u(x,t)|_{x=0}=\alpha(t), \quad \mu_x(x,t)|_{x=0}=\beta(t), \\ \left[u_{xt}(x,t)-\mu_{xt}(x,t)\right]|_{x=0}=\zeta(t) \end{cases} \tag{2}$$

in the class of real infinite-gap π periodic functions with respect to x satisfying the following smoothness conditions

$$u(x,t)\in C^{4,1}_{x,t}(t>0)\cap C(t\geq 0), \mu(x,t)\in C^{2,1}_{x,t}(t>0)\cap C(t\geq 0). \tag{3}$$

Here $a(t), b(t)\in C[0;\infty)$ and $\alpha(t),\beta(t),\zeta(t)\in C^1(t>0)\cap C(t\geq 0)$ are given continuous differentiable bounded functions.

Note that if in equations (1) the coefficients $a(t)=0, b(t)=1$, then equation (1) takes the form of the Liouville equation, popular in the literature (see [6] and [51], p. 14). Also, for the case $a(t)=1, b(t)=0$, we obtain the negative order modified Korteweg-de Vries equation (nmKdV) (see [7]). For simplicity, we study equation (1), in the case of $b(t)=1$.

In this paper, we propose an algorithm for constructing periodic infinite-gap solutions $u(x,t), \mu_x(x,t), x\in\mathbb{R}, t>0$ of the mixed problem (1)–(3) by reducing it to the inverse spectral problem for a self-adjoint periodic Dirac operator of the form:

$$\mathfrak{L}(\tau,t)y\equiv B\frac{dy}{dx}+\Omega(x+\tau,t)y=\lambda y,\ x\in\mathbb{R},\tau\in\mathbb{R},\ t>0,$$

where

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x,t)=\begin{pmatrix} P(x,t) & Q(x,t) \\ Q(x,t) & -P(x,t) \end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$
$$P(x,t)=0, \quad Q(x,t)=u'_x(x,t).$$

Theorem 1. *Let $u(x,t), \mu_x(x,t), x\in\mathbb{R}, t>0$ be the solution to the mixed problem (1)–(3). Then the boundaries of the spectrum $\lambda_n(\tau,t), n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ of the operator $\mathfrak{L}(\tau,t)$ do not depend on τ and t i.e. $\lambda_n(\tau,t)=\lambda_n, n\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, and the spectral parameters*

$\xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ satisfy the Dubrovin system of differential equations,

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi(\tau,t)) g_n(\xi(\tau,t)), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{4}$$

In addition, the following initial conditions are satisfied

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau),\ \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \tag{5}$$

where $\xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ are the spectral parameters of the Dirac operator $\mathfrak{L}(\tau,0)$. Sequences $h_n(\xi)$ and $g_n(\xi), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ in equation (4) are determined by the following formulas:

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau,t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau,t))} \cdot f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t) - \xi_n(\tau,t))^2}},$$

$$g_n(\xi) = \frac{1}{1 + 4a(t)\xi_n^2(\tau,t)} \left[\frac{1}{\xi_n(\tau,t)} e^{2u} + 2a(t)\xi_n(\tau,t)(u_{\tau t} + \mu_{\tau t})\right],$$

where

$$\xi \equiv \xi(\tau,t) = (\ldots, \xi_{-1}(\tau,t), \xi_1(\tau,t), \ldots), \quad \sigma \equiv \sigma(\tau,t) = (\ldots, \sigma_{-1}(\tau,t), \sigma_1(\tau,t), \ldots).$$

The following formulas hold:

$$u(\tau,t) = \alpha(t) + \int_0^\tau \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(s,t) h_k(\xi(s,t)) \right\} ds, \tag{6}$$

$$\mu_\tau(\tau,t) = \beta(t) + \int_0^\tau u_\tau^2(s,t) ds. \tag{7}$$

Remark. *We have an algorithm for finding a solution of the mixed problem (1)–(3):*

1. First, find the spectral data $\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, of the Dirac operator $\mathfrak{L}(\tau,0)$. Let us denote the spectral data, of the operator $\mathfrak{L}(\tau,t)$ by $\lambda_n, \xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$;

2. Next, having solved the Cauchy problem (4), (5) for an arbitrary value of τ, we find $\xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t), n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$;

3. Determine the functions $u(\tau,t), \mu_\tau(\tau,t), x \in \mathbb{R}, t > 0$ from formulas (6)–(7) i.e. solution of the mixed problem (1)–(3).

Theorem 2. *If a periodic infinite-gap function $u_0(x)$ satisfies the condition*

$$u_0(x+\pi) = u_0(x) \in C^5(\mathbb{R}),$$

and $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t) \in C^1(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ *are bounded functions, then there is a uniquely determined global solution* $u(x,t), \mu_x(x,t), x \in \mathbb{R}, t > 0$, *of the mixed problem (1)–(3), which is determined by formulas (6) and (7), respectively, and belongs to the smoothness class (3).*

References

1. *Khasanov A.B., Normurodov Kh.N., Khudayorov U.O.* Cauchy Problem for the Nonlinear Liouville Equation in the Class of Periodic Infinite-Gap Functions // Differential Equations, **59** (2023), 1413-1426

2. *Zhiber A.V., Murtozina R.D., Habibullin I.T., Shabat A.B.* Characteristic Lie ring and nonlinear integrable equations. — Moscow: Computer Research Institute, 2012.

3. *Urazboev G.U., Yakhshimuratov A.B., Khasanov M.M.* Integration of negative-order modified Korteweg–de Vries equation in a class of periodic functions // Theoretical and Mathematical Physics, **217** (2023), 1689–1699

ФОРМУЛА ДЛЯ СУММЫ ОДНОГО УСЛОВНО СХОДЯЩЕГОСЯ РЯДА

Б.Д. Бармак
barmakbella@mail.ru

УДК 517.521

В работе классическими методами математического анализа найдена формула для суммы одного условно сходящегося ряда в терминах элементарных функций, и обсуждается возможность обобщения полученных результатов.

Ключевые слова: условно сходящийся ряд, сумма ряда, элементарные и специальные функции.

Formula for the sum of one conditionally convergent series

In this work, using classical methods of mathematical analysis, a formula is found for the sum of one conditionally convergent series in terms of elementary functions and the possibility of generalizing the results obtained is discussed.

Keywords: conditionally convergent series, sum of series, elementary and special functions.

Рассмотрим гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots \tag{1}$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$. Знаки перед членами ряда (1) изменим так, чтобы за первыми p положительными членами следовало бы столько же отрицательных членов, затем снова p положительных членов и т.д. В результате получим условно сходящийся ряд

$$S_p := 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}-\dots-\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p+1}+\dots+\frac{1}{3p}-\dots. \tag{2}$$

Задача отыскания формул для сумм сходящихся рядов, в частности, рядов вида (2), является классической задачей анализа и привлекает внимание математиков уже на протяжении многих веков. Так, например, "формула Лейбница"

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots=\frac{\pi}{4}$$

была известна ещё Мадхаве в XIV веке. Известна также формула Ньютона:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\dots=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00128).

Бармак Белла Давидовна, аспирант, МГУ (Москва, Россия); Bella Barmak (Moscow State University, Moscow, Russia)

В книге [1, с. 148-149, п.179-180] приводится несколько формул для сумм условно сходящихся рядов. Некоторые из них содержатся также в [2, упр. 52, стр. 71].

Однако методы нахождения сумм рядов такого вида недостаточно хорошо развиты, а поиск новых формул, несомненно, представляет интерес.

В работе классическими методами анализа найдена формула для суммы S_p ряда (2) в терминах элементарных функций. А именно, установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Для любого натурального p сумму S_p ряда (2) можно вычислить по формуле*

$$S_p = \frac{\ln 2}{p} + \frac{\pi}{p} \sum_{j=0}^{[(p-2)/2]} \left(1 - \frac{1+2j}{p}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi + 2\pi j}{2p}\right), \tag{3}$$

где $[x]$ - целая часть x, а сумма по пустому множеству равна 0.

В частности, полагая $p = 1, 2, 3$ и 4 в равенстве (3), получим

$$S_1 = \ln 2, \quad S_2 = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad S_3 = \frac{\ln 2}{3} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \quad S_4 = \frac{\ln 2}{4} + \frac{(2\sqrt{2}+1)\pi}{8}.$$

Следствие 1. *Для каждого натурального p суммы S_p являются линейными комбинациями трансцендентных чисел* $\ln 2$ *и* π *с алгебраическими коэффициентами.*

Следствие 2. *Пусть $p \in \mathbb{N}$. Тогда ряд*

$$p \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{(2pn+m)(p(2n+1)+m)}$$

сходится и его сумма вычисляется по формуле (3).

Методы настоящей работы позволяют найти суммы рядов, являющихся обобщением ряда (2).

Интересно отметить, что если так же, как и в ряде (1), изменить знаки в сумме - ряде для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ при натуральных значений $s > 1$ и применить методы настоящей работы, то для полученной суммы формулы, подобные формуле (3) будут содержать не только элементарные функции, но и некоторые специальные функции.

Литература

1. *Эйлер Л.,* Введение в анализ бесконечно малых. Том 1. — издание второе, государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961.

2. *Аски Р., Рой Р., Эндрюс Дж.,* Специальные функции. — Москва: МЦНМО, 2013.

ОБ ЭКЗОТИЧЕСКИХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ГРАФОВ С МАЛЫМИ РЕБРАМИ

Д.И. Борисов
borisovdi@yandex.ru

УДК 517.518

Для оператора Лапласа на графе общего вида с малыми ребрами с краевыми условиями общего вида найдены и описаны экзотические собственные значения.

Ключевые слова: квантовый граф, малое ребро, собственное значение.

Рассматривается оператор Лапласа на графе общего вида с малыми ребрами с краевыми условиями общего вида. Известно, что резольвента такого оператора сходится к резольвенте предельного оператора на графе без малых ребер, а вершинах, к которым прикрепляются малые ребра, следует поставить подходящие предельные краевые условия. Кроме того, резольвента исходного оператора в подходящем смысле голоморфна по малому параметру, описывающему длины малых ребер. Основной результат нашей работы состоит в обнаружении экзотических собственных значений исходного оператора. Такие операторы существуют в определенных ситуациях и их основная особенность состоит в том, что они стремятся к минус бесконечности, когда малый параметр стремится к нулю. Более того, их асимптотическое разложение содержит дробные степени малого параметра, что резко контрастирует с упомянутой голоморфностью резольвенты. Нами детально исследованы вопросу существования и поведения таких экзотических собственных значений.

Работа выполнена совместно с Г. Берколайко и М. Кингом (G. Berkolaiko, M. King).

Исследование Д.И. Борисова выполнено за счет Российского научного фонда (грант 23-11-00009, https://rscf.ru/project/23-11-00009/).

Борисов Денис Иванович, д.ф.-м.н., профессор РАН, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Denis Borisov(Institute of Mathematics. Ufa Federal Research Center, Ufa, Russia)

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МНОГОТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДВУХКРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГУРТИНА-ПИПКИНА

Б.Н. Даулетбай
BekarysDauletbay98@gmail.com

УДК 517.518

Доклад посвящен краевым задачам граничного управления для нелокального уравнения теплопроводности с конечной скоростью распространения. Уравнения такого типа будем называть уравнениями Гуртина-Пипкина. Для решения задачи применяется спектральный анализ многоточечных краевых задач двухкратного дифференцирования

Ключевые слова: спектральный анализ, краевая задача, операторы, граничное управление

Распространение температуры вдоль стержня описывается уравнением Гуртина-Пипкина. Известно, что температура подчиняется закону Гуртина-Пипкина. Уравнение имеет конечную скорость распространения возмущений. В докладе рассматривается возможность нагрева стержня от исходного состояния до необходимого состояния в фиксированное время.

В качестве элемента управления выбрана средняя температура в некоторых фиксированных точках. Если период времени мал по сравнению с геометрическим размером стержня, то некоторые конечные режимы недостижимы.

Когда есть достаточно времени, существует уникальный средний граничный контроль. Он переходит из произвольного начального состояния стержня до требуемого конечного состояния. Если есть достаточно времени, то существуют заданные средние граничные значения, передающие начальное состояние до необходимого конечного состояния.

Литература

1. *V.A. Il'in* Boundary Control of Oscillations at One Endpoint with the Other Endpoint Fixed in Terms of a Finite-Energy Generalized Solution of the Wave Equation // Differential Equations, **36**:12 (2000), 1832-1849

2. *V.A. Il'in* Boundary control of a string oscillating at one end, with the other end fixed and under the condition of the existence of finite energy // Доклады Академии Наук, **378**:6 (2001), 743-747

Даулетбай Бекарыс Нуркенович, PhD докторант 3 курса КазНУ имени аль-Фараби (Алматы, Казахстан); Bekarys Dauletbay (Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan)

3. *A.I. Egorov, L.N. Znamenskaya* Two-end controllability of elastic vibrations of systems with distributed and lumped parameters// Computational Mathematics and Mathematical Physics, **46**:11 (2006), 1940-1952

АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА БЕЛЬТРАМИ-ЛАПЛАСА С ВЫРОЖДЕНИЕМ МЕТРИКИ НА ГРАНИЦЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ БЕРЕГОВЫЕ ВОЛНЫ

С.Ю. Доброхотов

s.dobrokhotov@gmail.com

УДК 517.518

Доклад посвящен асимптотическим решениям нелинейной системы уравнений мелкой воды в бассейнах с пологими берегами, описывающим нелинейные береговые волны, то есть асимптотические решения локализованные в окрестности береговой линии.

Ключевые слова: математика, дифференциальные уравнения, спектральная теория, волны на воде

Asymptotics of eigenfunctions of the Beltrami-Laplace operator with metric degeneracy at the boundary and nonlinear coastle waves

We construct asymptotic solutions of a nonlinear system of shallow water equations in basins with gentle shores, describing nonlinear coastal waves, that is, asymptotic solutions localized in the vicinity of the coastline.

Keywords: mathematics, differential equations, spectral theory, water waves.

Мы строим асимптотические решения нелинейной системы уравнений мелкой воды в бассейнах с пологими берегами, описывающие нелинейные береговые волны, то есть асимптотические решения локализованные в окрестности береговой линии. Построение состоит из двух этапов. Сначала строятся асимптотические собственные функции линейного двумерного оператора типа Бельтрами-Лапласа с вырождающейся на границе области (береговой линии) метрикой и затем с помощью нелинейного преобразования типа Карриера- Гринспана по ним строятся в параметрическом виде решения нелинейной системы. Получаемые решения в некотором смысле напоминают известные в акустики волны шепчущей галереи, но для их существования не требуется выпуклости области и они существенно нелинейные. Мы обсуждаем также связь полученных асимптотических решений с теорией бильярдов с “полужесткими стенками”.

Доклад основан на совместных работах с М.М.Вотяковой, Д.С.Миненковым, В.Е.Назайкинским и А.В.Цветковой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-11-00213).

Доброхотов Сергей Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, ИПМех РАН (Москва, Россия); Sergey Dobrokhotov (Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia)

Литература

1. *Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E., Tsvetkova A. V.*, Nonlinear Effects and Run-up of Coastal Waves Generated by Billiards with Semi-rigid Walls in the Framework of Shallow Water Theory', Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova, **322**(2023) , 111—123

2. *Dobrokhotov S. Yu., Minenkov D. S., Votiakova M. M.*, Asymptotics of Long Nonlinear Coastal Waves in Basins with Gentle Shores", Russian Journal of Mathematical Physics, **31**, No. 1, (2024) 79–93.

ОБ η-ИНВАРИАНТАХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

К.Н. Жуйков, А.Ю. Савин,
zhuykovcon@gmail.com, a.yu.savin@gmail.com

УДК 517.95

Для класса краевых задач с параметром, эллиптических в смысле Аграновича–Вишика, установлено равенство η-инварианта, определяемого в терминах регуляризации Мельроуза, и спектрального η-инварианта типа Атьи–Патоди–Зингера, определяемого при помощи аналитического продолжения спектральной η-функции оператора.

Ключевые слова: эллиптическая краевая задача, η-инвариант, регуляризованный след.

On the η-invariants of elliptic boundary value problems

For a class of boundary value problems with a parameter elliptic in the sense of Agranovich and Vishik the equality of the η-invariant, defined in terms of Melrose regularization, and the spectral η-invariant of the Atiyah–Patodi–Singer type, defined using the analytic continuation of the spectral η-function of the operator, is established.

Keywords: elliptic boundary value problem, η-invariant, regularized trace.

Атья, Патоди и Зингер определили η-инвариант эллиптического самосопряженного псевдодифференциального оператора A положительного порядка на гладком замкнутом многообразии как спектральный инвариант формулой

$$\eta_{APS}(A) = \frac{1}{2}\Big(\sum_j (\mathrm{sgn}\lambda_j)|\lambda_j|^{-s}\Big)\Big|_{s=0},$$

где $\{\lambda_j\}$ — набор всех собственных значений оператора A с учетом их кратностей, ряд сходится абсолютно при достаточно больших $\mathrm{Re}\, s$ и определяет голоморфную функцию, которая допускает мероморфное продолжение на комплексную плоскость, причем функция является голоморфной при $s = 0$ и поэтому определено ее значение в нуле. η-инварианты Атьи–Патоди–Зингера операторов на замкнутом многообразии имеют многочисленные приложения в анализе, геометрии, топологии.

Первый автор является победителем конкурса «Молодая математика России» и выражает благодарность его спонсорам и жюри. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00336.

Жуйков Константин Николаевич, к.ф.-м.н., ассистент, РУДН (Москва, Россия); Konstantin Zhuikov (RUDN University, Moscow, Russia)

Савин Антон Юрьевич, д.ф.-м.н., профессор, РУДН (Москва, Россия); Anton Savin (RUDN University, Moscow, Russia)

Другой подход к определению η-инвариантов дал Мельроуз, который рассматривал семейства $D(p)$ псевдодифференциальных операторов с параметром $p \in \mathbb{R}$. В предположении, что семейство является эллиптическим с параметром в смысле Аграновича–Вишика и обратимым при всех $p \in \mathbb{R}$, η-инвариант Мельроуза определялся формулой

$$\eta(D(p)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} tr \left(D(p)^{-1} \frac{dD(p)}{dp} \right) dp,$$

где под следом tr и интегралом $\int_{\mathbb{R}}$ понимаются специальные регуляризации. η-инвариант Мельроуза использовался в формулах индекса на многообразиях с коническими точками.

Мельроузом, а также Лешем и Пфлаумом была установлена следующая связь между η-инвариантами Атьи–Патоди–Зингера и Мельроуза:

$$\eta_{APS}(A) = \eta(p - iA).$$

Цель данной работы состоит в получении аналогичной формулы, в которой в левой части равенства стоит η-инвариант эллиптической краевой задачи на многообразии с краем, а в правой части равенства стоит η-инвариант из работы Жуйкова и Савина (2023) семейства краевых задач с параметром. Нам удалось получить такое равенство для краевых задач любого нечетного порядка.

Литература

1. *Atiyah M.F., Patodi V.K., Singer I.M.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry, I // Math. Proc. Camb. Phil. Soc, **77** (1975), 43-69

1. *Melrose R.B.* The eta invariant and families of pseudodifferential operators // Math. Res. Lett., **2** (1995), 541-561

3. *Жуйков К.Н., Савин А.Ю.* Эта-инвариант эллиптических краевых задач с параметром // СМФН, **69**:4 (2023), 599-620

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ АМБАРЦУМЯНА

Х.К. Ишкин,
ishkin62@mail.ru

УДК 517.927.25+517.984.5

Для оператора Штурма–Лиувилля H на полуоси с комплексным убывающим потенциалом, допускающим аналитическое продолжение в некоторую окрестность нуля, получен аналог теоремы Амбарцумяна: если дискретный спектр оператора $H+V$, где V — оператор умножения на финитной суммируемую функцию $V(\cdot)$, совпадает с дискретным спектром оператора H, то V=0.

Ключевые слова: спектр, теорема Амбарцумяна, оператор Шредингера с комплексным потенциалом, спектральная неустойчивость.

On one analogue of Ambartsumyan's theorem

For the Sturm–Liouville operator H on the half-axis with a complex decreasing potential that allows analytical continuation to some neighborhood of zero, an analogue of Ambartsumyan's theorem is obtained: if the discrete spectrum of the operator H+V, where V is the operator of multiplication by a finite summable function $V(\cdot)$, coincides with the discrete spectrum of the operator H, then V=0.

Keywords: spectrum, Ambartsumian theorem, Schrödinger operator with complex potential, spectral instability.

Пусть q — вещественная, суммируемая на $(0,\pi)$ функция, L — оператор, порожденный в пространстве $L^2(0,\pi)$ выражением $-y''+qy$ и краевыми условиями $y'(0) = y'(\pi) = 0$. Теорема Амбарцумяна [1] утверждает, что если спектр оператора L совпадает с последовательностью $\{k^2\}_{k=0}^{\infty}$, то $q = 0$ п.в. на $(0,\pi)$. Этот результат явился отправной точкой для теории обратных спектральных задач. Позже выяснилось, что случай, рассмотренный Амбарцумяном, был исключительным: вообще говоря, для определения потенциала необходимы два спектра [2]. Впоследствии были получены различные обобщения теоремы Амбарцумяна (см.[3] и имеющиеся там ссылки). Во всех этих работах рассматривались только самосопряженные операторы с дискретным спектром. В работе [4] был получен следующий результат:

Пусть $L = H_\theta + V$, *где* H_θ — *оператор, порожденный в* $L^2(\mathbb{R}_+)$ *дифференциальным выражением* $-y'' + e^{i\theta}x^\alpha y$ $(\alpha > 0$ *и* $0 < |\theta| < \pi)$ *и*

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, согл. №075-02-2024-1444.

Ишкин Хабир Кабирович, д.ф.-м.н., профессор, УУНиТ (Уфа, Россия); Khabir Ishkin (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

краевым условием $y(0)=0$, V — оператор умножения на финитную, суммируемую функцию $V(\cdot)$. Далее пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные числа операторов L и H_θ соответственно, пронумерованные в порядке возрастания модулей с учетом алгебраических кратностей. Тогда если $\mu_n \sim \lambda_n + o\left(\lambda_n^{1-1/\alpha}\right)$, $n\to\infty$, то $V=0$ п.в. на $\mathbb{R}_+$.

В докладе будет рассмотрен случай, когда существенный спектр невозмущенного оператора не пуст, дискретный спектр бесконечен и имеет хотя бы одну конечную предельную точку.

Пусть функция q суммируема на любом отрезке $[\alpha,\beta]$ из $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяет условиям:

1) $\int_0^1 x|q(x)|dx<\infty$ и $q(x)\to 0$, $x\to+\infty$.

Рассмотрим оператор H, действующий в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ по правилу

$$Hy=-y''+qy,$$
$$D(H)=\{y\in L^2(\mathbb{R}_+):\ y'\in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+),\ -y''+qy\in L^2(\mathbb{R}_+),\ y(0)=0\}.$$

Здесь $AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ — множество функций, абсолютно непрерывных на любом отрезке $[0,\beta],\beta>0$. При выполнении условия 1) H — m-секториальный оператор и $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)=[0,+\infty)$. Кроме существенного спектра, оператор H может иметь конечное или счетное множество собственных значений $\sigma_{\mathrm{disc}}(H):=\{\lambda_k\}_{k=1}^{N}$ $(N\le\infty)$ и спектральных особенностей $\mathfrak{S}:=\{\rho_k\}_{k=1}^{K}$ $(K\le\infty)$, лежащих на полуоси $[0,+\infty)$. При $N=\infty$ $\sigma_{\mathrm{disc}}(H)$ может сгущаться только к $[0,+\infty)$. На функцию q наложим дополнительные ограничения:

2) $\sigma_{\mathrm{disc}}(H)$ бесконечен и имеет хотя бы одну конечную предельную точку;

3) Существуют $R,\delta>0$, такие, что функция xq допускает аналитическое продолжение $z\widetilde{q}(z)$ в сектор $U=\{z:\ |z|<R,\ -\delta<\arg z<0\}$ так, что

$$\sup_{0<\alpha<\delta}\int_0^R x\left|\widetilde{q}\left(xe^{-i\alpha}\right)\right|dx<\infty.$$

Пусть V — оператор умножения на измеримую функцию $V(\cdot)$, удовлетворяющую условиям

$$\operatorname{supp} V\subset[0,R)\quad \text{и}\quad \int_0^R x|V(x)|dx<\infty, \tag{1}$$

где R — постоянная, фигурирующая в условии 3). Введем оператор $T=H+V$, где сумма понимается в смысле квадратичных форм.

Основной результат работы —

Теорема 1. *Пусть функция q удовлетворяет условиям 1) — 3), а функция V — (1). Тогда если $\sigma_{\mathrm{disc}}(T)=\sigma_{\mathrm{disc}}(H)$, то $V=0$ п.в. на $\mathbb{R}_+$.*

Литература

1. *Ambarzumian V.A.* Überline Frage der Eigenwerttheorie // Zs. f. Phys., **53** (1929), 690-695.

2. *Borg G.* Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe Scattering theory // Acta Math., **78** (1946), 1-96.

3. *Horváts M.* On a theorem of Ambarzumyan // Proc. R. Soc. Edinb., **131A** (2001), 899-907.

4. *Ишкин Х.К.* О спектральной неустойчивости оператора Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом // Дифференц. уравнения, **45**:4 (2009), 480-495.

О КОЭФФИЦИЕНТАХ РЕЛЕЯ–ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ РЕГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ АНГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Х.К. Ишкин, Т.Г. Амангильдин
ishkin62@mail.ru, amangildintg@mail.ru

УДК 517.927.25+517.984.5

Выделен класс возмущений комплексного ангармонического осциллятора H, при которых известные формулы для коэффициентов Релея–Шредингера могут быть существенно упрощены. Показано, что если H несамосопряжен и возмущение финитно и имеет конечную гладкость на правом конце своего носителя, то последовательность первых поравок теории возмущений имеет экспоненциальный рост на бесконечности.

Ключевые слова: ангармонический осциллятор, голоморфность в смысле Като, ряд Релея–Шредингера, спектральная неустойчивость, первая поправка теории возмущений.

On the Rayleigh-Schrödinger coefficients for the eigenvalues of regular pertubations of an anharmonic oscillator

We have identified a class of perturbations of the complex anharmonic oscillator H for which the known formulas for the Rayleigh–Schrödinger coefficients can be significantly simplified. We have shown that if H is not self-adjoint and the perturbation is finite and has finite smoothness at the right end of its support, then the sequence of the first order corrections has exponential growth at infinity.

Keywords: anharmonic oscillator, analytic family in the sense of Kato, Rayleigh-Schrödinger series, spectral instability, first order correction in perturbation theory.

Пусть $\alpha > 0, 0 \le \theta < \pi$ и $q_0(x) = e^{i\theta}x^\alpha,\ x \ge 0$. Рассмотрим оператор H, действующий в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ по правилу

$$Hy = hy := -y'' + q_0(x)y,$$

$$D(H) = \{y \in L^2(\mathbb{R}_+):\ y, y' \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+), hy \in L^2(\mathbb{R}_+), y(0) = 0\}.$$

Здесь $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ — множество функций, абсолютно непрерывных на каждом отрезке $[0, b]$ $(b > 0)$. Известно, что спектр оператора H состоит из простых собственных значений λ_n $(n \in \mathbb{N})$, лежащих на луче $\arg \lambda = 2\theta/(2 + \alpha)$.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, согл. №075-02-2024-1444.

Ишкин Хабир Кабирович, д.ф.-м.н., профессор, УУНиТ (Уфа, Россия); Khabir Ishkin (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Амангильдин Тагир Газизович, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Tagir Amangildin (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Введем семейство операторов $L(\beta) = H + \beta V, \quad \beta \in \mathbb{C}$, где V — оператор умножения на измеримую функцию V, удовлетворяющую условиям $V \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}_+), \quad V(x) = o\left(x^{\alpha}\right), x \to +\infty$. Тогда $L(\beta)$ — голоморфное семейство типа (B) [1, Гл. VII, § 4]. Отсюда следует, что при каждом $\sigma(L(\beta)) = \{\lambda_n(\beta)\}$, функция $\lambda_n(\cdot)$ голоморфна в круге $|\beta| < \delta_n$ и разлагается в ряд

$$\lambda_n(\beta) = \lambda_n + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{nj}\beta^j.$$

Коэффициенты $\{\alpha_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$ называются *коэффициентами Релея–Шредингера* для $\lambda_n(\beta)$. Если $\theta = 0$, то для вычисления α_{nj} можно воспользоваться формулой [2, Гл. XII, § 1]:

$$\lambda_n(\beta) = \lambda_n + \beta \frac{\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{nj}\beta^j}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_{nj}\beta^j}, \tag{1}$$

$$a_{nj} = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i} \oint_{\gamma_n} \left(Q_n^{j+1} f_n, f_n\right) d\lambda, \quad b_{nj} = \frac{(-1)^{j+1}}{2\pi i} \oint_{\gamma_n} \frac{\left(Q_n^{j} f_n, f_n\right)}{\lambda_n - \lambda} d\lambda,$$

где $\gamma_n = \{|\lambda - \lambda_n| = \varepsilon_n/2\}, Q_n = (H-\lambda)^{-1/2}V(H-\lambda)^{-1/2}, f_n$ — нормированная собственная функция оператора H, соответствующая λ_n.

Из-за деления ряда на ряд и наличия контурных интегралов окончательная формула для α_{nj} будет иметь весьма громоздкий вид. При $\theta \neq 0$ ситуация усугубляется еще спектральной неустойчивостью H: даже бесконечно дифференцируемые и финитные возмущения могут сильно поменять спектр [3]. С другой стороны, из результатов работы [4] следует, что уравнение

$$-y''(x) + q_0(x)y(x) = \lambda y(x) \tag{2}$$

имеет решение $\varphi_0(x, \lambda)$, которое а) при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит $L^2(\mathbb{R}_+)$, б) при всех $x \in \mathbb{R}_+$ является целой функцией λ.

Поэтому собственные числа оператора H совпадают с нулями целой функции $\Phi_0(\lambda) := \varphi(0, \lambda)$.

В предлагаемой работе показано , что если

$$\int_0^{+\infty} (1 + x^{\alpha/2})^{-1} |V(x)| dx < \infty,$$

то собственными числами оператора $L(\beta)$ служат корни уравнения

$$\Phi_0(\lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k \Phi_k(\lambda) = 0, \tag{3}$$

где Φ_k — явно вычисляемые (в терминах решений уравнения (2)) целые функции λ. Уравнение (3), в отличие от формулы (1), не содержит контурных интегралов. Если известны первые m коэффициентов разложения функций Φ_k $(k = \overline{0,m})$ в точке λ_n, то задача вычисления $\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nm}$ — по существу, машинная.

Вторая часть работы посвящена исследованию следующего вопроса: пусть функция V финитна, квадратично суммируема на своем носителе $[0; a]$ и

$$V(x) = (a-x)^m W(x), \quad a - \delta \leq x \leq a, \tag{4}$$

где $m \geq 0, 0 < \delta < a$, функция W непрерывна на $[a-\delta, a]$ и $W(a) \neq 0$. Как себя ведет последовательность $\{\alpha_{n1}\}_{n=1}^{\infty}$ (первых поправок теории возмущений) при $n \to +\infty$?

При $\theta = 0$ оператор H самосопряжен и положителен. Отсюда в силу компактности оператора $H^{-1/2} V H^{-1/2}$ на основании теоремы Келдыша следует, что $\alpha_{n1} = o\left(n^{2\alpha/(2+\alpha)}\right)$, $n \to +\infty$.

С другой стороны, при $0 < \theta < \pi$ в спектре оператора $H + V$ может появиться серия, локализованная около луча $\arg\lambda = 0$, даже если функция V финитна и бесконечно дифференцируема [3, Теорема 4]. Поэтому естественно ожидать, что при $\theta \neq 0$ последовательность $\{\alpha_{n1}\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена. Если это так, то возникает вопрос: какова скорость роста α_{n1}? может ли она расти быстрее, чем λ_n?

Нами доказано, что при каждом $0 < \theta < \pi$ и любых возмущениях вида (4) последовательность $\{\alpha_{n1}\}_{n=1}^{\infty}$ имеет экспоненциальный рост.

Литература

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.

2. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. — М.: Мир, 1982.

3. *Ишкин Х.К.* О спектральной неустойчивости оператора Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом // Дифференц. уравнения, **45**:4 (2009), 480-495.

4. *Ишкин Х.К.* Спектральные свойства несекториального оператора Штурма–Лиувилля на полуоси // Матем. заметки, **113** (2023), 693-712.

ОБ УСЛОВИЯХ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА КРИВОЙ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Х.К. Ишкин,
М.О. Мустафина, ishkin62@mail.ru

УДК 517.984 + 517.928

Для оператора, порожденного дифференциальным выражением второго порядка на кривой с ограниченным наклоном и интегральными краевыми условиями, получены условия полноты и неполноты системы корневых функций.

Ключевые слова: Оператор Штурма–Лиувилля на кривой, интегральные краевые условия, спектральная неустойчивость, полнота системы корневых функций.

On conditions for the completeness of the root functions system of a differential operator on a curve with integral boundary conditions

We have obtained conditions for the completeness and incompleteness of root functions system of the operator generated by a second-order differential expression on a curve with a bounded slope and integral boundary conditions.

Keywords: Sturm–Liouville operator on a curve, integral boundary conditions, spectral instability, completeness of the root functions system.

Пусть L — оператор, действующий в $L_2(0,1)$ по правилу

$$Ly = l(y) := -y'' + qy,$$
$$D(L) = D := \{y \in L_2(0,1): \ y, y' \in AC(0,1), l(y) \in L_2(0,1)\},$$

L_U — сужение L на

$$D_U := \{y \in D: \quad U_j(y) = 0, \ U_j(y) = y^{(j-1)}(0) - \langle l(y), \sigma_j\rangle (j = 1,2)\}. \quad (1)$$

Здесь $\langle f, g\rangle = \int\limits_0^1 fg dz$, σ_1, σ_2 — некоторые функции из $L_2(0,1)$. Интегральные условия в (1) дают полное описание всех сужений оператора

Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, согл. №075-02-2024-1444.

Ишкин Хабир Кабирович, д.ф.-м.н., профессор, УУНиТ (Уфа, Россия); Khabir Ishkin (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Мустафина Мергуль Оралбековна, докторант, ВКУ им. С. Аманжолова (Усть-Каменогорск, Казахстан); Mergul Mustafina (S. Amanzholov East Kazakhstan University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan)

L, имеющих непустое резольвентное множество [1]. Из доказательства Теоремы 2 из [1] видно, что оператор L_U^{-1} компактен, $\sigma(L_U) = \{\lambda_k^2\}$, где $\{\lambda_k\}$ — нули целой функции

$$\Delta(\lambda) = \det \|U_j(\varphi_k)\|_{j,\nu=1}^2,$$

$\varphi_\nu(z, \lambda)$ $(\nu = 1, 2)$ — какая-либо фундаментальная система решений (ФСР) уравнения $l(y) = \lambda^2 y$.

В работе [2] доказана полнота системы корневых функций (СКФ) оператора L_U в предположении, что

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{-2} \int_0^\varepsilon \int_{1-\varepsilon}^1 (\sigma_1(y)\sigma_2(x) - \sigma_2(y)\sigma_1(x))\, dydx \neq 0, \tag{2}$$

$$|\Delta(\lambda)| \geq C|\lambda| \ln(1 + |\lambda|) e^{|\mathrm{Im}\lambda|}, \qquad C = \mathrm{const} > 0. \tag{3}$$

Условия типа (2), (3) возникают при установлении различных спектральных свойств операторов вида L_U (см. [3] и имеющиеся там ссылки).

В связи с этим возникает вопрос: насколько условия (2), (3) необходимы, например, для полноты СКФ оператора L_U?

Рассмотрим сначала случай $q = 0$. Имеем

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 \int_0^1 \sin \lambda x A(x) dx - \lambda^2 A(0) + 1,$$

$$A(x) = \int_x^1 [\sigma_1(t)\sigma_2(t-x) - \sigma_2(t)\sigma_1(t-x) + \sigma_1(t) + (t-x)\sigma_2(t)]\, dt.$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть существуют лучи $P_k = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \arg\lambda = \alpha_k,\ |\lambda| \geq R\}$ $(-\pi/2 < \alpha_1 < 0 < \alpha_2 < \pi,\ R > 0)$, на которых выполняется оценка*

$$|\Delta(\lambda)| \geq C|\lambda|^{-m} e^{|\mathrm{Im}\lambda|}, \quad m < 3/2, \tag{4}$$

где C, δ — положительные постоянные. Тогда СКФ оператора L_U полна в $L_2(0, 1)$.

Пусть $A \in W_2^3[0, 1]$ и в некоторой полуокрестности точки 1 справедливо представление

$$A'''(x) = B(x)(1 - x)^\gamma, \tag{5}$$

где $0 < \gamma \leq 1$, $B(1 - 0)$ существует, конечен и не равен 0. Если $\gamma < 1/2$, то оценка (4) верна, так что СКФ L_U полна в $L_2(0, 1)$.

Теорема 2. *Пусть $A \in W_2^3[0, 1]$, представление (5) верно при $\delta = 1/2$. Тогда если $A(1) = A'(1) = A''(1) = 0$ и $A''(0) = 1$, то СКФ оператора L_U не полна $L_2(0, 1)$.*

Аналогичные утверждения верны и в случае, когда q — произвольная суммируемая функция.

Литература

1. *Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н.* К вопросам расширения и сужения операторов // Докл. АН СССР, **271**:6 (1983), 1307-1310.

2. *Кангужин Б.Е., Токмагамбетов Н.Е.* О полноте системы корневых функций обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с интегральными краевыми условиями // Вестник КазНУ, **81**:2 (2014), 72-87.

3. *Даровская К.А., Скубачевский А.Л.* Об одной спектральной задаче с интегральными условиями // Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **28**, 2011, 147-160.

DELTA-SHAPED PERTURBATIONS OF THE LAPLACE-BELTRAMI OPERATOR ON A SHERE WITH CUTS

B. Kanguzhin, K. Dosmagulova
kanbalta@mail.ru, karlygash.dosmagulova@gmail.com

УДК 517.958,519.2

In a Hilbert space H with a scalar product $\langle .,. \rangle andanorm, \| \cdot \|_0$ we consider

a closed linear operator B with domain $D(B)$ dense in H. We assume that

$$\operatorname{Ker} B \neq \{0\}, \operatorname{Ran}(B) = H \text{ u } \dim \operatorname{Ker} B = m < \infty$$

On the domain of definition $D(B)$ we define an additional norm $\| \cdot \|_1$ and $D(B)$ denote the closure with respect to this norm by W. We assume that the additional norm $\| \cdot \|_1$ is stronger than the original norm $\| \cdot \|_0$, that is, $\forall x \in D(B) \subset H$ the inequality is satisfied $\|x\|_0 \leq C\|x\|_1$. It is clear that the embedding is satisfied $W \subset H$. In the dual space W^* we choose a system of m linearly independent functionals $U_1, \ldots, U_m$. Then there is [1] a unique system of elements $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_2\}$ from $\operatorname{Ker} B$, subject to conditions $\langle U_t; \varphi_r \rangle = \delta_{tz}, t, z = 1, 2, .., m$ where $\langle U_t; \varphi_r \rangle$-denotes the value of the functional U_t on the element φ_r, and δ_{tz}-the Kronecker symbol.

Let be Λ_0 - an invertible restriction of the operator B. We define the operator Λ by the formula $\Lambda u = Bu$ on the domain of definition $D(\Lambda) = \left\{ u \in D(B) : u = \Lambda_0^{-1} f - \sum_{s=1}^{m} \varphi_s \cdot U_s \left(\Lambda_0^{-1} f \right), \forall f \in H \right\}$

Theorem 1. The operator Λ - is an invertible operator, and

$$\Lambda^{-1} f = \Lambda_0^{-1} f - \sum_{s=1}^{m} \varphi_s \cdot U_s \left(\Lambda_0^{-1} f \right), \forall f \in H$$

$$(\Lambda - \lambda I)^{-1} f = (\Lambda_0 - \lambda I)^{-1} f - \sum_{s=1}^{m} \Lambda(\Lambda - \lambda I)^{-1} \varphi_s U_s \left((\Lambda_0 - \lambda I)^{-1} f \right)$$

The second generalized Hilbert identity for resolvents : $D(\Lambda) \neq D(\Lambda_0)$.

References

1. *Vishik MI* On strongly elliptic systems of differential equations, Mat. Sat. 29 (71) (1951), 615-676.

This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP22685565).

Kanguzhin Baltabek, Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan), Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

Dosmagulova Karlygash, Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan), Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

2. *Hromov AP* Finite-dimensional perturbations of Volterra operators, Contemp. Math. fund. Direct., 10, 3-163 (2004).

3. *Kanguzhin BE, Aniyarov AA* Well-posed problems for the Laplace operator in a punctured disk. Mathematical Notes, 2011, 89(5), 819-829.

ВАРИАНТЫ МЕТОДА И.М.ВИНОГРАДОВА В ЧИСЛОВОМ ПОЛЕ

Д.Дж. Каримзода
khdj.91@mail.ru

УДК 517.958,519.2

В данной работе получен аналог тождества Вона в числовом поле.

Ключевые слова: характер Гекке, тождественно Вона, числовом поле, методы И.М. Виноградова.

Variants of I.M. Vinogradov's method in a numerical field

In this work, an analogue of the Vaughan identity in a number field is obtained.

Keywords: Hecke character, Vaughan identity, numerical field, I.M. Vinogradov methods.

В теории алгебраических чисел используют следующие определения. Пусть степень расширения $K/\mathbb{Q}$ есть $[K:\mathbb{Q}]=n=r_1+2r_2$ так, что $K^{(1)},\dots,K^{(r_1)}$ являются вещественно-сопряжёнными полями для K и $K^{(r_1+j)}$ есть комплексно-сопряжённое поле для $K^{(r_1+r_2+j)}$, где $1\le j\le r_2$. Всякая нетривиальная метрика (топологическое нормирование) поля K имеет либо вид

$$|\xi|_{\mathfrak{p}}=\varrho^{ord_{\mathfrak{p}}\xi}\quad (\xi\in K,\quad 0<\varrho<1,\quad \text{неархимедовый случай}),$$

либо вид

$$|\xi|_{\sigma}=|\sigma(\xi)|^{\varrho}\quad (\xi\in K,\quad 0<\varrho\le 1,\quad \text{архимедовый случай}),$$

где $\sigma:K\to\mathbb{C}$ – одно из r_1+r_2 алгебраических сопряжений. Внеархимедовом случае существует взаимно-однозначное соответствие между класами эквивалентных неархимедовых нормирований и простыми идеалами кольца $\mathbb{Z}_K$. Для конечного расширения $K/\mathbb{Q}$ формально записывают разложение бесконечного простого дивизора ∞ поля $\mathbb{Q}$ как

$$\infty=\infty_1\infty_2\dots\infty_{r_1}\infty_{r_1+1}^2\dots\infty_{r_1+r_2}^2,$$

где плейсы $\infty_1,\infty_2,\dots,\infty_{r_1}$ соответствуют вещественным вложениям $K^{(1)},\dots,K^{(r_1)}$ и $\infty_{r_1+j}=\infty_{r_1+r_2+j}$, $(1\le j\le r_2)$ соответствуют комплексно-сопряжённым парам полей $K^{(r_1+j)}$, $K^{(r_1+r_2+j)}$ при комплексных вложениях. Для пополненного простого спектра $\mathbb{M}=\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}_K\cup\{\infty_1,\dots\infty_{r_1+r_2}\}$ кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_K$, состоящего из всех конечных ненулевых простых идеалов и бесконечных нормирований, строится коммутативная *лучевая полугруппа идеалов* (с единицей 1) следующего вида:

$$\widetilde{\mathbb{M}}=\langle\mathbb{M}:\ \infty_j^2=\infty_j\ (K^{(j)}\ \text{вещественное}),\ \infty_j=1\ (K^{(j)}\ \text{комплексное})\rangle,$$

Каримзода Дониер, Джалилович, Таджикский национальный университет

которая свободно порождается конечными (то есть неархимедовыми) ненулевыми простыми идеалами и имеет указанные соотношения для бесконечных (то есть архимедовых) идеалов. Для чисел α, β кольца $\mathbb{Z}_K$ символ

$$\frac{\alpha}{\beta} \equiv 1 \ (mod^{\times} \ \widetilde{\mathfrak{m}})$$

означает выполнение следующих трёх условий (1) $(\alpha\beta, \mathfrak{m}) = 1$, (2) $\alpha \equiv \beta \ (mod\, \mathfrak{m})$ и (3) совпадение знаков числителя и знаменателя при сопряжениях: $\frac{\alpha^{(j)}}{\beta^{(j)}} > 0$ для вещественных плейсов $\infty_j | \mathfrak{m}_\infty$. Эти определения используется в следующих теоремах.

Теорема. (*тождество Вона) Пусть $\mathbb{P}$ система всех простых попарно неассоциированных чисел в числовом кольце $\mathbb{Z}_K$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{P}$ некоторое непустое множество, $f : \langle \mathbb{I} \rangle \to \mathbb{C}$ произвольная комплекснозначная функция, $W : \langle \mathbb{I} \rangle \to \mathbb{Z}_K$ любое вполне мультипликативное отображение. Если $\mathfrak{m}$ некоторый идеал в $\mathbb{Z}_K$, а целое алгебраическое число λ с $\mathfrak{m}$ взаимно просто, тогда для произвольных фиксированных положительных вещественных чисел $u, x \in \mathbb{R}_{>0}$, $u < x$ имеет место формула:*

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\beta \in \langle \mathbb{I} \rangle, \ u < |N\beta| \le x \\ W(\beta) \equiv \lambda \ (mod \ \mathfrak{m})}} \Lambda_{\mathbb{I}}(\beta) f(\beta) &= \sum_{\substack{\eta \in \langle \mathbb{I} \rangle \\ |N\eta| \le u}} \mu_{\mathbb{I}}(\eta) \sum_{\substack{\xi \in \langle \mathbb{I} \rangle, \ |N\xi| \le \frac{x}{|N\eta|} \\ W(\xi\eta) \equiv \lambda \ (mod \ \mathfrak{m})}} f(\xi\eta) \log |N\xi| \\ &- \sum_{\substack{\eta \in \langle \mathbb{I} \rangle \\ |N\eta| \le u}} \mu_{\mathbb{I}}(\eta) \sum_{\substack{\beta \in \langle \mathbb{I} \rangle \\ |N\beta| \le u}} \Lambda_{\mathbb{I}}(\beta) \sum_{\substack{\gamma \in \langle \mathbb{I} \rangle, \ |N\gamma| \le \frac{x}{|N\eta\beta|} \\ W(\eta\beta\gamma) \equiv \lambda \ (mod \ \mathfrak{m})}} f(\eta\beta\gamma) \\ &- \sum_{\substack{\alpha \in \langle \mathbb{I} \rangle \\ u < |N\alpha| \le \frac{x}{u}}} \sum_{\substack{\eta |_{\mathbb{I}} \alpha \\ |N\eta| \le u}} \mu_{\mathbb{I}}(\eta) \sum_{\substack{\beta \in \langle \mathbb{I} \rangle, \ u < |N\beta| \le \frac{x}{|N\alpha|} \\ W(\alpha\beta) \equiv \lambda \ (mod \ \mathfrak{m})}} \Lambda_{\mathbb{I}}(\beta) f(\alpha\beta).\end{aligned}$$

Литература

1. *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. - М.: Наука, 1983

2. *Панов В.М.* Оценка суммы степенных вычетов в круговом поле // Докл. АН РТ, 2007, т. 51, 11–12, с. 4–16.

3. *Рахмонов З.Х., Хокиев Д.Дж* Об оценке суммы характеров с простыми числами — Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2018. Т.-61. №1. с. 5-11

ОБ ОДНОМ ТИПЕ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ СПЕКТРА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

В.И. Качалов, Д.А. Маслов
vikachalov@rambler.ru, maslovdma@mpei.ru

УДК 517.956

В данной работе найдены условия обычной сходимости рядов по степеням малого параметра, представляющие решения одного типа нелинейных задач на собственные значения.

Ключевые слова: регулярное возмущение, возмущение спектра, голоморфные семейства операторов.

About one nonlinear perturbation type of the linear operator spectrum

In this paper, the conditions for the usual sense convergence of series in powers of a small parameter representing solutions of one nonlinear eigenvalue problems are obtained.

Keywords: regular perturbation, spectrum perturbation, holomorphic families of operators.

Будем изучать слабо нелинейную задачу на собственные значения и собственные векторы в банаховом пространстве E

$$Au + \varepsilon B(u, u) = \lambda u, \tag{1}$$

причем выполнены следующие условия:
1°. A — неограниченный замкнутый оператор с областью определения D_A, имеющий непрерывный обратный A^{-1}.
2°. $B(u, v) : E \times E \to E$ — билинейный ограниченный оператор.
3°. Оператор A обладает системой нормированных собственных векторов $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots\}$, образующих базис в D_A; $\{\lambda_1, \lambda_2 \dots\}$ — соответствующие собственные значения; $\mathcal{B}^* = \{b_1^*, b_2^*, \dots\} \subset E^*$ — биортогонально сопряженная к $\mathcal{B}$ система и $\|b_m^*\| = \beta_m^*$, $m = 1, 2, \dots$.
4°. Обозначим через $\{E_m\}_{m=1}^\infty$ набор одномерных подпространств, натянутых на собственные векторы. Оператор $A - \lambda_m I$, где I — тождественный оператор, непрерывно обратим на пространстве $E \backslash E_m$ и нормы $\{\|(A - \lambda_m I)^{-1}_{E \backslash E_m}\|\}_{m=1}^\infty$ ограничены в совокупности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-21-00496).

Качалов Василий Иванович, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой, НИУ МЭИ (Москва, Россия); Vasiliy Kachalov (National Research University MPEI, Moscow, Russia)

Маслов Дмитрий Александрович, к.т.н., доцент, НИУ МЭИ (Москва, Россия); Dmitry Maslov (National Research University MPEI, Moscow, Russia)

Будем искать «собственные векторы» и «собственные значения» задачи (1) в виде рядов по степеням ε:

$$u_m = u_{0,m} + \varepsilon u_{1,m} + \cdots + \varepsilon^n u_{n,m} + \ldots, \tag{2}$$

$$\lambda_m = \lambda_{0,m} + \varepsilon\lambda_{1,m} + \cdots + \varepsilon^n \lambda_{n,m} + \ldots, \tag{3}$$

$m = 1, 2, \ldots$. В соответствии с методом неопределенных коэффициентов имеем серию задач:

$$\begin{aligned}
&Au_{0,m} = \lambda_{0,m}u_{0,m},\\
&Au_{1,m} + B(u_{0,m}, u_{0,m}) = \lambda_{0,m}u_{1,m} + \lambda_{1,m}u_{0,m},\\
&Au_{2,m} + B(u_{0,m}, u_{1,m}) + B(u_{1,m}, u_{0,m}) =\\
&\qquad\qquad = \lambda_{0,m}u_{2,m} + \lambda_{1,m}u_{1,m} + \lambda_{2,m}u_{0,m},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&Au_{n,m} + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} B(u_{k,m}, u_{n-k-1,m}) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,m}u_{n-k,m},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Действуя так же, как и в линейной теории регулярных возмущений [1], последовательно определяются коэффициенты рядов (2), (3).

Теорема 1. *При выполнении условий* 1°–4° *задача* (1) *обладает собственными значениями и собственными векторами, голоморфными в точке* $\varepsilon = 0$.

Рассмотрим случай неограниченной билинейной части: будем изучать в банаховом пространстве E задачу на собственные значения и собственные векторы

$$Au + \varepsilon B(u, Hu) = \lambda u, \tag{4}$$

в которой операторы A и B те же, что и в уравнении (1), а оператор H — неограниченный замкнутый, с областью определения D_H. Как и ранее, будем искать решение задачи (4) в виде рядов (2), (3).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1°–4° *и* $D_A \subset D_H$. *Тогда собственные значения и собственные векторы задачи (4) голоморфны в точке* $\varepsilon = 0$.

Литература

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: Т. 4. Анализ операторов. Пер. с англ. — Москва: Мир, 1982.

О ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ С ДВУМЯ ЗАМОРОЖЕННЫМИ АРГУМЕНТАМИ ПО ДВУМ СПЕКТРАМ

М.А. Кузнецова
kuznetsovama@sgu.ru

УДК 517.984

Изучается уравнение Штурма–Лиувилля с двумя замороженными аргументами. Получены асимптотические формулы для спектров двух краевых задач с одним общим краевым условием. Исследована обратная задача восстановления двух коэффициентов при членах с замороженными аргументами по двум спектрам. Установлено, что в общем случае решение этой задачи не единственно.

Ключевые слова: замороженный аргумент, асимптотики собственных значений, обратная спектральная задача.

On the problem of recovering operators with two frozen arguments by two spectra

We study Sturm–Liouville equation with two frozen arguments. For the spectra of two boundary value problems with one common boundary condition, asymptotic formulae are obtained. We investigate an inverse problem of recovering two coefficients at the terms with frozen arguments by the two spectra. The result is that in a general case, the problem solution is not unique.

Keywords: frozen argument, eigenvalues asymptotics, inverse spectral problem.

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка с двумя замороженными аргументами:

$$-y''(x) + p(x)y(a) + q(x)y(b) = \lambda y(x), \quad x \in (0, \pi), \tag{1}$$

где a и b фиксированы, при этом $0 < a < b < \pi$. Функции $p, q \in L_2(0, \pi)$ предполагаются комплекснозначными, $y \in W_2^2[0, \pi]$.

При $j = 0, 1$ обозначим через $\mathcal{L}_j(p, q)$ краевую задачу для уравнения (1) с краевыми условиями

$$y(0) = y(\pi) = 0, \ j = 0; \quad y'(0) = y(\pi) = 0, \ j = 1.$$

Теорема 1. *При $j = 0, 1$ собственные значения $\{\lambda_{nj}\}_{n\ge1}$ краевой задачи $\mathcal{L}_j(p, q)$ удовлетворяют асимптотическим формулам*

$$\lambda_{nj} = \Big(n - \frac{j}{2}\Big)^2 + \varkappa_{nj}, \quad n \ge 1, \quad \{\varkappa_{nj}\}_{n\ge1} \in \ell^2.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-71-10003)

Кузнецова Мария Андреевна, к.ф.-м.н., СГУ (Саратов, Россия); Maria Kuznetsova (Saratov State University, Saratov, Russia).

При $j = 0, 1$ назовем множество собственных значений $\{\lambda_{nj}\}_{n\geq 1}$ спектром задачи $\mathcal{L}_j(p, q)$. Обратная задача восстановления q по одному спектру при $p = 0$ исследовалась ранее, см. [1–2]. В ряде случаев одного спектра достаточно для нахождения одного коэффициента q (например, если $b/\pi \notin \mathbb{Q}$). Рассмотрим задачу восстановления двух коэффициентов по двум спектрам:

Обратная задача 1. Заданы $\{\lambda_{n0}\}_{n\geq 1}$ и $\{\lambda_{n1}\}_{n\geq 1}$; найти p и q.

Установлено, что без дополнительных условий на p и q эта обратная задача не имеет единственного решения. Для любых $0 < a < b < \pi$ был построен пример различных пар (p, q), приводящих к одним и тем же спектрам $\{\lambda_{n0}\}_{n\geq 1}$ и $\{\lambda_{n1}\}_{n\geq 1}$.

Пусть $T = \min\{a, b - a, \pi - b\}$ и $G \in L_2(-T, T)$ — любая четная функция. При $t \in [0, \pi]$ определим

$$s(t) = \begin{cases} G(b - t), & t \in (b - T, b + T), \\ 0, & t \notin (b - T, b + T), \end{cases}$$

$$r(t) = \begin{cases} -G(a - t), & t \in (a - T, a + T), \\ 0, & t \notin (a - T, a + T). \end{cases}$$

Теорема 2. *Пары краевых задач* $\Big(\mathcal{L}_0(-r, s + r), \mathcal{L}_1(-r, s + r)\Big)$ *и* $\Big(\mathcal{L}_0(-s - r, s), \mathcal{L}_1(-s - r, s)\Big)$ *имеют одинаковые пары спектров* $\Big(\{\lambda_{n0}\}_{n\geq 1}, \{\lambda_{n1}\}_{n\geq 1}\Big)$.

Литература

1. *Kuznetsova M.* Uniform stability of recovering Sturm–Liouville-type operators with frozen argument // Results Math, **78**:5 (2023), article 169.

2. *Кузнецова М.А.* Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля с замороженным аргументом на временной шкале // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры, **208** (2022), С. 49–62.

ОБ ОПЕРАТОРЕ ДИРАКА С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.С. Макин
alexmakin@yandex.ru

УДК 517.984.52

В настоящей работе изучаются базисные свойства системы корневых функций оператора Дирака с нерегулярными краевыми условиями.

Ключевые слова: оператор Дирака, нерегулярные краевые условия, полнота и базисность системы корневых функций.

On Dirac operator with irregular boundary conditions

The paper is concerned with the basis properties of root function systems of the Dirac operator with irregular boundary conditions.

Keywords: Dirac operator, irregular boundary conditions, completeness and basis property of root function systems.

В настоящей работе изучается система Дирака

$$By' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{1}$$

где $\mathbf{y} = \mathrm{col}(y_1(x), y_2(x))$,

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & P(x) \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix},$$

комплекснозначные функции $P, Q \in L_1(0,\pi)$, с двухточечными краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{y}) &= a_{11}y_1(0) + a_{12}y_2(0) + a_{13}y_1(\pi) + a_{14}y_2(\pi) = 0, \\ U_2(\mathbf{y}) &= a_{21}y_1(0) + a_{22}y_2(0) + a_{23}y_1(\pi) + a_{24}y_2(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где коэффициенты a_{jk} – произвольные комплексные числа, а строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы.

Оператор $\mathbb{L}\mathbf{y} = B\mathbf{y}' + V\mathbf{y}$ является линейным оператором в пространстве $\mathbb{H} = L_2(0,\pi) \oplus L_2(0,\pi)$ с областью определениян $D(\mathbb{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi] \oplus W_1^1[0,\pi] : \mathbb{L}\mathbf{y} \in \mathbb{H}, U_j(\mathbf{y}) = 0 \ (j = 1,2)\}$.

Обозначим через A_{jk} $(1 \le j < k \le 4)$ определитель, составленный из j-го и k-го столбцов матрицы A.

Краевые условия (2) могут быть разделены на 4 основных типа:

Макин Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, ИПММ (Донецк, Россия); Alexander Makin (Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk, Russia)

1) усиленно регулярные, 2) регулярные, но не усиленно регулярные, 3) нерегулярные, 4) вырожденные.

Краевые условия (2) называются нерегулярными, если

$$A_{14}A_{23} = 0, \quad (A_{12} + A_{34})(|A_{23}| + |A_{14}|) \neq 0. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть все собственные значения задачи (1), (2), (3) лежат внутри полосы*

$$|\mathrm{Im}\lambda| \leq M. \tag{4}$$

Тогда система корневых функций задачи (1), (2), (3) образует безусловный базис в замыкании своей линейной оболочки.

Теорема 2. *Если спектр задачи (1), (2), (3) удовлетворяет условию (4), а потенциал $V \in L_2(0,\pi)$, то система корневых функций рассматриваемого оператора неполна в пространстве $\mathbb{H}$.*

Существование задач (1), (2), (3) с потенциалами $V \in L_2(0,\pi)$ ($V \not\equiv 0$), спектр которых удовлетворяет условию (4), установлено в [1].

Неполнота системы корневых функций невозмущенной задачи

$$B\mathbf{y}' = \lambda\mathbf{y}, \quad U(\mathbf{y}) = 0$$

с краевыми условиями, не являющимися регулярными, была аннонсирована в [2]. В работах [3 -5] А.В. Агибалова, А.А. Лунев, М.М. Маламуд и Л.Л. Оридорога получили ряд результатов о неполноте системы корневых векторов оператора Дирака (1), (2) и гораздо более общих систем дифференциальных уравнений первого порядка при наложении некоторых условий на потенциал V.

Литература

1. *Макин А.С.* О спектре несамосопряженного оператора Дирака с двухточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения, **60**:2 (2024), 157-174.

2. *Марченко В.А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.

3. *Lunyov A.A., Malamud M.M.* On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications // J. Spectr. Theory, **5**:1 (2015), 17-70.

4. *Malamud M.M., Oridoroga L.L.* On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations // J. Funct. Anal., **263**:7 (2012), 1939-1980.

5. *Agibalova A.V., Malamud M.M., Oridoroga L.L.* On the completeness of general boundary value problems for 2×2 first order systems of ordinary differential equations // Methods Funct. Anal. Topol., **18**:1 (2012), 4-18.

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ – РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

К.А. Мирзоев, Н.Н. Конечная
mirzoev.karahan@mail.ru, n.konechnaya@narfu.ru

УДК 517.928

Доклад посвящен нахождению главного члена асимптотики решений одного класса линейных дифференциальных уравнений нечетного порядка вида $l_{2n+1}(y) = \lambda y$ с коэффициентами – распределениями, где λ – фиксированное комплексное число, на бесконечности.

Ключевые слова: дифференциальные выражения с коэффициентами – распределениями, асимптотика решений дифференциальных уравнений.

On the asymptotics of solutions to one class of linear differential equations with distribution coefficients

The report is devoted to finding the main term of the asymptotics of solutions to one class of linear differential equations of odd order of the type $l_{2n+1}(y) = \lambda y$ with distribution coefficients, where λ is a fixed complex number, at infinity.

Keywords: differential expressions with distribution coefficients, asymptotic behavior of solutions of differential equations.

Пусть комплекснозначные функции $p_0, p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n$, принадлежат пространству $L^1_{loc}[1, +\infty)$, а комплекснозначная функция q_0 такая, что $q_0 \in AC_{loc}[1, +\infty)$, $Re\, q_0 > 0$.

В докладе, следуя работе [1], будет представлена конструкция, позволяющая при выполнении этого условия определить, в каком смысле следует трактовать дифференциальное уравнение вида

$$l_{2n+1}(y) := (-1)^n i\{(q_0 y^{(n+1)})^{(n)} + (q_0 y^{(n)})^{(n+1)}\} + \\ + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} (p_k^{(k)} y^{(n-k)})^{(n-k)} + \\ + i \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k+1} \{(q_k^{(k-1)} y^{(n+1-k)})^{(n-k)} + (q_k^{(k-1)} y^{(n-k)})^{(n+1-k)}\} = \lambda y, \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20261).

Мирзоев Карахан Агахан оглы, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики (Москва, Россия); Karakhan Mirzoev (Moscow State University, Moscow Center of fundamental and applied mathematics, Russia)

Конечная Наталья Николаевна, к.ф.-м.н., доцент, САФУ имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия); Natalia Konechnaya (Northern (Arctic) Federal University, Arkhangelsk, Russia)

где λ — фиксированный комплексный параметр, а все производные понимаются в смысле теории распределений. Далее, используя эту конструкцию и накладывая дополнительные ограничения на коэффициенты уравнения (1), будет найден главный член асимптотики при $x \to +\infty$ некоторой фундаментальной системы решений этого уравнения.

Пусть число $\nu > 0$, комплексные числа $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ и комплекснозначные функции $r_0, r_1, \ldots, r_n, s_0, s_1, \ldots, s_n$ такие, что $b_0 > 0$ и при всех $x \geq 1$ функции $p_0, p_1, ..., p_n, q_0, ..., q_n$, определяются равенствами

$$p_0(x) := x^{2n+\nu}(a_0 + r_0(x));$$

$$p_k(x) := x^{2n+\nu-k}\left((a_k / \prod_{j=0}^{k-1}(2n+\nu-k-j)) + r_k(x)\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

$$q_0(x) := b_0 x^{2n+\nu+1}/(1+s_0(x))^2; \qquad q_1(x) := x^{2n+\nu-1}(b_1 + s_1(x));$$

$$q_k(x) := x^{2n+\nu-k}\left((b_k / \prod_{j=0}^{k-2}(2n+\nu-k-j)) + s_k(x)\right), \quad k = 2, 3 \ldots, n.$$

В докладе будет изложено доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Пусть*

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(\ln x)^{m-1}}{x}(1+|s_0(x)|)\left(|r_j(x)| + |s_j(x)| + |r_0(x)\, s_0(x)|\right) \in L^1[1, +\infty),$$

где m — наибольшее из чисел, равных кратностям корней многочлена

$$\mathfrak{F}_{2n+1}(z,\nu) = (-1)^n a_n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k} a_{n-k} \prod_{j=0}^{k-1}\Big[\Big(z+\frac{\nu}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{\nu+1}{2}+j\Big)^2\Big] -$$
$$-2i\Big(z+\frac{\nu}{2}\Big)\Big((-1)^n b_n + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k} b_{n-k} \prod_{j=0}^{k-1}\Big[\Big(z+\frac{\nu}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{\nu+1}{2}+j\Big)^2\Big]\Big) +$$
$$+ 2ib_0\Big(z+\frac{\nu}{2}\Big) \prod_{j=0}^{n-1}\Big[\Big(z+\frac{\nu}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{\nu+1}{2}+j\Big)^2\Big].$$

Тогда уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $\{y_j\}_{j=1}^{2n+1}$ такую, что если z_1 — корень многочлена $\mathfrak{F}_{2n+1}(z,\nu)$ кратности $l_1 \leqslant m$, то ему соответствует подсистема решений $\{y_j\}_{j=1}^{l_1}$ вида

$$y_j(x) = x^{z_1 - 1/2}\,(\ln x)^{j-1}\,(c + o(1)),$$

где $c \neq 0$ — некоторое комплексное число. Такую же асимптотику имеет и другая подсистема решений $\{y_j\}$, $j = l_1 + 1, \ldots l_1 + l_2$, отвечающая корню z_2 многочлена $\mathfrak{F}_{2n+1}(z,\nu)$ кратности l_2 и т.д.

Аналогичная теорема справедлива и для дифференциальных уравнений четного порядка. Отметим также, что частные случаи теоремы 1, а именно для двучленных дифференциальных уравнений четного и нечетного порядков, были доказаны в работах [2] и [3] соответственно.

Литература

1. *Mirzoev K. A., Shkalikov A. A.* Odinary differential operators of odd order with distribution coefficients // arXiv:1912.03660v2 [math.CA], 10 Dec 2019

2. *Конечная Н.Н., Мирзоев К.,А., Шкаликов А.А.* Об асимптотике решений двучленных дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами // Математические заметки, **113**:2 (2023), 217-235

3. *Конечная Н.Н., Мирзоев К.А.* Об асимптотике решений линейных дифференциальных уравнений нечетного порядка // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика, **1**:1 (2020), 23-28

ОБ АСИМПТОТИКАХ РЕШЕНИЙ ВЕКТОРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

О.В. Мякинова ,
MyakinovaOV@gmail.com

УДК 517.98

В работе изучаются асимптотики решений при $x \to +\infty$ векторного уравнения Штурма-Ливилля с быстро осциллирующими элементами потенциальной матрицы в случае быстрого вращения ее собственных векторов.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, спектральная теория, асимптотики.

On the asymptotics of solving the Sturm-Liouville vector equation with rapidly oscillating coefficients

The paper studies the asymptotics of solutions for $x \to +\infty$ of the Sturm-Liouville vector equation with rapidly oscillating coefficients of a potential matrix in the case of rapid rotation of its eigenvectors.

Keywords: differential equations, spectral theory, asymptotics.

Рассматривается уравнение

$$\vec{y}^{''} + Q(x)\vec{y} = \lambda\vec{y}, \tag{1}$$

где $\vec{y} = (y_1(x), y_2(x))$, $0 < x < \infty$.

Пусть $Q(x)$ - вещественная симметрическая матрица, собственные значения которой $|\mu_i(x)| \to \infty$, при $x \to +\infty$.

Пусть матрица $S(x)$ приводит $Q(x)$ к диагональному виду:

$$S^{-1}QS = \begin{pmatrix} \mu_1(x) & 0 \\ 0 & \mu_1(x) \end{pmatrix}$$

Будем искать решение уравнения (1) при $x \to +\infty$ для случая так называемого «быстрого вращения» собственных векторов $Q(x)$ (см. [1]).

В сообщении будет рассмотрен случай, когда асимптотики решений уравнения (1) зависят не только от матриц $S(x)$, $\begin{pmatrix} \mu_1(x) & 0 \\ 0 & \mu_1(x) \end{pmatrix}$, но и элементов $S^{-1}S'$.

Мякинова Ольга Владимировна, к.ф.-м.н., доцент УУНиТ (Уфа, Россия); Olga Myakinova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Литература

1. *Р. С. Исмагилов, А. Г. Костюченко* Об асимптотике спектра неполуограниченного векторного оператора Штурма–Лиувилля// Функц. анализ и его прил., **42**:2 (2008), 11-22

2. *Я. Т. Султанаев* Об асимптотике спектра дифференциального оператора в пространстве вектор-функций// Дифференц. уравнения, **10**:9 (1974), 1673–1683

УРАВНЕНИЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ УБЫВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Э.А. Назирова, Л.Н. Валеева, Б.И. Марданов
ellkid@yandex.ru, leisan_2001@mail.ru, mardanov_bulat@list.ru

УДК 517.928

Доклад посвящен изучению асимпотики решения уравнения Штурма-Лиувилля с потенциалом, содержащим осцилляцию. Будут описаны новые классы коэффициентов, для которых потенциал как не влияет на главный член асимптотики решений, так и влияет.
Ключевые слова: уравнение Штурма-Лиувилля, асимптотика решений, осциллирующий потенциал

Sturm-Liouville equation with rapidly oscillating decreasing potential

The report is devoted to the study of the asympotics of the solution of the Sturm-Liouville equation with a potential containing oscillation. New classes of coefficients will be described for which the potential either does not affect the main term of the asymptotics of solutions, or does.

Keywords: Sturm-Liouville equation, asymptotic behavior of solutions, oscillating potential

При изучении асимптотического поведения решений уравнения Штурма-Лиувилля отдельный интерес представляют различные классы этого уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами (см.например [2] и библиографию). Отдельный интерес представляет описание классов уравнений с осциллирующим потенциалом, когда асимпотика решений существенно отличается от классических ВКБ асимптотик.

Доклад посвящен реализации сравнительного нового подхода (см.подробнее в [1]) к исследованию таких уравнений (отметим, что подход может быть применен и к уравнениям более высокого порядка) для уравнения Штурма-Лиувилля

$$y'' + (1 + q(x))y = 0, x_0 < x < \infty. \tag{1}$$

Данное исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (грант № 23-21-00225).

Назирова Эльвира Айратовна, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Elvira Nazirova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Валеева Лейсян Нурмухаметовна, МГУ (Москва, Россия); Valeeva Leisan (Moscow State University, Moscow, Russia)

Марданов Булат Ильфатович, аспирант, БГПУ им. М.Акмуллы (Уфа, Россия); Bulat Mardanov (Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla, Ufa, Russia)

Предлагаемая схема построения асимптотики решеий состоит в переходе к системе ОДУ первого порядка, которая записывается в терминах специальных матриц, свойства которых позволяют провести последовательность матричных преобразований,и получить L-диагональный вид системы. Доказано, что асимптотика решений уравнения (1) может существенно зависеть от алгебраической структуры быстро осциллирующего возмущения $q(x)$.

Введем пространство $\mathbb{W}^0$ быстро осциллирующих полиномов

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) e^{ip_k(x)}, \tag{2}$$

где $g_k(x)$ - обобщенные многочлены с отрицательными степенями в интервале $(0,1)$, $p_k(x)$ – обобщенные многочлены со степенями больше 1, $p_{k,0}$ – коэффициенты перед старшими степенями соответствующих многочленов. Основной результат сформулирован в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть $q(x) \in \mathbb{W}^0$ и для любого набора целых неотрицательных чисел $\{c_1, ..., c_n\}$ выполнено условие: $\sum_{k=1}^{n} c_k p_{k,0} \neq 0$. Тогда для решений уравнения (1) при $x \to +\infty$ справедливы асимптотические соотношения: $y(x) = e^{\pm ix}(1 + o(1))$.*

Возникает вопрос о существенности условия теоремы 1. Рассмотрим уравнение (1) с потенциалом $q(x) = 2ax^{\alpha} cos(x^{\beta})$, $\alpha < 0$, $\beta > 1$. Несмотря на то, что данный потенциал не удоволетворяет условию теоремы, нам удалось построить и в этом случае асимпотоику решений уравнения (1), опираясь на тот же подход.

$$y_{1,2}(x) = e^{\pm ix \pm \frac{a^2}{\beta^2(2(\alpha-\beta+1)+1)} x^{2(\alpha-\beta+1)+1} + r_{1,2}(x)} (1 + o(1)),$$

где $r_{1,2}(x)$ полиномы такие, что $r_{1,2}(x) = o(x^{2(\alpha-\beta+1)+1})$.

Литература

1. *Л. Н. Валеева, Э. А. Назирова, Я. Т. Султанаев* // Об одном методе исследования асимптотики решений дифференциальных уравнений Штурма–Лиувилля с быстро осциллирующими коэффициентами// Матем. заметки, **112**:6 (2022), 935–940

2. *Eastham, M.S.P.* The Asymptotic Solution of Linear Differential Systems, Applications of the Levinson Theorem. Clarendon Press, Oxford., 1989.

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ОБЩЕГО ВИДА С ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Д.М. Поляков
DmitryPolyakow@mail.ru

УДК 517.927

Рассматривается спектральная задача для дифференциального оператора четвертого порядка. При этом спектральный параметр содержится в двух граничных условиях. Основной результат посвящен точной асимптотике собственных значений при высоких энергиях.

Ключевые слова: асимптотика собственных значений, дифференциальный оператор четвертого порядка, спектральный параметр в граничных условиях.

On eigenvalue asymptotics for a fourth-order operator in general form with parameter in boundary conditions

We consider a spectral problem for fourth-order differential operator with spectral parameter in two boundary conditions. We obtain sharp asymptotics of eigenvalues at high energy.

Keywords: eigenvalue asymptotics, fourth-order differential operator, spectral parameter in boundary conditions.

В пространстве $L_2(0,1)$ рассматривается следующая спектральная задача для уравнения четвертого порядка вида

$$y^{(4)}(x) - (p(x)y'(x))' = \lambda y(x),$$
$$y''(0) = y''(1) = 0, \quad Ty(0) - a\lambda y(0) = 0, \quad Ty(1) - c\lambda y(1) = 0,$$

где p — вещественная абсолютно непрерывная функция на $(0,1)$, $Ty = y''' - py'$, где $a > 0$, $c < 0$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр.

Данная задача изучалась в статьях [1] и [2]. Указанные работы посвящены вопросам локализации спектра, осцилляционным свойствам собственных функций, а также базисности корневых функций соответствующего данной задачи оператора. Кроме того, в них была установлена следующая асимптотика собственных значений для этого оператора:

$$\lambda_n^0 = \pi^4(n-2)^4 + \mathcal{O}(n^2), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Основная цель настоящей работы — дать детальный анализ поведения асимптотики собственных значений λ_n для достаточно больших номеров, а также высокоэнергетических эффектов, которые здесь возникают.

Поляков Дмитрий Михайлович, к.ф.-м.н., ЮМИ ВНЦ РАН (Владикавказ, Россия); Dmitry Polyakov (Southern Mathematical Institute VSC RAS, Vladikavkaz, Russia)

Для формулировки основного результата определим коэффициенты Фурье для некоторой функции $f \in L_1(0,1)$:

$$f_0 = \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad \widehat{f}_{cn}(\varepsilon) = \int_0^1 f(x)\cos\pi(2n-\varepsilon)x\,dx,$$
$$\widehat{f}_{sn}(\varepsilon) = \int_0^1 f(x)\sin\pi(2n-\varepsilon)x\,dx, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

где ε — некоторая константа.

Теорема 1. *Пусть $p \in W_1^1(0,1)$. Тогда собственные значения λ_n являются вещественными, простыми и удовлетворяют следующей асимптотике*

$$\lambda_n = \pi^4(n-2)^4 + \pi^2(n-2)^2\Big(p_0 + \widehat{p}_{cn}(4) + \frac{2(c-a)}{ac}\Big) + \mathcal{O}(n),$$

при $n \to +\infty$. Если дополнительно предположить, что $p \in W_1^3(0,1)$ и $p(0) = p(1)$, то асимптотика примет вид

$$\lambda_n = \pi^4(n-2)^4 + \pi^2(n-2)^2\Big(p_0 + \frac{2(c-a)}{ac}\Big) - \pi(n-2)\Big(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\Big)$$
$$+ \frac{(p_0 + 7p(0))(c-a)}{2ac} + \frac{p_0^2 - \|p\|^2}{8} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\Big)^2$$
$$+ \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{c^3}\Big) + \frac{\widehat{p}'''_{sn}(4)}{32\pi(n-2)} + \mathcal{O}(n^{-2}),$$

при $n \to +\infty$.

Литература

1. *Aliyev Z.S., Namazov F.M.* Spectral properties of a fourth-order eigenvalue problem with spectral parameter in the boundary conditions // Electr. J. Diff. Equat., **307** (2017), 1-11.

2. *Aliyev Z.S., Namazov F.M.* On the spectral problem arising in the mathematical model of bending vibrations of a homogeneous rod // Complex Anal. Oper. Theory., **13** (2019), 3675-3693.

О НОВЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЗНАЧЕНИЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА В НЕЧЕТНЫХ ТОЧКАХ

Т.А. Сафонова
t.Safonova@narfu.ru

УДК 517.518

В работе средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов найдены новые представления некоторых определённых линейных комбинаций чисел $\zeta(2n)$ в виде рядов, содержащих логарифмы.

Ключевые слова: дзета-функция Римана.

On new representations of the values of the Riemann zeta function at odd points

In this work, using the spectral theory of ordinary differential operators, new representations of certain linear combinations of numbers $\zeta(2n)$ are found in the form of series containing logarithms.

Keywords: Riemann zeta function.

Следуя [1], символами $\zeta(s)$ и $\eta(s)$ обозначим дзета-функцию Римана и родственную с ней функцию, определяемые равенствами

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}, \quad \eta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s).$$

Хорошо известно, что

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

где B_{2n} - числа Бернулли. Из этого равенства следует, что числа $\zeta(2n)$ являются трансцендентными, а об арифметической природе чисел $\zeta(2n+1)$ известно очень мало, в т.ч. не известно являются ли они трансцендентными. Только в 1978 г. французский математик Р. Апери доказал иррациональность числа $\zeta(3)$, впоследствии названного его именем.

Нами (см., напр., [2]) предложен метод, позволяющий средствами спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов получить интегральное представление сумм некоторых степенных рядов и специальных функций. В частности, для последовательностей чисел

$$\mathcal{C}_m := \pi^{2m} \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{m-n}}{(2m-2n+1)!} \frac{\eta(2n-1)}{\pi^{2n-1}} \right)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00128).

Сафонова Татьяна Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, САФУ (Архангельск, Россия); Safonova Tatyana (Northern (Arctic) Federal University named after M.V.Lomonosov, Arkhangelsk, Russia)

и

$$\mathcal{D}_m := \pi^{2m+1}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{m-n}}{(2m-2n+2)!}\frac{\eta(2n-1)}{\pi^{2n-1}} - \frac{2^{2m+1}-1}{2^{2m}}\frac{\zeta(2m+1)}{\pi^{2m+1}}\right)$$

при $m = 1, 2, \ldots$, установлена справедливость равенств

$$\mathcal{C}_m = \frac{(-1)^{m-1}2^{2m-1}}{(2m)!}\int_0^{\pi/2}\frac{x^{2m}}{\sin^2 x}dx \tag{1}$$

и

$$\mathcal{D}_m = \frac{(-1)^{m-1}2^{2m}}{(2m+1)!}\int_0^{\pi/2}\frac{x^{2m+1}}{\sin^2 x}dx. \tag{2}$$

Используя разложение

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}} = \frac{4}{(\pi x)^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^2+(2k)^2}{(x^2-(2k)^2)^2},$$

можно доказать справедливость тождества

$$\frac{1}{j+1}\int_0^{\pi/2}\frac{x^{j+1}}{\sin^2 x}dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^j\left(\frac{1}{j} - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^1\frac{u^{j+1}}{(2k)^2-u^2}du\right), \quad j = 1, 2, \ldots$$

Вычисляя далее интегралы из его правой части при $j = 2m-1$ и $j = 2m$ и учитывая полученные равенства в правых частях (1) и (2), приходим к справедливости следующего утверждения.

Теорема 1. *При $m = 1, 2, \ldots$ справедливы равенства*

$$\mathcal{C}_m = \frac{(-1)^{m-1}\pi^{2m-1}}{(2m-1)!}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2m-1} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left((2k)^{2m-1}\ln\frac{2k-1}{2k+1} + 2\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(2k)^{2l}}{2m-2l-1}\right)\right)$$

и

$$\mathcal{D}_m = \frac{(-1)^{m-1}\pi^{2m}}{(2m)!}\left(\frac{1}{2m} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left((2k)^{2m}\ln\left(1-\frac{1}{(2k)^2}\right) + \sum_{l=0}^{m-1}\frac{(2k)^{2l}}{m-l}\right)\right).$$

В частности, полагая $m = 1$ в этих равенствах, для постоянной Апери $\zeta(3)$ получим справедливость тождеств

$$\zeta(3) = \frac{2\pi^2}{9}\ln 2 - \frac{2\pi^2}{27}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1 + 12k^2 + 12k^3\ln\frac{2k-1}{2k+1}\right)\right) =$$

$$= \frac{2\pi^2}{7}\ln 2 - \frac{\pi^2}{7}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(1 + 4k^2\ln\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)\right)\right).$$

В заключении отметим, что эти равенства можно переписать в несколько ином виде

$$e^{-\frac{27\zeta(3)}{4\pi^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{e/2}\prod_{k=1}^{+\infty}\left(e^{1+12k^2}\left(1 - \frac{2}{2k+1}\right)^{12k^3}\right)$$

и

$$e^{-\frac{7\zeta(3)}{2\pi^2}} = \sqrt{e}/2\prod_{k=1}^{\infty}\left(e\left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)^{4k^2}\right).$$

Литература

1. *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — New York: Dover Publ., 1972.

2. *Мирзоев К.А., Сафонова Т.А.* Обыкновенные дифференциальные операторы и интегральное представление сумм некоторых степенных рядов // Труды ММО, **80**:2 (2019), 157-177

STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRUM AND DISCRETE SPECTRA OF THE ENERGY OPERATOR OF FOUR-ELECTRON SYSTEMS IN THE IMPURITY HUBBARD MODEL. SECOND SINGLET STATE

Sa'dulla Tashpulatov.
sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru, toshpul@inp.uz

УДК 517.984

We consider the energy operator of four-electron systems in the impurity Hubbard model and investigate the structure of essential spectrum and discrete spectra of the system in the second singlet state.

Keywords: Imputity Hubbard model, singlet state, essential spectra, discrete spectrum.

Hamiltonian of the considering system has the form

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}+$$

$$+\varepsilon_1\sum_{\gamma} a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma} + \varepsilon_2\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + \varepsilon_3 a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}. \qquad (1)$$

Here A (A_0) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site; $B > 0$ ($B_0 > 0$) is the transfer integral between electrons (between electron and impurity) in a neighboring sites, $\tau = \pm e_j, j = 1, 2, ..., \nu$, where e_j are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors, U (U_0) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, correspondingly in the regular (impurity) lattice site; γ is the spin index, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$, $\varepsilon_1 = A - A_0, \varepsilon_2 = B - B_0, \varepsilon_3 = U - U_0$. The second singlet state corresponds four-electron bound states (or antibound states) to the basis functions: ${}^2s^1_{p,q,r,t\in Z^\nu} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}a^+_{r,\uparrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0$. The subspace ${}^2\widetilde{\mathcal{H}}^0_s$, corresponding to the second singlet state is the set of all vectors of the form ${}^2\psi^0_s = \sum_{p,q,r,t\in Z^\nu} f(p,q,r,t){}^2s^0_{p,q,r,t\in Z^\nu}, f \in l_2^{as}$, where l_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in $l_2((Z^\nu)^4)$. In this case, the Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fock space ${}^2\widetilde{\mathcal{H}}^0_s$. Let φ_0 be the vacuum vector in the antisymmetrical Fock space ${}^2\widetilde{\mathcal{H}}^0_s$. Let ${}^2\widetilde{H}^0_s$ be the restriction H to the subspace ${}^2\widetilde{\mathcal{H}}^0_s$. The second singlet state corresponds the free motions of four-electrons in the lattice and their interactions.

Tashpulatov Sadulla Mamarajabovich, doctor of physico-mathematical science, senior researcher,leading researcher

Theorem 1. *The subspace ${}^2\widetilde{\mathcal{H}}_s^0$ is invariant under the operator H, and the operator ${}^2H_s^0$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self-adjoint operator ${}^2\overline{H}_s^0$ acting in the space l_2^{as} as*

$$
{}^2\overline{H}_s^0\,{}^2\psi_s^0 = 4Af(p,q,r,t) + B\sum_{\tau}[f(p+\tau,q,r,t) + f(p,q+\tau,r,t) + f(p,q,r+\tau,t)
$$

$$
+f(p,q,r,t+\tau)] + U[\delta_{p,q}+\delta_{q,r}+\delta_{p,t}+\delta_{r,t}]f(p,q,r,t) + (A_0-A)[\delta_{p,0}\delta_{q,0}+\delta_{r,0}+\delta_{t,0}]
$$

$$
\times f(p,q,r,t) + (B_0-B)\sum_{\tau}[\delta_{p,0}f(\tau,q,r,t) + \delta_{q,0}f(p,\tau,r,t) + \delta_{r,0}f(p,q,\tau,t) +
$$

$$
\delta_{t,0}f(p,q,r,\tau) + \delta_{p,\tau}f(0,q,r,t) + \delta_{q,\tau}f(p,0,r,t)\delta_{r,\tau}f(p,q,0,t) + \delta_{t,\tau}f(p,q,r,\tau)] +
$$

$$
(U_0-U)[\delta_{p,q}\delta_{p,0} + \delta_{p,t}\delta_{p,0} + \delta_{q,r}\delta_{q,0} + \delta_{r,t}\delta_{r,0}]f(p,q,r,t), \qquad (2)
$$

where $\delta_{k,j}$ is the Kronecker symbol. The operator ${}^2H_s^0$ acts on a vector ${}^2\psi_s^0 \in {}^2\boldsymbol{H}_s^0$ as

$$
{}^2H_s^0\,{}^2\psi_s^0 = \sum_{p,q,r,t\in Z^\nu} ({}^2\overline{H}_s^0 f)(p,q,r,t)^2 s^0_{p,q,r,t\in Z^\nu}. \qquad (3)
$$

Lemma 1. *The spectra of operators ${}^2\overline{H}_s^0$ and ${}^2\overline{H}_s^0$ coincide.*

Let $\mathcal{F} : l_2((Z^\nu)^4) \to L_2((T^\nu)^4) \equiv {}^2\widetilde{\mathcal{H}}_s^0$ be the Fourier transform, where T^ν is the $\nu-$ dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure $d\lambda$, i.e. $\lambda(T^\nu) = 1$. We set ${}^2\widetilde{H}_s^0 = \mathcal{F}\,{}^2\overline{H}_s^0\mathcal{F}^{-1}$. In the quasimomentum representation, the operator ${}^2\overline{H}_s^0$ acts in the Hilbert space $L_2^{as}((T^\nu)^4)$, where L_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^4)$.

Theorem 2. *Let $\nu = 1$. Then*

A). If $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$ and $\varepsilon_1 > 2B$), then the essential spectrum of the operator ${}^2\widetilde{H}_s^0$ is consists of the union of eight segments: $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z, 3A+6B+z] \cup [2A-4B+2z, 2A+4B+2z] \cup [A-2B+3z, A+2B+3z] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3] \cup [A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4]$, and the discrete spectrum of the operator ${}^2\widetilde{H}_s^0$ is consists of six eigenvalues: $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4, 2z_3, z_3+z_4, 2z_4\}$, where $z = A+\varepsilon_1$, here and hereafter z_3 and z_4 are the concrete numbers.

B). If $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 > 0$ or $\varepsilon_1 = 0$ and $\varepsilon_2 < -2B$, then the essential spectrum of the operator ${}^2\widetilde{H}_s^0$ is consists of the union of thirteen segments: $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z_1, 3A+6B+z_1] \cup [3A-6B+z_2, 3A+6B+z_2] \cup [2A-4B+2z_1, 2A+4B+2z_1] \cup [2A-4B+2z_2, 2A+4B+2z_2] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+3z_1, A+2B+3z_1] \cup [A-2B+3z_2, A+2B+3z_2] \cup [A-2B+z_1+z_3, A+2B+z_1+z_3] \cup [A-2B+z_1+z_4, A+2B+z_1+z_4] \cup [A-2B+z_2+z_4, A+2B+z_2+z_4] \cup [A-2B+z_2+z_3, A+2B+z_2+z_3]$, *and the discrete spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *is consists of nine eigenvalues:* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \{4z_1, 4z_2, 2z_1+z_3, 2z_1+z_4, 2z_3, z_3+z_4, 2z_4, 2z_2+z_3, 2z_2+z_4\}$, *where* $z_1 = A - 2BE/\sqrt{E^2-1}$ *and* $z_2 = A + 2BE/\sqrt{E^2-1}$, $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)$.

C). If $\varepsilon_2 > 0$ *and* $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ *(respectively,* $\varepsilon_2 < -2B$ *and* $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$*), then the essential spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *is consists of the union of sixteen segments:* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [3A-6B+z_1, 3A+6B+z_1] \cup [3A-6B+z_2, 3A+6B+z_2] \cup [2A-4B+2z_1, 2A+4B+2z_1] \cup [2A-4B+2z_2, 2A+4B+2z_2] \cup [2A-4B+z_1+z_2, 2A+4B+z_1+z_2] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+3z_1, A+2B+3z_1] \cup [A-2B+3z_2, A+2B+3z_2] \cup [A-2B+z_1+2z_2, A+2B+z_1+2z_2] \cup [A-2B+2z_1+z_2, A+2B+2z_1+z_2] \cup [A-2B+z_1+z_3, A+2B+z_1+z_3] \cup [A-2B+z_1+z_4, A+2B+z_1+z_4] \cup [A-2B+z_2+z_3, A+2B+z_2+z_3] \cup [A-2B+z_2+z_4, A+2B+z_2+z_4]$, *and the discrete spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *is consists of fourteen eigenvalues:* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \{4z_1, 2z_1+2z_2, 3z_1+z_2, 2z_1+z_3, 2z_1+z_4, z_1+3z_2, 4z_2, 2z_2+z_3, 2z_2+z_4, 2z_4, z_1+z_2+z_3, z_1+z_2+z_4, 2z_3, z_3+z_4\}$, *here* $z_1 = A + 2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})/(E^2-1)$ *and* $z_2 = A + 2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})/(E^2-1)$, *where* $E = (B+\varepsilon_2)^2/(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)$ *and* $0 < \alpha < 1$.

D). If $-2B < \varepsilon_2 < 0$, *then the essential spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *is consists of the union of three segments:* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]$, *and the discrete spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *is consists of three eigenvalues:* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \{2z_3, z_3+z_4, 2z_4\}$.

Theorem 3. *Let* $\nu = 3$. *Then*

A). 1). If $\varepsilon_2 = -B$ *and* $\varepsilon_1 < -6B$ *(respectively,*$\varepsilon_2 = -B$ *and* $\varepsilon_1 > 6B$*), then the essential spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *is consists of the union of eight segments:* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [4A-24B, 4A+24B] \cup [3A-18B+z, 3A+18B+z] \cup [2A-12B+2z, 2A+12B+2z] \cup [2A-12B+z_3, 2A+12B+z_3] \cup [2A-12B+z_4, 2A+12B+z_4] \cup [A-6B+3z, A+6B+3z] \cup [A-6B+z+z_3, A+6B+z+z_3] \cup [A-6B+z+z_4, A+6B+z+z_4]$, *and the discrete spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *is consists of six eigenvalues:* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4, 2z_3, 2z_4, z_3+z_4\}$, *where* $z = A+\varepsilon_1$, *here and hereafter* z_3 *and* z_4 *are the same concrete numbers.*

2). If $\varepsilon_2 = -B$ *and* $-6B \le \varepsilon_1 < -2B$ *(respectively,* $\varepsilon_2 = -B$ *and* $2B < \varepsilon_1 \le 6B$*), then the essential spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *is consists of the union of three segments:* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_s^0) = [4A-24B, 4A+24B] \cup [2A-12B+z_3, 2A+12B+z_3] \cup [2A-12B+z_4, 2A+12B+z_4]$, *and the discrete spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_s^0$ *is consists of three eigenvalues:* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_s^0) = \{2z_3, z_3+z_4, 2z_4\}$.

B). If $\varepsilon_2 > 0$, $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ *and* $(1-\alpha/3)W < E < (1+\alpha/3)W$ *(respectively,* $\varepsilon_2 < -2B$, $0 < \varepsilon_1 < 2(\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)/B$ *and* $(1-\alpha/3)W < E < (1+\alpha/3)W$*), then the essential spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_s^0$

is consists of the union of sixteen segment: $\sigma_{ess}(^2\widetilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [3A - 18B + z_1, 3A + 18B + z_1] \cup [2A - 12B + 2z_1, 2A + 12B + 2z_1] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4] \cup [A - 6B + 3z_1, A + 6B + 3z_1] \cup [A - 6B + z_1 + z_3, A + 6B + z_1 + z_3] \cup [A - 6B + z_1 + z_4, A + 6B + z_1 + z_4] \cup [3A - 18B + z_2, 3A + 18B + z_2] \cup [2A - 12B + z_1 + z_2, 2A + 12B + z_1 + z_2] \cup [2A - 12B + 2z_2, 2A + 12B + 2z_2] \cup [A - 6B + 2z_1 + z_2, A + 6B + 2z_1 + z_2] \cup [A - 6B + z_1 + 2z_2, A + 6B + z_1 + 2z_2] \cup [A - 6B + 3z_2, A + 6B + 3z_2] \cup [A - 6B + z_2 + z_3, A + 6B + z_2 + z_3] \cup [A - 6B + z_2 + z_4, A + 6B + z_2 + z_4]$, *and the discrete spectrum of the operator* $^2\widetilde{H}_s^0$ *is consists of fourteen eigenvalues:* $\sigma_{disc}(^2\widetilde{H}_s^0) = \{4z_1, 4z_2, 3z_1 + z_2, 2z_1 + 2z_2, 2z_1 + z_3, 2z_3, 2z_4, z_3 + z_4, 2z_1 + z_4, z_1 + 3z_2, z_1 + z_2 + z_3, z_1 + z_2 + z_4, 2z_2 + z_3, 2z_2 + z_4\}$, *where* z_1 *and* z_2 *is the eigenvalue of the operator* $\widetilde{H}_1$.

C). If $-2B < \varepsilon_2 < 0$, *then the essential spectrum of the operator* $^2\widetilde{H}_s^0$ *is consists of the union of three segment:* $\sigma_{ess}(^2\widetilde{H}_s^0) = [4A - 24B, 4A + 24B] \cup [2A - 12B + z_3, 2A + 12B + z_3] \cup [2A - 12B + z_4, 2A + 12B + z_4]$, *and the discrete spectrum of the operator* $^2\widetilde{H}_s^0$ *is consists of fourteen eigenvalues:* $\sigma_{disc}(^2\widetilde{H}_s^0) = \{2z_3, z_3 + z_4, 2z_4.\}$

References

1. *Hubbard J.* Electron correlations in narrow energy bands// Proc. Roy. Soc. A., **276** (1963), 238-257

ОБ ОДНОМ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ТОЖДЕСТВЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯХ В ТЕОРИИ СЛЕДОВ

З.Ю. Фазуллин, fazullinzu@mail.ru

УДК 517.5

Доклад посвящен краткой истории развития теории регуляризованных следов с дискретным спектром, современноу состоянию формул следов ограниченных возмущений двумерных дифференциальных операторов и открытым задачам в этой области. Также, будут обсуждаться взаимосвязи аналога метода суммирования по Чезаро и формул регуляризованных следов.

Исследование выполнено при поддержке НОМЦ ПФО (соглашение N 075-02-2024-1444).

Фазуллин Зиганур Юсупович, д.ф.-м.н., профессор, ИИМРТ УУНиТ (Уфа, Россия); Ziganur Fazullin (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С МНОГОЧЛЕНАМИ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ И КРАТНЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Е.Е. Читоркин
chitorkin.ee@ssau.ru

УДК 517.984

Рассмотрена обратная задача Штурма-Лиувилля с потенциалом-распределением и многочленами от спектрального параметра в одном из краевых условий. Доказана теорема о локальной разрешимости и устойчивости обратной задачи по спектральным данным в общем случае, допускающем кратные собственные значения.

Ключевые слова: обратная задача Штурма-Лиувилля, многочлены в краевом условии, кратные собственные значения, локальная разрешимость, устойчивость.

Inverse Sturm-Liouville problem with polynomials in the boundary condition and multiple eigenvalues

The inverse Sturm-Liouville problem with distribution potential and with polynomials of the spectral parameter in one of the boundary conditions is considered. Theorem on local solvability and stability of the inverse problem by spectral data in general case with multiple eigenvalues is proved.

Keywords: inverse Sturm-Liouville problem, polynomials in the boundary condition, multiple eigenvalues, local solvability, stability.

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля $L = L(\sigma, r_1, r_2)$ следующего вида:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in (0, \pi), \tag{1}$$

$$y^{[1]}(0) = 0, r_1(\lambda)y^{[1]}(\pi) + r_2(\lambda)y(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $q(x)$ – комплекснозначный потенциал-распределение из класса $W_2^{-1}(0, \pi)$, т.е. $q(x) = \sigma'(x)$, где $\sigma(x) \in L_2(0, \pi)$; λ – спектральный параметр; $r_1(\lambda)$ и $r_2(\lambda)$ – взаимно простые многочлены; $y^{[1]} = y' - \sigma(x)y$ – квазипроизводная. Для работы с таким классом потенциалов используется подход регуляризации [1]. Многочлены из краевого условия (2) могут быть представлены в виде

$$r_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{K_1} c_n \lambda^n, \quad r_2(\lambda) = \sum_{n=0}^{K_2} d_n \lambda^n, \quad K_1, K_2 \geq 0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-71-10003).

Читоркин Егор Евгеньевич, студент, Самарский университет (Самара, Россия), лаборант-исследователь, СГУ (Саратов, Россия); Egor Chitorkin (Samara National Research University, Samara, Russia; Saratov State University, Saratov, Russia)

Будем писать, что $(r_1, r_2) \in \mathcal{R}_p$, если $K_1 = K_2 = p$ и $c_p = 1$; при этом старшие коэффициенты многочлена $r_2(\lambda)$ могут быть равны нулю. Противоположный случай рассматривается по аналогии.

Известно [2], что спектр задачи L представляет собой счетное множество собственных значений, которые можно пронумеровать на основании их асимптотики следующим образом:

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n - p - 1 + \varkappa_n, \quad \{\varkappa_n\} \in l_2,$$

причём конечное число собственных значений может быть кратным. Пусть $I = \{1\} \cup \{n > 1 : \lambda_n \neq \lambda_{n-1}\}$ – множество индексов уникальных собственных значений, а m_n, $n \in I$, – их кратности. Тогда функция Вейля представима в виде

$$M(\lambda) = \sum_{n \in I} \sum_{k=0}^{m_k - 1} \frac{\alpha_{n+k}}{(\lambda - \lambda_n)^{k+1}},$$

где коэффициенты $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ называются весовыми числами. Вместе собственные значения и весовые числа образуют спектральные данные задачи L

Обратная задача 1. *По данным спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$ найти $\sigma(x)$, $r_1(\lambda)$, $r_2(\lambda)$.*

Введем дополнительные обозначения. Пусть N – такой индекс, что $m_n = 1$, $n \geq N$, а собственные значения $\{\lambda_n\}_{n=1}^{N-1}$ лежат внутри следующего контура:

$$\Gamma_N = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \Big(N - p - \frac{3}{2} \Big)^2 \right\}.$$

Это значит, что начиная с номера N все собственные значения простые, при меньших значениях индекса кратные значения могут быть кратными; более того, все кратные соственные значения располагаются строго внутри контура Γ_N. Также определим следующую функцию:

$$M_N(\lambda) = \sum_{n \in I, n < N} \sum_{k=0}^{m_k - 1} \frac{\alpha_{n+k}}{(\lambda - \lambda_n)^{k+1}}.$$

Тогда для введенной обратной задачи 1 верна следующая теорема о локальной разрешимости и устойчивости:

Теорема 1. *Пусть $\tilde{L} = L(\tilde{\sigma}, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$ – фиксированная краевая задача вида (1)-(2), у которой $\tilde{\sigma}(x) \in L_2(0, \pi)$, $(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) \in \mathcal{R}_p$, а индекс N определяется, как указано ранее. Тогда существует $\delta_0 > 0$, зависящее от задачи $\tilde{L}$, что для любых комплексных чисел $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$, удовлетворяющих условию*

$$\delta := \max \left\{ \max_{\lambda \in \Gamma_N} |M_N(\lambda) - \tilde{M}_N(\lambda)|, \Big(\sum_{n=N}^{\infty} (|\rho_n - \tilde{\rho}_n| + |\alpha_n - \tilde{\alpha}_n|)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\} \leq \delta_0,$$

где $\rho_n^2 = \lambda_n$, $\tilde{\rho_n^2} = \tilde{\lambda_n}$, *существует комплекснозначная функция* $\sigma(x) \in L_2(0,\pi)$ *и многочлены* $(r_1, r_2) \in \mathcal{R}_p$, *которые являются решением обратной задачи 1 по данным* $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 1}$. *Более того,*

$$\|\sigma - \tilde{\sigma}\|_{L_2(0,\pi)} \leq C\delta, \quad |c_n - \tilde{c}_n| \leq C\delta, \quad |d_n - \tilde{d}_n| \leq C\delta, \quad n = \overline{0,p},$$

где константа C *зависит только от задачи* $\tilde{L}$.

Теорема доказывается с помощью двух шагов: на первом этапе возмущению подвергается только конечная часть спектральных данных, которая содержит кратные собственные значения; на втором – оставшаяся простая часть спектра. Из первого шага появляется ограничение

$$\max_{\lambda \in \Gamma_N} |M_N(\lambda) - \tilde{M}_N(\lambda)| \leq \delta_0,$$

а из второго, соответственно,

$$\Big(\sum_{n=N}^{\infty} (|\rho_n - \tilde{\rho}_n| + |\alpha_n - \tilde{\alpha}_n|)^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \delta_0.$$

Доказательство каждого из шагов основано на использовании формул восстановления, которые принимают различный вид в зависимости от вида спектра [3].

Литература

1. *Мирзоев К.А., Шкаликов А.А.* Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Матем. заметки, 99:5 (2016), 788-793.

2. *Chitorkin E.E., Bondarenko N.P.* Solving the inverse Sturm–Liouville problem with singular potential and with polynomials in the boundary conditions // Anal. Math. Phys. 13 (2023), Article number: 79.

3. *Chitorkin E.E., Bondarenko N.P.* Inverse Sturm-Liouville problem with polynomials in the boundary condition and multiple eigenvalues, arXiv:2402.06215 [math.SP].

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2024»

СЕКЦИЯ

«КОМПЛЕКСНЫЙ И

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

г. Уфа, 2 октября – 5 октября 2024 г.

СХОДИМОСТЬ ДИЛАТАЦИЙ, ПЛОТНОСТЬ ПОЛИНОМОВ И БИДВОЙСТВЕННОСТЬ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

А.В. Абанин

avabanin@sfedu.ru, abaninmath@gmail.com

УДК 517.5+517.9

В докладе будут представлены новые результаты о сходимости дилатаций в весовых пространствах Бергмана голоморфных функций в строго звездных областях и связанных с ними задач о плотности в них полиномов и условий естественной бидвойственности.

Ключевые слова: пространства Бергмана, плотность полиномов, сильно звездные области.

Пусть G — ограниченная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех голоморфных в G функций, $w : G \to (0,\infty)$ — непрерывная на G функция (*вес* на G). Для любого $p \in (0,\infty)$ пространство Бергмана $A^p_w(G)$ определяется следующим образом:

$$A^p_w(G) := \{f \in H(G) : \|f\|^p_w := \int_G |f(z)|^p w(z)\, d\lambda_z\}$$

с квазинормой (при $p \geq 1$ нормой) $\|\cdot\|_w$, где $d\lambda_z$ — мера Лебега в $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Предельным случаем этих пространств является банахово пространство $A^\infty_w(G)$, которое в нетривиальных случаях является несепарабельным. Поэтому в рассматриваемом нами круге вопросов участвует не само это пространство, а его замкнутое подпространство

$$A^\infty_{w_0}(G) := \{f \in H(G) : \lim_{z\to\partial G} f(z)w(z) = 0\}.$$

Одну из ключевых ролей в изучении свойств весовых пространств Бергмана и их приложениях играет наличие плотности в них полиномов. В частности, это касается проблемы факторизации функций в пространствах $A^p_w(\mathbb{D})$, а также получения удобных для применений описаний сопряженных пространств к пространствам голоморфных функций заданного роста вблизи границы G и последующего изучения в них уравнений свертки и абсолютно представляющих систем экспонент. Проблема плотности полиномов в $A^p_w(G)$ при $0 < p < \infty$ исследовалась во многих работах. Прежде всего отметим обзор С.Н. Мергеляна [1]. Дальнейшие продвижения были достигнуты Л.И. Хедбергом [2]. Несмотря на столь долгую историю исследования проблемы плотности

Абанин Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия) и ЮМИ ВНЦ РАН (Владикавказ, Россия); Alexander V. Abanin (Southern Federal University, Rostov-on-Don, and Southern Mathematical Institute VSC RAS, Vladikavkaz, Russia)

полиномов в пространствах Бергмана, до сих пор не известно ни одного нетривиального необходимого условия положительного ее решения.

Для круга $\mathbb{D}$ одним из эффективных методов получения достаточных условий для классов весов, используемых в приложениях, является подход, основанный на сходимости дилатаций $f_r(z) := f(rz)$ при $r \uparrow 1$ к $f(z)$ по квазинорме соответствующего пространства. По-видимому, впервые он был использован М.М. Джрбашяном в его диссертации (см. [1, с. 29-30]), а затем в [3], [4].

В докладе будут представлены новые результаты, в которых установлены необходимые и достаточные условия сходимости дилатаций в весовых пространствах Бергмана функций, голоморфных в строго звездных областях. В качестве следствий установлены достаточные условия плотности полиномов в таких пространствах. Кроме того исследована связь этих условий с задачей о наличии естественной бидвойственности $(A^{\infty}_{w_0}(G))'' = A^{\infty}_{w}(G)$ (см. [5]).

Литература

1. *Мергелян С.Н.* О полноте систем аналитических функций // УМН, **8**:4 (1953), 3-63

2. *Hedberg L.I.* Weighted mean approximation in Caratheodory regions // Math. Scand., **23** (1968), 113-122

3. *Shields A.L., Williams D.L.* Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of harmonic functions // J. Reine Angew. Math., **299/300** (1978), 256-279

4. *Abkar A.* Norm approximation by polynomialsm in some weighted Bergman spaces // J. Funct. Anal., **191** (2002), 224-240

5. *Bierstedt K.D., Summers W.H.* Biduals of weighted Banach spaces of analytic functions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **54** (1993), 70-79

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ (НЕ)ПОЛНОТЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ И УЛЬТРАРАСПРЕДЕЛЕНИЙ БЕРЛИНГА-БЬОРКА НОРМАЛЬНОГО ТИПА НА ИНТЕРВАЛЕ

Н.Ф. Абузярова, abnatf@gmail.com

УДК 517.53, 517.98

Рассматриваются задачи об устойчивости (не)полноты систем экспонент при возмущениях пследовательности показателей в пространстве ультрадифференцируемых функций (УДФ) Берлиинга-Бьорка нормального типа на интервале вещественной прямой и в соответствующем пространстве ультрараспределений. Исследование проводится путем перехода к эквивалентным двойственным задачам о целых функциях, относящихся к проблеме описания нулевых (под)множеств целых функций. А именно, пусть P — некоторый класс целых функций. Какие преобразования над последовательностью нулей целой функии $\varphi \in P$, сохраняющие ее в P, можно совершать? Для решения поставленных задач о (не)полноте последний вопрос изучается в весовых пространствах целых функций P, реализующих посредством преобразования Фурье-Лапласа пространство ультрараспределений нормального типа с компактными носителями на интервале и соответствующее пространство пробных УДФ нормального типа.

Ключевые слова: полнота системы экспонент, целая функция, нулевое множество, ультрараспределение, преобразование Фурье-Лапласа.

On stability of (non)completeness property of exponential systems in spaces of Beurling-Björck ultradifferentiable functions and ultradistributions of normal type on an interval

We consider the problem of preserving of (non)completeness property by exponential systems under perturbations of their sequences of exponents in the space of Beurling-Björck ultradifferentiable functions and ultradistributions of normal type on an interval and in the corresponding space of ultradistributions. To solve them, we use the dual approach leading to equivalent problems concerning with the description of zero (sub)sets of entire funtions. Namely, let P be a class of entire functions. What perturbations of zero set of entire function $\varphi \in P$ preserves it in P? We explore this question in two classes of

---

Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Абузярова Наталья Фаирбаховна, д.ф.-м.н., ст. н.с., ИМ с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Natalia Abuzyarova (Institute of Mathematics with CC UFCC RAS, Ufa, Russia)

entire functions. First one is formed by Fourier-Laplace transforms of ultradistributions of the normal type with compact supports in the considered interval, and the second class is the set of Fourier-Laplace transforms of test ultradifferentiable functions of the normal type on the same interval.

Keywords: completeness of exponential system, entire function, zero set, ultradistribution, Fourier-Laplace transform.

Пусть $\omega : [0;\infty) \to \mathbb{R}$ — почти субаддитивный строгий канонический вес (определение см. в [1]), $(a;b)$ — конечный или бесконечный интервал вещественной прямой. Далее, $\mathcal{D}_{(\omega)}(a;b)$, $\mathcal{E}_{(\omega)}(a;b)$ — пространства пробных УДФ Берлинга-Бьорка и всех УДФ Берлинга-Бьорка нормального типа на интервале $(a;b)$, соответственно, а $\mathcal{D}'_{(\omega)}(a;b)$ — сильное сопряженное к $\mathcal{D}_{(\omega)}(a;b)$ пространство ультрараспределений. Из общей теории УДФ и ультрараспределений известно, что множество экспоненциальных функций $\{e^{\mathrm{i}\lambda t} : \lambda \in \mathbb{C}\}$ содержится и полно в каждом из пространств $\mathcal{E}_{(\omega)}(a;b)$ и $\mathcal{D}'_{(\omega)}(a;b)$ (см. [1]). Также известно, что существуют как полные, так и неполные счетные экспоненциальные системы и в $\mathcal{E}_{(\omega)}(a;b)$, и в $\mathcal{D}'_{(\omega)}(a;b)$.

Пусть $\mathcal{M} = \{\mu_j\}$ $\Lambda = \{\lambda_j\} \subset \mathbb{C}$, $|\mu_1| \le |\mu_2| \le \ldots$, $\lambda_j = \mu_j + \alpha_j$, $j = 1, 2, \ldots$

При каких условиях на $\{\alpha_j\}$ системы функций $\{e^{\mathrm{i}\mu_j t}\}$ и $\{e^{\mathrm{i}\lambda_j t}\}$ одновременно (не) полны в $\mathcal{E}_{(\omega)}(a;b)$? в $\mathcal{D}'_{(\omega)}(a;b)$?

Теорема 1. *Если для последовательности $\{\alpha_j\}$ выполнено условие*

$$\alpha_j = o\left(\frac{\omega(|\mu_j|)}{\ln|\mu_j|}\right), \quad j \to \infty,$$

то системы функций $\{e^{\mathrm{i}\mu_j t}\}$ и $\{e^{\mathrm{i}\lambda_j t}\}$ одновременно (не) полны в каждом из пространств $\mathcal{E}_{(\omega)}(a;b)$, $\mathcal{D}'_{(\omega)}(a;b)$.

Литература

1. *Абанин А.В.* Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения — Москва: Наука, 2007.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ: ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИВИЗНЫ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

А.А. Акманов
arslanakmanov@mail.ru

УДК 517.958,519.2

В данном исследовании рассматривается одно из приложений дифференциального исчисления: формула для вычисления кривизны плоской кривой. В частности, приводятся способы задания плоской кривой, вычисляется общая формула для вычисления кривизны в определенной точке.

Ключевые слова: плоская кривая, параметрические уравнения, формула для вычисления кривизны.

Geometric applications of differential calculus: a formula for calculating the curvature of a plane curve

This study examines one of the applications of differential calculus: a formula for calculating the curvature of a flat curve. In particular, methods for defining a flat curve are given, and a general formula for calculating the curvature at a certain point is calculated.

Keywords: plane curve, parametric equations, formula for calculating curvature.

Мы будем задавать плоские кривые либо при помощи параметрических уравнений

$$x = \varphi(\alpha),\ y = \psi(\alpha), \tag{1}$$

где α – некоторый параметр, либо при помощи уравнений вида

$$F(x, y) = 0, \tag{2}$$

Пусть кривая L определяется уравнением (2), причем функция $F(x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ этой кривой и имеет в указанной точке непрерывные частные производные по x и y. Точку $M_0(x_0, y_0)$ назовем обыкновенной точкой кривой L, если в этой точке выполняется соотношение

$$F_x^{'2} + F_y^{'2} \neq 0, \tag{3}$$

Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, M_0 – некоторая фиксированная точка этой кривой, отвечающая значению параметра t_0. Предположим, что все точки кривой L из некоторой окрестности M_0 являются обыкновенными и что функции $x(t)$ и

Акманов Арслан Айтуганович, студент, УУНиТ (Уфа, Россия); Arslan Akmanov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

$y(t)$ имеют в точке t_0 вторые производные. При этих предположениях мы установим общую формулу для вычисления кривизны в точке M_0 кривой L.

Пусть x' и x'' - значения первой и второй производной функции $x = x(t)$ в точке t_0, а $x' + \Delta x'$ - значение первой производной этой функции в точке $t_0 + \Delta t$ (Δt – произвольное приращение параметра t). Таким образом, $\Delta x'$ - приращение первой производной функции $x = x(t)$. Пусть y', y'' и $y' + \Delta y'$ соответствующие значения производных функции $y = y(t)$.

Если считать, что точка M_0, отвечающая значению параметра t_0, фиксирована, а точка M отвечает значению параметра $t_0 + \Delta t$, то угол смежности участка $M_0 M$ и длину этого участка можно рассматривать как функции аргумента Δt. Эти функции мы обозначим соответственно через $\propto (\Delta t)$ и $l(\Delta t)$.

По определению кривизна $k(M_0)$ в точке M_0 кривой равна предельному значению

$$k(M_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(\Delta t)}{l(\Delta t)}, \tag{4}$$

Литература

1. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I: Учебник для вузов. - 7-е изд. - М.: Физматлит, 2005. - 648 с.

2. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа: Учебник в 2-х тт. том 1-й / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Лань, 2008. – 448 с.

2-LOCAL DERIVATIONS OF THE n-TH SCHRÖDINGER ALGEBRAS

A.K. Alauadinov, B.B. Yusupov,N.Z. Vaisova
amir_t85@mail.ru, baxtiyor_yusupov_93@mail.ru, nafosat_vaisova@mail.ru

УДК 512.554.38

Данная статья посвящена исследованию 2-локальных дифференцирований на n-й алгебре Шрёдингера $\mathcal{S}_n$. Мы доказываем, что всякое 2-локальное дифференцирование алгебры $\mathcal{S}_n$ является дифференцированием.

Ключевые слова: Алгебры Ли, n-ые алгебры Шрёдинга, дифференцирования, 2-локальные дифференцирования.

2-Local derivations of the n-th Schrödinger algebras

This paper is devoted to study 2-local derivations on the n-th Schrödinger algebra $\mathcal{S}_n$. We prove that every 2-local derivation on $\mathcal{S}_n$ is a derivation.

Keywords: Lie algebras, n-th Schrödinger algebras, derivations, 2-local derivations.

2-Local derivations and automorphisms have been objects of many research works in recent years. Even many results have been addressed in this direction, there are still lots of related unsolved problems. P.Šemrl first introduced the notion of 2-local derivations on algebras in their remarkable paper[10]. After that many research papers have been published regarding 2-local derivations of non-associative algebras (e.g. see [1, 2, 4, 3, 6, 7, 11]). For instanxe, it is proved that every 2-local derivation on a finite-dimensional semisimple Lie algebra $\mathcal{L}$ over an algebraically closed field of characteristic zero is a derivation (see [1]). In [2, 4, 3, 6, 11] the authors proved that every 2-local deriva- tion on some class of generalized Witt algebras, Witt algebras, locally finite split simple Lie algebras, the W-algebra W(2,2) and the Jacobson-Witt algebras is a derivation. In particular, the authors in [7, 8] respectively proved that every 2-local derivation on the Schrödinger algebra $\mathcal{S}_n$ in $(n+1)$-dimensional space-time is a derivation when $n = 1, 2$.

In this paper, we study 2-local derivations on n-th Schrödinger algebra $\mathcal{S}_n$.

Namely, we prove that every 2-local derivation on $\mathcal{S}_n$ is a derivation.

Alauadinov Amir, PhD., dotsent, V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences (Nukus, Uzbekistan);

Yusupov Bakhtiyor, PhD., Senior researcher, V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences (Tashkent, Uzbekistan);

Vaisova Nafosat, PhD., student, V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences (Tashkent, Uzbekistan);

We first recall the definition of $\mathcal{S}_n$. We know that the general linear Lie algebra $\mathfrak{gl}_{2n}$ has the natural representation on $\mathbb{C}^{2n}$ by left matrix multiplication. Let $\{u_k, v_k\},\ 1 \leq k \leq n$ be a basis of $\mathbb{C}^{2n}$.

The Heisenberg algebra $\mathfrak{h}_n = \mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C}z$ is a 2-step nilpotent Lie algebra with Lie bracket given by

$$[u_k, v_k] = z, \qquad [z, \mathfrak{h}_n] = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Recently, the n-th Schrodinger algebra $\mathcal{S}_n$ was introduced [9].

Definition 1. The n-th Schrödinger algebra $\mathcal{S}_n$ is a Lie algebra with a $\mathbb{C}$-basis

$$\{e, f, h, z, u_k, v_k, \mid k = 1, ..., n\}$$

equipped with the following non-trivial commutation relations

$$\begin{array}{lll} [h, e] = 2e, & [h, f] = -2f, & [e, f] = h, \\ [u_k, v_j] = \delta_{kj} z, & [h, u_k] = u_k, & [h, v_k] = -v_k, \\ [e, v_k] = u_k, & [f, u_k] = v_k, & [z, \mathcal{S}_n] = 0, \end{array}$$

where δ_{kj} is the Kronecker Delta defined as 1 for $k = j$ and as 0 otherwise.

A derivation on a Lie algebra $\mathcal{L}$ is a linear map $D : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ which satisfies the Leibniz rule:

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)], \qquad \forall\ x, y \in \mathcal{L}. \tag{1}$$

The set of all derivations of $\mathcal{L}$ is denoted by $\mathrm{Der}(\mathcal{L})$ and with respect to the commutation operation is a Lie algebra.

For any element $y \in \mathcal{L}$ the left multiplication operator $\mathrm{ad}_x : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, defined as $\mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$ is a derivation, and derivations of this form are called inner derivations. The set of all inner derivations of $\mathcal{L}$, denoted by $\mathrm{Inn}(\mathcal{L})$, is an ideal in $\mathrm{Der}(\mathcal{L})$.

Definition 2. A map $\nabla : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (not necessary linear) is called *2-local derivation* if for any $x, y \in \mathcal{L}$ there exists a derivation $D_{x,y} \in \mathrm{Der}(\mathcal{L})$ such that

$$\nabla(x) = D_{x,y}(x), \quad \nabla(y) = D_{x,y}(y).$$

Let $n \geq 2$. For any $1 \leq l < k \leq n$, one can easily verify that the linear map $\sigma_{lk} : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ defined below is a derivation:

$$\begin{aligned} &\sigma_{lk}(h) = \sigma_{lk}(e) = \sigma_{lk}(f) = \sigma_{lk}(z) = 0, \\ &\sigma_{lk}(u_j) = \delta_{lj} u_k - \delta_{lj} u_l, \quad \sigma_{lk}(v_k) = \delta_{lj} v_k - \delta_{kj} v_l. \end{aligned} \tag{2}$$

Clearly, $\sigma_{lk}(1 \leq l < k \leq n)$ are outer derivations. We define another outer derivation τ as follows

$$\begin{aligned} &\tau(h) = \tau(e) = \tau(f) = 0, \\ &\tau(u_l) = \tfrac{1}{2} u_l,\ \tau(v_l) = \tfrac{1}{2} v_l,\ \tau(z) = z,\ 1 \leq l \leq n. \end{aligned} \tag{3}$$

The following theorem is proved in [5].

Theorem 1. $\mathrm{Der}(\mathcal{S}_n) = \mathrm{Inn}(\mathcal{S}_n) \oplus \bigoplus\limits_{1\le i<j\le n} \mathbb{C}\sigma_{ij} \bigoplus \mathbb{C}\tau.$

It should be noted that, if $n = 1$, then $\mathrm{Der}(\mathcal{S}_n) = \mathrm{Inn}(\mathcal{S}_n) \bigoplus \mathbb{C}\tau$, where τ is defined as (3).

Now we give the main theorem concerning 2-local derivations on the n-th Schrödinger algebras $\mathcal{S}_n$.

Theorem 2. Every 2-local derivation on $\mathcal{S}_n$ is a derivation.

Литература

1. *Ayupov Sh., Kudaybergenov K., Rakhimov I.* 2-Local derivations on finite-dimensional Lie algebras // Linear Algebra and its Applications, **474** (2015), 1–11.

2. *Ayupov Sh., Kudaybergenov K., Yusupov B.* 2-Local derivations on generalized Witt algebras // Linear and Multilinear Algebra, **69** (16) (2021), 3130–3140.

3. *Ayupov Sh., Kudaybergenov K., Yusupov B.* Local and 2-Local Derivations of Locally Simple Lie Algebras // Journal of Mathematical Sciences, **278** (4) (2024), 613–622.

4. *Ayupov Sh, Yusupov B.* 2-local derivations of infinite-dimensional Lie algebras // Journal of Algebra and its Aplications, Vol. **19**, No. 5 (2020), 2050100.

5. *Lei B., Yang H.* The derivation algebra and automorphism group of the n-th Schrodinger algebra // Communications in Algebra, **52**:1 (2024), 283–294.

6. *Tang X.* 2-Local derivations on the W-algebra $W(2,2)$ // Journal of Algebra and Its Applications, Vol. **20**, No. 12 (2021), 2150237.

7. *Wu Q., Tang X.* 2-Local Derivations on the Schrödinger Algebra // Bull. Iran. Math. Soc., **48** (2022), 3393–3404.

8. *Peng W., Tang X.* 2-Local derivations on Schrodinger algebra in $(2+1)$- dimensional space-time // Communications in Algebra, **51** (2) (2022), 676–687.

9. *Tao W.* On simple modules of the n-th Schrodinger algebra // J. Pure Appl. Algebra, **226** (5) (2022), 106944.

10. *Šemrl P.* Local automorphisms and derivations on $B(H)$ // Proceedings of the American Mathematical Society, **125** (1997), 2677–2680.

11. *Yao Y., Zhao K.* Local properties of Jacobson-Witt algebras // Journal of Algebra, V. **586** (2021), 1110–1121.

ОБ ОДНОЙ «УНИКАЛЬНОЙ» 6-МЕРНОЙ АЛГЕБРЕ ЛИ В ЗАДАЧЕ ОБ ОДНОРОДНОСТИ В $\mathbb{C}^4$

А.В. Атанов,
atanov.cs@gmail.com

УДК 515.172.2, 512.816

В связи с задачей описания голоморфно однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$ изучены свойства орбит 7-мерных продолжений 6-мерной нильпотентной алгебры Ли [6, 28].

Ключевые слова: голоморфно однородная гиперповерхность, нильпотентная алгебра Ли, Леви-невырожденность.

On one "unique" 6-dimensional Lie algebra in the homogeneity problem in $\mathbb{C}^4$

In connection with the problem of describing holomorphically homogeneous hypersurfaces of the space $\mathbb{C}^4$, we discuss properties of orbits of 7-dimensional extensions of the 6-dimensional nilpotent Lie algebra [6, 28].

Keywords: holomorphically homogeneous hypersurfaces, nilpotent Lie algebra, Levi-nondegeneracy.

Одним из важных вопросов в задаче описания голоморфно однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^4$ является вопрос об орбитах в этом пространстве 7-мерных алгебр Ли голоморфных векторных полей. В классификациях абстрактных разрешимых неразложимых 7-мерных алгебр [1,2] оказывается полезным выделение нильрадикала обсуждаемых алгебр. Ниже обсуждается (уникальная) 6-мерная нильпотентная алгебра Ли [6, 28] из [2].

Теорема 1. *Все 7 типов 7-мерных продолжений алгебры* [6, 28], *описываемой следующими нетривиальными соотношениями*

$$[e_2, e_4] = e_1, \quad [e_3, e_5] = e_1, \quad [e_4, e_6] = e_2, \quad [e_5, e_6] = e_3$$

в некотором базисе $e_1, \ldots, e_6$, имеют Леви-невырожденные нетрубчатые орбиты в $\mathbb{C}^4$.

Согласно [3], 7-мерные алгебры с такими орбитами в $\mathbb{C}^4$ достаточно редки. Так, в работе [2] имеется 82 типа 7-мерных нильпотентных алгебр Ли, содержащих в точности две 4-мерные абелевы подалгебры. Из них лишь 7 типов допускают невырожденные по Леви нетрубчатые орбиты в $\mathbb{C}^4$. Близкая ситуация имеет место и с 7-мерными алгебрами Ли, имеющими единственную 4-мерную абелеву подалгебру внутри 6-мерного нильрадикала. Из 28 типов таких алгебр, являющихся продолжениями семи различных нильпотентных 6-мерных нильрадикалов

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 23-21-00109).

Атанов Артем Викторович, к.ф.-м.н., ВГУ (Воронеж, Россия); Artem Atanov (Voronezh State University, Voronezh, Russia)

(отличных от $[6,28]$), допускают реализации в $\mathbb{C}^4$ с невырожденными нетрубчатыми орбитами не более 11 типов.

Схема описания орбит в $\mathbb{C}^4$ 7-мерных алгебр Ли и вместе с этим, доказательства теоремы 1 изложена в [3]. Первым шагом схемы является

Предложение 1. *Если на Леви-невырожденной нетрубчатой гиперповерхности $M \subset \mathbb{C}^4$ имеется алгебра голоморфных векторных полей со структурой $[6,28]$, то с точностью до локальных голоморфных преобразований базис этой алгебры имеет вид*

$$\begin{gathered} e_1 = (0,0,0,1), e_2 = (0,0,1,0), e_3 = (0,0,C_3,C_3 z_1), \\ e_4 = (1,0,-z_2,z_3), e_5 = (-\tfrac{1}{C_3},0,-C_3 z_2, D_5 - C_3 z_1 z_2), \\ e_6 = (0,1,0,0) \end{gathered} \tag{1}$$

с некоторыми комплексными константами C_3, D_5.

Далее использование коммутационных соотношений полей (1) с последним базисным полем e_7 (см. [2]) позволяет без противоречий (!) определить (с точностью до нескольких комплексных констант) компоненты этого поля для 7 типов различных продолжений алгебры $[6,28]$. Завершающим шагом схемы является интегрирование полученных алгебр, то есть получение искомых орбит.

Пример. Орбитами 7-мерных алгебр [7,[6,28],1,2] и [7,[6,28],1,3] являются следующие голоморфно однородные невырожденные нетрубчатые гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^4$ ($y_j = \operatorname{Im}(z_j)$, $x_1 = \operatorname{Re}(z_1)$, $a \in \mathbb{R}$):

$$\begin{gathered} y_4 = e^{a y_2} + y_2 \left(x_1^2 + y_1^2\right) + y_1 y_3, \\ y_4 = y_2^a + y_2 \left(x_1^2 + y_1^2\right) + y_1 y_3. \end{gathered}$$

Литература

1. *Vu A.L., Nguyen T.A., Nguyen T.T.C., Nguyen T.T.M., Vo T.N.* Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals// Communications in Algebra, **51**:5 (2023), 1866-1885.

2. *Parry A.R.* A Classification of Real Indecomposable Solvable Lie Algebras of Small Dimension with Codimension One Nilradicals. — Logan, Utah, 2007.

3. *Лобода А.В.* О 7-мерных алгебрах Ли, допускающих Леви-невырожденные орбиты в $\mathbb{C}^4$ // Тр. ММО, **84**:2 (2023), 205-230.

СТОУН-ЧЕХОВСКАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ МЕР: ПЕРВАЯ АКСИОМА СЧЕТНОСТИ

Н. А. Бадулина,
ninabadulina00@mail.ru

УДК 517.518.1

В работе изучается вопрос наличия первой аксиомы счетности для пространства вероятностных мер на вполне регулярном топологическом пространстве в связи с задачей о совпадении стоун-чеховской компактификации $\beta\mathcal{P}_r(X)$ пространства радоновских вероятностных мер $\mathcal{P}_r(X)$ на вполне регулярном топологическом пространстве X, наделенного слабой топологией, с пространством $\mathcal{P}_r(\beta X)$ радоновских вероятностных мер на стоун-чеховской компактификации βX пространства X. Показано, что свойства сильной счетной определяемости меры достаточно для наличия счетной локальной базы. Также приводится пример неметризуемого пространства с первой аксимой счетности, для которого верен результат о совпадении компактификаций.

Ключевые слова: компактификация Стоуна-Чеха, пространство радоновских вероятностных мер, первая аксиома счетности

Stone-Cech compactification of spaces of measures: first axiom of countability

We study the problem of the first countability of the space of probability measures on a completely regular topological space in relation to the question of the coincidence of the Stone-Cech compactification $\beta\mathcal{P}_r(X)$ of the space of Radon probability measures $\mathcal{P}_r(X)$ on a completely regular topological space X endowed with the weak topology, with the space $\mathcal{P}_r(\beta X)$ of Radon probability measures on the Stone-Cech compactification βX of the space X. We show that the property of being strongly countably determined is sufficient for a measure to have a countable local base and construct an example of a non-metrizable first-countable space, for which there is the coincidence of the compactifications.

Keywords: Stone–Cech compactification, space of Radon probability measures, first axiom of countability

Вопрос о совпадении $\mathcal{P}_r(\beta X)$ и $\beta\mathcal{P}_r(X)$, пространства радоновских вероятностных мер на компактификации Стоуна-Чеха вполне регулярного пространства X и компактификации Стоуна-Чеха пространства радоновских вероятностных мер, впервые возник в работе В. И. Богачева [4], в которой показано, что для некомпактных метрических

Бадулина Нина Александровна, аспирант кафедры теории функкций и функционального анализа, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, (Москва, Россия); Nina Badulina (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

пространств, а также для непсевдокомпактных топологических пространств, равенства нет. В работе А. Г. А. Г. Бабикера [2] для пространства бэровских мер $\mathcal{P}(\beta X)$ в случае произвольного вполне регулярного пространства X получено, что мера из $\mathcal{P}(X)$ является регулярной по отношению к равномерности, порожденной всеми ограниченными непрерывными функциями, тогда и только тогда, когда индуцированная мера из $\mathcal{P}(\beta X)$ обладает свойством сильной счетной определяемости. Оказывается, что свойства сильной счетной определяемости достаточно для наличия счетной локальной базы, изучению которого и посвящена настоящая работа, обобщающая результат Р. Пола [5] с компактных топологических пространств на вполне регулярные.

Определение 1. Назовем регулярную вероятностную меру на вполне регулярном топологическом пространстве X **сильно счетно-определяемой**, если существует счетное семейство $\mathcal{A}$ компактных G_δ-множеств таких, что для любого измеримого множества $U \subset X$

$$\mu(U) = sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, A \subset U\}. \tag{1}$$

Предложение 1. Пусть X — вполне регулярное топологическое пространство, $A \subset X$ — компактное множество, $A \subset W$ — окрестность A, $\mu \in \mathcal{P}(X)$ — сильно счетно-определяемая мера, $\varepsilon > 0$.
Тогда $\exists$ окрестность V множества A такая, что $V \subset W$ и окрестность Ω меры μ в $\mathcal{P}(X)$, что

$$|\nu(V) - \mu(V)| < \varepsilon \tag{2}$$

для всех $\nu \in \Omega$.

Теорема 1. Во вполне регулярном топологическом пространстве X для сильно счетно-определяемой меры $\mu \in \mathcal{P}(X)$ система окрестностей

$$\Omega_n = \{\nu \in \mathcal{P}(X) : \max_{i,j \le n} |\nu(V(i,j)) - \mu(V(i,j))| < \frac{1}{n}\} \tag{3}$$

является счетной базой.

Предложение 2. Пространство радоновских вероятностных мер $\mathcal{P}_r([0,\omega_1))$ на пространстве ординалов $[0,\omega_1)$, для которого верно равенство $\beta\mathcal{P}_r([0,\omega_1)) = \mathcal{P}_r([0,\omega_1])$ [4], обладает первой аксиомой счетности.

Литература

1. *Babiker, A. G. A. G.* On uniformly regular topological measure spaces // Duke Mathematical Journal, 43 (1976), 775–789

2. *Babiker, A. G. A. G.* Uniform regularity of measures on completely regular spaces // (1981)

3. *Богачев, В. И.* Основы теории меры. Том 2. — Москва - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006.

4. *Богачев, В. И.* О компактификации пространств мер // Функциональный анализ и его приложения, 58:1 (2024), 4–21

5. *Pol, R.* Note on the spaces $\mathcal{P}(S)$ of regular probability measures whose topology is determined by countable subsets // Pacific Journal of Mathematics, 100:1 (1982), 185–201

НОВАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РАДИУСА ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ

Г.Г. Брайчев
braichev@mail.ru

УДК 517.538.2

Обсуждается новый геометрический подход к вычислению радиуса полноты системы экспоненциальных мономов, показатели которой являются нулями целой функции экспоненциального типа.

Ключевые слова: система экспоненциальных мономов, радиус полноты, круг Сильвестра.

New formula for the radius of completeness of a system of exponential monomials

A new geometric approach to calculating the radius of completeness of a system of exponential monomials is discussed. As exponents, the zeros of the entire function of exponential type are selected.

Keywords: system of exponential monomials, radius of completeness, Sylvester circle.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — бесконечно большая последовательность комплексных чисел. Этой последовательности сопоставим систему экспоненциальных мономов

$$E_\Lambda = \left\{ z^{k-1}e^{\lambda_n z}, \quad k = 1, 2, \dots, k_n, \quad n \in \mathbb{N} \right\},$$

где k_n — число повторений точки $\lambda = \lambda_n$ в последовательности Λ. Радиус $R(\Lambda)$ круга полноты системы E_Λ определяется как точная верхняя грань радиусов открытых кругов $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, в которых эта система полна (строгое определение и подробности см. в [1]).

Для любого компакта K в $\mathbb{C}$ существует (единственный) наименьший замкнутый круг, содержащий K. Такой круг называем кругом Сильвестра компакта K. Одноточечный компакт совпадает со своим кругом Сильвестра, вырождающимся в эту точку. Для компакта K, отличного от точки, граница K обязательно содержит либо две точки, диаметрально расположенные на границе его круга Сильвестра, либо три точки в вершинах вписанного в круг Сильвестра остроугольного треугольника. Из центра круга Сильвестра выпустим лучи, проходящие через указанные выше точки на границе такого круга. После соответствующего параллельного переноса «картинки» получаем два типа

Брайчев Георгий Генрихович, д.ф.-м.н., профессор, РУДН, МПГУ, Российский университет дружбы народов им. П. Лумумбы, Московский педагогический государственный университет (Москва, Россия); Braichev Georgiy (Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow Pedagogical State University, MPGU, Moscow, Russia)

построенных по компакту K так называемых наборов Сильвестра — специальных совокупностей лучей, выходящих из точки $z = 0$ (см. [2]).

Индикатор целой функции f экспоненциального типа и ее индикаторная диаграмма задаются формулами

$$h(\theta, f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r}, \quad D(f) = \bigcap_{\theta\in[0,2\pi]} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}) \leqslant h(f, \theta)\}.$$

Функция имеет вполне регулярный рост, если для каждого θ в определении индикатора существует обычный предел, когда $r \to +\infty$ вне некоторого множества нулевой относительной меры.

Как следствие результатов [2] получаем такое утверждение.

Теорема. *Пусть f — целая функция экспоненциального типа, $\Lambda(f) = \Lambda$ — ее нулевое множество, а $r(f) > 0$ — радиус круга Сильвестра ее индикаторной диаграммы $D(f)$. Если f имеет вполне регулярный рост, то радиус полноты $R(\Lambda)$ системы экспоненциальных мономов E_Λ и радиус $r(f)$ круга Сильвестра индикаторной диаграммы $D(f)$ совпадают, т. е. $R(\Lambda) = r(f)$.*

Теорема сохраняет силу, если функция f имеет вполне регулярный рост не на каждом луче, а только на двух или трех лучах из соответствующего набора Сильвестра (см. [3]).

Литература

1. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. — Уфа.: РИЦ БашГУ, 2012.

2. *Брайчев Г. Г., Хабибуллин Б. Н., Шерстюков В. Б.* Задача Сильвестра, покрытия сдвигами и теоремы единственности для целых функций // Уфимский математический журнал, **15**:4 (2023), 30-41.

3. *Braichev G. G., Sherstyukov V. B.* Uniqueness theorem for entire functions of exponential type // Lobachevskii Journal of Mathematics, **45**:6 (2024), 2686-2691.

ЗАДАЧИ ПО ЦЕЛЫМ ФУНКЦИЯМ, СВЯЗАННЫЕ С РЕГУЛЯРНЫМ РОСТОМ РЯДОВ ДИРИХЛЕ И ИНТЕРПОЛЯЦИЕЙ

А.М. Гайсин gaisinam@mail.ru

УДК 517.53+517.537.7

В докладе речь пойдет о некоторых классических задачах, связанных с асимптотическими свойствами лакунарных степенных рядов, сходящихся во всей плоскости и имеющих произвольный, сколь угодно быстрый рост, и их обобщений. Эти вопросы по сути сводятся к соответствующим задачам по теории функций, интерполяции в классе целых функций, определяемом некоторой мажорантой из класса сходимости. В этой связи более детально будет рассмотрена одна актуальная задача из работы [1] (см. также [2]).

Ключевые слова: ряд Дирихле, целая функция, интерполяционная последовательность, равенство Полиа.

Problems on entire functions related the regular growth of Dirichlet series and interpolation

The report will discuss some classical problems related to the asymptotic properties of lacunary power series converging in the whole plane and having arbitrarily fast growth, and their generalizations. These questions essentially reduce to the corresponding problems in the theory of functions, interpolation in the class of entire functions determined by some majorant from the convergence class. In this regard, one actual problem from the work [1] will be considered in more detail (see also [2]).

Keywords: Dirichlet series, entire function, interpolation sequence, Polya equality.

Литература

1. Sheremeta M.M. Five open problems in the theory of entire functions // Математичні студії. 1996. Випуск 6. С. 157 – 159.

2. Гайсин А.М. Регулярный рост целых функций, представленных рядами Дирихле. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2024. – 212 с.

Гайсин Ахтяр Магазович, д.ф.-м.н., профессор, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Ahtyar Gaisin (Institute of Mathematics with Computing Centre, Ufa, Russia)

УСТОЙЧИВОСТЬ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЦЕЛОГО РЯДА ДИРИХЛЕ, РОСТ КОТОРОГО КОНТРОЛИРУЕТСЯ ВЫПУКЛОЙ МАЖОРАНТОЙ ТОЛЬКО НА ДИСКРЕТНОМ МНОЖЕСТВЕ

Г.А. Гайсина, gaisinaga@mail.ru

УДК 517.53+517.537.7

Исследуется поведение максимального члена ряда Дирихле с положительными показателями, сумма которого представляет собой целую функцию. Для класса целых рядов Дирихле, определяемого выпуклой мажорантой роста на некоторой последовательности точек, доказана теорема об эквивалентности логарифмов исходного ряда и измененного ряда Дирихле на асимптотическом множестве.

Ключевые слова: максимальный член ряда Дирихле, мажоранта роста, преобразование Юнга.

Stability of the maximal term of an entire Dirichlet series with a growth controlled by a convex majorant only on a discrete set

We study the behavior of the maximal term of a Dirichlet series with positive exponents whose sum is an entire function. For a class of entire Dirichlet series defined by a convex majorant of growth on some sequence of points, we prove a theorem on the equivalence of the logarithms of the original series and the modified Dirichlet series on the asymptotic set.

Keywords: maximum term of a Dirichlet series, growth majorant, Young transform.

Устойчивость максимального члена $\mu(\sigma) = \max_{n\geq 0}\{|a_n|e^{\lambda_n\sigma}\}$ абсолютно сходящегося во всей комплексной плоскости ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}, \quad s = \sigma + it, \quad a_0 = 1, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_n \uparrow \infty, \tag{1}$$

впервые исследовалась в [1].

Пусть L – класс положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $[0, \infty)$ функций, $M(\sigma) = M(\sigma, F) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$. Через $D(\Lambda)$ обозначим класс всех целых рядов Дирихле (1), где $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Обозначим через $\underline{D}(\Phi)$ класс целых рядов Дирихле (1), зависящий от некоторой возрастающей выпуклой мажоранты Φ: $\Phi(x)/x \to \infty$ при

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (грант НОМЦ ПФО, соглашение № 075-02-2024-1444).

Гайсина Галия Ахтяровна, к.ф.-м.н., УУНиТ (Уфа, Россия); Galiya Gaisina (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

$x \to \infty$. По определению, $\underline{D}(\Phi) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \underline{D}_m(\Phi)$, где $\underline{D}_m(\Phi) = \{F \in D(\Lambda)\colon \ \ln M(\sigma_k) \le \Phi(m\sigma_k), \sigma_k = \sigma_k(F) \uparrow \infty\}$, Λ – фиксированная последовательность, удовлетворяющая условию: для любой последовательности $S = \{\sigma_k\}$, $\sigma_k \uparrow \infty$, $\forall\, \eta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \psi_S(\eta\lambda_n)} = 0,$$

где $\psi_S(t) = \Psi_S(t)t^{-1}$, а Ψ_S – функция, сопряженная с Φ по Юнгу относительно последовательности S.

Рассмотрим абсолютно сходящийся в $\mathbb{C}$ измененный ряд Дирихле

$$F_b^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n e^{\lambda_n s}, \quad b_n \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Для каждой функции ψ_S рассмотрим класс

$$W(\psi_S) = \left\{ w \in L\colon \ \sqrt{x} \le w(x), \quad \forall \eta > 0 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\psi_S(\eta x)} \int_1^x \frac{w(t)}{t^2} dt = 0 \right\}.$$

Через $\mu(\sigma)$ и $\mu_b^*(\sigma)$ обозначим максимальные члены рядов (1) и (2).

Теорема 1. *Пусть $\underline{D}(\Phi)$ – класс функций, введенный выше, $F \in \underline{D}(\Phi)$. Обозначим через Ψ_S функцию, сопряженную с Φ по Юнгу относительно соответствующей последовательности $S = S_F = \{\sigma_k\}$, $\psi_S(t) = \Psi_S(t)/t$. Пусть для ψ_S выполнено условие*

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\psi_S(\eta R)} \sum_{0<\lambda_n\le R} \frac{1}{n\lambda_n} = 0,$$

а $B = \{b_n\}$ – последовательность, такая, что $|\ln|b_n|| = O(\lambda_n)$, $n \to \infty$.

Если для некоторой функции $w \in W(\psi_S)$ верны оценки

$$|b_n| + \frac{1}{|b_n|} \le e^{w(\lambda_n)}, \quad n \ge 0,$$

то максимальный член ряда (1) устойчив, т.е. при $\sigma \to +\infty$ вне некоторого исключительного множества $E \subset \mathbb{R}_+$ нулевой нижней плотности справедливо асимптотическое равенство

$$\ln \mu(\sigma) = (1 + o(1)) \ln \mu_b^*(\sigma).$$

Для двойственного класса $D(\Phi)$ соответствующий результат получен в [2].

Литература

1. *Гайсин А.М.* Оценка роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых // Матем. сб. 2003. Т. 194. № 8. С. 55 – 82.

2. *Гайсин А.М., Гайсина Г.А.* Об устойчивости максимального члена ряда Дирихле // Известия вузов. Математика. 2023. № 1. С. 25 – 35.

ТЕОРЕМА ТИПА БАНГА И КРИТЕРИЙ КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ ДЛЯ СЛАБО РАВНОМЕРНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Р.А. Гайсин, rashit.gajsin@mail.ru

УДК 517.53

Изучаются классы Карлемана в жордановых областях комплексной плоскости. Установлен в некотором смысле универсальный для всех слабо равномерных областей критерий квазианалитичности регулярных классов Карлемана. Доказательство основано на решении задачи Дирихле с неограниченной граничной функцией, где по существу использован один результат Берлинга об оценке гармонической меры.

Ключевые слова: теорема Банга, квазианалитические классы в жордановых областях, гармоническая мера, задача Дирихле.

The theorem Bang type and quasianalyticity criterion for weakly uniform domains

We study Carleman classes in Jordan domains of the complex plane. We have established universal in some sense for all weakly uniform domains quasianalyticity criterion of regular Carleman classes. Proof is based on solution of Dirichlet problem with unbounded boundary function. We actually have used one result of Beurling on estimate of harmonic measure here.

Keywords: Bang theorem, quasianalytic classes in Jordan domains, harmonic measure, Dirichlet problem.

Пусть D — некоторая жорданова область в конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел. Через $H(D, M_n)$ обозначим класс функций f, аналитических в D и удовлетворяющих условиям:

$$\sup_{z\in D}\left|f^{(n)}(z)\right| \le c_f A^n M_n \qquad (n \ge 0).$$

Предположим, что область D обладает тем свойством, что все производные $f^{(n)}$ функции $f \in H(D, M_n)$ непрерывно продолжаются до границы ∂D. В этом случае класс Карлемана $H(D, M_n)$ называется *квазианалитическим в точке* $z_0 \in \partial D$, если в данном классе нет отличной от тождественного нуля функции f, такой, что

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \qquad (n \ge 0),$$

Гайсин Рашит Ахтярович, к.ф.-м.н., научный сотрудник, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Rashit Gaisin (Institute of Mathematics with Computing Centre — Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science, Ufa, Russia)

где $f^{(n)}$ $(n \geq 0)$ — производные, непрерывно продолженные до границы ∂D.

Односвязная ограниченная область G называется *слабо равномерной*, если существует постоянная a, такая, что любую пару точек $z_1, z_2 \in G$ можно соединить дугой $\alpha \subset G$ со свойством:

$$|\alpha| \leq a\ |z_1 - z_2| \qquad (|\alpha| \text{ — длина } \alpha).$$

Верна

Лемма. *Пусть D — слабо равномерная жорданова область, $0 < M_n < \infty$ $(n \geq 0)$. Если $f \in H(D, M_n)$, то все производные $f^{(n)}$ $(n \geq 0)$ продолжаются до непрерывных в $\overline{D}$ функций.*

Последовательность $\{M_n\}$ $(M_n > 0)$ называется *регулярной (в смысле Е.М. Дынькина)*, если для чисел $m_n = \frac{M_n}{n!}$ $(n \geq 0)$ выполняются свойства:

а) $m_n^2 \leq m_{n-1} m_{n+1} \qquad (n \geq 1)$;

б) $\sup\limits_n \left(\frac{m_{n+1}}{m_n}\right)^{\frac{1}{n}} < \infty$;

в) $m_n^{\frac{1}{n}} \to \infty$ при $n \to \infty$.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть $\{M_n\}$ $(M_n > 0)$ — регулярная последовательность. Для того, чтобы для любой слабо равномерной жордановой области G со спрямляемой границей L класс Карлемана $H(G, M_n)$ был квазианалитичен в каждой граничной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} = \infty.$$

Литература

1. *Гайсин Р.А.* Универсальный критерий квазианалитичности для жордановых областей // Матем. сб., **209**:12 (2018), 57-74

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА МИНИМАЛЬНЫХ ОШИБОК

О.Н. Евхута
evhuta@gmail.com

УДК 517.2

В статье представлены условия сходимости итерационного метода приближенного решения нелинейного операторного уравнения $f(x) = 0$ с гладким оператором в гильбертовом пространстве X.

Ключевые слова: метод минимальных ошибок, сходимость, гильбертово пространство.

Convergence of method of minimal errors

The paper presents convergence conditions of iterative method of approximate solving a nonlinear operator equation $f(x) = 0$ with a smooth operator in a Hilbert space X.

Keywords: minimal error method, convergence, Hilbert space.

В статье [1] была предложена новая модификация анализа сходимости метода минимальных невязок для операторных уравнений в гильбертовых пространствах. Полученный там результат является обобщением классических теорем Л.А. Кивистика [2] и М.А. Красносельского и Я.Б. Рутицкого [3]. Цель настоящей статьи — распространить на тот же класс уравнений предложенный в [1] подход на другой метод градиентного типа: метод минимальных ошибок (здесь и ниже используется терминология из [3]). Ранее метод интенсивно изучался в работах [4,5].

Пусть $f : \ B(x_0, R) \ (\subseteq X) \to Y$ — дифференцируемый (по Фреше) оператор, X и Y — вещественные гильбертовы пространства. Нас интересует решения уравнения

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

расположенные в шаре $B(x_0, R)$. Ниже предполагается выполненным условие Липшица

$$\|f'(x_1) - f'(x_2)\| \leq k(r)\|x_1 - x_2\| \quad (\|x_1 - x_0\|, \|x_2 - x_0\| \leq r, \ 0 < r \leq R), \tag{2}$$

где $k(r)$ определена и не убывает на $[0, R]$.

Рассмотрим вопрос о сходимости метода минимальных ошибок

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|f(x_n)\|^2}{\|f'(x_n)^* f(x_n)\|^2} \, f'(x_n)^* f(x_n) \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{3}$$

приближенного решения операторного уравнения (1). Ниже предполагается, что производная $f'(x)$ удовлетворяет условиям:

Евхута Ольга Николаевна, к.ф.-м.н., доцент, ЮРГПУ (НПИ) им. М.И. Платова (Новочеркасск, Россия); Olga Evkhuta (Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk, Russia)

$$\|(f'(x)^*)^{-1}h\| \ \|f'(x)h\| \le c(r)\|h\|^2 \ \ (\|x-x_0\| \le r, \ 0 < r \le R, \ h \in X), \tag{4}$$

$$\|f'(x)h\| \ge d(r)\|h\| \quad (\|x-x_0\| \le r, \ 0 < r \le R, \ h \in X), \tag{5}$$

где функции $c(r)$, $d(r)$ определены на $[0, R]$, первая из них — неубывающие, а вторая — невозрастающая.

Пусть r — некоторое число из $[0, R]$ и $a = \|f(x_0)\|$; нас будет интересовать поведение последовательности $\|f(x_n)\|$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Как и выше установим некоторое вспомогательное неравенство при дополнительном предположении, что все элементы x_n $(n = 0, 1, \ldots)$ остаются в шаре $B(x_0, r)$ и, более того, справедливо

неравенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| \le r. \tag{6}$$

.

Тогда

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) =$$

$$= f(x_n) - \frac{\|(f(x_n)\|^2}{\|f'(x_n)^* f(x_n)\|^2} f'(x_n) f'(x_n)^* f(x_n) +$$

$$+ f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n+1} - x_n).$$

Для первого слагаемого правой части этого неравенства теперь справедливо тождество

$$\left\| f(x_n) - \frac{\|f(x_n)\|^2}{\|f'(x_n)^* f(x_n)\|^2} f'(x_n) f'(x_n)^* f(x_n) \right\| =$$

$$= \sqrt{\frac{\|f(x_n)\|^2 \|f'(x_n) f'(x_n)^* f(x_n)\|^2}{\|f'(x_n)^* f(x_n)\|^4} - 1} \ \|f(x_n)\|$$

и поэтому, в силу (4) и (6),

$$\left\| f(x_n) - \frac{\|f(x_n)\|^2}{\|f'(x_n)^* f(x_n)\|^2} f'(x_n) f'(x_n)^* f(x_n) \right\| \le \sqrt{c^2(r) - 1} \, \|f(x_n)\|; \tag{7}$$

для второго слагаемого, в силу (2) и (5),

$$\|f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| \le \frac{k(r)\|f(x_n)\|^2}{2d^2(r)}. \tag{8}$$

В результате из (7) и (8), мы получаем неравенство

$$\|f(x_{n+1})\| \le v(r, \|f(x_n)\|) \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{9}$$

где

$$v(r, \phi) = \sqrt{c^2(r) - 1} \, \phi + \frac{k(r)\phi^2}{2d^2(r)}. \tag{10}$$

Подчеркнем и здесь, что это неравенство выведено в предположении справедливости неравенства (6).

Пусть
$$0 \le c \le \sqrt{2}. \tag{11}$$
Тогда функция (10) имеет единственную положительную неподвижную точку
$$\psi_*(r) = \frac{2d^2(r)}{k(r)} \left(1 - \sqrt{c^2(r) - 1}\right). \tag{12}$$
При $0 < \phi < \psi_*(r)$ функция $v(r,\phi)$ обладает свойством $v(r,\phi) < \phi$; поэтому в случае $a < \psi_*(r)$ последовательность $\|f(x_n)\|$ $(n = 0, 1, \ldots)$ стремится к нулю. Более того, справедливы неравенства
$$\|f(x_n)\| \le v^{(n)}(r,a) \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{13}$$
где $v^{(0)}(r,\phi) = \phi$ и $v^{(n)}(r,\cdot)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ определены рекуррентными равенствами $v^{(n+1)}(r,\phi) = v^{(n)}(r, v(r,\phi))$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Далее, снова в силу (5),
$$\|x_{n+1} - x_n\| \le \frac{1}{d(r)} \|f(x_n)\| \le \frac{1}{d(r)} v^{(n)}(r,a) \quad (n = 0, 1, \ldots)$$
поэтому
$$\sum_{n=0}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| \le \frac{1}{d(r)} \sum_{n=0}^{\infty} v^{(n)}(r,a); \tag{14}$$
ряд в правой части сходится в силу неравенства $a < \psi_*$. Отметим, что этот ряд сходится не медленнее геометрической прогрессии со знаменателем
$$q_0 = \sqrt{c^2(r) - 1} + \frac{k(r)\phi^2}{2d^2(r)},$$
а реальный показатель ее сходимости определяется равенством
$$q_\infty = \sqrt{c^2(r) - 1}.$$

Несложные рассуждения показывают, что неравенство (6) и в этом случае будет выполняться, если
$$V(r,a) \le rd(r), \tag{15}$$
где $V(r,\phi)$ определяется по $v(r,\phi)$ аналогичным (16) равенством; свойства этой функции полностью подобны свойствам функции $U(r,\phi)$.

Проведенные рассуждения доказывают следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть оператор f удовлетворяет условиям* (2), (4)-(5), (11) *и пусть выполнены неравенства*
$$a < \psi_*(r) \tag{16}$$

и
$$\frac{1}{d(r)}\,V(r,a) \le r. \tag{17}$$
Тогда уравнение (1) имеет в шаре $B(x_0,r)$ решение x_*, приближения (3) сходятся к этому решению, причем справедливы неравенства
$$\|x_{n+1}-x_n\| \le \frac{1}{d(r)}\,v(r,\|x_n-x_{n-1}\|) \quad (n=0,1,\ldots). \tag{18}$$
$$\|x_n-x_*\| \le \frac{1}{d(r)}\,V(r,v^{(n)}(r,a)) \quad (n=0,1,\ldots). \tag{19}$$

Литература

1. *Забрейко П.П., Кирсанова-Евхута О.Н.* Новая теорема о сходимости метода минимальных невязок. // Весці НАН Беларусі №2 (2004), 5-8

2. *Кивистик Л.А.* Об одной модификации итерационного метода с минимальными невязками для решения нелинейных операторных уравнений. // Докл. АН СССР, **136**:1 (1961), 22-25.

3. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969.

4. *Кивистик Л.А.* О методе наискорейшего спуска для решения нелинейных уравнений. // Известия АН ЭстССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, **9**:2 (1960), 145-159.

5. *Кивистик Л.А.* О некоторых итерационных методах для решения операторных уравнений в пространстве Гильберта. // Известия АН ЭстССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, **9**:3 (1960), 229-241.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ЗАМКНУТОМ ГРАФИКЕ К АНАЛИЗУ УСТОЙЧИВОСТИ РЕКУРРЕНТНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Д.К. Зацепин, zatsepin01@mail.ru

УДК 517.9

В работе рассматривается применение теоремы о замкнутом графике для анализа устойчивости рекуррентных нейронных сетей в топологических векторных пространствах. Доказывается существование единственной неподвижной точки оператора перехода состояний и сходимость итеративного процесса к этой точке. Приводится пример применения разработанной теории в задачах прогнозирования временных рядов.

Ключевые слова: нейронные сети, устойчивость, теорема о замкнутом графике, топологические векторные пространства.

Application of the Closed Graph Theorem to the Stability Analysis of Recurrent Neural Networks

This paper addresses the application of the Closed Graph Theorem to analyze the stability of recurrent neural networks (RNNs) in topological vector spaces. The existence of a unique fixed point of the state transition operator and the convergence of the iterative process to this point are proven. An example of the developed theory is given in time series forecasting.

Keywords: neural networks, stability, closed graph theorem, topological vector spaces.

Исследование устойчивости рекуррентных нейронных сетей (RNN) в топологических векторных пространствах является важной задачей, связанной с анализом динамики таких систем. В данной работе мы рассматриваем применение теоремы о замкнутом графике [2] для доказательства существования и единственности неподвижной точки оператора перехода состояний, а также сходимости итеративного процесса к этой точке.

Пусть X — банахово пространство, представляющее пространство состояний рекуррентной нейронной сети, и пусть $T\colon X \to X$ — оператор перехода состояний, определяющий динамику сети по правилу:

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Наша цель — установить условия, при которых существует единственная неподвижная точка $x^* \in X$, такая что $T(x^*) = x^*$, и последовательность $\{x_n\}$ сходится к x^* при любом начальном состоянии $x_0 \in X$.

Зацепин Даниил Кириллович, студент, РГУ имени С. А. Есенина (Рязань, Россия); Daniil Zatsepin (Ryazan State University, Ryazan, Russia)

Одним из ключевых инструментов для достижения этой цели является теорема о сжимающих отображениях (теорема Банаха о неподвижной точке) [1]. Однако для применения этой теоремы необходимо, чтобы оператор T был сжимающим, то есть существовало $\lambda \in [0, 1)$ такое, что

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \lambda \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X. \tag{2}$$

В контексте RNN оператор T может быть нелинейным и не всегда удовлетворяет условию сжимающего отображения. Поэтому мы предлагаем использовать теорему о замкнутом графике для обоснования непрерывности оператора T и, следовательно, применения теоремы о неподвижной точке.

Теорема о замкнутом графике. *Пусть X и Y — банаховы пространства, и оператор $T\colon X \to Y$ имеет замкнутый график. Тогда оператор T непрерывен.*

Замкнутость графика оператора T означает, что если последовательности $\{x_n\} \subset X$ и $\{T(x_n)\} \subset Y$ таковы, что $x_n \to x$ в X и $T(x_n) \to y$ в Y, то $y = T(x)$.

Применяя эту теорему, мы можем показать непрерывность оператора T, если его график замкнут. Далее, если оператор T непрерывен и удовлетворяет условию (2) с некоторым $\lambda \in [0, 1)$, то по теореме Банаха о неподвижной точке существует единственная неподвижная точка $x^* \in X$, и последовательность $\{T^n(x_0)\}$ сходится к x^* для любого $x_0 \in X$.

Теорема 1. *Пусть X — банахово пространство, и оператор $T\colon X \to X$ имеет замкнутый график и удовлетворяет условию (2) с некоторым $\lambda \in [0, 1)$. Тогда существует единственная неподвижная точка $x^* \in X$, и для любого $x_0 \in X$ последовательность $\{T^n(x_0)\}$ сходится к x^*.*

Пример. Рассмотрим рекуррентную нейронную сеть с функцией активации $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определяемой как $\varphi(x) = \tanh(x)$. Пусть состояние сети задаётся вектором $x \in \mathbb{R}^n$, а оператор перехода состояний имеет вид

$$T(x) = W\varphi(x) + b. \tag{3}$$

где $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица весовых коэффициентов, $b \in \mathbb{R}^n$ — вектор смещений, и φ применяется покомпонентно.

Предположим, что норма матрицы W удовлетворяет условию $\|W\| < 1$. Тогда для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\|T(x) - T(y)\| = \|W(\varphi(x) - \varphi(y))\| \leq \|W\| \|\varphi(x) - \varphi(y)\|. \tag{4}$$

Поскольку функция φ Липшицева с константой $L = 1$, то

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \|x - y\|. \tag{5}$$

Следовательно,

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|W\| \|x - y\|. \tag{6}$$

Поскольку $\|W\| < 1$, оператор T является сжимающим, и по теореме 1 существует единственное устойчивое состояние, к которому сеть сходится из любого начального состояния.

Таким образом, мы показали, что при выполнении условий замкнутости графика оператора T и его сжимаемости рекуррентная нейронная сеть является устойчивой и сходится к единственному устойчивому состоянию. Это имеет важное значение для практических приложений, где гарантии сходимости и устойчивости системы являются критичными.

Литература

[1] *Banach S.* Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales // Fundamenta Mathematicae, **3** (1922), 133–181.

[2] *Kreyszig E.* Introductory Functional Analysis with Applications. — New York: John Wiley & Sons, 1978.

АДАМАРОВСКИЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА И БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ВПЛОТЬ ДО ГРАНИЦЫ

О.А. Иванова, С.Н. Мелихов
neo_ivolga@mail.ru, snmelihov@yandex.ru

УДК 517.982.274, 517.983.22

Получено представление в виде мультипликативной свертки адамаровских операторов в пространствах функций, голоморфных в ограниченной выпуклой области комплексной плоскости и полиномиального роста вблизи границы области или бесконечно дифференцируемых вплоть до ее границы.

Ключевые слова: оператор адамаровского типа, пространство голоморфных функций.

Hadamard type operators in spaces of holomorphic functions of polynomial growth and smooth up to the boundary

A representation is obtained in the form of a multiplicative convolution of Hadamard type operators in spaces of functions that are holomorphic in a bounded convex domain of the complex plane and of polynomial growth near the boundary of the domain or infinitely differentiable up to its boundary.

Keywords: Hadamard type operators, space of holomorphic functions.

Операторы адамаровского типа, т.е. линейные непрерывные операторы, для которых каждый моном является их собственной функцией, в ненормируемых пространствах голоморфных функций достаточно подробно исследованы в следующих ситуациях: в пространствах всех голоморфных функций на открытых подмножествах комплексной плоскости (см. [1]) и в пространствах вещественно аналитических функций как одной, так и многих переменных (см. [2]). Их теория является "операторной" частью исследований, связанных с понятием адамаровского произведения голоморфных функций, и неотделима от его аналитического аспекта. Далее идет речь об адамаровских операторах в пространствах голоморфных функций с определенными ограничениями.

Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$; $H(G)$ — пространство всех голоморфных в G функций; $d_G(z) := \inf_{t\in\partial G} |z-t|$ — расстояние

Иванова Ольга Александровна, к.ф.-м.н., ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия); Olga Ivanova (Southern Federal University, Rostov on Don, Russia)

Мелихов Сергей Николаевич, д.ф.-м.н., ЮФУ (Ростов-на-Дону, Россия), ЮМИ ВНЦ РАН (Владикавказ, Россия); Sergej Melikhov (Southern Federal University, Rostov on Don, Russia; Southern Mathematical Institute of VSC of RAN, Vladikavkaz)

от точки $z \in G$ до границы ∂G области G. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим банахово пространство

$$H^{-n}(G) := \left\{ f \in H(G) \mid \ \|f\|_n := \sup_{z \in G} |f(z)|(d_G(z))^n < +\infty \right\}$$

с нормой $\|\cdot\|_n$ и положим $H^{-\infty}(G) := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} H^{-n}(G)$. Зададим в $H^{-\infty}(G)$ топологию индуктивного предела последовательности пространств $H^{-n}(G)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в $H^{-\infty}(G)$. Символом $H_\infty(\overline{G})$ обозначим пространство Фреше всех C^∞–функций на $\overline{G}$, голоморфных в G.

Ниже G_1, G_2 — ограниченные выпуклые области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0. Множество скалярных мультипликаторов

$$M(G_2, G_1) := \{t \in \mathbb{C} \,|\, tz \in G_1 \text{ для любого } z \in G_2\}$$

является выпуклым компактом с точкой 0 в своей внутренности. Далее $H_\infty(M(G_2, G_1))'$ — топологическое сопряженное к $H_\infty(M(G_2, G_1))$.

Теорема. *(i) Для любого оператора B адамаровского типа из $H^{-\infty}(G_1)$ в $H^{-\infty}(G_2)$ (соотв., из $H_\infty(\overline{G}_1)$ в $H_\infty(\overline{G}_2)$) существует единственный функционал $\varphi \in H_\infty(M(G_2, G_1))'$, для которого $B(f)(z) = \varphi_t(f(tz))$ для любых $z \in G_2$, $f \in H_{-\infty}(G_1)$ (соотв., $f \in H_\infty(\overline{G}_1)$).*
(ii) Для любого функционала $\varphi \in H_\infty(M(G_2, G_1))'$ оператор $B(f)(z) = \varphi_t(f(tz))$, $z \in G_2$, $f \in H^{-\infty}(G_1)$ (соотв., $f \in H_\infty(\overline{G}_1)$) является оператором адамаровского типа из $H^{-\infty}(G_1)$ в $H^{-\infty}(G_2)$ (соотв., из $H_\infty(\overline{G}_1)$ в $H_\infty(\overline{G}_2)$).

Теорема показывает, что множества операторов адамаровского типа из $H^{-\infty}(G_1)$ в $H^{-\infty}(G_2)$ и из $H_\infty(\overline{G}_1)$ в $H_\infty(\overline{G}_2)$ совпадают (с точностью до естественного сужения).

Примерами адамаровских операторов при $G_1 = G_2$ являются оператор Эйлера $\mathcal{E}(f)(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k z^k f^{(k)}(z)$ ($b_k \in \mathbb{C}$) конечного порядка и оператор Харди-Литтлвуда $\mathcal{H}(f) = \int\limits_0^1 g(t) f(tz) dt$, $g \in C[0,1]$.

Если учесть, что $H_\infty(M(G_2, G_1))$ — топологическое подпространство $C^\infty(M(G_2, G_1))$, то адамаровские операторы в рассматриваемых пространствах можно описать, используя представление обобщенных функций с носителем в $M(G_2, G_1)$. Пусть ν — мера Лебега в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Следствие. *Для любого оператора адамаровского типа B из $H^{-\infty}(G_1)$ в $H^{-\infty}(G_2)$ (соотв., из $H_\infty(\overline{G}_1)$ в $H_\infty(\overline{G}_2)$) существуют функции $g_k \in C(M(G_2, G_1))$, $0 \le k \le n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, для которых $B(f)(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \int\limits_{M(G_2,G_1)} z^k g_k(t) f^{(k)}(tz) d\nu(t)$, $z \in G_2$, $f \in H^{-\infty}(G_1)$ (соотв., $f \in H_\infty(\overline{G}_1)$).*

Любой оператор такого вида является адамаровским из $H^{-\infty}(G_1)$ *в* $H^{-\infty}(G_2)$ *(соотв., из* $H_\infty(\overline{G}_1)$ *в* $H_\infty(\overline{G}_2)$*).*

Литература

1. *Trybula M.* Multipliers on spaces of holomorphic functions // Complex Anal. Oper. Theory, **17**, article number 94 (2023).

2. *Domański P., Langenbruch M., Vogt D.* Hadamard type operators on spaces of real analytic functions in several variables // J. Funct. Anal., **269** (2015), 3868–3913.

ОБ ОДНОЙ ШКАЛЕ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

К.П. Исаев, Р.С. Юлмухаметов
samatmath@yandex.ru

УДК 517.9

Данное исследование связано с задачами теории представления функций рядами экспонент.

Ключевые слова: ряд экспонент, класс Смирнова, пространство Бергмана.

On a scale of Banach spaces of analytic functions on a convex domain

This study is related to the problems of the theory of representation of functions by exponential series.

Keywords: exponential series, Smirnov class, Bergman space.

В 1975г. Левин Б.Я. и Любарский Ю.И. [1] доказали, что функции из класса Смирнова $E_2(D)$ на выпуклом многоугольнике D представляются в виде безусловно сходящегося ряда экспонент. В работе [2] эта теорема перенесена на пространство Бергмана $B_2(D)$. Существенной частью этих результатов является описание преобразования Коши функционалов

$$C(S)(\zeta) = S_z\left(\frac{1}{z-\zeta}\right), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}.$$

В случае пространств Смирнова $E_2(D)$ оказалось, что $C(E_2^*)$ изоморфно пространству Смирнова на дополнении $\mathbb{C}\setminus\overline{D}$ [3]. Для произвольных выпуклых областей эта задача решена Меренковым С.А. в работе [4]. Оказалось, что пространство $C(B_2^*)$ изоморфно пространству

$$\left\{\gamma(\zeta) \in H(\mathbb{C}\setminus\overline{D}) : \ \|\gamma\|^2 := \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{D}} |\gamma'(\zeta)|^2 dm(\zeta) < \infty\right\},$$

где $dm(\zeta)$ — плоская мера Лебега. В работе [5] показано, что пространство $E_2(\mathbb{C}\setminus\overline{D})$ изоморфно пространству

$$\left\{\gamma(\zeta) \in H(\mathbb{C}\setminus\overline{D}) : \ \|\gamma\|^2 := \int_{\mathbb{C}\setminus\overline{D}} |\gamma'(\zeta)| \text{dist } (D,\zeta) dm(\zeta) < \infty\right\},$$

УУНиТ, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия
УУНиТ, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г.Уфа, Россия

где dist (D,ζ) – расстояние от точки ζ до множества $\overline{D}$. Другими словами, пространство преобразований Коши $C(E_2(D))$ изоморфно пространству $B_2^{(0)}(D)$. Параметризованное семейство пространств

$$B_2^{(\alpha)}(D)=\left\{h(\zeta)\in H(\mathbb{C}\setminus\overline{D}):\ \|h\|^2:=\int_{\mathbb{C}\setminus\overline{D}}|h(\zeta)|^2\text{dist}\,^{2\alpha}(D,\zeta)dm(\zeta)<\infty\right\},$$

образуют естественную шкалу банаховых пространств на любом отрезке $[\alpha_0;\beta_0]$, $-\frac{1}{2}<\alpha<\beta_0<\infty$. Пусть F_α — гильбертово пространство аналитических в D функций относительно нормы

$$\|f\|=\left((2\alpha+1)\int_D|f(z)|^2\delta^{2\alpha}(z)dm(z)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 1. *Для любого комплексного многочлена* $p(z)$

$$\lim_{\alpha\to-\frac{1}{2}}\|p\|_{F_\alpha(D)}=\|p\|_{E^2(D)}.$$

Литература

1. *Б. Я. Левин, Ю. И. Любарский* "Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент" , Изв. АН СССР. Сер. матем., **39** (1975), №3, 657—702.

2. *К. П. Исаев* "Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках" , Уфимск. матем. журн., **2** (2010), №1, 71—86.

3. *A. P. Calderon* "Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators" , Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **74** (1977), №4, 1324–1327.

4. *A. P. Calderon* "On the Cauchy transform of the Bergman space" , Матем. физ., анал., геом., **7** (2000), №1, 119–127.

5. *В. И. Луценко, Р. С. Юлмухаметов* "Обобщение теоремы Винера–Пэли на функционалы в пространствах Смирнова" , Тр. МИАН, **200** (1991), 245–254.

ON A NEW APPROACH IN THE THEORY OF RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON NON-RECTIFIABLE CURVES

D Katz
katzdavid89@gmail.com

УДК 517.9

The classics of this section of complex analysis are books that have been reprinted many times and translated into foreign languages of F.D. Gakhov and N.I. Muskhelishvili. To date, a significant number of other monographs and textbooks have been published on the theory of the Riemann boundary value problem, its individual sections, applications and generalizations. If initially the main field of application of this theory was continuum mechanics, now it is used in many areas, including branches of mathematics as far apart as the theory of elasticity, queuing theory, the problem of moments in its various variants, representing systems of functions, orthogonal polynomials and random matrices, rational approximations, approximations of transcendental functions and many others.

The Riemann boundary value problem is the problem of restoring a piecewise-holomorphic function from a given linear relationship (conjugation condition) between its limit values on both sides on a given contour on which it loses holomorphy. If Γ is a closed curve dividing the complex plane $\overline{\mathbb{C}}$ onto finite domain D^+ and domain D^- containing the point at infinity, then we need to find a function $\Phi(z)$, holomorphic in $\overline{C}\setminus\Gamma$, limit values $\Phi^\pm(t)$ of which in points $t\in\Gamma$ from domains $D^\pm$ exist and are bounded with the boundary condition

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t\in\Gamma, \qquad (RBVP)$$

where $G(t)$ and $g(t)$ - function given on Γ. When $G(t)\equiv 1$, we get a so-called jump problem

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t), \quad t\in\Gamma. \qquad (JP)$$

to which the solution of the Riemann problem $(RBVP)$ is reduced by the factorization method. In turn, the solution to the jump problem is given by a Cauchy type integral

$$\int\limits_\Gamma \frac{g(t)\,dt}{t-z},$$

which assumes the rectifiability of the curve Γ. Classical results were obtained under the more restrictive assumption of piecewise smoothness of the contour. Only at the very end of the seventies E.M. Dynkin and T.

Moscow Polytechnic University, Russian Federation, Moscow, Bolshaya Semenovskaya, 38

Salimov independently obtained conditions for the existence of boundary values of a Cauchy-type integral over a non-smooth rectifiable curve, and thus created the prerequisites for solving the Riemann problem on such curves using the traditional method.

At the same time, the Riemann boundary value problem itself retains its meaning for non-rectifiable contours. The problem of developing new methods for solving the Riemann problem that do not rely on classical contour integration became especially relevant after the works of B. Mandelbrot and others, who proposed the point of view according to which the so-called fractal curves that are not rectifiable.

In the early eighties of the last century, B.A. Kats made the transition to non-rectifiable curves in the Riemann problem.

Initially, a method was developed that did not rely on contour integration, called the quasi-solution regularization method. Briefly it can be described as follows. Let $\varphi(z)$ be a differentiable (but, generally speaking, not holomorphic) in $\overline{C} \setminus \Gamma$ function, which has a required jump on a curve Γ, so

$$\varphi^{+}(t) - \varphi^{-}(t) = g(t), \quad t \in \Gamma;$$

Such a function was called a quasi-solution of the jump problem. Then the solution to this problem itself can be sought in the form $\Phi(z) = \varphi(z) - \psi(z)$, where ψ - a function continuous in the entire complex plane that satisfies in $\overline{C} \setminus \Gamma$ the equation

$$\frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}.$$

The solution to the Riemann problem is constructed in a similar way. We can say that the method of regularization of quasi-solutions is the reduction of a given boundary value problem to $\overline{\partial}-$equation.

One of the important results obtained at this stage is the discovery of a connection between the solvability of the problem and the metric characteristic of the contour, most often called its upper Minkowski dimension. The definition of this dimension will be given below. The following criterion was established for the solvability of the problem of a jump (JP) on a closed curve.

Theorem(B.A. Kats)

Let the jump g satisfy the Holder condition with exponent ν. Then the jump problem (JP) has a solution when

$$\nu > \frac{1}{2}\overline{dm}(\Gamma), \tag{$*$}$$

where $\overline{dm}(\Gamma)$ - the Minkowski dimension of the contour Γ, and this condition cannot be improved. The latter means that for any pair of given values ν and d, satisfying the inverse inequality $\nu \leq d/2$, we can specify a curve Γ of dimension $\overline{dm}(\Gamma) = d$ and a jump g, defined on it, satisfying the Holder condition with exponent ν, for which the problem has no solutions.

However, this fundamental result immediately revealed certain limitations. The first of them is the fact that not every jump problem that does not satisfy the $(*)$ criterion is unsolvable, i.e. this sufficient condition for solvability is necessary only for classes of curves and boundary data. In this regard, the question arose about its clarification.

In this regard, a need arose for new metric characteristics of non-rectifiable curves that would be more consistent with the needs of the theory of the Riemann problem than the Minkowski dimension. The metric characteristics introduced in them (refined metric dimension and approximation dimension) make it possible to obtain a complete analogue of the above criterion. At the same time, the same works show that these analogues do not have the disadvantage of inaccuracy. Unfortunately, when using them, another vicissitude of the method arises: calculating these dimensions for non-rectifiable curves is extremely difficult.

Another drawback is related to the fact that both characteristics - the H?lder exponent and the Minkowski dimension - are global in nature, and in many cases local solvability conditions are necessary. In addition, these characteristics do not take into account the local asymmetry inherent in non-rectifiable curves. We are talking about the following phenomenon. Let $B(\varepsilon)$ be a round $\varepsilon-$neighbourhood of point $t \in \Gamma$ in $\mathbb{C}$, and $B^{+}(\varepsilon)$ and $B^{-}(\varepsilon)$ are the parts into which this neighborhood is divided by a curve Γ. If the curve is smooth at point t, then these parts are symmetrical with respect to the tangent drawn to Γ in points t up to infinitesimals of high order with respect to ε. If $B^{*}(\varepsilon)$ is an image of $B^{-}(\varepsilon)$ with such symmetry, then the area of the set $B^{+}(\varepsilon) \triangle B^{*}(\varepsilon)$ when $\varepsilon \to 0$ decreases faster, than ε^{2}, and thus faster, then area of $B(\varepsilon)$. Already at the corner point of a piecewise smooth curve it is impossible to construct an axis of symmetry with this property. If the curve Γ is non-rectifiable, then semi-neighborhoods of its point t can have completely different metric properties. This means that the limiting values of the function at points of non-rectifiable curves from different sides have different properties, and this must be taken into account when solving boundary value problems.

Further, from the above it is clear that the problem of solving the Riemann boundary value problem on non-rectifiable curves naturally raises interest in generalizations of the contour integral $\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz$ to the case when the curve Γ is non-rectifiable. Such generalizations also have independent interest.

One of the first publications proposed the following approach. Let a function f defined on a closed curve Γ have an extension F into the domain D^{+} bounded by this curve. Then, according to the Stokes formula

$$\int\limits_{\Gamma} f(t)dt = -\iint_{D^{+}} \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\, dz\, d\overline{z},$$

and if the curve Γ is nonrectifiable, then the right side of this equality can serve as the definition of the left. This approach was subsequently improved and used to represent solutions to the jump problem on non-rectifiable curves in the form of (generalized) Cauchy-type integrals.

There are other approaches to generalizing the integral to non-rectifiable contours.

In this article we will describe the results obtained using new metric characteristics, called the Marcinkiewicz indicators by the author, as well as their modified versions. The name is due to the fact that, as far as is known, J. Marcinkiewicz was the first to propose the use of integrals over the complements of sets as their metric characteristics; integrals of similar form are used in our definition. Marcinkiewicz exponents are used to solve the Riemann boundary value problem and similar boundary value problems on non-rectifiable curves, as well as in the construction and study of generalized integrals over non-rectifiable contours. This improves previously known results in these areas, including the $(*)$ criterion. At the same time, Marcinkiewicz exponents are relatively easy to calculate or estimate, and also make it possible to give the solvability criteria of the problems under consideration a local character. In addition, these characteristics make it possible to take into account the property of local asymmetry of non-rectifiable curves when solving boundary value problems.

The thesis presents a number of classical and modern results on the theory of Riemann boundary value problems and related issues. The general approach with the transition to a generalization of the curvilinear integral and the transition to new metric characteristics brings numerous results. Currently, a team of colleagues from Mexico is improving this technique by moving to a three-dimensional analogue of the characteristics. A number of results in this area should be expected in the near future. Some intrinsic applications of the results above can be found in researching the bianalytical functions case.

ОБ ОБОБЩЕННОМ УТОЧНЕННОМ ПОРЯДКЕ В СМЫСЛЕ ВАЛИРОНА

И.В. Костенко
IEKostenko@mail.ru

УДК 517.9

Классическое определение *уточнённого порядка* формулируется следующим образом [1].

Абсолютно непрерывная функция ρ *на некотором луче* $(a, +\infty)$ *называется уточнённым порядком в смысле Валирона*, если одновременно существуют два предела

$$1) \lim_{r\to\infty} \rho(r) = \varrho \in (0, +\infty), \quad 2) \lim_{r\to\infty} r\rho'(r) \ln r = 0\,.$$

Здесь под $\rho'(r)$ мы понимаем наибольшее производное число в точке r.

Мы рассматриваем обобщенный уточненный порядок в смысле Валирона, когда условие 1) заменяем более общим условием

$$\alpha = \varliminf_{r\to\infty} \rho(r) \le \varlimsup_{r\to\infty} \rho(r) = \varrho \in (0, +\infty),$$

Основной результат — следующая теорема, которая приводится в сокращенном виде.

Теорема. Пусть A — возрастающая строго положительная функция конечного порядка, т.е. $\varlimsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{\ln A(r)}{\ln r} = \varrho < +\infty$, и конечного нижнего порядка: $\varliminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{\ln A(r)}{\ln r} = \alpha > 0$. Тогда существует такой обобщенный уточненный порядок ρ в смысле Валирона, что

$I1)$ $\rho(r) = \varrho + \psi(r)$ — абсолютно непрерывная монотонная функция;

$I2)$ $\lim\limits_{r\to\infty} \psi(r) = 0, \quad \varlimsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{A(r)}{V(r)} = 1$, где $V(r) = r^{\rho(r)}$.

Литература

1. *G. Valiron.* Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière. *Annales de la faculte des sciences de Toulouse*, **5**: 3 (1913), 117–257.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №24-21-00006, https://rscf.ru/project/24-21-00006/).

КГУ, г. Курск, Россия

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЛАВНОГО ЗНАЧЕНИЯ АРГУМЕНТА ГАММА-ФУНКЦИИ В ЧИСТО МНИМЫХ ТОЧКАХ

А.Б. Костин, В.Б. Шерстюков
abkostin@yandex.ru, shervb73@gmail.com

УДК 517.581

Как известно, гамма-функция комплексной переменной принимает невещественные значения на мнимой оси. Обсуждается вопрос о представлении через несобственный интеграл главного значения аргумента гамма-функции чисто мнимой переменной. Наряду с теоретическим задача имеет прикладной интерес.

Ключевые слова: гамма-функция, интегральное представление, главное значение аргумента.

Calculation of the principal value of the argument of the gamma function at purely imaginary points

As is known, the gamma function of a complex variable takes non-real values on the imaginary axis. The issue of representing the principal value of the argument of the gamma function of a purely imaginary variable through an improper integral is discussed. The problem has both theoretical and applied interest.

Keywords: gamma function, integral representation, principal value of the argument.

В работе [1] доказано, что

$$y \ln y - y - \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^{+\infty} g(t) \, \sin(yt) \, dt \, \in \, \mathrm{Arg} \, \Gamma(iy), \qquad y > 0, \tag{1}$$

где функция g определена формулой

$$g(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{1}{t}, \qquad t > 0, \tag{2}$$

а Γ — гамма-функция Эйлера. Другими словами, выражение в левой части (1) дает одно из значений многозначной функции Arg, взятой от комплексного числа $\Gamma(iy)$ при фиксированном $y > 0$.

При обсуждении пленарного доклада авторов на «Уфимской осенней математической школе» в октябре 2021 года, посвященного интегральным представлениям гамма-функции, Б. И. Сулейманов обратил

Костин Андрей Борисович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Andrew Kostin (Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia)

Шерстюков Владимир Борисович, д.ф.-м.н., профессор, МГУ имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия); Vladimir Sherstyukov (Lomonosov Moscow State University, Russia)

внимание на следующее обстоятельство. Поскольку в задачах математической физики (см., например, [2]) часто встречаются формулы, содержащие *главное* значение аргумента $\arg(\cdot) \in (-\pi, \pi]$ гамма-функции в точках мнимой оси, то важно уметь аналитически вычислять или оценивать подобные значения.

Будут рассмотрены способы представления величины $\arg\Gamma(iy)$, где $y > 0$, основанные на (1), (2). В частности, мы покажем, что

$$\arg\Gamma(i) = -1 - \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^{+\infty} g(t)\,\sin t\,dt = -1 - \frac{\pi}{2} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^t - 1 - t}{t^2(e^t - 1)}\,\sin t\,dt,$$

откуда

$$-\frac{7}{6} - \frac{\pi}{4} < \arg\Gamma(i) < -1 - \frac{\pi}{4}.$$

Здесь

$$-\frac{7}{6} - \frac{\pi}{4} = -1.952\ldots, \quad -1 - \frac{\pi}{4} = -1.785\ldots, \quad \arg\Gamma(i) = -1.872\ldots$$

согласно компьютерным расчетам.

Литература

1. *Костин А.Б., Шерстюков В.Б.* Об интегральных представлениях величин, связанных с гамма-функцией // Уфимск. матем. журн., **13**:4 (2021), 51-64.

2. *Сулейманов Б.И.* Влияние малой дисперсии на самофокусировку в пространственно одномерном случае // Письма в ЖЭТФ, **106**:6 (2017), 375-380.

КОЭФФИЦИЕНТЫ РАЗЛОЖЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ С ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ В РЯД ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ

А.Ф. Кужаев, arsenkuzh@outlook.com

УДК 517.518

В работе анонсируется результат об оценках на коэффициенты ряда экспоненциальных мономов с почти вещественными показателями. Предполагается, что данным рядом представляется целая функция, до которой продолжается функция из замыкания линейной оболочки системы экспоненциальных мономов в одном весовом пространстве абсолютно интегрируемых функций на всей числовой прямой.

Ключевые слова: целая функция, экспоненциальный моном, ряд экспонент

The coefficients of decomposition of the analytical continuation of functions with a real line into a series of exponential monomials

The paper announces a result on estimates for the coefficients of a number of exponential monomials with almost real indicators. It is assumed that this series represents an entire function, to which the function continues from the closure of the linear shell of a system of exponential monomials in one weight space of absolutely integrable functions on the real line.

Keywords: mathematics, differential equations, spectral theory.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k| \le |\lambda_{k+1}|$ и $\lambda_k \to \infty,\ \ k \to \infty$. По данной последовательности строится система функций — экспоненциальных мономов:

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \left\{ z^n e^{\lambda_k z} \right\}_{k=1,\, n=0}^{\infty,\, n_k-1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Введём ряд геометрических характеристик последовательности Λ. Символом $n(r, \Lambda)$ обозначим число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k), попавших в открытый круг $B(0, r)$, и пусть

$$\bar{n}(\Lambda) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{n(r, \Lambda)}{r}.$$

Величина $\bar{n}(\Lambda)$ называется верхней плотностью последовательности Λ.

Кужаев Арсен Фанилевич, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Arsen Kuzhaev (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Следуя работе [1], будем говорить, что последовательность Λ является *почти вещественной*, если $\mathrm{Re}\lambda_k > 0$ $(k \geq 1)$, $\mathrm{Im}\lambda_k/\mathrm{Re}\lambda_k \to 0,\ k \to \infty$.

Положим еще

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_k|},$$

$$\sigma_\Lambda(r) = \max\left\{ \sum_{\substack{|\lambda_k|<r,\\ \mathrm{Re}\lambda_k>0}} \mathrm{Re}\frac{n_k}{\lambda_k}, \sum_{\substack{|\lambda_k|<r,\\ \mathrm{Re}\lambda_k<0}} \mathrm{Re}\frac{n_k}{\lambda_k} \right\}.$$

Помимо указанных выше характеристик, широкое применение находит своё применение индекс конденсации А.С. Кривошеева S_Λ последовательности Λ, введенный в работе [2]:

$$S_\Lambda = \lim_{\delta\to 0+} \underline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{\lambda_m} \ln \left| \prod_{\lambda_k \in B(\lambda_m, \delta\lambda_m), k\neq m} \left(\frac{z-\lambda_k}{3\delta\lambda_k}\right)^{n_k} \right|.$$

Теперь введём в рассмотрение функциональное пространство. Пусть $\rho > 0$. Символом $\Omega_{\Lambda,\rho}$ обозначим множество неотрицательных выпуклых функций на оси $\mathbb{R}$ таких, что $\omega(0) = 0$, $\omega(t) \leqslant \rho|t|, t \leqslant 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \omega(t)/t = +\infty$, и, кроме того, выполнено неравенство

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\omega(2\sigma_\Lambda(t))}{t^2} dt < +\infty$$

Рассматривается весовое пространство интегрируемых функций на вещественной прямой:

$$L_p^\omega = \left\{ f:\ ||f||_{p,\mathbb{R}}^\omega := \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t)\, e^{-\omega(t)} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

Символом $W^p(\Lambda, \omega)$ обозначим подпространство, которое является замыканием системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространстве L_p^ω.

Один из основных результатов работы [3], можно сформулировать в следующей теоремы.

Теорема A ([3], Theorem 1) *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ почти вещественная, $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, $\sigma_\Lambda(r) \to +\infty$, $r \to +\infty$, $\omega_0 \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega_0)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление в виде ряда экспоненциальных мономов*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

где

$$a_{k,n} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega,k,n+1}(t) f(t)\, dt, \quad n = \overline{0, n_k - 1}, \quad k \geq 1,$$

$\omega(t) = \omega_0(t)$ при $t \leq 0$, $\omega(t) = \omega_0(t) + t^2$ при $t > 0$, и функции $H_{\omega,k,j}$ образуют семейство ядер биортогональной системы функционалов к системе экспоненциальных мономов $\mathcal{E}(\Lambda)$. При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах из плоскости.

Из данной теоремы следует, что есть необходимость в получении оценок на коэффициенты полученного ряда экспоненциальных мономов. Данные оценки можно использовать, например, при оценке типа и порядка целой функции, до которой продолжаются функции из подпространства $W^p(\Lambda, \omega)$. Результаты этого характера можно найти в работах А.Ф. Леонтьева (см., например, [4] (гл.III, §3, теорема 3.3.2)). Результаты из работ А.Ф. Леонтьева сформулированы для случая рядов экспонент, то есть частным случаем рядом вида (1), в которых $n_k = 1, k \in \mathbb{N}$. Данные результаты допускают обобщение на случай рядов экспоненциальных мономов, и одним из утверждений, необходимых для получения данных обобщающих результатов, является следующая теорема, представляющая и самостоятельный интерес.

Теорема 1. *Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ является почти вещественной и такой, что $S_\Lambda > -\infty$, $m(\Lambda) < +\infty$, кроме того, $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$, $\omega(t) \geqslant t^2$ при $t > 0$, и*

$$\beta_k = \exp\left(((1 - C)\, B\, |\lambda_k|\, \sigma_\Lambda(|\lambda_k|) + C_1 |\lambda_k|)\right), j = \overline{1, n_k}, \quad k \geqslant 1,$$

$$C_1, C, B > 0 \text{ — некоторые константы.}$$

Тогда существует константа $D > 0$ такая, что коэффициенты $a_{k,n}$ допускают оценки

$$|a_{k,n}| \leqslant \frac{D\beta_k ||f||_1^\omega}{2\pi}, \quad n = \overline{1, n_k}, \ k \geqslant 1.$$

Литература

1. *Кривошеева О. А. Кривошеев А. С.* Представление функций из инвариантного подпространства с почти вещественным спектром // Алгебра и анализ. — 2017. — Т. 29. — №4. — С. 82—139.

2. *Кривошеев А. С.* Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях // Известия РАН. Серия математическая. — 2004. — Т. 68. — №2. — С. 71–136.

3. *Kuzhaev A. F., Krivosheeva O. A.* On the Representation by Series of Exponential Monomials with Almost Real Exponents // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — V. 44. — №5. — P. 1892–1907.

3. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент — М.: Наука, 1976. — 536 с.

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА-СТЕЧКИНА И ЗНАЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2

М.Р. Лангаршоев
mukhtor77@mail.ru

УДК 517.5

Рассматривается экстремальная задача отыскания точных констант $\mathcal{K}_{m,n,r}(u)$ и $\mathcal{X}_{m,n,r,p}(u)$ в неравенствах типа Джексона-Стечкина в пространстве L_2. На основания полученных результатов вычислены точные значения некоторых известных n-поперечников классов $W_m^{(r)}(u,\Phi)$ и $W_{m,p}^{(r)}(u,\Psi)$.

Ключевые слова: наилучшее приближение, модуль непрерывности, экстремальная характеристика, n-поперечники.

Sharp inequalities of Jackson-Stechkin type and widths of some classes of functions in L_2 space

Short abstract: The extreme problem of finding the exact constants $\mathcal{K}_{m,n,r}(u)$ and $\mathcal{X}_{m,n,r,p}(u)$ in Jackson-Stechkin type inequalities in L_2 space is considered. Based on the results obtained, the exact values of some known n-diameters of classes $W_m^{(r)}(u,\Phi)$ and $W_{m,p}^{(r)}(u,\Psi)$ are calculated.

Keywords: best approximation, modulus of continuity, extremal characteristic, n-widths.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных, а $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ – множество целых чисел.

Пусть $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ – пространство измеримых по Лебегу 2π-периодических функций, у которых норма

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Через $\mathcal{T}_{n-1}$ обозначим подпространство, состоящее из всевозможных тригонометрических полиномов порядка $n-1$. Величина

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf \Big\{ \|f - T_{n-1}\| : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{n-1} \Big\}$$

называется наилучшее приближение функции $f \in L_2$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$.

Лангаршоев Мухтор Рамазонович, к.ф.-м.н., доцент, АГЗ МЧС России (Химки, Россия); Mukhtor Langarshoev (Civil Defence Academy of EMERCOM of Russia, Khimki, Russia)

Через $L_2^{(r)}$ $\left(r \in \mathbb{Z}_+; L_2^{(0)} \equiv L_2\right)$ обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых производные $(r-1)$-го порядка абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)} \neq \mathrm{const}$ принадлежат пространству L_2.

Символом

$$\Omega_m(f,\tau) = \left\{ \frac{1}{\tau^m} \int\limits_0^\tau \cdots \int\limits_0^\tau \|\Delta_{\overline{h}}^m f(\cdot)\|^2 dh_1 \cdots dh_m \right\}^{\frac{1}{2}},$$

обозначим обобщенный модуль непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$, где $\tau > 0$, $\overline{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_m)$, $\Delta_{\overline{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1$, $\Delta_{h_j}^1(f) = f(\cdot + h_j) - f(\cdot)$, $j = \overline{1,m}$

Для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$, $u \in (0, 3\pi/(4n)]$ рассмотрим следующие экстремальные характеристики:

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(u) = \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^u h(u-h)\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, h\right) dh\right)^{m/2}},$$

$$\mathcal{X}_{m,n,r,p}(u) = \sup_{\substack{f \in L_2^{(r)} \\ f^{(r)} \neq const}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int\limits_0^u h(u-h)\Omega_m^{p}\left(f^{(r)}, h\right) dh\right)^{1/p}},$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < h \leq u$, $0 < u \leq 3\pi/(4n)$, $0 < p \leq \infty$.

Для центрально-симметричного подмножество $\mathfrak{N}$ из L_2 через $b_n(\mathfrak{N}, L_2)$, $d^n(\mathfrak{N}, L_2)$, $d_n(\mathfrak{N}, L_2)$, $\lambda_n(\mathfrak{N}, L_2)$ и $\pi_n(\mathfrak{N}, L_2)$ обозначим соответственно бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный n-поперечников [1].

Также полагаем

$$E_{n-1}(\mathfrak{N}) := \sup\{E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{N}\}.$$

Пусть $\Phi(u)$ и $\Psi(u)$ – непрерывные возрастающие на полусегменте $0 \leq u < \infty$ функции такие, что $\Phi(0) = 0$, $\Psi(0) = 0$. Для произвольных $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $u > 0$ введем в рассмотрение следующие классы функций:

$$W_m^{(r)}(u,\Phi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \quad \left(\int\limits_0^u h(u-h)\Omega_m^{2/m}\left(f^{(r)}, h\right) dh\right)^{m/2} \leq \Phi(u) \right\},$$

$$W_{m,p}^{(r)}(u,\Psi) := \left\{ f \in L_2^{(r)} : \quad \left(\int\limits_0^u h(u-h)\Omega_m^{p}\left(f^{(r)}, h\right) dh\right)^{1/p} \leq \Psi(u) \right\}.$$

Через h_* обозначим величину аргумента функции $\sin h/h$, при котором она достигает на полусегменте $[0,\infty)$ своего наименьшего значения. При этом h_* есть минимальный положительный корень уравнения $\dfrac{\operatorname{tg} h}{h} = 1$, $\ 4,49 < h_* < 4,51$ (см. [2]). Положим

$$\left(1-\frac{\sin h}{h}\right)_* := \left\{1-\frac{\sin h}{h},\ \text{ если }\ 0\le h\le h_*;\quad 1-\frac{\sin h_*}{h_*},\ \text{если},\quad h\ge h_*\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$. Тогда для произвольного числа $0<u\le 3\pi/(4n)$ имеет место следующее равенство*

$$\mathcal{K}_{m,n,r}(u) = \frac{1}{n^{r-3m/2}}\left(\frac{3}{n^3u^3-6nu+6\sin nu}\right)^{m/2}.$$

Теорема 2. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ и $0<p\le\infty$. Тогда для произвольного числа $0<u\le 3\pi/(4n)$ имеет место следующее равенство*

$$\chi_{m,n,r,p}(u) = \frac{1}{2^{m/2}n^r}\left(\int\limits_0^u h(u-h)\left(1-\frac{\sin nh}{nh}\right)^{mp/2}dh\right)^{-1/p}.$$

Теорема 3. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$ и функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi(u)}{\Phi(\pi/n)} \ge \left\{\frac{1}{\pi^3-6\pi}\right\}^{m/2}\times$$
$$\times\begin{cases}(n^3u^3+6\sin nu-6nu)^{m/2}, & 0<u\le\pi/n,\\ (3\pi^3-6\pi+n^3u^3-3\pi^2nu)^{m/2}, & u\ge\pi/n.\end{cases}$$

Тогда справедливы равенства

$$\gamma_{2n}\left(W_m^{(r)}(u,\Phi);L_2\right) = \gamma_{2n-1}\left(W_m^{(r)}(u,\Phi);L_2\right) =$$

$$= E_{n-1}\left(W_m^{(r)}(u,\Phi)\right)_2 = \frac{1}{n^{r-3m/2}}\left\{\frac{3}{\pi^3-6\pi}\right\}^{m/2}\Phi(\pi/n),$$

где $\gamma_{2n}(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n-поперечников.

Теорема 4. *Если функция $\Psi(u)$ для любого $0<u\le\pi/n$, $0<p\le\infty$ удовлетворяет ограничению*

$$\frac{\Psi^p(u)}{\Psi^p(\pi/n)} \ge \frac{\displaystyle\int\limits_0^u h(u-h)\left(1-\frac{\sin nh}{nh}\right)_*^{mp/2}dh}{\displaystyle\int\limits_0^{\pi/n} h\left(\frac{\pi}{n}-h\right)\left(1-\frac{\sin nh}{nh}\right)^{mp/2}dh},$$

то для произвольных $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\delta_{2n}\left(W_{m,p}^{(r)}(u,\Psi); L_2\right) = \delta_{2n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(u,\Psi); L_2\right) = E_{n-1}\left(W_{m,p}^{(r)}(u,\Psi)\right)_2 =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2} n^r}\left(\int_0^{\pi/n} h\left(\frac{\pi}{n} - h\right)\left(1 - \frac{\sin nh}{nh}\right)^{mp/2} dh\right)^{-1/p} \Psi(\pi/n),$$

где $\delta_{2n}(\cdot)$ – любой из вышеперечисленных n-поперечников.

Литература

1. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. — Москва: МГУ, 1976.

2. *Вакарчук С.Б., Забутная В.И.* Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем. заметки, **86**:3 (2009), 328-336.

ОЦЕНКИ НОРМ ОПЕРАТОРА ХАРДИ, ДЕЙСТВУЮЩЕГО В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Е.Н. Ломакина, О.С. Деревянко
enlomakina@mail.ru, olesay311283@mail.ru

УДК 517.518

Доказаны критерии ограниченности и компактности интегрального оператора Харди, действующего в весовых пространствах Лоренца. Для компактного оператора получены двухсторонние оценки s-чисел. Найдены условия, при которых компактный оператор принадлежит операторным идеалам, порожденным последовательностями аппроксимативных чисел. Получены оценки норм оператора Харди в операторных идеалах через интегральные выражения, зависящие от весовых функций исходного оператора.

Ключевые слова: операторный идеал, интегральный оператор Харди, пространства Лоренца, аппроксимативные числа.

Estimates of the norms of the Hardy operator acting in Lorentz spaces

The criteria of the boundedness and compactness of the Hardy integral operator acting in Lorentz weight spaces are proved. For a compact operator, two-sided estimates of s-numbers are obtained. Conditions are found under which a compact operator belongs to the operator ideal generated by sequences of approximation numbers. Estimates of the norms of the Hardy operator in operator ideals are obtained through integral expressions depending on the weight functions of the original operator.

Keywords: operator ideal, Hardy integral operator, Lorentz spaces, approximative numbers.

Пусть (X,μ) — измеримое пространство с положительной σ-аддитивной мерой μ. *Функция распределения* f_* измеримой функции f относительно меры μ определяется формулой (см. монографию [1])

$$f_*(\tau) = \mu\{x \in X : |f(x)| > \tau\} = \int_{\{x\in X: |f(x)|>\tau\}} d\mu, \quad \tau > 0.$$

Ломакина Елена Николаевна, д.ф.-м.н., в.н.с., ВЦ ДВО РАН (Хабаровск, Россия); Elena Lomakina (Computing Center Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia)

Деревянко Олеся Сергеевна, аспирант, старший преподаватель, ДВГУПС (Хабаровск, Россия); Olesya Derevyanko (Far Eastern State University of Railway Engineering, Khabarovsk, Russia)

Для $1 \le p, q < \infty$ весовое пространство Лоренца $L^{p,q}_\omega \equiv L^{p,q}_\omega(\mathbb{R}^+)$ состоит из всех μ-измеримых функций f, для которых

$$\|f\|_{L^{p,q}_\omega} = \left(\int_0^\infty q f_*(t)^{\frac{q}{p}} t^{q-1}\, dt\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Заметим также, что $\|\chi_{(0,t)}\|_{L^{p,q}_\omega} = \left(\int_0^t \omega(\tau)\, d\tau\right)^{\frac{1}{p}}$. Для $L^{p,q}_\omega$ двойственное пространство определяется формулой

$$L^{p',q'}_\omega = \left\{g : \left|\int_0^\infty f(x)g(x)\omega(x)dx\right| < \infty \ \text{ для всех } f \in L^{p,q}_\omega\right\}$$

с нормой $\|g\|_{L^{p',q'}_\omega} = \sup\limits_{\|f\|_{L^{p,q}_\omega} \le 1} \left|\int_0^\infty f(x)g(x)\omega(x)dx\right|$.

В пространствах Лоренца с параметрами $1 < s \le \min(p,q) < \infty$ и $1 < r < \infty$ рассмотрим оператор Харди $T : L^{r,s}_v(\mathbb{R}^+) \to L^{p,q}_\omega(\mathbb{R}^+)$ вида

$$Tf(x) = \varphi(x) \int_0^x u(\tau)f(\tau)v(\tau)\, d\tau, \quad x > 0, \tag{1}$$

с положительными весовыми функциями $\varphi \in L^{pq}_\omega(x,\infty)$, $v \in L^1(0,x)$ для любого $x > 0$.

Исследование ограниченности, компактности и поведения аппроксимативных чисел в пространствах Лоренца в области индексов $1 < \max(r,s) \le \min(p,q) < \infty$, $1 < \max(r,s) \le q < \infty$ и $1 < p < \infty$, проводилось в статьях [2]-[4].

Критерий компактности оператора (1) получен в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $1 < s \le \min(p,q) < \infty$, $1 < r < \infty$. *Оператор* $T : L^{r,s}_v(\mathbb{R}^+) \to L^{p,q}_\omega(\mathbb{R}^+)$, *заданный формулой (1), компактен тогда и только тогда, когда* $A = \sup\limits_{t>0} A(t) = \sup\limits_{t>0} \|\chi_{(0,t)}\|_{L^{r',s'}_v} \|\chi_{(t,\infty)}\varphi\|_{L^{p,q}_\omega} < \infty$ *и*

$$\lim_{t\to 0+} A(t) = \lim_{t\to+\infty} A(t) = 0.$$

Пусть X, Y – банаховы пространства. Множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y обозначим $B(X,Y)$. Для каждого оператора $T \in B(X,Y)$ его $n-$е *аппроксимативное число* определяется формулой

$$a_n(T) = \inf_{L \in B(X,Y)} \{\|T - L\|_{X\to Y} :\ \operatorname{rank} L \le n-1\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Теория $s-$чисел подробно изложена в монографиях [5]-[7].

На интервале $I = [a,b]$ определим оператор $H_I : L^{r,s}_v(I) \to L^{p,q}_\omega(I)$

$$H_I f(x) = \chi_I(x)\varphi(x)\left(\int_a^x f(y)v(y)\, dy - \frac{1}{\mu(I)}\int_I \int_a^t f(\tau)v(\tau)\, d\tau\, d\mu(t)\right).$$

Верхняя и нижняя оценки поведения последовательности аппроксимативных чисел оператора T доказаны в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть* $1 < s \le \min(p,q) < \infty$, $1 < r < \infty$. *Предположим, что оператор* $T : L_v^{r,s} \to L_\omega^{p,q}$, *определенный формулой (1), компактен. Для заданного* $0 < \varepsilon < \|T\|$ *и целого числа* $N > 2$ *пусть интервалы* $I_k = [c_k, c_{k+1}], k = 0, 1, ...N$ *выбраны так, что выполнены следующие условия:*

$\sup\limits_{0<t<c_1} A(t) = \sup\limits_{c_N<t<\infty} A(t) = \dfrac{\varepsilon}{4}$ *и* $\|H_{I_k}\| = \varepsilon,\ k = 1, \ldots, N-2,\ \ \|H_{I_{N-1}}\| \le \varepsilon$. *Тогда*

$$\frac{1}{2} c_{pq}^{-1} \varepsilon N^{\frac{1}{\max(p,q,r)} - \frac{1}{s}} \le a_N(T) \le \varepsilon, \quad \text{если } 1 < s \le \min(p,q) \le r < \infty,$$

$$\frac{1}{2} c_{pq}^{-1} \varepsilon N^{\frac{1}{\max(p,q,r)} - \frac{1}{s}} \le a_N(T) \le N^{\frac{1}{\min(p,q)} - \frac{1}{r}} \varepsilon, \quad 1 < s \le \min(p,q) \le r < \infty,$$

где константа $c_{pq} = 1$ *при* $1 < q \le p < \infty$ *и* $c_{pq} = \left(\frac{p}{q}\right)^{1/q} \left(\frac{p'}{q'}\right)^{1/q'}$, *когда* $1 < p < q < \infty$.

Апроксимативные числа тесно связаны с другими характеристическими числами линейных ограниченных операторов: числами Колмогоров, Гельфанда, Вейля, Митягина и др. Соотношения между определенными выше числами оператора $T \in B(X,Y)$ см. [5], [6]. Таким образом, получив оценки для аппроксимативных чисел, мы имеем возможность получить оценки и для других характеристических чисел оператора (1) в пространствах Лоренца.

Оператор $T \in B(X,Y)$ называется $\mathfrak{A}_\alpha$-*оператором*, где $0 < \alpha < \infty$, если последовательность его аппроксимативных чисел $\{a_n(T)\}$ суммируема со степенью α. Обозначим

$$\|T\|_{\mathfrak{A}_\alpha} = \Big\| \{a_k(T)\} \Big\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha(T) \right)^{1/\alpha}, \quad 0 < \alpha < \infty. \tag{2}$$

Класс операторов $\mathfrak{A}_\alpha$ с квазинормой (2) образует квазинормированный операторный идеал [5, §14.2.1]. Идеал $\mathfrak{A}_\alpha$ компактных операторов $T \in B(H,H)$ с нормой(2) в гильбертовых пространствах есть идеал Шаттена – фон Неймана [8].

Обозначим

$$J_\alpha = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x v(\tau)\, d\tau \right)^{\frac{\alpha}{s'} - 1} \left(\int_x^\infty q t^{q-1} \varphi_*(t)^{\frac{q}{p}}\, dt \right)^{\frac{\alpha}{q}} v(x)\, dx \right)^{1/\alpha}.$$

Теорема 3. *Пусть* $\beta = \frac{s' \max\{p,q\}}{s' + \max\{p,q\}}$, $\alpha > \beta$ *и* $J_\alpha < \infty$. *Тогда компактный оператор* $T : L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+) \to L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ *вида (1) принадлежит операторному идеалу* $\mathfrak{A}_\alpha$ *и выполнена оценка на норму*

$$\|T\|_{\mathfrak{A}_\alpha} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha(T) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \ll \left(\int_0^\infty \|\chi_{(x,\infty)} \varphi\|_{L_\omega^{p,q}}^\alpha \left(\int_0^x v(\tau)\, d\tau \right)^{\frac{\alpha}{s'} - 1} v(x)\, dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Литература

1. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of Operators. – Pure and Applied Mathematics : Academic Press, 1988.

2. *Lomakina E., Stepanov V.* On the compactness and approximation numbers of Hardy type integral operators in Lorentz spaces //J. London Math. Soc. **(2)**, V.53 (1996), 369–382.

3. *Ломакина Е.Н.* Об оценках норм оператора Харди, действующего в пространствах Лоренца // Дальневосточ. матем. журн., т.20, № 2 (2020), 191–211.

4. *Ломакина Е.Н., Насырова М.Г.* Оценки норм оператора Харди в оператороных идеалах // Сиб. матем. журн., Vol. 65, №. 2 (2024), 328–343.

5. *Пич А.* Операторные и деалы. —М: Мир, 1984.

6. *Pietsch A.* s-Numbers of operators in Banach spaces. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.

7. *Pietsch A.* s-Numbers of operators in Banach spaces. // Studia Math., **51**, (1974), 201-223.

8. *Konig H.* Eigenvalue distribution of compact operators. – Operator Theory: Advances and Applications, Birkhauser Verlag, Basel, 1986.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПОВЕДЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ЛУЧЕЙ В 2D НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

С.В. Мальцева, Е.Ю. Деревцов
maltsevasv@math.nsc.ru, eydert@mail.ru

УДК 514.86+517.54

Строятся римановы метрики, обогащающие аппарат математических моделей неоднородных сред. Метрики образуются путем введения дополнительных параметров и применения конформных отображений. Найдены геометрические характеристики сконструированных метрик. Установлены связи обратной кинематической задачи сейсмики и задачи рефракционной томографии.

Ключевые слова: неоднородная среда, риманова метрика, геодезическая, конформное отображение.

Modeling of behavier of refracted rays in 2D inhomogeneous media

Riemannian metrics are constructed, enriching the tools of mathematical models of inhomogeneous media. Metrics are formed by introducing additional parameters and applying conformal mappings. Geometric characteristics of the constructed metrics are found. Relationships between the inverse kinematic problem of seismics and the problem of refraction tomography are obtained.

Keywords: inhomogeneous medium, Riemannian metric, geodesic, conformal mapping.

Аппарат дифференциальной геометрии как инструмент математических моделей, разрабатываемых в рамках исследований неоднородных сред, возникает в предположении лучевого приближения поведения рефрагированных лучей [1], которые при этом мыслятся как геодезические линии некоторой римановой метрики. Метрики полагаются известными в прямых задачах, и они неизвестны в обратных задачах. Наиболее общая постановка обратных задач такова, что участвующая в ней риманова метрика, строго говоря, неизвестна. Одним из подходов к их решению является линеаризация задачи. Именно, предполагается, что поведение геодезических неизвестной метрики мало отличается от

Работа выполнена по программе государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0009(122041100003-2) (первый автор), и при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00200) (второй автор).

Мальцева Светлана Васильевна, к.ф.-м.н., доцент, ИМ СО РАН, НГУ (Новосибирск, Россия); Svetlana Maltseva (Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

Деревцов Евгений Юрьевич, д.ф.-м.н., доцент, ИМ СО РАН, НГУ (Новосибирск, Россия); Evgeny Derevtsov (Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia)

поведения геодезических некоторой априори заданной. В частности, в качестве такой зафиксированной метрики может быть выбрана евклидова, и ее геодезическими, очевидно, являются прямые, а изучаемые "настоящие" геодезические незначительно отличаются от прямых.

Опишем две математические модели типичных задач, возникающих при исследовании неоднородных сред. В задачах сейсмики плотность упругой среды в целом заметно увеличивется с глубиной [2], поэтому аппроксимация отрезками прямых возможна лишь в ситуации, когда в качестве модели среды может быть предложена горизонтально слоистая среда со слоями постоянной плотности, которая увеличивается с глубиной. Если имеются веские основания считать, что свойства среды меняются достаточно плавно, то используют риманову метрику вида

$$ds^2 = n^2(x,y)\big(dx^2 + dy^2\big), \tag{1}$$

которая приемлема для описания поведения рефрагированных лучей как продольных, так и поперечных сейсмических волн [2]. Наиболее простая метрика возникает в предположении, что скорость распространения упругих волн линейно возрастает с глубиной $y \geq 0$ (рассматривается двумерный случай), то есть при $n(x,y) = (ay+b)^{-1} = v^{-1}(x,y)$, где v — скорость распространения (продольных или поперечных) сейсмических волн, $a, b > 0$. Геодезические такой метрики являются дугами окружностей с центрами в точках, принадлежащих прямой $y = -b/a$ и радиусами, определяемыми точками пересечения окружностей с прямой $L = \{(x,y) \in R^2 \,|\, y = 0\}$ [3]. Указанную метрику, заданную в полуплоскости, можно считать аналогом прямых при распространении волн в однородном пространстве, и, по аналогии с прямыми, она служит эталонной метрикой при численной реализации процедуры линеаризации обратной кинематичекой задачи сейсмики (ОКЗС) [4]. ОКЗС состоит в определении скоростей продольных или поперечных волн по известным временам их пробега между источниками и приемниками сейсмическх волн, расположенных на границе полуплоскости. ОКЗС может быть поставлена и в других областях R^2, а именно в полосе, полуполосе, прямоугольнике, полукруге.

В математических моделях 2D томографии в качестве стандартной области, в которой осуществляются исследования, часто выступает единичный круг B. Метрика вида (1), наряду с римановой метрикой общего вида, может быть определена и в любой неограниченной или ограниченной области, в том числе в круге.

Хорошим примером одной из многочисленных математических моделей томографии является модель рефракционной томографии тензорных полей [5], в рамках которой продолжается разработка математических основ, приближенных методов и алгоритмов обращения лучевых преобразований моментов тензорных полей, зависящих от времени и переменных фазового пространства.

Пусть риманова метрика (g_{ij}) с элементом длины

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j \tag{2}$$

задана в круге B. Экспоненциальное лучевое преобразование вдоль геодезической римановой метрики (ЭЛП) определяется формулой

$$\mathcal{I}^{\varepsilon} f(x,\eta) = \int_{\tau_-(x,\eta)}^{0} f(\gamma_{x,\xi}(t)) \exp\Big\{ -\int_{t}^{0} \varepsilon(\gamma_{x,\eta}(s))\, ds \Big\}\, dt,$$

где $\gamma_{x,\eta} : [\tau_-(x,\eta), 0] \to B$ — максимальная геодезическая в B, определяемая начальными условиями $\gamma_{x,\eta}(0) = x$; $\dot{\gamma}_{x,\eta}(0) = \eta$; $x \in \partial B$, η — единичный вектор, $\langle \eta\,,\, \nu_x \rangle > 0$, ν_x — внешняя нормаль в точке $x \in \partial B$, а $\tau_-(x,\eta)$ — значение (отрицательное) параметра t, $t \in [\tau_-(x,\eta), 0]$, геодезической, при котором геодезическая пересекает границу ∂B во второй раз. Функция f описывает распределение внутренних источников, $\varepsilon(x) \geq 0$ — коэффициент поглощения. Значения ЭЛП известны для всех $x \in \partial B$ и всех векторов η таких, что $\langle \eta\,,\, \nu_x \rangle \geq 0$. Требуется решить задачу инверсии ЭЛП по его известным значениям, вычисленным вдоль геодезических метрики (2).

Численное моделирование и проведение вычислительных экспериментов в рамках задач, поставленных в областях, заполненных неоднородными средами, испытывает определенные сложности из-за дефицита конкретных римановых метрик с известными характеристиками, которые были бы пригодны для использования в моделях и тестах.

Предлагаемые семейства римановых метрик расширяют возможности численного моделирования задач, поставленных в сложнопостроенных неоднородных средах. Проведено обобщение метрик постоянной кривизны, заданных в круге, и метрики постоянной отрицательной кривизны, заданной в полуплоскости [6]. При этом, в зависимости от введенного параметра, полученные обобщения обладают как положительной, так и отрицательной кривизной. Следующий этап обобщения позволил расширить семейства римановых метрик путем использования подходящих конформных отображений круга на полуплоскость. Наиболее удобными оказались дробно-линейные отображения с нестандартным набором параметров, позволяющие метрики, заданные в полуплоскости или круге, преобразовывать друг в друга.

Установлены геометрические характеристики предложенных семейств трехпараметрических римановых метрик, заданных в полуплоскости и круге. Это компоненты метрических тензоров, символы Кристоффеля, тензоры кривизны Римана-Кристоффеля, Риччи и скалярная кривизна метрик-образов (при конформном отображении). Найденные характеристики семейств построенных римановых метрик позволили установить свойства дробно-линейного отображения по отношению к переходящим друг в друга системам геодезических в полуплоскости и круге.

Использование аппарата ТФКП при построении конкретных отображениях полуплоскости в круг и обратно, и преобразующихся при этом друг в друга систем геодезических соответствующих римановых метрик, привело к оригинальным постановкам ОКЗС и обратных задач, поставленных в ограниченных областях неоднородных сред. В частности, речь может идти о задачах рефракционной томографии. Предложена интерпретация ОКЗС с внутренними источниками, поставленной в полуплоскости, как внешней задачи рефракционной томографии с неполными данными, поставленной в круге [7]. Задачи рефракционной томографии, состоящие в восстановлении тензорных полей по их лучевым преобразованиям вдоль геодезических, могут быть поставлены как обобщенные ОЗКС в полуплоскости по восстановлению тензорных полей. Выявленные связи постановок ОКЗС и задач рефрационной томографии способны взаимно обогатить методы их исследований.

Литература

1. *Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980.

2. *Гольдин С.В.* Геометрическая сейсмика. — Новосибирск: ИННГ СО РАН, 2017.

3. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Том 4. — М.: ГИТТЛ, 1964.

4. *Лаврентьев М.М., Зеркаль С.М., Трофимов О.Е.* Численное моделирование в томографии и условно-корректные задачи. — Новосибирск: ИДМИ НГУ, 1999.

5. *Derevtsov E.Yu.* Some features of mathematical modeling and constructing tensor fields in refraction tensor tomography // Eurasian J. Math. Comp. Applications, **10**:4 (2022), pp. 4–33.

6. *Derevtsov E.Yu.* On constructing Riemannian metrics in refraction tomography problems // J. of Physics: Conf. Series, **1715**:012033 (2021), 9 p.

7. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. — М.: Мир, 1990.

О ФУНКЦИЯХ ПЛОТНОСТИ

К.Г. Малютин , М.В. Кабанко
malyutinkg@gmail.com, kabankom@gmail.com

УДК 517.53

Важной характеристикой функции конечного порядка является функция плотности. Условия равномерности в предельных соотношениях есть важное свойство, которое часто бывает необходимым при использовании функций плотности. Теорема 1 является новой теоремой такого типа. У нас функции плотности являются ρ-полуаддитивными функциями относительно модельной функции роста. Важнейшей характеристикой полуаддитивной функции является её производная в нуле. В теореме 2 предъявлены условия, обеспечивающих существование такой производной.

Ключевые слова: модельная функция роста, функция конечного порядка, функция плотности.

About density functions

An important characteristic of a function of finite order is the density function. The uniformity conditions in the limit relations are an important property that is often necessary when using density functions. Theorem 1 is a new theorem of this type. In our case, the density functions are ρ-semi-additive functions with respect to the model function of growth. The most important characteristic of a semi-additive function is its derivative at zero. Theorem 2 presents conditions that ensure the existence of such a derivative.

Keywords: model function of growth , function of finite order, density function.

Пусть M — модельная функция роста [1,2], ρ_M — уточненный порядок относительно M [3], $V(r) = M^{\rho(r)}(r)$. Важную информацию о поведении f дают верхняя функция плотности $N_M(\alpha)$ и нижняя функция плотности $\underline{N}_M(\alpha)$ относительно M, которые вычисляются по формулам

$$N_M(\alpha) = \limsup_{r\to\infty} \frac{f(M^{(-1)}((1+\alpha)M(r))) - f(r)}{V(r)}, \quad \alpha \geq 0\,,$$

$$\underline{N}_M(\alpha) = \liminf_{r\to\infty} \frac{f(M^{(-1)}((1+\alpha)M(r))) - f(r)}{V(r)}, \quad \alpha \geq 0.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00006, https://rscf.ru/project/24-21-00006/.

Малютин Константин Геннадьевич, д.ф.-м.н., профессор, КГУ (Курск, Россия); Konstantin Malyutin (Kursk State University, Kursk, Russia)

Кабанко Михаил Владимирович, к.ф.-м.н., доцент, КГУ (Курск, Россия); Mikhail Kabanko (Kursk State University, Kursk, Russia)

Из свойств верхнего и нижнего пределов и леммы 2 из работы [3] следует следующая лемма.

Лемма 1. *Для любой модельной функции M справедливы соотношения*

$$N_M(\alpha+\beta) \le N_M(\alpha) + (1+\alpha)^{\rho} N_M\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right), \tag{1}$$

$$N_M(\alpha+\beta) \ge N_M(\alpha) + (1+\alpha)^{\rho} \underline{N}_M\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right),$$

$$\underline{N}_M(\alpha+\beta) \ge \underline{N}_M(\alpha) + (1+\alpha)^{\rho} \underline{N}_M\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right),$$

$$\underline{N}_M(\alpha+\beta) \le \underline{N}_M(\alpha) + (1+\alpha)^{\rho} N_M\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right).$$

В следующей теореме получено условие равномерности при предельном переходе.

Теорема 1. *Пусть $f(r)$ — конечная измеримая функция на полуоси $[0,\infty)$, $\psi(\alpha)$ — непрерывная функция на всей оси, причем $\psi(0)=0$, M— модельная функция роста. Пусть для любого $\alpha \in [0,\infty)$ выполняется неравенство*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{f(M^{(-1)}(1+\alpha)M(r)) - f(r)}{V(r)} \le \psi(\alpha). \tag{2}$$

Тогда это неравенство выполняется равномерно по α на любом сегменте $[a,b] \subset (0,\infty)$. Если для некоторого $\eta > 0$ неравенство (2) выполняется на полуоси $(-\eta,\infty)$, то оно выполняется равномерно на любом сегменте $[0,b]$.

Далее формулируется основная теорема о свойствах ρ-полуаддитивных функций $\left(\text{мы считаем} \left.\frac{\rho}{(1+\alpha)^{\rho}-1}\right|_{\rho=0} = \frac{1}{\ln(1+\alpha)}\right)$.

Теорема 2. *Пусть $N_M(\alpha)$ — ρ-полуаддитивная функция, которая удовлетворяет неравенству (1) при некотором $\rho \in (-\infty,\infty)$.*

1. *Если выполняется хотя бы одно из условий:*

а) *функция $N_M(\alpha)$ измерима и удовлетворяет неравенству $N_M(\alpha) < \infty$ на множестве положительной меры,*

б) *функция $N_M(\alpha)$ ограничена сверху на множестве положительной меры,*

то существует предел

$$H = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\rho N_M(\alpha)}{(1+\alpha)^{\rho}-1} = \inf_{\alpha>0} \frac{\rho N_M(\alpha)}{(1+\alpha)^{\rho}-1}.$$

2. *Для любой точки $x > 0$ справедливы неравенства*

$$\frac{\rho}{(1+x)^{\rho}-1} \liminf_{\alpha\to x+0} N_N(\alpha) \le \liminf_{\alpha\to+0} \frac{N_M(\alpha)}{\alpha},$$

$$\frac{\rho}{(1+x)^{\rho}-1} \liminf_{\alpha\to x-0} N_M(\alpha) \le \liminf_{\alpha\to+0} \frac{N_M(\alpha)}{\alpha}.$$

3. *Если для каждого* $\alpha > 0$ *функция* $N(\alpha)$ *либо полунепрерывна снизу слева в точке* α, *либо полунепрерывна снизу справа в этой точке, то существует предел*

$$N_M = \lim_{\alpha\to+0} \frac{N_M(\alpha)}{\alpha} = \sup_{\alpha>0} \frac{\rho N_M(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}\,.$$

Далее рассматриваются оценки величины

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{M(r)V(r)} \int\limits_{\alpha r}^{\beta r} f\left(\frac{t}{r}\right)\, d\nu(t)$$

при различных ограничениях на функции $f(t)$ и ν. Мы рассматриваем интеграл в смысле Стилтьеса и ν — не обязательно мера (функция ν определяет конечную аддитивную меру на полуоси. Имеется в виду, что эта мера не обязательно счётно-аддитивна).

Один из результатов в этом направлении — следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $f(t)$ *— положительная непрерывная функция на сегменте* $[\alpha,\beta]$, $0<\alpha<\beta<\infty$, $\rho(r)$ *— уточнённый порядок,* ν *— мера на полуоси* $[0,\infty)$, $\nu(r) = \nu([0,r])$, $|\nu(r)| \le K_1 V(r)$. *Пусть одна из жордановых компонент* ν_+, ν_- *меры* ν *абсолютно непрерывна и её плотность не превышает* $K_2V(r)$. *Пусть*

$$N(b) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\nu(M^{(-1)}((1+b)M(r))) - \nu(r)}{M(r)V(r)}\,.$$

Тогда существует предел

$$N = \lim_{b\to+0} \frac{N(b)}{b}\,, \tag{1}$$

и выполняется неравенство

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{M(r)V(r)} \int\limits_{\alpha r}^{\beta r} f\left(\frac{t}{r}\right)\, d\nu(t) \le N \int\limits_{\alpha}^{\beta} t^\rho f(t)\, dt\,.$$

Здесь K_1, K_2 — некоторые положительные константы.

Литература

1. *Хабибуллин Б.Н.* Обобщение уточненного порядка // Докл. Башкирского университета, **5**:1 (2020), 1-5

2. *Кабанко М.В., Малютин К.Г., Хабибуллин Б.Н.* Об уточненной функции роста относительно модельной // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **230** (2023), 56-74

3. *Malyutin K., Kabanko M.* On the Proximate Order with Respect to the Model Function // Journal of Mathematical Sciences, **Published online**:DOI:10.1007/s10958-024-06957-w (March 2024), 3-21

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ СЛЕДОВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НЕРАВЕНСТВАМИ ДЛЯ РАЗМАХА МАТРИЦЫ

Мариана Даллул
mariana.dallol@yandex.ru

УДК 517.98

Неравенствами для размаха матрицы характеризован след на $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ среди всех положительных линейных функционалов φ с $\varphi(I) = n$, где $n \geq 3$. Получены еще три характеризации следа в этом классе функционалов φ для всех $n \geq 2$.

Ключевые слова: размах матрицы, след, характеризация следа.

Characterizations of tracial functionals by inequalities for the spread of a matrix

Via inequalities for the spread of a matrix we characterize the trace on $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ among all positive linear functionals φ with $\varphi(I) = n$, where $n \geq 3$. We also present three characterizations of the trace in this class of functionals φ for all $n \geq 2$.

Keywords: spread of matrix, trace, trace characterization.

$\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ stands for the algebra of $n \times n$ complex matrices, $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ denotes the subset of positive semi-definite matrices for $n \geq 2$. A linear functional φ on $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ is said to be positive if $\varphi(A) \geq 0$ for all $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$. If $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, then $|X| = \sqrt{X^*X} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$. A matrix $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ is *normal*, if $X^*X = XX^*$. We assume that $n \geq 3$ and for $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ with characteristic roots $\lambda_1 = \lambda_1(A), \dots, \lambda_n = \lambda_n(A)$ according L. Mirsky [1] we write

$$s(A) = \max_{i,k} |\lambda_i - \lambda_k|, \quad s_{\mathbb{R}}(A) = \max_{i,k} \{\Re\lambda_i - \Re\lambda_k\}.$$

The number $s(A)$ is called the *spread of the matrix* A. We denote by $E_2(A)$ the sum of all principal 2-rowed minors of A. If n complex numbers are so that $n-2$ among them are equal to each other and to the arithmetic mean of the remaining two, according L. Mirsky [1] we say that these n numbers *satisfy condition* ℓ. Define the Frobenius norm $\|A\|_2 = \mathrm{tr}(A^*A)^{1/2}$.

Theorem 1. *For a positive linear functional φ on $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ with $\varphi(I) = n$ the following conditions are equivalent:*

(i) $\varphi = \mathrm{tr}$;

(ii) $s(A)^2 \leq 2\|A\|_2^2 - \frac{2}{n}|\varphi(A)|^2$ *for all* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$;

(iii) $s(A)^2 \leq 2\|A\|_2^2 + |\mathrm{tr}(A^2)| - \frac{2}{n}|\varphi(A)|^2$ *for all normal matrices* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$;

(iv) $s_{\mathbb{R}}(A)^2 \leq \|A\|_2^2 + \Re\mathrm{tr}(A^2) - \frac{2}{n}(\Re\varphi(A))^2$ *for all* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$;

Даллул Мариана, аспирант, К(П)ФУ (Казань, Россия); Dalloul Mariana, postgraduate, (Kazan (Volga Region) University, Kazan, Russia)

(v) $s(A)^2 \le 2\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)|\varphi(A)|^2 - 4E_2(A)$ *for all* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *with* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$*;*

(vi) $s(A)^2 \le 2\varphi(A^*A) - \frac{2}{n}|\mathrm{tr}(A)|^2$ *for all* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$*;*

(vii) $s_{\mathbb{R}}(A)^2 \le \|A\|_2^2 + \Re\varphi(A^2) - \frac{2}{n}(\Re\mathrm{tr}(A))^2$ *for all* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

In what follows we assume that $n \ge 2$.

Theorem 2. *For a positive linear functional* φ *on* $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *with* $\varphi(I) = n$ *the following conditions are equivalent:*

(i) $\varphi = \mathrm{tr}$*;*

(ii) $4\Big(\|A\|_2^2 - \frac{1}{n}|\varphi(A)|^2\Big) \le ns(A)^2$ *for even* n *and for all* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *with real characteristic roots;*

(iii) $\dfrac{4n}{n^2-1}\Big(\|A\|_2^2 - \frac{1}{n}|\varphi(A)|^2\Big) \le s(A)^2$ *for odd* n *and for all* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *with real characteristic roots.*

Theorem 3. *For a positive linear functional* φ *on* $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *with* $\varphi(I) = n$ *the following conditions are equivalent:*

(i) $\varphi = \mathrm{tr}$*;*

(ii) $\sum_{k=1}^n |(A\xi_k, \xi_k)| \le \varphi(|A|)$ *for all* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *and every orthonormal basis* $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}^n$*;*

(iii) $\Big|\sum_{k=1}^n (A\xi_k, \xi_k)\Big| \le \varphi(|A|)$ *for all* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *and every orthonormal basis* $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}^n$*;*

(iv) $\sum_{k=1}^n |\lambda_k(A)|^p \le \varphi(|A|^p)$ *for all* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ *and every* $p > 0$.

For other trace characterizations see [2-5].

References

1. *Mirsky L.* The spread of a matrix // Mathematika **3**:2 (1956), 127–130.

2. *Bikchentaev A.M.* Metrics on projections of the von Neumann algebra associated with tracial functionals // Sib. Math. J. **60**:6 (2019), 952–956.

3. *Bikchentaev A.M., Abed S.A.* Projections and traces on von Neumann algebras // Lobachevskii J. Math. **40**:9 (2019), 1260–1267.

4. *Bikchentaev A.M.* Inequalities for determinants and characterization of the trace // Sib. Math. J. **61**:2 (2020), 248–254.

5. *Tikhonov O.E.* Subadditivity inequalities in von Neumann algebras and characterization of tracial functionals // Positivity **9**:2 (2005), 259–264.

ОДИН МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ИДЕМПОТЕНТОВ В УНИТАЛЬНОЙ АЛГЕБРЕ

Махмуд Хадур
mahmoud.khadour.991@gmail.com

УДК 517.98

Предложен один метод построения идемпотентов в унитальной алгебре, используя n произвольных идемпотентов из этой алгебры. Исследованы свойства полученных идемпотентов.

Ключевые слова: унитальная алгебра, идемпотент, C^*-алгебра, след.

One method for constructing idempotents in unital algebra

A method for constructing idempotents in a unital algebra is proposed using n arbitrary idempotents from this algebra. The properties of the obtained idempotents are investigated.

Keywords: unital algebra, idempotent, C^*-algebra, trace.

В теории операторных алгебр большую роль играют конечные суммы попарных и тройных произведений идемпотентов, см., например, [1-3]. Пусть $\mathcal{A}$ – унитальная алгебра с единицей I, $\mathcal{A}^{\text{ id}} = \{A \in \mathcal{A} : A^2 = A\}$; $\mathcal{A}^{\text{ sym}} = \{A \in \mathcal{A} : A^2 = I\}$. Если $A \in \mathcal{A}^{\text{ id}}$, то $A^\perp := I - A \in \mathcal{A}^{\text{ id}}$. Положим $S_P := 2P - I$ для $P \in \mathcal{A}^{\text{ id}}$. Тогда $S_P \in \mathcal{A}^{\text{ sym}}$. Здесь изучается один метод построения идемпотентов в $\mathcal{A}$, исходя из набора $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{A}^{\text{ id}}$.

Теорема 1. *Пусть $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{A}^{\ sym}$. Тогда*

$$S = S_1 \cdots S_{n-1} S_n S_{n-1} \cdots S_1 \in \mathcal{A}^{\ sym}$$

и для $P_k := \frac{S_k + I}{2} \in \mathcal{A}^{\ id}$, $k = 1, \dots, n$ имеем $P := P(P_1, \dots, P_n) = \frac{S+I}{2} \in \mathcal{A}^{\ id}$. Если φ – конечный след на C^*-алгебре $\mathcal{A}$, то $\varphi(S) = \varphi(S_n) \in \mathbb{R}$ и $\varphi(P) = \varphi(P_n) \in \mathbb{R}^+$.

Для $n = 2$ положим $P := P_1$, $Q := P_2$ и $A(P, Q) := P(P_1, P_2)$.

Теорема 2. *Пусть $P, Q \in \mathcal{A}^{\ id}$. Тогда*
(i) $A(P, Q) = Q - 2QP - 2PQ + 4PQP \in \mathcal{A}^{\ id}$;
(ii) $A(P^\perp, Q) = A(P, Q)$;
(iii) $A(P, Q^\perp) = A(P, Q)^\perp$;
(iv) $A(P^\perp, Q^\perp) = A(P, Q^\perp) = A(P, Q)^\perp$;
(v) если $PQ = QP = 0$, то $A(P, Q) = Q$;
(vi) $A(P, P^\perp) = P^\perp, A(P, P) = P$;
(vii) если $PQP = P$, то $A(P, Q) = (2P - Q)^2$;
(viii) если $PQ = QP \in \{P, Q\}$, то $A(P, Q) = Q$;

Хадур Махмуд, аспирант, К(П)ФУ (Казань, Россия); Khadour Mahmoud, postgraduate, (Kazan (Volga Region) University, Kazan, Russia)

(ix) $A(P,Q) = (Q - 2PQ)(Q - 2QP)$;

(x) если φ *– конечный след на* C^**-алгебре* $\mathcal{A}$*, то* $\varphi(A(P,Q)) = \varphi(Q)$.

Следствие. *Если* $\mathcal{A}$ *– унитальная алгебра и* $P \in \mathcal{A}^{\,id}$*, то отображение* $Q \mapsto A(P,Q), f(Q) = A(P,Q)$*, удовлетворяет для всех* $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\,id}$ *и* $P_1P_2 \in \mathcal{A}^{\,id}$ *соотношению* $f(P_1)f(P_2) = f(P_1P_2)$*, т.е.* f *является мультипликативным отображением. Оно сохраняет дополнения* $^\perp$*. Если* $\mathcal{A}$ *– унитальная* C^**-алгебра с конечным следом, то* f *сохраняет следы.*

Для $n = 3$ положим $P := P_1$, $Q := P_2$, $R := P_3$ и $B(P,Q,R) := P(P_1,P_2,P_3)$. Тогда

$$\begin{aligned} B(P,Q,R) = {} & 16PQRQP - 8PQRQ - 8PQRP - 8PRQP - 8QRQP \\ & + 4PQR + 4PRQ + 4PRP + 4QRQ + 4QRP + 4RQP \\ & - 2PR - 2QR - 2RQ - 2RP + R \in \mathcal{A}^{\,\mathrm{id}}. \end{aligned}$$

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{A}$ *– унитальная алгебра и* $P,Q,R \in \mathcal{A}^{\,id}$*. Тогда*

(i) $B(P^\perp,Q,R) = B(P,Q^\perp,R) = B(P,Q,R)$;

$B(P^\perp,Q^\perp,R) = B(P,Q,R)$;

(ii) $B(P,Q,R^\perp) = B(P,Q,R)^\perp$; $B(P^\perp,Q^\perp,R^\perp) = B(P,Q,R)^\perp$;

(iii) если $PR = RQ = QR = RP = 0$*, то* $B(P,Q,R) = R$;

(iv) $B(P,P,P^\perp) = P^\perp, B(P,P,P) = P$;

(v) если $QRQ = Q, PRP = P$*, то*

$B(P,Q,R) = (2P - I)(2Q - I)R(2Q - I)(2P - I)$;

(vi) если $PR = RQ = QR = RP \in \{P,Q,R\}$*, то* $B(P,Q,R) = R$;

(vii) $B(P,Q,R) = (4PQ - 2Q - 2P + R)R(4QP - 2Q - 2P + R)$;

(viii) если φ *– конечный след на* C^**-алгебре* $\mathcal{A}$*, то* $\varphi(B(P,Q,R)) = \varphi(R)$.

Литература

1. *Бикчентаев А.М.* О представлении линейных операторов в гильбертовом пространстве в виде конечных сумм произведений проекторов // Докл. РАН, **393**:4 (2003), 443–447.

2. *Бикчентаев А.М.* О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов // Сиб. матем. журн., **46**:1 (2005), 32–45.

3. *Бикчентаев А.М.* О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов. III. Коммутаторы в C^*-алгебрах // Матем. сб., **199**:4 (2008), 3–20.

О ТЕОРЕМЕ ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА

А.Б. Муканов, Е.Д. Нурсултанов
mukanov.askhat@gmail.com, er-nurs@yandex.ru

УДК 517.518.4

Мы изучаем условия интегрируемости функций в терминах их коэффициентов Фурье. В частности, получен аналог теоремы Харди-Литтлвуда для тригонометрических рядов с обобщенно монотонными коэффициентами.

Ключевые слова: тригонометрические ряды, пространства Лебега, обобщенная монотонность.

On Hardy-Littlewood's theorem

We study integrability conditions of functions in setting of their Fourier coefficients. In particular, we obtain an analogue of the Hardy-Littlewood theorem for trigonometric series with general monotone coefficients.

Keywords: trigonometric series, Lebesgue spaces, general monotonicity.

Мы рассматриваем классическую теорему Харди-Литтлвуда (см. [5, 12 Глава]).

Теорема A. *Пусть* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *невозрастающие, неотрицательные последовательности, и пусть интегрируемая на* $[0,1]$ *функция* $f(x)$ *имеет тригонометрический ряд Фурье* $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos 2\pi kx+b_k\sin 2\pi kx)$. *Тогда для всех* $1<p<\infty$,

$$\|f\|_{L_p([0,1])}\asymp\frac{a_0}{2}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^{p-2}(a_k^p+b_k^p)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1}$$

Аналогичный результат для функции $f(x)$ с рядом Фурье $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{2\pi ikx}$, где $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{c_{-k}\}_{k=0}^{\infty}$ – невозрастающие, неотрицательные последовательности выглядит следующим образом:

$$\|f\|_{L_p([0,1])}\asymp\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}(|k|+1)^{p-2}|c_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1<p<\infty. \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (проект №AP22688236).

Муканов Асхат Бирлесович, PhD (Алматы, Казахстан); Askhat Mukanov (Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan)

Нурсултанов Ерлан Даутбекович, д.ф.-м.н., профессор, Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова (Astana, Kazakhstan); Erlan Nursultanov (Kazakhstan Branch of Lomonosov Moscow State University, Astana, Kazakhstan)

Соотношения (1), (2) были обобщены во многих работах, (см. [1-4] и библиографию в них). В основном обобщение теоремы Харди-Литтлвуда получают путем ослабления условия монотонности коэффициентов Фурье, тем самым расширяя класс допустимых последовательностей. В недавней работе [1] было получено соотношение (1) для последовательностей из, так называемого, класса обобщенно монотонных последовательностей GM_1, содержащего класс монотонных последовательностей.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность (вообще говоря, комплексных) чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит классу GM_1, если существуют $C > 0$ и $\lambda > 1$, такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется условие:

$$\sum_{k=n}^{2n} |a_k - a_{k+1}| \le C \sum_{k=\frac{n}{\lambda}}^{\lambda n} \frac{|a_k|}{k}. \tag{3}$$

Существенным достижением в работе [1] заключается в том, что авторы не накладывают на коэффициенты Фурье условие неотрицательности и рассматривают последовательности вещественных чисел, удовлетворяющих условию (3).

Мы рассматриваем другие классы обобщенно монотонных последовательностей. В частности, был рассмотрен следующий класс.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ принадлежит классу GM_2, если существует $C > 0$, такое, что для всех $n \ge 0$ выполняется условие:

$$\sum_{[2^{n-1}] \le |m| < 2^n} |a_m - a_{m+1}| \le C \sup_{[2^{n-1}] \le |m| \le 2^n} \frac{1}{|m|+1} \left| \sum_{j=0}^{m} a_j \right|.$$

Для данного класса была получена теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \mathrm{GM}_2$, *и пусть интегрируемая на* $[0,1]$ *функция* $f(x)$ *имеет тригонометрический ряд Фурье* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x}$. *Тогда для всех* $1 < p < \infty$,

$$\|f\|_{L_p([0,1])} \asymp \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (|k|+1)^{p-2} |c_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty.$$

Замечание 1. Особенностью теоремы 1 является то, что коэффициенты $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ комплекснозначные. Помимо этого в работе мы сравниваем рассматриваемые нами классы обобщенно монотонных последовательностей с классами, рассмотренных в предыдущих работах.

Литература

1. *Dyachenko M., Mukanov A., Tikhonov S.* Hardy-Littlewood theorems for trigonometric series with general monotone coefficients // Stud. Math., **250**:3 (2020), 217-234.

2. *Dyachenko M., Nursultanov E., Kankenova A.* On summability of Fourier coefficients of functions from Lebesgue space // J. Math. Anal. Appl., **419**:2 (2014), 959-971.

3. *Grigoriev S., Sagher Y., Savage T.* General monotonicity and interpolation of operators // J. Math. Anal. Appl., **435**:2 (2016), 1296-1320.

4. *Nursultanov E.* Net spaces and inequalities of Hardy-Littlewood type // Sb. Math., **189**:3 (1998), 399-419.

5. *Zygmund A.* Trigonometric series, third ed., vols I, II. — Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

О СУБГАРМОНИЧНОСТИ ФУНКЦИЙ С РАЗДЕЛЁННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СВЯЗИ С СУБСФЕРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Р.Р. Мурясов

romrumur@yandex.ru

УДК 517.574

Получены необходимые и достаточные условия субгармоничности функций, представимых в многомерных сферических координатах в виде произведения пары функций. Установлена связь таких функций с функциями, выпуклыми относительно пары функций и с субсферическими функциями.

Ключевые слова: субгармоническая функция, субсферическая функция, обобщённая производная, обобщённая функция, выпуклая функция, дифференциальный оператор, выпуклость относительно пары функций.

On the connection between subharmonic functions with separated variables and subspherical functions

In this work we consider the necessary and sufficient conditions for the subharmonicity of functions, representable as a product of two functions in polydimensional spherical coordinate system. We have established a connection of such functions with generalized convex functions and subspherical functions.

Keywords: subharmonic function, subspherical function, generalized derivative, distribution, convex function, differential operator, generalized convex function.

Теорема 1. *Пусть функция u имеет в n-мерных сферических координатах вид*

$$u = f(r)g(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}),$$

где $f \geqslant 0$ и обращается в нуль лишь на множестве одномерной меры нуль, непрерывна и имеет слабые производные до второго порядка включительно в интервале (r_1, r_2), $g \geqslant 0$ и обращается в нуль лишь на множестве $n-1$-мерной меры нуль, непрерывна и имеет слабые производные до второго порядка включительно на единичной сфере $S_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Если найдётся такое вещественное число $\rho > 0$, для которого f является L_ρ-выпуклой в интервале (r_1, r_2) функцией, где

$$L_\rho = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r(n-1)\frac{d}{dr} - \rho(\rho + n - 2),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00002).

Мурясов Роман Русланович, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Roman Muryasov (Institute of mathematics with computing centre — subdivision of the Ufa federal research centre of the Russian Academy of Science, Ufa, Russia)

а g является ρ-субсферической функцией, то и является субгармонической функцией в шаровом слое, ограниченном сферами радиусов r_1 и r_2.

Теорема 2. *Пусть функция и имеет в n-мерных сферических координатах вид*

$$u = f(r)g(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}),$$

где $f \geqslant 0$ и обращается в нуль лишь на множестве одномерной меры нуль, непрерывна и имеет слабые производные до второго порядка включительно в интервале (r_1, r_2), $g \geqslant 0$ и обращается в нуль лишь на множестве $n-1$-мерной меры нуль, непрерывна и имеет слабые производные до второго порядка включительно на единичной сфере $S_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Если и является субгармонической функцией в шаровом слое, ограниченном сферами радиусов r_1 и r_2, то найдётся такое вещественное число ρ, для которого f является L_ρ-выпуклой в интервале (r_1, r_2) функцией, где

$$L_\rho = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + r(n-1)\frac{d}{dr} - \rho(\rho + n - 2),$$

а g является ρ-субсферической функцией.

Литература

1. *Хейфиц А.И.* Аналитические свойства функций, выпуклых от решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения, **17**:6 (1981), 1025-1034

2. *Хабибуллин Б.Н.* Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка порядка // Матем. сб., **182**:6 (1991), 811-827

ОБ УСЛОВИИ ПОДОБИЯ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ВОСПРОИЗВОДЯЩИМ ЯДРОМ

В.В. Напалков (мл.), А.А. Нуятов
vnap@mail.ru, nuyatov1aa@rambler.ru

УДК 517.44

В работе рассматривается вопрос: при каких условиях два гильбертовых пространства с воспроизводящим ядром будут подобными, т.е. эти пространства состоят из одних и тех же функций, и скалярные произведения в этих пространствах отличаются на положительную константу. Приводится обобщение условия согласования, введенное авторами ранее.

Ключевые слова: гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, ортоподобные системы разложения, жесткие интегральные фреймы

On the condition of similarity of Hilbert spaces with a reproducing kernel

The paper considers the question: under what conditions will two Hilbert spaces with a reproducing kernel be similar, i.e. these spaces consist of the same functions, and the inner products in these spaces differ by a positive constant. A generalization of the consistence condition introduced by the authors earlier is given.

Keywords: reproducing kernel Hilbert space, orhosimilal decomposition systems, integral frames

Определение 1. *Пусть H – гильбертово пространство, состоящее из функций, заданных на некотором множестве точек $M \subset \mathbb{C}^r$, $r \in \mathbb{N}$, и Ω_1 – пространство с мерой μ, p – некоторое положительное число. Система элементов $\{e(z,\omega\}_{\omega\in\Omega_1}$ называется (p,μ) – фреймом в гильбертовом пространстве H если любая функция $f \subset H$ представляется в виде:*

$$p^2 f(z) = \int_{\Omega_1} (f, e(\cdot,\omega))_H \, e(z,\omega)\, d\mu(\omega) \quad \forall z \in M.$$

Следует заметить, что понятие (p,μ) – фрейма является некоторым обобщением понятия ортоподобных систем разложения, введенных Т.П. Лукашенко [1].

Замечание. *Следующие условия равносильны:*

Напалков Валерий Валентинович, д.ф.-м.н., научный сотрудник, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Valerii Napalkov (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, Russia)

Нуятов Андрей Александрович, к.ф.-м.н., доцент, НГТУ имени Р.Е. Алексеева (Нижний Новгород, Россия); Andrey Nuyatov (Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Russia)

1. *система элементов $\{e(z,\omega\}_{\omega\in\Omega_1}$ является $(1,\mu)$ – фреймом;*
2. *система элементов $\{e(z,\omega\}_{\omega\in\Omega_1}$ есть ортоподобная система разложения с мерой μ на Ω_1;*

Определение 2. *Гильбертово пространство с воспроизводящим ядром H_1 называется p – подобным пространству H_2, $(p>0)$, если пространства H_1, H_2 состоят из одних и тех же функций, и выполняется равенство:*

$$(f_1,f_2)_{H_1}=p^2\cdot(f_1,f_2)_{H_2}\quad\forall f_1,f_2\in H_1.$$

Определение 3. *Пусть система функций $\{e_1(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$ является (p_1,μ) –фреймом, а система функций $\{e_2(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$ является (p_2,μ) – фреймом. Определим следующую величину для любых $z_1,z_2\in\Omega_1$:*

$$\big[\big[e_1(\cdot,z_1),e_2(\cdot,z_2)\big]\big]\overset{def}{=}$$
$$=\int_{\Omega_1}(e_1(\cdot,z_1),e_2(\cdot,\xi))_H\cdot(e_2(\cdot,\xi),e_2(\cdot,z_2))_H\,d\mu(\xi).$$

Лемма. *Если $\{e_j(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$, $j=1,2$ – ортоподобные системы разложения с одной и той же мерой μ, т.е. $(1,\mu)$ – фреймы, то*

$$\big[\big[e_1(\cdot,z_1),e_2(\cdot,z_2)\big]\big]=(e_1(\cdot,z_1),e_2(\cdot,z_2))_H\quad\forall z_1,z_2\in\Omega_1.$$

Теорема 1. *Для того чтобы пространство $\widetilde{H}$ было p – подобным пространству $\widehat{H}$, необходимо и достаточно существование линейного непрерывного взаимно-однозначного оператора A такого, что*

$$A\colon e_1(\cdot,z)\mapsto e_2(\cdot,z)\quad\forall z\in\Omega_1,\quad\|Af\|_H=p\cdot\|f\|_H\,\forall f\in H.$$

Теорема 2. *Пусть $\{e_1(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$ – (p_1,μ) –фрейм, а $\{e_2(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_1}$ – (p_2,μ) – фрейм. Для того чтобы пространство H_1 было p – подобным пространству H_2, необходимо и достаточно, чтобы нашелся линейный непрерывный взаимно однозначный оператор $\mathcal{T}\colon H\to H$ такой, что выполнено условие:*

$$\big[\big[e_1(\cdot,z_1),e_2(\cdot,z_2)\big]\big]=\frac{1}{p^2}\cdot\big[\big[e_2(\cdot,z_1),\mathcal{T}e_1(\cdot,z_2)\big]\big]\quad\forall z_1,z_2\in\Omega_1.$$

При этом справедливо равенство $p=p_1/p_2$.

Теорема 2 обобщает некоторые результаты работ авторов [2], [3], [4]. Далее мы рассмотрим набор фреймов. Пусть $\{e_1^k(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$, $k=\overline{1,n}$ – набор $(p_{1,k},\mu_k)$ – фреймов, где μ_k, $k=\overline{1,n}$ – некоторые меры, заданные на Ω_1, а $p_{1,k}>0$, $k=\overline{1,n}$ – некоторые числа. Пусть

$$\tau(\cdot,\xi)\overset{def}{=}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot e_1^k(\cdot,\xi),\quad\xi\in\Omega_1,$$

где $\alpha_k \in \mathbb{C}\, k = \overline{1,n}$ подобраны так, чтобы система функций $\{\tau(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ была полна в пространстве H. Без ограничения общности считаем $\alpha_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$. Определим пространство $\widetilde{H}$:

$$\widetilde{H} \overset{def}{=} \left\{\widetilde{f}\colon \widetilde{f}(z) = (\tau(\cdot,z),f)_H,\, (\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2) \overset{def}{=} (f_2,f_1)_H\, \forall f_1,f_2 \in H\right\}.$$

Определим пространства RKHS H_1^k:

$$H_1^k \overset{def}{=} \Big\{h\colon h(z) = (e_1^k(\cdot,z),f^h)_H,\, z\in\Omega_1,$$
$$(h_1,h_2) \overset{def}{=} (f_2^h,f_1^h)_H\, \forall f_1^h,f_2^h \in H\Big\}.$$

Далее пусть $\{e_2^k(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$, $k = \overline{1,n}$ – набор $(p_{2,k},\mu_k)$ – фреймов, где μ_k, $k = \overline{1,n}$ – некоторые меры, заданные на Ω_1, а $p_{2,k} > 0$, $k = \overline{1,n}$ – некоторые числа. Пусть

$$\eta(\cdot,\xi) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot e_1^k(\cdot,\xi), \quad \xi\in\Omega_1,$$

где $\beta_k \in \mathbb{C}, k = \overline{1,n}$ подобраны так, чтобы система функций $\{\eta(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ была полна в пространстве H. Без ограничения общности считаем $\beta_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$. Определим гильбертово пространство с воспроизводящим ядром $\widehat{H}$:

$$\widehat{H} \overset{def}{=} \left\{\widehat{f}\colon \widehat{f}(z) = (\tau(\cdot,z),f)_H,\, z\in\Omega_1,\, (\widehat{f}_1,\widehat{f}_2) \overset{def}{=} (f_2,f_1)_H\, \forall f_1,f_2 \in H\right\}.$$

Определим пространства RKHS H_2^k:

$$H_2^k \overset{def}{=} \Big\{h\colon h(z) = (e_2^k(\cdot,z),f^h)_H,\, z\in\Omega_1,$$
$$(h_1,h_2) \overset{def}{=} (f_2^h,f_1^h)_H\, \forall f_1^h,f_2^h \in H\Big\}.$$

Пусть носители мер μ_k обладают свойством:

$$\operatorname{supp}\mu_k \cap \operatorname{supp}\mu_j = \varnothing, \quad k\neq j, \quad k,j = \overline{1,n}.$$

При сделанных предположениях справедлива

Теорема 3. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *пространство $\widetilde{H}$ является p – подобным пространству $\widehat{H}$;*
2. *найдется унитарный оператор $\mathcal{T}\colon H\to H$ такой, что выполнено следующее условие для систем функций τ и η, т.е.*

$$\big[\big[\tau(\cdot,z_1),\eta(\cdot,z_2)\big]\big] = \frac{1}{p^2}\cdot\big[\big[\eta(\cdot,z_1),\mathcal{T}\tau(\cdot,z_2)\big]\big] \quad \forall z_1,z_2\in\Omega_1,$$

где $p > 0$ – некоторое число;

3. *найдется унитарный оператор* $\mathcal{T}\colon H \to H$ *такой, что выполнены следующие условия для систем функций* $\{e_1^k(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_1}$ *и* $\{e_2^k(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_1}$*:*

$$\left[\left[e_1^k(\cdot, z_1), e_2^k(\cdot, z_2)\right]\right] = \frac{\gamma_k \cdot |\alpha_k|^2}{|\beta_k|^2 \cdot p^2} \cdot \left[\left[e_2^k(\cdot, z_1), \mathcal{T}e_1^k(\cdot, z_2)\right]\right]$$

$$\forall z_1, z_2 \in \Omega_1 \quad k = \overline{1, n},$$

где $\gamma_k \stackrel{def}{=} \frac{\beta_k \cdot \overline{\alpha_k}}{\overline{\beta_k} \cdot \alpha_k} \in \mathbb{C}$, $|\gamma_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$*;*

4. *пространства* H_1^k $\frac{|\beta_k|\cdot p}{|\alpha_k|}$ *– подобны пространствам* H_2^k*,* $k = \overline{1, n}$*, соответственно.*

В докладе обсуждается применение полученных результатов.

Литература

1. *Лукашенко Т.П.* О свойствах систем разложения подобных ортогональным // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62, № 5. С. 187–206.

2. *Напалков В.В.(мл.), Нуятов А.А.* Об одном условии совпадения пространств преобразований функционалов гильбертова пространства// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3, 142-154.

3. *Напалков В.В.(мл.), Нуятов А.А.* К вопросу о совпадении гильбертовых пространств интегрируемых с квадратом по мере функций// Труды МФТИ. 2023. № 3.

4. *Напалков В.В.(мл.), Нуятов А.А.* К вопросу о вложении гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром//Уфимский матем. журнал. том 16. №3. 2024. С. 56-65.

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ ДЛЯ ОБЪЕМНОГО РАССТОЯНИЯ N-МЕРНОГО ШАРА

Р.Г. Насибуллин, NasibullinRamil@gmail.com

УДК 517.51

В данной работе рассмативаются неравенства типа Харди в n-мерных шарах. Получены точные одномерные и многомерные неравенства с дополнительными слагаемыми. Весовые функции в пространственных неравенствах зависят от объемного расстояния.

Ключевые слова: неравенство Харди, дополнительное слагаемое, объемное расстояние.

Hardy inequalities for volume distance

In this paper Hardy-type inequalities on n-dimensional balls are considered. We obtain sharp one-dimensional and multidimensional inequalities with additional terms. Weight functions in spatial inequalities depend on the volume distance.

Keywords: Hardy's inequality, additional term, volume distance.

Пусть Ω — открытое выпуклое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Через $C_0^1(\Omega)$ обозначим семейство непреывно дифференцируемых функций $g : \Omega \to \mathbb{R}$ с конечным интегралом Дирихле и компактым носителем в Ω.

Неравенства Харди, весовые функции которых зависят от расстояния до границы, конформного радиуса или расстояния до начала координат, хорошо известны (см. [1]). На одной из конференций Ильдар Хамитович Мусин предложил попытаться получить неравенства Харди в терминах объемного расстояния, введенного Ринадом Салаватовичем Юлмухаметовым в статье [2] (см. также [3]).

Следуя статьям [2] и [3] объемное расстояние мы будем обозначать через $\mathrm{vd}(x,\Omega)$. Эта функция определяется по индукции по размерности пространства. В одномерном случае, т.е. если $\Omega \subset \mathbb{R}$, то $\mathrm{vd}(x,\Omega) = \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$ — функция расстояния от точки до границы области.

Пусть величина $\mathrm{vd}(x,\Omega)$ определена в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Возьмем точку $y_0 \in \partial\Omega$ такую, что

$$\inf\{|x-y| : y \notin \Omega\} = |x-y_0|.$$

Если таких точек на границе несколько, то возьмем любую из них. Через точку y_0 проходит единственная опорная гиперплоскость, ортогональная отрезку, соединяющему точки x и y_0. Гиперплоскость, параллельную этой опорной гиперплоскости и проходящую через точку

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-00066).

Насибуллин Рамиль Гайсаевич, к.ф.-м.н., доцент, КФУ (Казань, Россия); Ramil Nasibullin (Kazan federal university, Kazan, Russia)

x, обозначим черех P. Размерность выпуклого множества $\Omega_1 = P\bigcap E$ равна n и $x \in \Omega_1$. По допущению индукции величина $\mathrm{vd}(x, \Omega_1)$ уже определена и

$$\mathrm{vd}(x, \Omega) = \mathrm{vd}(x, \Omega_1)|x - y_0|.$$

В общем случае объемное расстояние $\mathrm{vd}(x, \Omega)$ не всегда определяется однозначно. При этом работ, посвященных тематике неравенств типа Харди для объемного расстояния, в настоящее время нет. Поэтому мы решили рассмотреть неравенства в многомерных шарах, в которых объемное расстояние хорошо определено.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что B_n — единичный n-мерный шар и $g \in C_0^1(B_n)$. Тогда существует константа $\kappa_n > 0$ такая, что*

$$\int\limits_{B_n} g^2(x) \left(\frac{2^{-\frac{4}{n+1}}}{vd(x, B_n)^{\frac{4}{n+1}}} + \frac{\alpha^2\beta^2 q^2 \gamma}{(vd(x, B_n))^{\frac{2(2-q)}{n+1}}} + \kappa_n \right) dx \le \int\limits_{B_n} |\nabla g(x)|^2 dx,$$

где через $\nabla g(x)$ обозначен градиент функции, $\alpha = \frac{j_0^2}{2}$, $\beta = \frac{\pi^2}{4}$, $q \approx 1.32793$ — первый положительный корень уравнения

$$J_0\left(\alpha \left(\frac{1}{\beta - 1}\right)^{q/2}\right) - q\alpha \left(\frac{1}{\beta - 1}\right)^{q/2} J_1\left(\alpha \left(\frac{1}{\beta - 1}\right)^{q/2}\right) = 0$$

и

$$\gamma = \min_{t\in[0,1]} \frac{(2-t)^{\frac{(n-1))(2-q)}{n+1}}}{(\beta - t)^{(2+q)}} = 0.0578214.$$

Постоянная $2^{-\frac{4}{n+1}}$ является точной.

Литература

1. *Насибуллин Р.Г.* Геометрия одномерных и пространственных неравенств типа Харди // Изв. вузов. Матем., 11, (2022), 52–88.

2. *Юлмухаметов Р.С.* Асимптотика многомерного интеграла Лапласа // ДСб. БНЦ УрО АН, СССР. Уфа. 1989.

3. *Башмаков Р.А., Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С.* О геометрических характеристиках выпуклых функций и интегралах Лапласа // Уфимский математический журнал, **2**:1 (2010), 3-16.

ОБ ИНДИКАТОРЕ СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПОЛУКОЛЬЦЕ

А.А. Наумова
aliona.filatowa2013@yandex.ru

УДК 517.53

Получены условия ρ—тригонометрической выпуклости индикатора роста $h(\theta)$ субгармонической функции $v(z)$ формального порядка ρ в полукольце $D_+(R, \alpha, \beta)$.

Ключевые слова: субгармоническая функция, полукольцо, формальный порядок, индикатор роста.

The main tasks of mathematics

The conditions of the ρ—trigonometric convexity of the growth indicator $h(\theta)$ a subharmonic function $v(z)$ of the formal order ρ in the semicircle $D_+(R, \alpha, \beta)$.

Keywords: subharmonic function, semicircle, formal order, growth indicator.

Принцип максимума модуля состоит, как известно, в том, что модуль функции $f(z)$ голоморфной в некоторой области и непрерывной в замыкании этой области, принимает наибольшее значение на границе области. Этот важный принцип был распространен Фрагменом и Линдлёфом [1] на тот случай, когда непрерывность функции нарушается в некоторых исключительных точках границы, при том, однако, условии, что при приближении к этим точкам модуль функции не слишком быстро возрастает. Нам понадобится следующая формулировка теоремы. Для того чтобы сформулировать её введем следующие определения.

Под бесконечным полукольцом в полуплоскости $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ с вещественной осью $\mathbb{R}$ мы понимаем $D_+(R, \varphi_1, \varphi_2) = \{z : |z| > R, \operatorname{Im} z > 0, \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$.

Определение. Пусть $\rho \geq 0$ — фиксированное число. Число ρ называется формальным порядком субгармонической в $D_+(R, \varphi_1, \varphi_2)$ функции $v(z)$, если $\exists M_1, M_2 > 0$ такие, что $\forall z \in D_+(R, \varphi_1, \varphi_2)$ выполняется неравенство

$$v(z) \leq M_1 + M_2 |z|^\rho$$

Теорема (Фрагмента-Линделефа). *Пусть в полукольце $D_+(R, \varphi_1, \varphi_2)$ задана субгармоническая функция $v(z)$, для которой выполняются условия:*

Наумова Алёна Александровна, аспирант КГУ (Курск, Россия); Alena Naumova (Kursk State University, Kursk, Russia)

1) существует число $M > 0$ такое, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\varlimsup_{\substack{z \to x, \\ z \in D_+(R,\varphi_1,\varphi_2)}} v(z) \leq M,$$

2) некоторое число $\rho > 0$ является формальным порядком функции $v(z)$ в $D_+(R, \varphi_1, \varphi_2)$,

3) выполняется неравенство $\varphi_2 - \varphi_1 < \frac{\pi}{\rho}$.

Тогда $\forall z \in D_+(R, \varphi_1, \varphi_2)$ выполняется неравенство $v(z) \leq M$.

Отметим, что справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $v(z)$ есть субгармоническая функция формального порядка ρ в полукольце $D_+(R, \alpha, \beta)$ и пусть $h(\theta) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{v(re^{i\theta})}{r^\rho}$ — её индикатор роста (это определение индикатора в $D_+(R, \alpha, \beta)$). Тогда $h(\theta)$ —ρ-тригонометрически выпуклая функция на интервале (α, β).*

Доказательство теоремы аналогично соответствующей теореме из монографии Б. Я. Левина [теорема 19, глава I, 2].

Литература

1. *Phragmen et Lindelof.* Sur une extension d'un principe classique de l'analyse// Acta math. 31, 1908.

2. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций — Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.

ОЦЕНКИ ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЕКТОРОВ И МНОГОЧЛЕНЫ ЛЕЖАНДРА

М.В. Невский
mnevsk55@yandex.ru

УДК 517.51, 514.17

Приводится двусторонняя оценка для минимальной нормы проектора при линейной интерполяции на компакте в $\mathbb{R}^n$. Нижняя оценка получается с применением многочленов Лежандра.

Ключевые слова: интерполяция, проектор, норма, многочлены Лежандра.

Estimates for interpolation projectors and Legendre polynomials

We give two-sided estimates for the minimum projector norm under linear interpolation on a compact set in $\mathbb{R}^n$. The lower estimate is obtained by applying Legendre polynomials.

Keywords: interpolation, projector, norm, Legendre polynomials.

Стандартизованным многочленом Лежандра степени n называется многочлен

$$\chi_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\left[(t^2-1)^n\right]^{(n)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

По поводу свойств χ_n см., например, [3]. Многочлены Лежандра ортогональны на отрезке $[-1,1]$ с весом $w(t) \equiv 1$. Известно, что $\chi_n(1) = 1$, а если $n \geq 1$, то $\chi_n(t)$ возрастает при $t \geq 1$. Через χ_n^{-1} обозначим функцию, обратную к χ_n на полуоси $[1, +\infty)$.

В [1] автором получена следующая характеризация многочленов $\chi_n(t)$ через объёмы выпуклых многогранников (доказательство даётся также в [4]). Для $\gamma \geq 1$ рассмотрим множество

$$E_{n,\gamma} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n |x_j| + \left|1 - \sum_{j=1}^n x_j\right| \leq \gamma\right\}.$$

Теорема 1. *Выполняются равенства*

$$\mathrm{mes_n}(E_{n,\gamma}) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 (\gamma-1)^{n-i}(\gamma+1)^i = \frac{\chi_n(\gamma)}{n!}. \tag{1}$$

Соотношения (1) позволяют получить нижние оценки норм проекторов при полиномиальной интерполяции непрерывных функций многих переменных. Ниже мы рассмотрим случай линейной интерполяции

Невский Михаил Викторович, д.ф.-м.н., доцент, ЯрГУ им. П.Г. Демидова (Ярославль, Россия); Mikhail Nevskii (P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia)

на компакте в $\mathbb{R}^n$. Заметим, что этот подход можно перенести и на интерполяцию с помощью более широких пространств многочленов.

Пусть $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — пространство многочленов от n переменных степени не выше 1, E — произвольный компакт в $\mathbb{R}^n$, $K = \mathrm{conv}(E)$. Будем предполагать, что $\mathrm{vol}(K) > 0$. Пусть точки $x^{(j)} \in E$, $1 \leq j \leq n+1$, являются вершинами n-мерного невырожденного симплекса. Интерполяционный проектор $P : C(E) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ с узлами $x^{(j)}$ определяется равенствами $Pf\left(x^{(j)}\right) = f\left(x^{(j)}\right)$. Под $\|P\|_E$ будем понимать норму P как оператора из $C(E)$ в $C(E)$. Через $\theta_n(E)$ обозначим минимальную норму $\|P\|_E$ из всех операторов P с узлами, принадлежащими E. Через $\mathrm{simp}(E)$ обозначим максимальный объём симплекса с вершинами в E.

Теорема 2. *Справедливы оценки*

$$\chi_n^{-1}\left(\frac{\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{simp}(E)}\right) \leq \theta_n(E) \leq n+1. \tag{2}$$

Левое неравенство в (2) доказывается с применением теоремы 1. Правая оценка получается из рассмотрения проектора, узлы которого $x^{(j)} \in E$ находятся в вершинах симплекса с максимальным объёмом, т.е. объёмом, равным $\mathrm{simp}(E)$. Доказательства оценок (2) приводятся в [4].

В случае, когда E — n-мерный куб или n-мерный шар, левое неравенство из (2) даёт возможность получить неулучшаемые по размерности n оценки вида $\theta_n(E) \geq c\sqrt{n}$. Точное значение $\theta_n(B)$ для n-мерного шара B найдено в [2].

Литература

1. *Невский М.В.* Оценки для минимальной нормы проектора при интерполяции по вершинам n-мерного куба // Модел. и анализ информ. систем, **10**:1 (2003), 9-19.

2. *Невский М.В.* О минимальной норме проектора при линейной интерполяции на n-мерном шаре // Матем. заметки, **114**:3 (2023), 477-480.

3. *Сёге Г.* Ортогональные многочлены. — М: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1962.

4. *M. Nevskii.* Optimal Lagrange interpolation projectors and Legendre polynomials. arXiv:2405.01254.

О НЕТЕРОВОСТИ И ИНДЕКСЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ДВУМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Д.М. Одинабеков
jasur_79@inbox.ru

УДК 517.968

В настоящей работе установлены эффективные необходимые и достаточные условия нетеровости двумерных сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами в лебеговых пространствах с весом и дана формула для вычисления индекса.

Ключевые слова: сингулярный интегральный оператор, индекс оператора, символ оператора, нетеровость оператора.

ON THE NOETHERICITY AND INDEX OF SOME CLASSES OF TWO-DIMENSIONAL SINGULAR INTEGRAL OPERATORS WITH CONTINUOUS COEFFICIENT

This study examines one of the applications of differential calculus: a formula for calculating the curvature of a flat curve. In particular, methods for defining a flat curve are given, and a general formula for calculating the curvature at a certain point is calculated.

Keywords: singular integral operator, operator index, operator symbol, operator Noethericity.

Пусть D – конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная замкнутой кривой Γ.

В пространстве $L^p_{\beta-2/p}(D), (1 < p < \infty, 0 < \beta < 2)$ рассмотрим следующий двумерный сингулярный интегральный оператор

$$A \equiv a_0(z)I + b_0(z)K + \sum_{n=-2}^{2}{}' \Big(a_n(z)I + b_n(z)K\Big)S_n, \tag{1}$$

где штрих у знака суммы означает пропуск члена $n = 0$; I – тождественный оператор, $a_0(z), b_0(z), a_n(z), b_n(z), n = -2, -1, 1, 2$, непрерывные в $\overline{D} = D \cup \Gamma$ комплекснозначные функции, а операторы K и S_n действуют по формулам

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad (S_n f)(z) = \frac{(-1)^{|m|}|m|}{\pi} \iint_D \frac{e^{-2im\theta}}{|\zeta - z|^2} f(\zeta) ds_\zeta,$$

Одинабеков Джасур Музофирович, к.ф.-м.н., доцент, филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе (Таджикистан); Odinabekov Jasur Muzofirovich (Dushanbe Lomonosov Moscow State University, Tajikistan)

$$\overline{S}_n = KS_nK, \quad \theta = arg(\zeta - z), \quad z \in \overline{D};$$

здесь черта обозначает операцию комплексного сопряжения, m - целое число, ds_ζ – элемент плоской меры Лебега, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши [1]. Поскольку символ оператора S_n (см.[1]) равен $(\frac{\overline{\sigma}}{\sigma})^n$ $(\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2 \neq 0)$, то, согласно [2], для нетеровости операторной матрицы необходимо, чтобы $detG_A(z,t) \neq 0$ для всех $z \in \overline{D}, |t| = 1$, где $G_A(z,t)$ символ оператора (1):

$$G_A(z,t) = \begin{pmatrix} P_4(z,t) & Q_4(z,t) \\ \overline{Q_4(z,t)} & \overline{P_4(z,t)} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где

$$P_4(z,t) = \overline{t}^2 \sum_{n=-2}^{2} a_n(z) t^{2+n}, \; Q_4(z,t) = \overline{t}^2 \sum_{n=-2}^{2} b_n(z) t^{2-n},$$

и для нетеровости оператора (1) в $L^p_{\beta-2/p}(D)$ необходимо, чтобы

$$detG_A(z,t) = |P_4(z,t)|^2 - |Q_4(z,t)|^2 \neq 0 \;\; \forall z \in \overline{D}. \tag{3}$$

Тогда из (3) вытекает, что $P_4(z,t), \; Q_4(z,\tau)$- есть комплексные полиномы четвертой степени. Пусть q_k $(k = 1,2,3,4)$ комплексные корни уравнения $P_4(z,t) = 0$. Согласно

$$detG_A(z,t) > 0, \text{ то есть } |P_4(z,t)| > |Q_4(z,t)| \;\; \forall z \in \overline{D} \tag{4}$$

эти корни не лежат на окружности $|t| = 1$, то есть $|q_k| \neq 1$.

Введем обозначения

$$\Delta_\nu = |a_\nu|^2 - |b_\nu|^2, \quad \lambda_{\nu n} = \overline{a}_\nu a_n - b_\nu \overline{b}_n, \quad \mu_{\nu n} = \overline{a}_\nu b_n - b_\nu \overline{a}_n,$$

$$M = max_{|t|=1} Re\Big(\sum_{j=1}^{4} \lambda_j t^j\Big), \; \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \; n = \pm 1, \pm 2,$$

где функции λ_j явно выражаются через коэффициенты оператора (1).

Теорема. *Для нетеровости оператора (1) в лебеговых пространствах* $L^p_{\beta-2/p}(D)$,
$1 < p < \infty, 0 < \beta < 2$ *необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий*

$$\Delta_0(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{n=-2}^{2} (|\mu_{on}(z)|^2 - |\lambda_{on}(z)|^2)\Big)^{1/2}, \textit{при } \forall z \in \overline{D}, \tag{5}$$

$$\Delta_\nu(z) > M(z) + \Big(M^2(z) + \sum_{n=-m}^{m} (|\mu_{\nu n}(z)|^2 - |\lambda_{\nu n}(z)|^2)\Big)^{1/2}, \nu = \pm 1, \pm 2,$$

$$\prod_{k=1}^{\nu} Q_4(\tau, q_k(\tau)) \neq 0, \;\; \textit{при} \;\; \forall \, z \in \overline{D} \quad \textit{и} \quad \tau \in \Gamma, \tag{6}$$

где $q_k(\tau)$ *– корни уравнения* $P_4(\tau, t) = 0$, $\tau \in \Gamma$, $|t| = 1$, *такие, что* $|q_k(\tau)| < 1$ *для* $\forall \tau \in \Gamma$. *При этом, если выполнено (5), то индекс оператора* A *равен нулю; если выполнено (6), то*

$$\varkappa = 2 \sum_{k=1}^{\nu} Ind_{\Gamma} Q_4(\tau, q_k(\tau)).$$

Литература

1. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения М.: Физматиз, 1962.

2. *Duduchava R.J.* On multidimensional singular integral operators//Journal of operators theory, 1984, v. 11, pp. 41 – 76; pp. 199 – 214

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В КЛАССЕ М. ДЖРБАШЯНА В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Е.Г. Родикова, К.В. Кислакова
evheny@yandex.ru, k.kislakova25@gmail.com.

УДК 517.53

В 1964 г. М. М. Джрбашяном при обобщении теории Р. Неванлинны, краеугольным камнем которой является понятие характеристичекой функции, была введена α-характеристика T_α, $\alpha > -2$, и рассмотрен класс N_α аналитических в единичном круге функций с ограниченной характеристикой T_α. В настоящей работе решается задача свободной интерполяции в классе N_α при условии, что узлы интерполяции находятся в углах Штольца.

Ключевые слова: интерполяция, характеристика Неванлинны, произведения Джрбашяна, угол Штольца.

On interpolation in the Djrbashyan class in a disk

In 1964, in generalizing R. Nevanlinna's theory, M. Dzhrbashyan introduced the α-characteristic T_α, $\alpha > -2$. In present work we solve the problem of free interpolation in M. Dzhrbashyan's class of analytic functions in the unit circle with a bounded characteristic T_α under the condition that the interpolation nodes are in the Stolz angles.

Keywords: interpolation, the Nevanlinna characteristic, the Djrbashyan product, the Stolz angle.

Пусть $\mathbb{C}$ - комплексная плоскость, D - единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ - множество всех функций, аналитических в D, $T_\alpha(r, f)$ – α-характеристика М. М. Джрбашяна [1], $T(r, f) = T_{-1}(r, f)$ — характеристика Р. Неванлинны функции $f \in H(D)$ [2].

$$T_\alpha(r,f) = \frac{r^{-(\alpha+1)}}{2\pi \cdot \Gamma(\alpha+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^r (r-t)^\alpha \ln|f(te^{i\varphi})| dt \right)^+ d\varphi, \alpha > -2,$$

где $a^+ = \max(0, a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, Γ — функция Эйлера.

При всех $\alpha > -2$ рассмотрим класс М.М. Джрбашяна [1]

$$N_\alpha := \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} T_\alpha(r,f) < +\infty \right\},$$

Родикова Евгения Геннадьевна, к.ф.-м.н., доцент, БГУ имени акад. И.Г. Петровского (Брянск, Россия); Eugenia Rodikova (Bryansk State University named after acad. I.G. Petrovsky, Bryansk, Russia)

Кислакова Ксения Васильевна, аспирант, БГУ имени акад. И.Г. Петровского (Брянск, Россия); Kseniya Kislakova (Bryansk State University named after acad. I.G. Petrovsky, Bryansk, Russia)

N_{-1} совпадает с классом Р. Неванлинны N. Для произвольной функции $f \in N_\alpha$ в круге D справедлива следующая оценка:

$$|f(z)| \leq \exp \frac{c(f)}{(1-|z|)^{\alpha+2}},$$

поэтому если $f \in N_\alpha$ и $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset D$, то оператор $R(f) = (f(z_1), ..., f(z_k), ...)$ отображает класс N_α в класс весовых последовательностей

$$l_\alpha = \left\{ \gamma = \{\gamma_k\}_{k=1}^{+\infty} : |\gamma_k| \leq \exp \frac{\lambda}{(1-|z_k|)^{\alpha+2}}, \lambda > 0 \right\}.$$

Нас будет интересовать, при каких условиях на последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ оператор $R(f)$ отображает класс N_α *на* класс l_α. В этом случае последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ называют *интерполяционной последовательностью* в классе N_α.

Углом Штольца $\Gamma_\delta(\theta)$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$ называется угол раствора $\pi\delta$, $0 < \delta < 1$, биссектриса которого совпадает с отрезком $re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$.

Для любого $\beta > -1$ символом $\pi_\beta(z, z_k)$ будем обозначать бесконечное произведение М.М. Джрбашяна с нулями в точках последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ (см. [1]). Справедлива

Теорема 1. *Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - произвольная последовательность комплексных чисел из D, расположенных в конечном числе углов Штольца. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *$\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ - интерполяционная последовательность в классе N_α;*
2.
$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} < +\infty,$$
$$|\pi'_\alpha(z_n, z_k)| \geq \exp \frac{-M}{(1-|z_n|)^{\alpha+2}},\ M > 0.$$

Отметим, что фундаментальный результат в теории интерполяции принадлежит Л. Карлесону [3], описавшему интерполяционные последовательности в классе ограниченных аналитических функций в единичном круге.

Литература

1. *Джрбашян М. М.* О параметрическом представлении некоторых классов мероморфных функций в единичном круге // Докл. АН СССР, **157**:5 (1964), 1024–1027.

2. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции — М.-Л.: ГИТТЛ, 1941. — 388 с.

3. *Carleson L.* An interpolation problem for bounded analytic functions // Amer. J. Math, V. 80. (1958), 921–930.

HARDY TYPE INEQUALITIES IN GRAND LEBESGUE SPACES $L_{p)}$, $0 < p \leq 1$ FOR QUASI-MONOTONE FUNCTIONS

A. Senouci,
kamer295@yahoo.fr

УДК

The aim of this work, is to establish some Hardy type inequalities for quasi-monotone functions in grand Lebesgue spaces $L_{p)}$, $0 < p \leq 1$. Moreover some previous results are deduced as particular cases.

Keywords: inequalities, quasi-monotone functions, Hardy operators, grand Lebesgue spaces.

In 1992 T. Iwainiec and C. Sbordone ([5]) introduced a new type of function spaces $L_{p)}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, where Ω is a bounded open set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, called grand Lebesgue spaces. Namely, the grand Lebesgue spaces is defined as the space of the Lebesgue mesurable functions f on Ω such that

$$\|f\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon}\, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty, \tag{1}$$

where $|\Omega|$ is the Lebesgue measure of Ω.

These spaces were intensively studied during the last years due to different applications (see [3] and [4]) and continue to attract attention of researchers (see [7]and [8]).

In 2020 R.A. Bandaliev and Safarova K.H. proved the boundedness of Hardy operator for monotone functions in grand Lebesgue spaces $L_{p)}$, $0 < p \leq 1$. In this work we are interested in the Hardy inequalities applied to quasi-monotone functions in grand Lebesgue spaces. All inequalities are proved with sharp constants (for details see [6]).

Definition 1. Let $0 < p \leq 1$. We say that function f belongs to the grand Lebesgue space $L_{p)}(0,1)$ if f is non-negative and Lebesgue measurable a.e. on $(0,1)$ for which

$$\|f\|_{L_{p)}(0,1)} = \sup_{0<\varepsilon<\frac{p}{2}} \left(\varepsilon \int_0^1 |f(x)|^{p-\varepsilon}\, dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty. \tag{2}$$

Definition 2. Let $0 < p \leq 1$. We denote by $\mathcal{A}_p$ the class of measurable functions $f \in L_{p)}(0,1)$, such that

$$\|f\|_{\mathcal{A}_p} = \sup_{0<\varepsilon\leq\frac{p}{2}} \left(\varepsilon \int_0^1 \left(x^{p-\varepsilon-1} - 1\right) f^{p-\varepsilon}(x) dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty. \tag{3}$$

Remark 1. In [1] it is proved that for $0 < p \leq 1$, $L_{p)}(0,1)$ is a quasi-Banach function space .

Abdelkder Senouci (Ibn-Khaldoun University of Tiaret, Algeria)

The following definition is well-known (see [2]).

Definition 3. We say that a function f is quasimonotone on $]0,\infty[$, if for some real number α, $x^{\alpha}f(x)$ is a decreasing or an increasing function of x. More precisely, given $\beta \in \mathbb{R}$, we say that $f \in Q_{\beta}$ if $x^{-\beta}f(x)$ is non-increasing and $f \in Q^{\beta}$ if $x^{-\beta}f(x)$ is non-decreasing.

Throughout this work, we will assume that the functions are non-negative and Lebesgue measurable on (0,1). We consider the Hardy operator

$$(H_1 f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Theorem 1. *Let* $0 < p < 1$, $0 < \varepsilon < \frac{p}{2}$, $f \in \mathcal{A}_p$ *and* $f \in Q_{\beta}$, $\beta \geq 0$. *Then*

$$\|H_1 f\|_{L_{p)}(0,1)} \leq C\,\|f\|_{\mathcal{A}_p}, \tag{4}$$

If $C > 0$ *is the sharp constant in (4), then*

$$\left(\frac{p}{2-p}\right)^{\frac{2}{p}} \leq C \leq (\beta+1)^{\frac{2}{p}-1}\left(\frac{p}{1-p}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

Remark 2. If $\beta = 0$ in (4) and (5), we have Theorem 3 of [1].

Theorem 2.*Let* $0 < p < 1$, $0 < \varepsilon < \frac{p}{2}$, $w(t) = \int_t^1 \frac{(1-y^{\beta+1})^{p-\varepsilon-1}}{y^{\beta(p-\varepsilon-1)+1}}dy$, $0 < y < 1$ *and* $f \in Q^{\beta}$, $\beta \geq 0$. *Then the inequality*

$$\|H_1 f\|_{L_{p)}(0,1)} \leq C\,\|f\|_{L_{p),w}(0,1)}, \tag{6}$$

holds, where

$$\|f\|_{L_{p),w}(0,1)} = \sup_{0<\varepsilon<\frac{p}{2}}\left(\varepsilon\int_0^1\left(\int_t^1 \frac{(1-y^{\beta+1})^{p-\varepsilon-1}}{y^{\beta(p-\varepsilon-1)+1}}dy\right) f^{p-\varepsilon}(t)dt\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

If $C > 0$ *is the best constant in (6), then*

$$\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{2}{p}} \leq C \leq \left((\beta+1)^{1-\frac{p}{2}}p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

Remark 3. If $\beta = 0$ in (6) and (7), we have Theorem 4 of [1].

References

1. *Bandaliev A.R. and Safarova K.H.* On Hardy type inequalities in grand Lebesgue spaces $L_{p)}$ for $0 < p \leq 1$ // Linear and Multilinear Algebra, **70**:2 (2021), 1-14. DOI:10.1080/03081087.2021.1944968

2. *Bergh J., Burenkov V.I. and Persson L.E.* Best constants in reversed Hardy's inequalities for quasimonotone functions // Acta Sci. Math., Szeged, 1994, vol. 59, 223–241.

3. *Capone C., Fiorenza A.* On small Lebesgue spaces // J. Funct. Spaces Appl., 2005, vol. 3, 73-89.

4. *Fiorenza A., Karadzhov G.E.* Grand and small Lebesgue spaces and their analogs // Z. Anal. Anwend., **23**:4 (2004), 657-681.

5. *Iwaniec T., Sbordone. C.* On the integrability of the Jacobian under minimal hypotheses // Arch. Ration. Mech. Anal., Springer-Verlag, **119**:2 (1992), 129–143.

6. *Ouardani A., Senouci A.* Hardy Type Inequalities in Classical and Grand Lebesgue Spaces $L_{p)}, 0 < p\%$¸1, for Quasi-Monotone Functions // Vladikavkaz Math. J., **26**:2 (2024), 70-81. DOI 10.46698/q9607-8404-0437-r

7. *Samko S.G., Umarkhadzhiev S.M.* Local grand Lebesgue spaces // Vladikavkaz. Mat. Zh., **23**:4 (2012), 96-108.

О ЛАКУНАРНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА С ЯДРОМ КОШИ

Ю.С. Солиев, su1951@mail.ru

УДК 519.644

Построены и исследованы (0,2)-лакунарные квадратурные формулы для сингулярного интеграла с ядром Коши с весовыми функциями Якоби и Эрмита.

Ключевые слова: сингулярный интеграл, лакунарное интерполирование, квадратурные формулы.

On lacunary quadrature formulas for a singular integral with a Cauchy kernel

(0,2)-lacunary quadrature formulas for a singular integral with a Cauchy kernel with Jacobi and Hermite weight functions are constructed and studied.

Keywords: singular integral, lacunary interpolation, quadrature formulas.

К приближенному вычислению сингулярных интегралов можно применить различные типы лакунарного интерполирования, когда они существуют и их можно выписать в явном виде. Для сингулярных интегралов с ядром Гильберта такие квадратурные формулы исследовались в работе [1]. Ниже рассматриваются (0,2)-лакунарные квадратурные формулы для сингулярного интеграла с ядром Коши

$$If = I(f;x) = \int_a^b p(t)\frac{f(t)}{t-x}dt, \tag{1}$$

понимаемого в смысле главного значения по Коши, где $f(x)$ — заданная плотность интеграла, а $p(x)$ — весовая функция.

Пусть в (1) $a=-1,\ b=1,\ -1<x<1,\ p(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\ \alpha>-1,\ \beta>-1$.

Через $H_{2n-1}f = H_{2n-1}(f;x)$ обозначим полином степени $2n-1$ (0,2)-интерполирования, удовлетворяющий условиям $H_{2n-1}(f;x_k) = f(x_k),\ H''_{2n-1}(f,x_k) = f''(x_k)$, где $x_k (k=\overline{1,n})$ — нули полинома $(1-x^2)P'_{n-1}(x)$, а $P_k(x)$ — полином Лежандра степени k с нормировкой $P_k(1)=1$. Тогда

$$H_{2n-1}f = H_{2n-1}(f,x) = \sum_{k=1}^{n}(A_k(x)f(x_k) + B_k(x)f''(x_k)). \tag{2}$$

Интерполяционная формула (2) существует только при четном n, а коэффициенты $A_k(x),\ B_k(x)$ приведены в работе [2].

Солиев Юнус Солиевич, к.ф.-м.н., доцент, МАДИ (Москва, Россия); Yunus Soliev (MADI, Moscow, Russia)

Аппроксимируя плотность $f(x)$ интеграла (1) полиномом $H_{2n-1}f$, получим квадратурную формулу

$$If = I(H_{2n-1}f; x) + R_n f = \sum_{k=1}^{n} (\widetilde{A}_k(x) f(x_k) + \widetilde{B}_k(x) f''(x_k)) + R_n f, \qquad (3)$$

где $\widetilde{A}_k(x) = I(A_k; x)$, $\widetilde{B}_k(x) = I(B_k; x)$, а $R_n f = R_n(f; x)$ — остаточный член.

Коэффициенты $\widetilde{A}_k(x), \widetilde{B}_k(x)$ можно вычислить так же как в работе [3].

С помощью результатов работы [4] доказывается

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in C^{(2)}[-1, 1]$, n *— четное. Тогда*

$$\|R_n f\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n} \omega_s \left(f''; \frac{1}{n}\right)\right), \ n \geqslant \max\{4, s+2\},$$

где $\omega_s(f, t)$ *— модуль гладкости* s*-го порядка* f *на* $[-1; 1]$.

Пусть $S_{2n-1}f = S_{2n-1}(f; x)$ — полином степени $2n - 1$ (0,2)-интерполирования по нулям полинома Чебышева первого рода [5].

Теорема 2. *Пусть* $f^{(r)}(x) \in H_\alpha(M, [-1; 1])$, $r \geqslant 2$, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, n *— четное. Тогда*

$$\|I(f - S_{2n-1}f)\|_C = O\left(\frac{\ln^2 n}{n^{r+\alpha-1}}\right).$$

Пусть в (1) $a = -\infty$, $b = +\infty$, $p(x) = 1$, $-\infty < x < +\infty$. Обозначим через $B_{2\sigma}, \sigma > 0$, пространство Бернштейна целых функций экспоненциального типа 2σ, ограниченных на действительной оси R. Через $F_\sigma(x) = F_\sigma(f; x) \in B_{2\sigma}$ обозначим целую функцию экспоненциального типа, удовлетворяющую условиям $F_\sigma(f, x_k) = f(x_k)$, $F''_\sigma(f, x_k) = f''(x_k)$, $x_k = \frac{k\pi}{\sigma}$, $k \in Z$. Тогда [6]

$$F_\sigma f = F_\sigma(f, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (U_\sigma(x - x_k) f(x_k) + V_\sigma(x - x_k) f''(x_k)), \qquad (4)$$

где $U_\sigma(x) = \frac{\sin \sigma x}{\sigma x}\left(1 - x\int_0^x \frac{\sin \sigma t - \sigma t}{\sigma t^3} dt\right)$, $V_\sigma(x) = \frac{\sin \sigma x}{2\sigma}\int_0^x \frac{\sin \sigma t}{\sigma t} dt$.

Заменяя плотность интеграла (1) $f \in B_{2\sigma}$ выражением (4), получим (0,2)-лакунарную квадратурную формулу

$$If = I(F_\sigma; x) + R_\sigma f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\widetilde{U}_\sigma(x - x_k) f(x_k) + \widetilde{V}_\sigma(x - x_k) f''(x_k)) + R_\sigma f,$$

где $\widetilde{U}_\sigma(x) = I(U_\sigma; x)$, $\widetilde{V}_\sigma(x) = I(V_\sigma; x)$, а $R_\sigma f = R_\sigma(f; x)$ — остаточный член.

Найдены асимптотические представления для $\widetilde{U}_\sigma(x), \widetilde{V}_\sigma(x)$.

Теорема 3. *Если* $f(x) \in H_\alpha^{(r)}(M,R)\bigcap B_{2\sigma},\ r \geqslant 2,\ 0<\alpha<1,\ \sigma>0$ *и* $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|f''(x_k)| = O(\sigma^{2-\alpha})$, *то* $\|R_\sigma f\|_C = O(\sigma^{-r-\alpha+2}\ln\sigma)$.

Аналогично строятся квадратурные формулы для интеграла (1) с помощью других типов лакунарного интерполирования.

Литература

1. *Солиев Ю.С.* О лакунарных квадратурных формулах для сингулярного интеграла с ядром Гильберта // Материалы XII конф. «Матем. и компьютерное моделир. в экономике, страховании и управлении рисками». —- Саратов: Саратовский университет. —-2023. Вып. 8. С.136-140.

2. *Balazs J., Turan P.*Notes on interpolation. III. (Convergence) // Acta Math. Hungar. V.9. —1958. P.195-214.

3. *Солиев Ю.С.* О квадратурных формулах с кратными узлами для сингулярного интеграла по отрезку действительной оси // Материалы ВЗМШ. Воронеж: Издательский дом ВГУ. —2024. С.237-239.

4. *Gonska H.H.* Degree of approximation by lacunary interpolators: (0, ..., R–2, R) interpolation // Rocky Mountain J. of Math., V. 19, №1. Alberta —1989. P.157-171.

5. *Varma A.K.* On a problem of P. Turan on lacunary interpolation // Canad. Math. Bull. V.10. №4. —1967. —P.531-557.

6. *Unni K.R., Rahman Q.I., Sivasubramaniam K.* Lacunary interpolation for Entire Functions // J. of Math. Anal. And Appl., V.90. —1982. P.307-322.

УМЕНЬШЕНИЕ РОСТА (ПЛЮРИ)СУБГАРМОНИЧЕСКИХ И ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Б.Н. Хабибуллин, khabib-bulat@mail.ru

УДК 517.555

Анонсируются некоторые новые точные неравенства для (плюри)субгармонических, целых и мероморфных функций, связанные с ростом их интегральных средних и характеристики Неванлинны.

Ключевые слова: целая функция, мероморфная функция, характеристика Неванлинны, проблема Пэли, выметание.

Reduction of growth of (pluri)subharmonic and entire functions

We announce some new sharp inequalities for (pluri)subharmonic, entire and meromorphic functions associated with the growth of their integral averages and Nevanlinna characteristic.

Keywords: entire function, meromorphic function, Nevanlinna characteristic, Paley problem, balayage

Интегральные средние по окружностям с центром в нуле субгармонической на *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ функции u обозначаем через

$$\mathsf{C}_u(r) \underset{r\geqslant 0}{:=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta, \quad \mathsf{C}_u^+(r) \underset{r\geqslant 0}{:=} \max\bigl\{0, \mathsf{C}_u(r)\bigr\}.$$

Следующий наш результат открывает широкие перспективы для развития как в направлении усиления, так и обобщения ряда классических и более или менее современных результатов, описанных в наших обзорах [1–2] и отражённых в работах многих авторов: G. Valiron, A. Whalund, 1929–30; R. Paley, 1932; W. K. Hayman, 1966; Н. В. Говоров, 1967; В. П. Петренко, 1968; И. В. Островский, 1970; B. Dahlberg, 1972; M. Essén, 1974; М. Л. Содин, 1983; А. А. Кондратюк, С. И. Тарасюк и Я. В. Василькив, 1996; Б. Н. Хабибуллин, 1993–2002; Б. Н. Хабибуллин, Р. А. Баладай, 2010; Р. А. Шарипов, 1993 и 2010 [3]; A. Bërdëllima, 2018 [4–5].

Основная теорема (2024 г.) *Для любой субгармонической на $\mathbb{C}$ функции $u \not\equiv -\infty$ при любом выборе числа $p \geqslant 1$ найдётся субгармоническая на $\mathbb{C}$ функция $v \not\equiv -\infty$, с которой*

$$u(z) + v(z) \underset{\forall z\in\mathbb{C}}{\leqslant} \int_0^{+\infty} \mathsf{C}_u^+\bigl(t|z|\bigr)\,\frac{p^2 t^{p-1}}{(1+t^p)^2}\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00002).

Хабибуллин Булат Нурмиевич, д.ф.-м.н., профессор, ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Bulat Khabibullin (Institute of Mathematics with Computing Centre of the UFRC of the RAS, Ufa, Russia)

а для любого числа $N \in \mathbb{R}^+$ найдётся такая целая функция $h \not\equiv 0$, что

$$u(z) + \ln\bigl|h(z)\bigr| \underset{\forall z \in \mathbb{C}}{\leqslant} \int_0^{+\infty} \mathsf{C}_u^+\left(t\Bigl(|z| + \frac{1}{(2+|z|)^N}\Bigr)\right)\frac{p^2 t^{p-1}\mathrm{d}t}{(1+t^p)^2}, \tag{2}$$

где интегралы в правых частях неравенств конечны при всех $z \in \mathbb{C}$, если они конечны при некотором $|z| \neq 0$, для чего достаточно

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathsf{C}_u^+(t)}{t^{p+1}}\mathrm{d}t < +\infty \quad \textit{или} \quad \limsup_{z\to\infty} \frac{\ln u^+(z)}{\ln|z|} < p.$$

Перед интегралами в правых частях неравенств (1)–(2) нельзя поставить множитель < 1, а в правой части (2) добавку $\frac{1}{(2+|z|)^N}$ нельзя заменить на убывающую к нулю при $z \to \infty$ быстрее степенной.

Из основной теоремы выводятся её аналог для плюрисубгармонических на $\mathbb{C}^n$ функций и ряд новых утверждений для $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}^n$ о существовании мультипликаторов, погашающих рост целой функции конечного порядка, о представлении мероморфной функции как частного целых функций минимально возможного роста по отношению к характеристике Неванлинны мероморфной функции, о точных границах радиуса круга, в котором экспоненциальная система с заданными показателями полна и минимальна с точностью до двух экспонент в банаховых пространствах голоморфных функций в круге, а также аналог последнего по полноте экспоненциальных систем для круговых областей в $\mathbb{C}^n$.

Литература

1. *Khabibullin B.N.* The representation of a meromorphic function as the quotient of entire functions and Paley problem in $\mathbb{C}^n$: survey of some results // Матем. физ., анал., геом., **9**:2 (2002), 146–167.

2. *Хабибуллин Б.Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. Монография-обзор, издание четвёртое, дополненное. — Уфа: РИЦ БашГУ, ISBN: 978-5-7477-2992-6, xvi+176 стр., 2012.

3. *Шарипов Р.А.* Контрпример к гипотезе Хабибуллина об интегральных неравенствах // Уфимск. матем. журн., **2**:4 (2010), 99–107.

4. *Bërdëllima A.* A note on a conjecture by Khabibullin // Исследования по линейным операторам и теории функций. **46**, Зап. научн. сем. ПОМИ, 467, ПОМИ, СПб., 2018, 7–20.

5. *Bërdëllima A.* On Khabibullin's conjecture about pair of integral inequalities // Уфимск. матем. журн., **10**:3 (2018), 121–134.

О СУММИРУЕМОСТИ ПО МЕРЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

Ю.Х. Хасанов, А.Н. Давлатов
yukhas60@mail.ru, Davlatov95@mail.ru

УДК 517.518

В работе приведены ряд утверждений, дающих критерий абсолютной p–суммируемости ($1 \leq p < \infty$) в пространстве измеримых по Лебегу конечных почти всюду на отрезке $[0,1]$ функций. Установлена теорема типа Вихманна о суммируемости, т.е. получены аналоги классических теорем о суммируемости в пространстве $M(S,\mu)$, где $S = [0,1]$ и μ – мера Лебега, а множество $M(S,\mu)$ состоит из измеримых почти всюду конечных на отрезке $[0,1]$ функций.

Ключевые слова: измеримые функции, суммируемость по мере, мера Лебега, матрица конечного типа, сходимоть по мере.

On summability by measure in the space of measurable functions

The paper presents a number of statements that give a criterion for the absolute p–summability ($1 \leq p < \infty$) in the space of Lebesgue-measurable finite functions almost everywhere on the segment $[0,1]$. A Wichmann-type theorem on summability is established, i.e. analogues of classical theorems on summability in the space $M(S,\mu)$ are obtained, where $S = [0,1]$ and μ is the Lebesgue measure, and the set $M(S,\mu)$ consists of functions that are almost everywhere measurable and finite on the segment $[0,1]$.

Keywords: measurable functions, summability by measure, Lebesgue measure, finite type matrix, convergence by measure.

Пусть $\xi_k(t)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ – измеримые функции и $A = (\alpha_{nk})$- числовая матрица. Введем в рассмотрение преобразование вида

$$\eta_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk}\xi_k(t). \tag{1}$$

Определение 1 [1]. Говорят, что последовательность измеримых функций $f_n(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$ сходится по мере к функции $F(x)$, если для любого $\sigma > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(x : |f_n(x) - F(x)| \geq \sigma) = 0.$$

Хасанов Юсуфали Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, РТСУ (Душанбе, Республика Таджикистан); Yusufali Khasanov (Russian—Tajik Slavonic University, Dushanbe, Tajikistan

Давлатов Ахлиддин Намозович, преподаватель, ТГПУ (Душанбе, Республика Таджикистан); Ahliddin Davlatov (Tajik State Pedagogical University, Dushanbe, Tajikistan)

Определение 2. Говорят, что последовательность $\chi = \xi_k$–суммируема по мере методом A или A–суммируема по мере, если сходится по мере последовательность $y(t) = (\eta_n(t))$, которая определена равенством (1).

Пространство всех A–суммируемых по мере последовательностей будем обозначать через $F_A(M)$:

$$F_A(M) = \{\chi = (\xi_k) : (\eta_n(t))\}$$

сходится по мере. В частности,

$$F_A^0(M) = \{\chi = (\xi_k) : \eta_n(t) \to \theta\}$$

по мере.

Под матрицей Теплица или T–матрицей будем понимать матрицу A, если выполняются следующие условия

$$\sup_n \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{nk}| < \infty, \ \lim_{n\to\infty} \alpha_{nk} = 0 \ (k = 0, 1, 2, \ldots), \ \lim_{n\to\infty} \alpha_{nk} = 1.$$

Мэддокс [2] рассматривал суммируемость по мере последовательностей таких измеримых почти всюду конечных функция ξ_k, для которых найдется измеримая почти всюду конечная функция $\phi(t)$, такая, что $|\xi_k(t)| \le \phi(t)$. Он показал, что $\eta_n \to \xi$ по мере для каждой сходящейся к ξ по мере последовательности $\{\xi_k\}$ в точности тогда, когда $A = \{\alpha_{nk}\}$ является T– матрицей. Он показал также, что если отказаться от предположения $|\xi_k(t)| \le \phi(t)$, то существует пространство с мерой (S, Σ, μ), T–матрица A и сходящаяся по мере последовательность измеримых на (S, Σ, μ) функций, которая не суммируема методом A по мере.

Пусть $S = [0, 1]$ есть μ–мера Лебега и M состоит из измеримых почти всюду конечных на отрезке $[0, 1]$ функций. Вихманн [3] установил, что для включения $F_A(M) \supset F(M)$ необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1. существует
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{nk} = \alpha_k; \tag{2}$$

2. существует
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{nk} = \alpha; \tag{3}$$

3. существует
$$\sup_n \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{nk}| < \infty; \tag{4}$$

4. существует натуральное число L такие, что число отличных от нуля элементов любой строки матрицы A не превосходит числа L.

Менихес [4] получил аналогичный результат для T–матриц.

В этой заметке мы попытаемся найти теорем типа Вихманна о суммируемости, т.е. получить аналогов классическим теоремам о суммируемости в пространстве $M(S,\mu)$, где $S=[0,1]$ и μ – мера Лебега, а множество M состоит из измеримых почти всюду конечных на отрезке $[0,1]$ функций.

Следующая теорема устанавливает необходимые и достаточные условия A–суммируемости по мере все сходящиеся по мере к нулю последовательности.

Теорема 1. *Для включения $F_A(M)\supset F^0(M)$ необходимо и достаточно выполнение условий (2), (4) и $F=F_A(R)$, а матрица A является матрицей конечного типа.*

Теперь приводим утверждение, которое обеспечивает A–суммируемости по мере к нулю все сходящиеся по мере к нулю последовательности.

Теорема 2. *Для включения $F_A^0(M)\supset F^0(M)$ необходимо и достаточно выполнения условий (2), (4) с $\alpha_k=0$ $(k=1,2,\ldots)$ и чтобы матрица A была матрицей конечного типа.*

Литература

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва: Наука, 1968.

2. *Maddox I.J.* Toeplitz transformations and convergence in measure // J. London Math. Soc., **41**:4 (1961), 733-736

3. *Вихманн Ф.* О консервативности матриц относительно сходимости по мере // Изв. АН Эстон. ССР, Физ, матем., **20**:3 (1971), 275-278

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БЕЗИКОВИЧА

Ю.Х. Хасанов, Ф.М. Талбаков
yukhas60@mail.ru, talbakov_90@mail.ru

УДК 517.518

В работе найдены ряд новых критерий по вопросам абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодически в смысле Безиковича функций двух переменных, в случае, когда показатели Фурье имеют единственную предельную точку в бесконечности. В качестве структурной характеристики рассматриваемой функции, используется модуль непрерывности высшего порядка.

Ключевые слова: функции двух переменных, почти-периодические функции Безиковича, двойные ряды Фурье, абсолютная сходимость, предельная точка в бесконечности, коэффициенты Фурье, модуль непрерывности.

On sufficient conditions for absolute convergence of double Fourier series of almost periodic Bezikovich functions

The paper examines criteria for the absolute convergence of double Fourier series almost periodically in the sense of Besicovitch functions, in the case where the Fourier exponents have a single limit point at infinity. As an approximation device, i.e. structural characteristics of the function under consideration, a higher order modulus of continuity is used.

Keywords: functions of two variables, almost-periodic Bezikovich functions, double Fourier series, absolute convergence, limit point at infinity, Fourier coefficients, modulus of continuity.

Пусть $B_p \quad (1 \leq p \leq \infty)$ - линейное пространство, которое состоит из измеримых функций $f(x,y)$, и для которых $|f(x,y)|^p \quad (1 \leq p \leq \infty)$ интегрируема в смысле Лебега в пространстве R^2, с конечной нормой

$$||f||_{B_p} = D_{B_p}\{f(x,y)\} = \{\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}|f(x,y)|^p dxdy\}^{\frac{1}{p}}$$

$(1 \leq p \leq \infty)$, а при $p = \infty$

Хасанов Юсуфали Хасанович, д.ф.-м.н., профессор, РТСУ (Душанбе, Республика Таджикистан); Yusufali Khasanov (Russian—Tajik Slavonic University, Dushanbe, Tajikistan

Талбаков Фарходджон Махмадшоевич, к.ф.-м.н., доцент, ТГПУ (Душанбе, Республика Таджикистан); Farkhodzhon Talbakov (Tajik State Pedagogical University, Dushanbe, Tajikistan)

$$||f||_{B_p} = vrai \sup_{x,y} |f(x,y)| < \infty.$$

Предположим, что функция $f \in B_p$ имеет формальное разложение в двойной ряд Фурье

$$f(x,y) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k,l} e^{i(\Lambda_k x + \lambda_l y)},$$

где $c_{k,l} = M_{xy}\{f(x,y)e^{-i(\Lambda_k x + \lambda_l y)}\}$ - коэффициенты Фурье, а $\{\Lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $\{\lambda_l\}_{l=-\infty}^{\infty}$ - показатели Фурье (спектр функции), которые имеют единственную предельную точку в бесконечности, то есть

$$\Lambda_0 = 0, \quad \Lambda_{-k} = -\Lambda_k, \quad |\Lambda_k| < |\lambda_{k+1}|, \quad \lim_{k\to\infty} \Lambda_k = \infty, \tag{1}$$

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{-l} = -\lambda_l, \quad |\lambda_l| < |\lambda_{l+1}|, \quad \lim_{l\to\infty} \lambda_l = \infty.$$

Пусть

$$\Delta_\delta^1 f(x,y) = f(x+\delta,y) - f(x,y), \quad \Delta_r^2 f(x,y) = f(x,y+r) - f(x,y);$$

$$\omega_1(f,h) = \sup_{x,y} \sup_{|\delta|\le h} |\Delta_\delta^1 f(x,y)|, \tag{2}$$

$$\omega_2(f,\eta) = \sup_{x,y} \sup_{|r|\le \eta} |\Delta_r^2 f(x,y)|, \tag{3}$$

$$\omega_{11}(f,h,\eta) = \sup_{x,y} \sup_{|\delta|\le h} \sup_{|r|\le\eta} |\Delta_\delta^1 \Delta_r^2 f(x,y)|. \tag{4}$$

Величины (2) и (3) называется частными, а (4) - смешанным модулями непрерывности функции $f(x,y)$.

В настоящей работе рассматриваются некоторые новые достаточные условия абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти-периодических функций из пространства B_2, когда показатели Фурье имеет единственную предельную точку в бесконечности (см., например, [2], [5-6]).

Хорошо известно, что для произвольной функции $f \in B_2$, имеет место разложение в двойной ряд Фурье

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} B_{k,l}(a_{k,l}\cos\Lambda_k x\cos\lambda_l y + b_{k,l}\sin\Lambda_k x\cos\lambda_l y +$$

$$+c_{k,l}\cos\Lambda_k x\sin\lambda_l y + d_{k,l}\sin\Lambda_k x\sin\lambda_n y), \tag{5}$$

где

$$B_{k,l} = 1, \quad B_{k,0} = B_{0,l} = \frac{1}{2}, \quad k,l \ge 1, \quad B_{0,0} = \frac{1}{4},$$

$$a_{0,0} = M\{f(x,y)\},$$
$$a_{k,l} = M\{f(x,y)\cos\Lambda_m x\cos\lambda_l y\},$$

$$b_{k,l} = M\{f(x,y)\sin\Lambda_k x\cos\lambda_l y\},$$

$$c_{k,l} = M\{f(x,y)\cos\Lambda_k x\sin\lambda_l y\},$$

$$d_{k,l} = M\{f(x,y)\sin\Lambda_k x\sin\lambda_l y\} \quad (k = 1,2,...,l = 1,2,...),$$

$$M\{g(x,y)\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} g(x,y)dxdy.$$

Ниже приводится некоторые новые результаты, которые относятся нахождению критерий абсолютной сходимости рядов вида (5) с известными коэффициентами (см., например, [2] стр. 72; [3] стр 70-73.).

Теорема 1. Пусть спектры $\{\Lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\lambda_l\}_{l=1}^{\infty}$ функция $f \in B_2$ удовлетворяет условиям (1) и $\Phi(u) > 0$, $u > 0$. Пусть для некоторого $\beta \in (0,2)$ выполняется условие

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{\infty}[\chi(2^{\mu}\pi) - \chi(2^{\mu-1}\pi) + 1]^{1-\frac{\beta}{2}}[\chi(2^{\nu}\pi) -$$

$$-\chi(2^{\nu-1}\pi) + 1]^{1-\frac{\beta}{2}}\omega^{\beta}(f,2^{-\mu},2^{-v})\omega_{\Phi}^{\frac{\beta}{2}}(f,2^{-\mu},2^{-v})\Phi^{-\frac{\beta}{2}}[\omega(f,2^{-\mu},2^{-v})] < \infty, \quad (6)$$

где

$$\omega(f,h,\eta) = vrai\sup_{x,y}\sup_{|\delta|\le h}\sup_{|r|\le\eta}|\Delta_{\delta}^{1}\Delta_{r}^{2}f(x,y)|,$$

$$\omega_{\Phi}(f,h,\eta) = \sup_{|\delta|\le h}\sup_{|r|\le\eta}\overline{M}\{|\Delta_{\delta}^{1}\Delta_{r}^{2}f(x,y)|\},$$

$$\overline{M}\{g(x,y)\} = \overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} g(x,y)dxdy.$$

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(|a_{k,l}|^2 + |b_{k,l}|^2 + c_{k,l}|^2 + |d_{k,l}|^2)^{\frac{\beta}{2}} \quad (7)$$

сходится.

Теорема 2. Пусть спектры $\{\Lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\lambda_l\}_{k=1}^{\infty}$ функция $f \in B_2$ удовлетворяет условиям (1). Пусть для некоторого $\beta \in (0,2)$ выполняется условие

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}[\chi(2^{\mu}\pi) - \chi(2^{\mu-1}\pi) + 1]^{1-\frac{\beta}{2}}[\chi(2^{\nu}\pi) - \chi(2^{\nu-1}\pi) + 1]^{1-\frac{\beta}{2}}\omega_2^{\beta}(f,2^{-\nu},2^{-\nu}) < \infty,$$

где
$$\omega_2(f,h,\eta)=\big[\sup_{|\delta|\le h}\sup_{|r|\le\eta}M\{|\Delta^1_\delta\Delta^2_r f(x,y)|\}\big]^{\frac{1}{2}},$$
тогда ряд (7) сходится.

Заметим, что признаки абсолютной сходимости кратных и двойных рядов Фурье почти-периодических функций $f\in B_p$, в зависимости от поведения показателей Фурье, рассмотрены в работах [3],[4].

Литература

1. *Besicovich A.S.* Almost periodic functions. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932.

2. *Хасанов Ю.Х., Талбаков Ф.М.* Об абсолютной сходимости рядов Фурье почти- периодических функций Безиковича // Докл АН Респ. Тадж., **61**:11–12 (2018), 813-821

3. *Хасанов Ю.Х.* Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье почти- периодических функций // Известия вузов. Северокавказский регион. Естественные науки, 12 (2011), 71-73

4. *Талбаков Ф.М.* Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти- периодических функций в равномерной метрики // Изв. вузов. Матем., 4 (2023), 65-75

5. *Хасанов Ю.Х., Талбаков Ф.М.* Об абсолютной сходимости двойных рядов Фурье почти- периодических функций // Изв. вузов. Матем., 4 (2024), 67-79

6. *Khasanov Yu., Talbakov F.M.* On Sufficient Condition for Absolute Convergence Fourier Series of Bezikovichs Almost-Periodic Functions // Lobachevskii Journal of Mathematics, **45**:6 (2024), 2743-2752

PROPERTIES OF THE $A(z)$–HARMONIC MAJORANT

B.E. Husenov, F.Sh. Rahmonova
b.e.husenov@buxdu.uz, feruzarakhmonova@mail.ru

УДК 517.544

We consider $A(z)$–analytic functions in the case when $A(z)$ is an antianalytic function. Here we will introduce $A(z)$–harmonic majorants and we will show their properties.

Keywords: $A(z)$–analytic functions, $A(z)$–harmonic functions, $A(z)$–subharmonic functions, $A(z)$–lemniscata.

Let $A(z)$ be an antianalytic function, i.e. $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$ in the convex domain $D \subset \mathbb{C}$; moreover, let $|A(z)| \leq c < 1$ for all $z \in D$. The function $f(z)$ is said to be $A(z)$*–analytic* in the domain D if for any $z \in D$, the following equality holds:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A(z)\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1}$$

We denote by $O_A(D)$ the class of all $A(z)$–analytic functions defined in the domain D.

According to, the function $\psi\left(a,z\right) = z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)}d\tau}$ is an $A(z)$–analytic function.

The following set is an open subset of arbitrary convex domain D:

$$L\left(a,r\right) = \left\{ \left|\psi\left(a,z\right)\right| = \left| z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(a,z)} \overline{A(\tau)}d\tau} \right| < r \right\}.$$

For sufficiently small $r > 0$, this set compactly lies in D (we denote this fact by $L(a,r) \subset\subset D$) and contains the point a. This set $L(a,r)$ is called the $A(z)$–lemniscate centered at the point a. The lemniscate $L(a,r)$ is a simply - connected set (see [1]).

Let $f = u + iv$.

Theorem 1. (see [3]). *The real part of the $A(z)$–analytic functions of $f(z) \in O_A(D)$ satisfies equation*

$$\Delta_A u = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{1-|A|^2}\left((1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{1-|A|^2}\left((1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar{A}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right)\right) = 0 \tag{2}$$

in the domain of D.

Doctor of Philosophy in Physical and Mathematical Sciences (PhD), senior lecturer
student of Bukhara State University

In connection with Theorem 1, it is natural to define the $A(z)$–harmonic function as follows.

Definition 1 (see [3]). *A double differentiable function $u \in C^2(D)$, $u : D \to \mathbb{R}$ is called $A(z)-$harmonic in the D domain if the D domain if it satisfies the differential equation (2).*

The class of $A(z)$–harmonic functions in the domain of D is denoted as $h_A(D)$. Thus, the real part and hence the imaginary part, of the $A(z)$–harmonic function in the domain of D.

Theorem 2 (see [2], on the mean of $A(z)$–harmonic function in lemniscate). *Let D be a convex domain. Then if $u(z)$ is an $A(z)$–harmonic function in lemniscate $L(a,r) \subset D$, then for any $\rho < r$ take place*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|\psi(a,\xi)|=\rho} u(\xi)\left|d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}\right|, \tag{3}$$

Using the averaging operator (3), we can determine $A(z)$–subharmonic functions.

Definition 2 (see [2]). *The function $u(z) : D \to [-\infty, \infty)$ is called $A(z)$–subharmonic in the domain $D \subset \mathbb{C}$ if it is semi-continuous from above, $\overline{\lim\limits_{w \to z}}\, u(w) \le u(z)$, $\forall z \in D$ and the inequality of average is valid:*

$$u(a) \le \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|\psi(a,\zeta)|=r} u(\zeta)\left|d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta}\right|,$$

for any fixed point $a \in D$ and for any lemniscate $L(a,r) \subset\subset D$, where $r > 0$.

The class $A(z)$–subharmonic in the domain of D functions is denoted by $sh_A(D)$.

To do this, we need the concepts of harmonic majorants of subharmonic functions.

Definition 3. *Let $v(z) \in sh_A(L(a,r))$. Then $A(z)$–harmonic in lemniscate $L(a,r)$ function $u(z) \in h_A(L(a,r))$ is called the $A(z)$–harmonic majorant of v, if $v(z) \le u(z)$, $\forall z \in L(a,r)$. Note that if $v(z) \in sh_A(D)$ and $L(a,r) \subset\subset D$, then the solution of the Dirichlet problem*

$$\omega(z) \in h_A(L(a,r)), \quad \omega(z)|_{\partial L(a,r)} = v(z)|_{\partial L(a,r)}$$

is the $A(z)$–harmonic majorant of the function $v(z)$, $\omega(z) \ge v(z)$, $\forall z \in L(a,r)$.

Note that if $v(z) \in sh_A(D)$ and $L(a,r) \subset\subset D$, then the solution of the Dirichlet problem $\omega(z) \in h_A(L(a,r))$, $\omega(z)|_{\partial L(a,r)} = v(z)|_{\partial L(a,r)}$ is the $A(z)$–harmonic majorant of the function $v(z)$, $\omega(z) \ge v(z)$, $\forall z \in L(a,r)$.

Theorem 3. *In order to the $A(z)$–subharmonic function $v(z) \in sh_A(L(a,r))$ in lemniscate $L(a,r)$ has a harmonic majorant $u(z) \in h_A(L(a,r))$, $u(z) \geq v(z)$, it is necessary and sufficient that the family of integrals* $\int\limits_{\partial L(a,\rho)} |v(z)|\big|dz + A(z)d\bar{z}\big|$ *is uniformly bounded, i.e.*

$$\sup_{\rho<r}\left\{\int\limits_{\partial L(a,\rho)} |v(z)|\big|dz + A(z)d\bar{z}\big|\right\} < \infty \cdot$$

Theorem 4. *Let $u(z) \in h_A(L(a,r))$ be such that* $\int\limits_{\partial L(a,\rho)} |u(z)|\big|dz + A(z)d\bar{z}\big|$ *is uniformly bounded,* $\sup\limits_{\rho<r}\left\{\int\limits_{\partial L(a,\rho)} |u(z)|\big|dz + A(z)d\bar{z}\big|\right\} < \infty \cdot$ *Then $u(z)$ is represented as the difference of two positive $A(z)$–harmonic functions, $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$, where $u_1(z) > 0$, $u_2(z) > 0$.*

References

1. *Sadullayev, A., Zhabborov, N.M.* On a class of A–analytic functions // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., **9**:3 (2016), 374-383

2. *Khursanov, Sh.Y.* Some properties of $A(z)$–subharmonic functions // Bulleten of NUUz, **4**:3 (2020) 474-484.

3. *Zhabborov N.M., Otaboev T.U., Khursanov Sh.Ya.* The Schwartz inequality and the Schwartz formula for A–analytic functions // Journal of Mathematical Sciences, **264**:6 (2022) 703-714.

АППРОКСИМАЦИЯ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ОПЕРАТОРА ФУРЬЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ ДВЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ СЛАГАЕМЫЕ

И.А. Шакиров
iskander.sh.57@yandex.ru

УДК 591.65

Константа Лебега L_n классического оператора Фурье равномерно приближается простой логарифмическо-дробно-рациональной функцией, содержащей два параметра. В процессе построения аппроксимирующего агрегата используется алгоритм, позволяющий довести величину погрешности приближения L_n до 10^{-8}.

Ключевые слова: оператор Фурье, константа Лебега, дробно-рациональная функция, погрешность аппроксимации.

Approximation of the Lebesgue constant of the Fourier operator by a logarithmic function containing fractional rational summands

The Lebesgue constant of the classical Fourier operator is uniformly approximated by a simple logarithmic-fractional-rational function containing two parameters. In the process of constructing the approximating aggregate, an algorithm is used to bring the magnitude of the approximation error L_n up to 10^{-8}.

Keywords: Fourier operator, Lebesgue constant, fractional-rational function, approximation error.

Основной задачей теории приближения функций является эффективная замена элемента $x \in X$ из выбранного нормированного пространства более простыми агрегатами $u \in U \subset X$, содержащими малое число подлежащих определению параметров. Известно, что оценка равномерной погрешности при приближении функции $x(t) \in X = C_{2\pi}$ частичными суммами Фурье $S_n(x,t)$ зависит от константы Лебега [1]

$$L_n = \|S_n\| = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi k}{2n+1} \quad (S_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}, \quad n \in N), \tag{1}$$

которая имеет логарифмический рост ($L_n \approx (4/\pi^2)\ln(n+a) + b$). Для этой характеристики в первой половине двадцатого века Л. Фейером,

Шакиров Искандер Асгатович, к.ф.-м.н., доцент, НГПУ (Набережные Челны, Россия); Iskander Shakirov (Naberezhnye Chelny State Pedagogical University, Naberezhniye Chelny, Russia)

Г. Сеге, Г. Харди получены различные формулы (включая асимптотические) и интегральные представления. При больших значениях аргумента n они требуют больших вычислительных затрат, что актуализирует задачу приближенного определения L_n с использованием простейших агрегатов, содержащих малое количество подлежащих определению параметров вида a, b и др.

Здесь решается задача построения аппроксимирующей (1) простейшей логарифмическо-дробно-рациональной функции вида

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+0.5)+\widetilde{\alpha}_0+\frac{d_1}{(n+0.5)^2}+\frac{d_2}{(n+0.5)^4}\overset{def}{=}u_n(d_1,d_2) \quad (n\in N) \qquad (2)$$

с последующей оценкой сверху наилучшего приближения $E = \inf\limits_{d_1,d_2}\sup\limits_{n\in N}|L_n - u_n(d_1,d_2)|$, где $\widetilde{\alpha}_0 = c_0 + (4/\pi^2)\ln 2 = 1.270353244\ldots$ ($c_0 = 0.989431273\ldots$ — *const* Ватсона); d_1, d_2 подлежащие определению постоянные. Согласно работе [2] (см. теоремы 2 и 3) в правой части (2) при логарифмической составляющей использованы параметры $a = 0.5$, $b = \widetilde{\alpha}_0$, которые являются оптимальными при оценке константы Лебега снизу. Установлено также, что использование сдвига $a = 0.5$ аргумента n улучшает качество приближения на два порядка, чем в классическом варианте (*случай* $a = 0$).

Неизвестные постоянные d_1, d_2 определим из условия совпадения правой и левой частей (2) при первоначальных значениях аргумента $n:$ $L_1 = u_1(d_1,d_2)$, $L_2 = u_2(d_1,d_2)$. Решая полученную при этом линейную систему с ненулевым определителем, получим:

$$d_1 = d_1^* = 0.002996972641\ldots, \quad d_2 = d_2^* = -0.000116069468\ldots. \qquad (3)$$

В итоге для константы Лебега получили вполне определенное приближенное представление вида $L_n \approx u_n(d_1^*, d_2^*)$, $n \in N$.

Теорема. *Для приближенного равенства (2) с вполне определенными константами (3) имеют место следующие оценки:*

$$L_n \ge u_n(d_1^*, d_2^*), \quad n\in N; \quad E < \sup_{n\in N}|L_n - u_n(d_1^*, d_2^*)| < 0.000000033.$$

Наблюдается весомый вклад дробно-рациональных слагаемых на точность равномерной (дискретной) аппроксимации константы Лебега. Другими словами, известные результаты [2] по логарифмической аппроксимации L_n здесь улучшены на четыре порядка; а результат работы [3] (см. теорему 7), полученный с использованием в (2) одной дробно-рациональной слагаемой, улучшен почти сто семьдесят раз.

Литература

1. *Fejer L.* Sur les singularites de la serie de Fourier des fonctions continues // Ann. de Ec. Norm. **28** (1911), 63-103.

2. *Shakirov I.A.* About the optimal replacement of the Lebesque constant Fourier operator by a logarithmic function // Lobachevskii J. Math. **39**:6 (2018), 841-846.

3. *Шакиров И.А.* Приближение константы Лебега оператора Фурье логарифмическо-дробно-рациональной функцией // Изв. вузов. Матем. **11** (2023), 75-85.

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА БЕРНШТЕЙНА И СМИРНОВА ДЛЯ КОМПЛЕКСНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Е.С. Шмидт
esshmid@yandex.ru

УДК 517.518

В докладе рассмотрены дифференциальные неравенства типа С.Н. Бернштейна и В.И. Смирнова для произвольных многочленов.

Ключевые слова: дифференциальные неравенства для многочленов, дифференциальный оператор.

On Bernstein and Smirnov type inequalities for complex polynomials

The report examines differential inequalities of the S.N. Bernstein and V.I. Smirnov type for arbitrary polynomials.

Keywords: differential inequalities for polynomials, differential operator.

В 1887 году знаменитый химик Д.И. Менделеев в связи со своими научными исследованиями поставил следующую задачу [1, гл. IV, § 86].

Для вещественных многочленов f степени n, ограниченных на отрезке $[a;b]$ константой M, требуется дать наилучшую оценку $|f'|$ на этом компакте. "Проблема Менделеева" привлекала внимание многих математиков и "венцом" этой деятельности в период до 1930 года в случае комплексных многочленов, вероятно, надо считать теорему С.Н. Бернштейна [2].

В 1964 году в книге В.И. Смирнова и Н.А. Лебедева [3, гл. V, § 1, п. 3, теорема 1] теорема Бернштейна была усилена следующим образом:

Для фиксированного $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ обозначим $\Omega_{|z|}$ - образ круга $\{t \in \mathbb{C} : |t| \leq |z|\}$ при отображении $\Psi(t) = \dfrac{t}{1+t}$; $S_\alpha : f(z) \longrightarrow zf'(z) - n\alpha f(z)$ - оператор Смирнова, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Теорема A [3]. *Пусть $f(z)$ и $F(z)$ - многочлены, удовлетворяющие условиям:*

$$(*) \begin{cases} 1) \deg f \leq \deg F = n, \\ 2) \textit{все нули} \quad F \textit{ лежат в замкнутом круге} \quad \overline{\Delta} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}, \\ 3) |f(z)| \leq |F(z)| \quad \textit{на границе} \quad \partial\Delta \quad \textit{этого круга.} \end{cases}$$

Тогда для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ и $\alpha \in \Omega_{|z|}$

$$|S_\alpha[f](z)| \leq |S_\alpha[F](z)|. \tag{1}$$

Шмидт Елизавета Сергеевна, аспирант 3-го года обучения, ПетрГУ (Петрозаводск, Россия); Elizaveta Shmidt (Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, Russia)

Для любого $\alpha \in int\, \Omega_{|z|}$ и для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$ равенство в (1) достигается только для $f = e^{i\gamma}F$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

С момента появления теоремы Бернштейна огромное количество публикаций было посвящено дифференциальным неравенствам для многочленов и смежным вопросам. В работе рассмотрен вопрос: насколько важны все три пункта уловий $(*)$ в теореме А для получения неравенства (1) или его аналога? Если 1) или 2) в уловии $(*)$ не будут выполнены, можно ли получить аналог неравенства (1) с сохранением точности в этом аналоге?

Теорема 1. *Пусть f и F - произвольные многочлены степеней m и n, соответственно, для которых на границе единичного круга $\partial\Delta$ справедливо неравенство $|f(z)| \leq |F(z)|$, оператор S_α и множество $\Omega_{|z|}$ изменения параметра α - как в теореме А. Пусть $\Lambda = \{z_1, \dots, z_k\}$ - множество всех нулей многочлена F с учетом их кратности, лежащих в $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$; если $\Lambda \neq \emptyset$, то определяем $q(z) = \prod\limits_{z_j \in \Lambda} \dfrac{1 - \overline{z_j} z}{z - z_j}$, если $\Lambda = \emptyset$, то полагаем $q(z) \equiv 1$;*

$$l = \begin{cases} m - n, & \text{если } m > n \\ 0, & \text{если } m \leq n. \end{cases}$$

Тогда для $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta$ и $\alpha \in \Omega_{|z|}$ справедливо неравенство:

$$|S_\alpha[f](z)| \leq |S_\alpha[z^l F q](z)|, \tag{2}$$

т.е.

$$|zf'(z) - m\alpha f(z)| \leq |z|^l |z(F(z)q(z))' - (m\alpha - l)F(z)q(z)|.$$

Для $\alpha \in int\, \Omega_{|z|}$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$ равенство в (2) достигается только для многочленов $f = e^{i\gamma} z^l F q$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Литература

1. *Менделеев Д.И.* Исследование водных растворов по удельному весу.– СПб: тип. В. Демакова, 1887.

2. *Bernstein S.N.* Sur la limitation des derivees des polynomes // Paris: C. R. Acad. Sci., **190** (1930), 338–341.

3. *Смирнов В.И., Лебедев Н.А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного.– М: Наука, 1964.

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2024»

СЕКЦИЯ

«НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

г. Уфа, 2 октября – 5 октября 2024 г.

О НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

С.И. Абдрахманов, samatmath@yandex.ru

УДК 517.958+519.2

Исследованы нелинейные стохастическое уравнения параболического типа. Рассмотрены различные случаи воздействия шума на слагаемые в правых частях уравнений. Получены теоремы, с помощью которых возможно решать задачи Коши для рассмотренных уравнений.

Ключевые слова: нелинейные стохастические дифференциальные уравнения параболического типа, симметричный интеграл, стохастический интеграл Стратоновича.

ON NONLINEAR STOCHASTIC PARABOLIC EQUATIONS

Nonlinear stochastic equations of the parabolic type are investigated. Various cases of noise effects on the terms in the right-hand sides of the equations are considered. Theorems for considered problems have been obtained.

Keywords: nonlinear stochastic parabolic equations, symmetric integral, stochastic Stratonovich integral.

Пусть на вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ задан случайный процесс $V(t)$, $t \in [0,T]$, с непрерывными реализациями. Одной из исследуемых в работе задач является задача Коши для нелинейного стохастического уравнения параболического типа:

$$u(x,t) - u(x,0) = \int_0^t G_x(u(x,s), x, s, u_x(x,s))ds + \int_0^t f(x,s,V(s)) * dV(s),$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]. \tag{1}$$

В случае гладкой функции $V(t)$ интегральное уравнение в задаче (1) можно записать в формальном виде:

$$u_t(x,t) = G_x(u(x,t), x, t, u_x(x,t)) + f(x,t,V(t)) \cdot V'(t).$$

Абдрахманов Самат Илдусович, УУНиТ (Уфа, Россия); Samat Abdrakhmanov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Второй интеграл в правой части интегрального уравнения задачи (1) является симметричным интегралом [1] по процессу $V(t)$. В случае, если $V(t)$ есть винеровский процесс, то этот интеграл совпадает со стохастическим интегралом Стратоновича. Здесь $u = u(x,t) \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,T])$, – искомая функция прямой задачи, $f(x,t,V(t))$ – нелинейный источник, зависящий от пространственной координаты, времени и случайного процесса.

Следующая теорема обобщает теорему 4 из статьи [2].

Теорема. *Пусть выполнены условия:*

1. $G(z,x,t,\mu) \in C^{1,1,0,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,T] \times \mathbb{R})$*;*

2. $u_0(x) \in C^2(\mathbb{R})$*;*

3. *Функция* $f(x,t,v) \in C^{2,1,0}(\mathbb{R} \times [0,T] \times \mathbb{R})$*, локально суммируема по переменной* v *для всех фиксированных* x *и* $t \in [0,T]$.

Если функция $F(x,t,V(t)) = \int_{V(0)}^{V(t)} f(x,t,v)dv$ *для любых фиксированных* x *и* t *удовлетворяет задаче Коши*

$$F_t(x,t,v)|_{v \equiv V(t)} = G_x(F(x,t,V(t)),x,t,F_x(x,t,V(t))),$$
$$F(x,0,V(0)) = u_0(x),$$

то функция $u = u(x,t) = F(x,t,V(t))$*, есть решение задачи (1).*

В работе также исследованы задачи Коши для других нелинейных стохастических уравнений параболического типа.

Литература

1. *Насыров Ф.С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 212 с.

2. *S.I. Abdrakhmanov, F.S. Nasyrov.* On Nonlinear Heat-Conduction Equations with a Random Right Part. Lobachevski Journal of Mathematics, 2024, vol.45, No. 6, p.2641-2650.

ПОСТРОЕНИЕ ДОПУСТИМЫХ УПРАВЛЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМАХ

С.В. Акманова,
svet.akm_74@mail.ru

УДК 517.938

Предлагаются способы построения допустимых программных управлений для нелинейных непрерывно-дискретных (гибридных) динамических систем с постоянным шагом дискретизации.

Ключевые слова: гибридная система, дискретная система, допустимое программное управление.

Construction of admissible controls in nonlinear hybrid systems

Methods for constructing admissible program controls for nonlinear continuous-discrete (hybrid) dynamic systems with a constant discretization step are proposed.

Keywords: hybrid system, discrete system, permissible software control.

Работа посвящена исследованию управляемости нелинейных непрерывно-дискретных (гибридных) динамических систем вида

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t_k)),\ t \in [t_k, t_{k+1}), \\ y(t_{k+1}) = g(x(t_{k+1}), y(t_k), u(t_k)), k = 0, 1, 2, ..., \end{cases} \tag{1}$$

где $t_{k+1} - t_k = h > 0$ - постоянная величина и $t_k = hk$, $k = 0, 1, 2, ...$, $x \in R^n, y \in R^m$ - векторы состояний системы (1), $u \in R^q$ - вектор управления; $f(x, y), g(x, y, u)$ - непрерывно дифференцируемые по совокупности переменных функции, причем $f(0, 0) = g(0, 0, 0) = 0$, т.е. при $u = 0$ система (1) имеет точку равновесия $x = 0$, $y = 0$.

Под решением системы (1) при выбранном управлении $u = u(t_k)$, $k = 0, 1, 2, ...$, будем понимать функцию $z(t) = (x(t), y(t))$, где $x(t) = \varphi_k(t)$, $y(t) = y(t_k) = y_k$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, ...$, причем $x(t) = \varphi_k(t)$ - решение задачи Коши

$$x' = f(x, y_k), x(t_k) = x_k, k = 0, 1, 2, \dots .$$

Ставится задача построения допустимых программных управлений с ограниченной энергией, переводящих гибридную систему (1) из заданного начального состояния $z^{(0)} = z(t_0)$ в заданное конечное состояние

Акманова Светлана Владимировна, к.п.н., доцент, МГТУ им. Г.И. Носова (Магнитогорск, Россия); Svetlana Akmanova (Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia)

$z^{(1)} = z(t_l)$, где $t_l = t_0 + lh$ $(l \in N)$, при этом качество процесса управления (количество расходуемой энергии) определяется функционалом

$$I(u) = \sum_{k=0}^{l-1} u^T(t_k)u(t_k). \tag{2}$$

Для решения данной задачи выполним переход от системы (1) к равносильной, в естественном смысле, нелинейной дискретной системе вида

$$z_{k+1} = A(h)z_k + Bu_k + \xi(z_k, u_k, h)\,, \quad k = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{3}$$

где

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} O \\ C \end{bmatrix}, \quad A(h) = \begin{bmatrix} e^{A_1 h} & A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 \\ A_2 e^{A_1 h} & A_2 A_1^{-1}(e^{A_1 h} - I)B_1 + B_2 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = f'_x(0,0), B_1 = f'_y(0,0), A_2 = g'_x(0,0,0), B_2 = g'_y(0,0,0), C = g'_u(0,0,0),$$

$\xi(z_k, u_k, h) = o(\|z_k\| + \|u_k\|)$ при $\|z_k\| + \|u_k\| \to 0$.

Тогда поставленная задача сводится к построению допустимых программных управлений для системы (3). Будем полагать, что система первого приближения для (3) управляема при некотором $h = h_0 > 0$ [1]. Учитывая особенности функции $\xi(z_k, u_k, h_0)$ и работу [2], можно доказать, что итерационная процедура построения допустимого программного управления для системы (3) в некоторой окрестности точки $z = 0$ сходится, т.е. функционал (2) удовлетворяет условию $I(u) < +\infty$, и найденное управление решает поставленную задачу для системы (1), если состояния $z^{(0)}$, $z^{(1)}$ находятся в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$. Если хотя бы одно из состояний $z^{(0)}$, $z^{(1)}$ находится вне окрестности точки $x = 0$, $y = 0$, то, с учётом [3], предлагается другой подход к решению поставленной задачи, предполагающий предварительное построение соответствующего стабилизирующего управления для системы (3).

Литература

1. *Акманова С.В.* Об управляемости и стабилизируемости нелинейных гибридных систем// Материалы междунар. науч. конф. «Уфимская осенняя математическая школа» - Уфа: Аэтерна, **1** (2023), 164-166.

2. *Сазанова Л.А.* Об управлении дискретными системами //Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург: УрГУ, 2002.

3. *Альбрехт Э.Г., Сазанова Л.А.* О построении допустимых управлений в глобально управляемых нелинейных дискретных системах // Известия УрГУ, **26** (2003), 11-23.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ С ГИСТЕРЕЗИСОМ

Д.Е. Апушкинская,
apushkinskaya@gmail.com

УДК 517.957

Доклад представляет собой обзор, посвященный параболическим задачам со свободными границами, в которых присутствует оператор с разрывным гистерезисом. Наша основная цель - обсудить разрешимость задач с гистерезисом, структуру свободных границ и качественные свойства так называемых “сильных решений” из анизотропного соболевского класса $W_q^{2,1}$ при достаточно больших q.

Ключевые слова: пространственно-распределенный гистерезис, свободные границы, регулярность, теоремы существования.

On the solvability of the problem with hysteresis

In this talk we preset a survey concerning parabolic free boundary problems involving a discontinuous hysteresis operator. Our main oblective is to discuss the solvability of such problems, the structure of free boundaries, and qualitative properties of the so-called “strong solutions”, belonging to anisotropic Sobolev classes with sufficiently large q.

Keywords: spatially distributed hysteresis, free boundary, regularity, existence theorems.

Обсудим задачу со свободной границей, описываемую одномерным уравнением теплопроводности с разрывной и ограниченной правой частью

$$\partial_t u - \Delta u = f(u). \tag{1}$$

Дополнительно предполагается существование двух пороговых значений $\alpha < 0$ и $\beta > 0$ таких, что при $u \leqslant \alpha$ процесс, описываемый (1), находится под воздействием режима I, при $u \geqslant \beta$ - под воздействием режима II, а при $\alpha < u < \beta$ процесс может находиться под влиянием любого из указанных режимов.

Если процесс саморегулируется таким образом, что режимы меняются со II на I при достижении решением u порогового значения α и с I на II при достижении u порогового значения β, то говорят о явлении гистерезиса, которое заключается в свойстве процессов (физических, биологических, химических, социологических и т. д.), откликаться на приложенное к ним воздействие в зависимости от их текущего состояния. Фактически поведение описываемой системы на интервале времени во многом определяется её предысторией.

Апушкинская Дарья Евгеньевна, д.ф.-м.н., профессор, РУДН (Москва, Россия); Darya Apushkinskaya (RUDN University, Moscow, Russia)

Таким образом, область переменных (x, t), которую мы рассматриваем разбивается на два заранее неизвестных множества - зоны активности режимов I и II. Роль свободной границы играет граница раздела зон активности режимов.

В рамках доклада мы обсудим качественные свойства "сильных решений" из анизотропного соболевского класса $W_q^{2,1}$ при достаточно больших q, опишем структуру свободных границ, уделив особое внимание так называемым "спящим границам". И, наконец, для класса транверсальных начальных данных установим разрешимость задачи и свойства гладкости свободных границ.

Доклад основан на результат работ [1]-[4], полученных совместно с Н.Н. Уральцевой.

Литература

1. *Apushkinskaya D.E., Uraltseva N.N.* On regularity properties of solutions to the hysteresis-type problem // Interfaces Free Bound., **17**:1 (2015), 93-115.

2. *Apushkinskaya D.E., Uraltseva N.N.* Free boundaries in problems with hysteresis // Philos. Trans. Roy. Soc. A, **373**:2050 (2015), 20140271, 10 pp.

3. *Апушкинская Д.Е., Уральцева Н.Н.* Формула монотонности для задачи с гистерезисом // ДАН, **478**:4 (2018), 1-3.

4. *Апушкинская Д.Е., Тихомиров С.Б., Уральцева Н.Н.* О разрешимости параболической задачи с гистерезисом // Зап. научн. семин. ПОМИ, (принято в печать).

СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЧТИ ВОЗРАСТАЮЩИМИ ЯДРАМИ И СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С.Н. Асхабов,
askhabov@yandex.ru

УДК 517.968

Методом весовых метрик изучены системы интегральных уравнений с суммарно-разностными ядрами и степенной нелинейностью, возникающих при решении задач гидроаэродинамики и других. Доказаны глобальные теоремы о существовании и единственности решения в классе непрерывных неотрицательных на положительной полуоси функций. Полученные результаты охватывают не только неубывающие, но и некоторые невозрастающие и даже немонотонные ядра.

Ключевые слова: системы интегральных уравнений, степенная нелинейность, суммарно-разностные ядра.

Systems of integral equations with almost increasing kernels and power nonlinearity

Using the method of weight metrics, systems of integral equations with sum-difference kernels and power nonlinearity that arise when solving problems of hydroaerodynamics and others are studied. Global theorems on the existence and uniqueness of a solution in the class of continuous functions that are nonnegative on the positive half-axis are proven. The results obtained cover not only non-decreasing, but also some non-increasing and even non-monotonic kernels.

Keywords: systems of integral equations, power nonlinearity, sum-difference kernels.

В классе $Q_{0,n} = \{u : u = \{u_i\}_{i=1}^n,\ u_i \in C[0,\infty)$ и $u_i(x) > 0$ при $x > 0\}$ сначала рассматривается система уравнений с разностными ядрами

$$u_i^\alpha(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^x p_{ij}(x-t) \cdot u_j(t)\, dt, \quad \alpha > 1\,, \quad x > 0\,, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (1)$$

Предполагается, что функции $p_{ij}(x)$ являются почти возрастающими (по С.Н. Бернштейну) с соответствующими константами $C_{ij} \geq 1$ на полуоси $[0,\infty)$ (см., например, [1]) и $p_{ij}(+0) > 0$ для всех $i, j = \overline{1,n}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-11-00177).

Асхабов Султан Нажмудинович, д.ф.-м.н., профессор, МФТИ (Долгопрудный, Россия), ЧГПУ (Грозный, Россия); Sultan Askhabov (Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russia; Chechen State Pedagogical University, Grozny, Russia)

Доказывается, что если $u \in Q_{0,n}$ является решением системы (1), то оно не убывает на $[0,\infty)$, причем справедливы неравенства

$$\left[\frac{(\alpha-1)\,P}{\alpha\,M} n\cdot x\right]^{1/(\alpha-1)} \le u_i(x) \le \left[\frac{\alpha-1}{\alpha} n \int\limits_0^x \left(\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(t)\right) dt\right]^{1/(\alpha-1}\,,$$

где $P = \min\limits_{1\le i,j\le n} p_{ij}(0)$, $M = \max\limits_{1\le i,j\le n} C_{ij}$. Тем самым улучшаются леммы 5 и 6 из [1]. Используя эти неравенства построен конусный отрезок инвариантный относительно нелинейного интегрального оператора, порожденного системой (1), и методом весовых метрик (см., например, [1], [2]) доказана глобальная теорема о существовании и единственности решения системы (1) в классе $Q_{0,n}$. Показано, что на любом отрезке $[0,b]$, где $b>0$ есть произвольное число, решение системы (1) может быть найдено методом последовательных приближений пикаровского типа и получена оценка скорости их сходимости к точному решению.

Далее дается обобщение указанных результатов на случай системы уравнений с почти возрастающими положительными суммарно-разностными ядрами (ядрами Теплица-Ганкеля):

$$u_i^{\alpha}(x) = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^x \left[p_{ij}(x-t)+q_{ij}(x+t)\right]\cdot u_j(t)\,dt, \quad \alpha>1\,, \quad i=\overline{1,n}. \qquad (2)$$

В случае $0<\alpha\le 1$ показано, что системы (1) и (2) имеют в конусе пространства $C[0,\infty)$, состоящем из всех неотрицательных непрерывных на $[0,\infty)$ функций, лишь тривиальное (нулевое) решение: $u_i(x)\equiv 0$ для любого $i=\overline{1,n}$.

Таким образом, в случае $\alpha>1$ системы нелинейных интегральных уравнений (1) и (2) кроме тривиального решения могут иметь и нетривиальные решения, в отличие от соответствующих систем линейных ($\alpha=1$) уравнений, которые имеют лишь тривиальное (нулевое) решение.

Литература

1. *Askhabov S.N., Betilgiriev M.A.* Nonlinear convolution integral equations with almost increasing kernels in cones // Differential Equations, **27**:2 (1991), 234–242.

2. *Askhabov S.N.* Об одном интегральном уравнении с суммарным ядром и неоднородностью в линейной части // Дифференц. уравнения, **57**:9 (2021), 1210–1219.

ABSENCE OF GLOBAL SOLUTIONS TO A SYSTEM OF HIGH-ORDER SEMILINEAR EQUATIONS WITH A SINGULAR POTENTIAL

Sh.G. Bagyrov
sh_bagirov@yahoo.com

UDC 517.9

In a cylinder, where the base is the exterior of some compact, a system of high-order semilinear equations with a singular potential is considered. The question of the absence of global solutions is investigated. An exact sufficient condition for the absence of global solutions is found. The proof is based on the test function method

Keywords: semilinear equation, global solution, critical exponent, test function method.

Denote: $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$, $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, $R = \text{const} > 0$, $B_R = \{x : |x| < R\}$, $B'_R = \{x : |x| > R\}$, $\bar{B}'_R = R^n \backslash B_R$, $Q_R = B_R \times (0; +\infty)$, $Q'_R = B'_R \times (0; +\infty)$, $C^{2,k}_{x,t}(Q'_R)$ is the set of functions twice continuously differentiable with respect to x and k times continuously differentiable with respect to t in Q'_R.

In the domain Q'_R we consider the system of equations

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^k u_1}{\partial t^k} = \Delta u_1 + \frac{C_1}{|x|^2} u_1 + |x|^{\sigma_1} |u_2|^{q_1} \\ \frac{\partial^k u_2}{\partial t^k} = \Delta u_2 + \frac{C_2}{|x|^2} u_2 + |x|^{\sigma_2} |u_1|^{q_2}, \end{array} \tag{1}$$

with initial conditions

$$u_i^{(m)}\Big|_{t=0} = u_{i0}^m(x) \geq 0, \ u_{i0}^{k-1}(x) \geq 0, \tag{2}$$

where $n > 2$, $q_i > 1$, $\sigma_i \in R$, $0 \leq C_i < \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$, $u_{i0}^m(x) \in C(\overline{B'}_R)$,

$$i = 1, 2, \ m = 0, 1, ..., k-1.$$

We are studying the nonexistence of a global solution of problem (1)-(2). By a global solution of problem (1)-(2) we understand a pair of functions (u_1, u_2), such that $u_1(x,t), u_2(x,t) \in C^{2,k}_{x,t}(Q'_R) \bigcap C^{1,k-1}_{x,t}(\bar{B}'_R \times [0, +\infty))$ and satisfy the system (1) at every point of Q'_R, the initial condition (2) for $t = 0$.

The problems of non-existence of global solutions for different classes of differential equations and inequalities play a key role in theory and applications. Therefore, they are at constant attention of mathematicians and a great number of works were devoted to them. See the monograph [1]

Bagyrov Sh.G., Baku State University, Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan Institute of Mathematics and Mechanics

for the survey of such results. Note that the case $C_i = 0$ was considered in work [2], and the case $C_i \neq 0,\ i = 1, 2$, but $k = 1$ in work [3].

Denote:

$$D_i = \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - C_i},$$

$$\lambda_i^+ = -\frac{n-2}{2} + D_i,$$

$$\lambda_i^- = -\frac{n-2}{2} - D_i,$$

$$\theta_1 = \frac{\sigma_1 + 2 + q_1(\sigma_2 + 2)}{q_1 q_2 - 1} - \lambda_1^- - \frac{2}{k},$$

$$\theta_2 = \frac{\sigma_2 + 2 + q_2(\sigma_1 + 2)}{q_1 q_2 - 1} - \lambda_2^- - \frac{2}{k},\ i = 1, 2.$$

Let us consider the functions

$$\xi_1(x) = |x|^{\lambda_1^+} - |x|^{\lambda_1^-},$$

$$\xi_2(x) = |x|^{\lambda_2^+} - |x|^{\lambda_2^-}.$$

It is easy to verify that $\xi_i(x)$ are the solutions of the equations

$$\Delta u + \frac{C_i}{|x|^2} u = 0$$

in B_1'.

The following theorem is proved.

Theorem. *Let* $n > 2,\ \sigma_i > -2,\ 0 \le C_i < \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ *and* $\max(\theta_1, \theta_2) \ge 0$, $i = 1, 2$. *If* $u_1(x,t) \ge 0,\ \ u_2(x,t) \ge 0$ *is the solution of problem (1)-(2), then* $u_1(x,t) \equiv 0,\ u_2(x,t) \equiv 0$.

This theorem is proved by the method of test functions of Pohozaev and Mitidieri [1], using a test function of the form $\xi_i \varphi(x) T(t)$, where $\varphi(x)$, $T(t)$ are chosen accordingly.

REFERENCES

1. *Mitidieri E., Pohozayev S.Z.* A priori estimations and no solutions of nonlinear partial equations and inequalities. Proc. Steklov Inst. Math., **234** (2001), 9-234

2. *Laptev G. G.* On nonexistence of solutions of a class of singular semilinear differential inequalities, Tr. MIAN **232** (2001), 223-235.

3. *Bagyrov Sh. G.* The absence of global solutions of a system of semilinear parabolic equations with a singular potential // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Volume 43, Number 2, 2017, P. 296-304.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ РАЗРУШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ОБРАЗЦА ПОД ТЕМПЕРАТУРНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

О.А. Васильева, А.А. Хохонов
vasilievaoa@mgsu.ru, blay26@rambler.ru

УДК 517.518

Рассматривается модифицированная модель Баренблата. Данная модель представляет собой начальную краевую задачу для системы нелинейных дифференциальных уравнений. С помощью данной модели исследованы скорость распространения, температура и динамика начальной стадии разрушения образца.

Ключевые слова: математика, дифференциальные уравнения, математическое моделирование.

Investigation of the dynamics of the initial stage of fracture of a homogeneous specimen under temperature influence

A modified Barenblatt model is considered. This model is an initial boundary value problem for a system of nonlinear differential equations. Using this model, the propagation velocity, temperature and dynamics of the initial stage of sample fracture are investigated.

Keywords: mathematics, differential equations, mathematical modeling.

Рассматривается модифицированная модель Баренблата. Математическая модель является одномерной в пространственных переменных. Данная модель представляет собой начальную краевую задачу для системы трех нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Система дифференциальных уравнений (1) является нелинейной, поэтому для исследования начальной краевой задачи используются численные методы.

$$\frac{dT}{dt} = \beta_T(1 + \beta_T(T-1)divU) + (\epsilon\triangle T),$$
$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{1-\epsilon}(1-\epsilon+\frac{\beta_T}{\alpha_l})\nabla P + \epsilon_g e_1 + \epsilon\triangle U \tag{1}$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{2K_1\epsilon}\frac{1}{1-\epsilon}(-K_3(1-\epsilon+\frac{\beta_T}{\alpha_l})\eta(T)_e^{-ks} + (1-\epsilon)^2(S\frac{dK_3}{d\epsilon}+\frac{dK_2}{d\epsilon}- \\ -\epsilon^2\frac{dK_1}{d\epsilon})(\alpha_l(1-\epsilon)+\beta_T)\frac{1}{\beta})divU + div(\frac{D}{T}\nabla\mu)$$

Васильева Ольга Александровна к.ф.-м.н., доцент, МГСУ (Москва, Россия); Olga Alexandrovna Vasl'eva (Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia)

Хохонов Александр Алексеевич, аспирант, МГСУ (Москва, Россия); Alexander Alekseevich Hohonov (Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia)

В качестве одного из численных методов используется модифицированный метод конечных разностей второго порядка точности. Модель формулируется для заданных переменных. Нагрев образца осуществляется с одной стороны. В ходе анализа полученных численных результатов, было выявлено, что процесс демонстрирует нелокальный характер

Литература

1. *Лукашев Е.А., Радкевич Е.В, Сидоров В.И, Васильева О.А* Доклады Российской академии наук. 2018. 480 с.

2. *Радкевич Е.В, Лукашев Е.А, Яковлев Н.Н, Васильева О.А, Сидоров В.И.* Введение в обобщенную теорию неравновесных фазовых переходов и термодинамический анализ континуальных задач. // Москва: Наука. 2019. 344 с.

3. *Яковлев Н.Н, Лукашев Е.А, Радкевич Е.В* Доклады по физике 53. 2008. С. 443-446.

О СОДЕРЖАЩИХ ЛОГАРИФМЫ ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ q-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.В. Гаянов, А.В. Парусникова
gajanovnv@gmail.com, aparusnikova@hse.ru

УДК 517.929.8

Рассматривается возможность нахождения решений алгебраического q-разностного уравнения в классе формальных рядов Дюлака. Приведены достаточные условия наличия таких разложений (для расширенного класса уравнений), а также примеры, показывающие, что имеется своя специфика при перенесении алгоритмов построения формальных разложений из данного класса с имеющихся для дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: асимптотические разложения, q-разностное уравнение, ряд Дюлака.

Solutions to q-difference equations containing logarithms

We consider the possibility of finding solutions to an algebraic q-difference equation in the class of formal Dulac series. We give sufficient conditions for the existence of these expansions in the extended class of such equations, as well as examples, demonstrating that there are specifics in transferring algorithms for constructing formal expansions from those available for differential equations to q-difference equations.

Keywords: asymptotic expansions, q-difference equations, Dulac series.

Рассматриваются *q-разностные уравнения* [1] – функциональные уравнения, которые связывают значение функции в точках z и $q^k z, k = 1, 2, \ldots, n$, для некоторого фиксированного числа $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Далее также предполагаем, что $q^n \neq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Мы исследуем возможность нахождения решений алгебраических q-разностных уравнений, а также таких, к которым могут быть сведены некоторые алгебраические q-разностные уравнения, в классе формальных рядов Дюлака [2], приводим достаточные условия наличия таких разложений (расширив рассматриваемый класс уравнений). Приводим примеры нахождения решений в виде формальных рядов Дюлака в

Публикация подготовлена в ходе работы в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики"(НИУ ВШЭ).

Гаянов Никита Владимирович, магистрант, стажер-исследователь, НИУ ВШЭ (Москва, Россия); Nikita Gayanov (HSE University, Moscow, Russia)

Парусникова Анастасия Владимировна, к.ф.-м.н., должности: доцент, с.н.с., НИУ ВШЭ (Москва, Россия); Anastasia Parusnikova (HSE University, Moscow, Russia)

определенных случаях, а также оценки на степени коэффициентов разложений в виде ряда Дюлака через степени коэффициентов начального отрезка разложения.

В частности, доказана следующая

Теорема 1. *Уравнение*

$$L(\sigma)y = zM(z, \log_q z, y, \sigma y, \ldots, \sigma^n y),$$

где $(\sigma y)(z) = y(qz)$*,* $L(\sigma) = \sum_{j=0}^{n} a_j \sigma^j$ *– многочлен от оператора* σ*,* $L \not\equiv 0$*,* $M \in \mathbb{C}[z, \log_q z, y, \ldots, y_n]$ *– многочлен от* $n+3$ *переменных, обладает* N*-параметрическим формальным решением в виде ряда Дюлака, где* N *– количество корней многочлена* $L(s)$*, которые имеют вид* $q^n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, с учётом их кратности.*

Литература

1. *Cano J., Fortuny Ayuso P.* Power series solutions of non-linear q-difference equations and the Newton–Puiseux polygon // Qualitative theory of dynamical systems, **21**:4 (2022), 123.

2. *Мардешич П., Ресман М.* Аналитические модули для параболических ростков Дюлака // Успехи математических наук, **76**:3 (2021), 13-92.

О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

О.В. Гермидер, В.Н. Попов
o.germider@narfu.ru, v.popov@narfu.ru

УДК 519.642.4

В работе предлагается комбинированный метод для построения решений нелинейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода, в которых ядро не является гладкой функцией двух переменных или свободный член интегрального уравнения имеет точку разрыва первого рода. С применением системы ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ многочленов Чебышева первого рода выполняется аппроксимация ядра в каждой итерации метода последовательных приближений. В качестве точек коллокаций выбираются корни этих многочленов.
Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, многочлены Чебышева первого рода, метод коллокаций, метод последовательных приближений

On the solution of a nonlinear Fredholm integral equation of the second kind of a special type

The paper proposes a combined method for constructing solutions to nonlinear Fredholm integral equations of the second kind, in which the kernel is not a smooth function of two variables or the free term of the integral equation has a discontinuity point of the first kind. Using a system of orthogonal on the segment $[-1, 1]$ Chebyshev polynomials of the first kind, the kernel is approximated in each iteration of the method of successive approximations. The roots of these polynomials are chosen as collocation points.
Keywords: nonlinear Fredholm integral equation of the second kind, Chebyshev polynomials of the first kind, collocation method, method of successive approximations

Нелинейные интегральные уравнения являются важным инструментом для моделирования физических процессов [1] и [2]. Рассмотрим следующую двухточечную краевую задачу, которая представляет большой интерес в магнитной гидродинамике [1], [3] и [4]

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} = \exp u(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00381).

Гермидер Оксана Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, САФУ имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия); Oksana Germider (Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russia)

Попов Василий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, САФУ имени М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия); Vasilii Popov (Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov, Arkhangelsk, Russia)

с граничными условиями $u(0) = 0$ и $u(1) = 0$. Аналитическое решение этой двухточечной краевой задачи имеет вид [3]:

$$u(x) = -\ln 2 + 2\ln\left(\frac{c}{\cos\left(\frac{c}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)}\right),$$

где c – корень уравнения $c = \sqrt{2}\cos(c/4)$, принадлежащий отрезку $[0, \pi]$, с точностью до 10^{-10} равный $c = 1.3360556949$.

Интегрируя уравнение (1), получаем следующее однородное нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода [3] и [4]

$$u(x) - \int\limits_0^1 K(x, y, u(y))\mathrm{d}y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{2}$$

где $K(x, y, u(y))$ – ядро интегрального уравнения (2):

$$K(x, y, u(y)) = \begin{cases} -y(1-x)\exp u(y) & 0 \leq y \leq x, \\ -x(1-y)\exp u(y) & x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Вводим новые переменные x^* и y^*: $x^* = 2x - 1$, $y^* = 2y - 1$. Тогда уравнение (2) перепишем в виде

$$u(x^*) - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} K(x^*, y^*, u(y^*))\mathrm{d}y^* = 0, \quad -1 \leq x^* \leq 1. \tag{3}$$

Решение интегрального уравнения (3) находим путем сведения к уравнению типа Вольтерра

$$u(x^*) - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x^*} K_1(x^*, y^*, u(y^*))\mathrm{d}y^* - \frac{1}{2}\int\limits_{x^*}^{1} K_2(x^*, y^*, u(y^*))\mathrm{d}y^* = 0, \tag{4}$$

где

$$K_1(x^*, y^*, u(y^*)) = -\frac{(y^*+1)(1-x^*)\exp u(y^*)}{4},$$
$$K_2(x^*, y^*, u(y^*)) = -\frac{(x^*+1)(y^*-1)\exp u(y^*)}{4}.$$

Существование и единственность решений уравнений (3) и (4) доказывается в [5] и [6], соответственно. Найдем решение уравнения (4) методом последовательных приближений [7]

$$u_i(x^*) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x^*} K_1(x^*, y^*, u_{i-1}(y^*))\mathrm{d}y^* + \frac{1}{2}\int\limits_{x^*}^{1} K_2(x^*, y^*, u_{i-1}(y^*))\mathrm{d}y^*, \tag{5}$$

где $u_0(x^*) = 0$ и $i \geq 1$. Получим u_i методом коллокации с использованием полиномов Чебышева первого рода [8] и корней этих полиномов в качестве точек коллокаций. Представляем функции K_1 и K_2 в виде частичной суммы ряда по полиномам Чебышева

$$K_l(x^*, y^*, u_{n,i-1}(y^*)) = \sum_{j=0}^{n} a_{l,i-1,j}(x^*) T_j(y^*) = \mathbf{T}(y^*) \mathbf{A}_{l,i-1}(x^*), \tag{6}$$

где $\mathbf{T}(y^*)$ – матрица размером $1 \times n'$ $(n' = n + 1)$:

$$\mathbf{T}(y^*) = (T_0(y^*)\, T_1(y^*) \ldots T_{n-1}(y^*)\, T_n(y^*)),$$

а искомые матрицы $\mathbf{A}_{1,i-1}$ и $\mathbf{A}_{2,i-1}$ имеют размер $n' \times 1$ и определяются следующим образом: $\mathbf{A}_{l,i-1} = (a_{l,i-1,0}\, a_{l,i-1,1} \ldots a_{l,i-1,n-1}\, a_{l,i-1,n})^T$ $(l = 1, 2)$. Подставляя корни полиномов Чебышева первого рода в (6) и используя свойство конечных сумм произведений этих полиномов в выбранных точках коллокаций, находим матрицы $\mathbf{A}_{1,i-1}$ и $\mathbf{A}_{2,i-1}$ на каждой итерации i. Подставляя (6) в (5), получаем значения функции $u_{n,i-1}$ в точках коллокаций, на основе которых находим функцию $u_{n,i-1}$.

В случае, когда свободный член интегрального уравнения имеет точку разрыва первого рода, рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода [4]

$$u(x) - \int_0^1 K(x, y, u(y))\mathrm{d}y = b(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где $K(x, y, u(y)) = xy\sqrt{u(y)}$,

$$b(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x & x \leq \dfrac{1}{2}, \\ \sqrt{x} + \alpha x & x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\alpha = -10\cos 1 + \frac{11}{\sqrt{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin^2 \frac{1}{8} + 6\sin 1 - 9\sin \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

С использованием метода последовательных приближений и полиномиальной интерполяции на каждой из частей отрезка [0, 1] находим функцию u.

Предложенный комбинированный подход позволяет находить решения интегральных уравнений типа Фредгольма в отсутствии выполнения условия гладкости для ядра интегрального уравнения и вблизи точек разрыва, при этом необходимая точность достигается на основе итеративных аппроксимаций ядра и решений нелинейных интегральных уравнений ортогональной системой многочленов Чебышева.

Литература

1. *Kalman R., Kalaba R.* Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems. — New York: Elsevier, 1969

2. *Wazwaz A.M.* Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications. — New York: Springer, 2011

3. *Ordokhani Y., Razzaghi M.* Solution of nonlinear Volterra-Fredholm–Hammerstein integral equations via a collocation method and rationalized Haar functions // Applied Mathematics Letters, **21** (2008), 4-9

4. *Amiri S., Hajipour M., Baleanu D.* On accurate solution of the Fredholm integral equations of the second kind // Applied Numerical Mathematics, **150** (2020), 478-490

5. *Bazm S., Hosseini A., Azevedo J.S., Pahlevani F.* Existence, uniqueness, and numerical approximation of solutions of a nonlinear functional integral equation // Journal of Computational and Applied Mathematics, **439** (2024), 115602

6. *Bazm S., Limaand P., Nemati S.* Analysis of the Euler and trapezoidal discretization methods for the numerical solution of nonlinear functional Volterra integral equations of Urysohntype // Journal of Computational and Applied Mathematics, **398** (2021), 113628

7. *Davis H.T.* Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations. — New York: Dover Publications, 1962

8. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы: учебник. – 9-е изд. — Москва: Лаборатория знаний, 2020

MOTION OF ANISOTROPIC SPACE CURVES INDUCED BY THE LANDAU-LIFSHITZ EQUATION

K.R. Yesmakhanova, Z.A. Zakariyeva, M.B. Zhassybayeva, R. Myrzakulov
kryesmakhanova@gmail.com, zaruet.zakarieva@gmail.com, mzhassybaeva@yahoo.com, rmyrzakulov@gmail.com

УДК 517.951, 517.957

Motion of anisotropic space curves induced by the Landau-Lifshitz equation

We study the integrable motion of anisotropic space curves induced by the Landau-Lifshitz equation (LLE). The geometrical equivalence of LLE to a class of generalized nonlinear Schrödinger equations is established. Using the Sym-Tafel formula, soliton surfaces corresponding to these dynamics are derived, highlighting the deep connections between differential geometry and integrable spin systems.

Keywords: integrable systems, Landau-Lifshitz equation, differential geometry, spin systems, anisotropic curves.

The Landau-Lifshitz equation (LLE) describes the nonlinear dynamics of spin vectors in anisotropic ferromagnetic materials and is expressed as

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S} \wedge J\mathbf{S}, \tag{1}$$

where $S = (S_1, S_2, S_3)$ is the unit spin vector, $J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$, and $\wedge$ denotes the cross product. This equation is integrable and connects with various classical equations, including the Heisenberg ferromagnet and sine-Gordon equations under specific conditions.

The motion of anisotropic space curves associated with LLE is described using the Frenet-Serret equations:

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & \sigma \\ -\kappa & 0 & \tau \\ -\sigma & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan. (Grant № AP14971227).

Kuralay Yesmakhanova, Candidate of Science (Phys.-Math.), Associate Professor, L.N. Gumilyov ENU (Astana, Kazakhstan); Есмаханова Куралай (ЕНУ имени Л.Н Гумилева, Астана, Казахстан)

Zakariyeva Zaruyet, lecturer, U.M. Utemisov West Kazakhstan University (Oral, Kazakhstan); Закариева Зарует (Западно-Казахстанский университет имени М. Утемисова, Орал, Казахстан,)

Zhassybayeva Meruyert, PhD student, L.N. Gumilyov ENU (Astana, Kazakhstan); Жасыбаева Меруерт Бактыкеновна (ЕНУ имени Л.Н Гумилева, Астана, Казахстан)

Ratbay Myrzakulov, Dr. Sc. Phys.-Math., professor, L.N. Gumilyov ENU (Astana, Kazakhstan); Мырзакулов Ратбай (ЕНУ имени Л.Н Гумилева, Астана, Казахстан)

where κ is the curvature, σ is the geodesic curvature, and τ is the torsion. The dynamics of these curves are linked to the differential geometry parameters through the system

$$\kappa_t = \omega_{3x} - \tau\omega_2 + \sigma\omega_1, \tag{3}$$
$$\sigma_t = \omega_{2x} - \kappa\omega_1 + \tau\omega_3, \tag{4}$$
$$\tau_t = \omega_{1x} - \sigma\omega_3 + \kappa\omega_2, \tag{5}$$

where ω_i are functions involving κ, σ, τ, and their derivatives. This framework reveals a strong connection between spin dynamics and the geometry of anisotropic curves.

The nonlinear Schrödinger-like system (NLS) associated with these dynamics is given by

$$iq_t + q_{xx} - 2rq^2 - iR_{12} = 0, \tag{6}$$
$$ir_t - r_{xx} + 2qr^2 - iR_{21} = 0, \tag{7}$$
$$q_{11x} - (qq_{21} - rq_{12}) = 0, \tag{8}$$

where $r = -\bar{q}$, and $R_{12} = q_{12x} + 2qq_{11}$, $R_{21} = q_{21x} - 2rq_{11}$.

Additionally, the unit length Landau-Lifshitz (ULL) equation is

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S} \wedge J\mathbf{S}, \tag{9}$$

where $J = diag(J_1, J_2, J_3)$ and $J_1 \leq J_2 \leq J_3$, highlighting the interaction of spin vectors under anisotropic conditions.

Теорема 1. *The Landau-Lifshitz equation (1.1) is geometrically equivalent to the nonlinear Schrödinger-like equation (3.9)-(3.11).*

This work underscores the deep relationship between LLE and the differential geometry of space curves, offering a comprehensive view of how integrable spin systems and geometric structures are interrelated. These findings contribute significantly to the field of mathematical physics, especially in the study of soliton solutions and integrable deformations.

References

1. *Zakharov V.E., Takhtadzhan L.A.* Equivalence of the nonlinear Schrödinger equation and the equation of a Heisenberg ferromagnet // Theor. Math. Phys., **38**: (1979), 26–35.

2. *Lakshmanan M.* On the geometrical interpretation of solitons // Phys. Lett. A., **64**: (1978), 354–356.

3. *De-Yin Liu, Bo Tian, Yan Jiang, Xi-Yang Xie, Xiao-Yu Wu* Analytic study on a (2+1)-dimensional nonlinear Schrödinger equation in the Heisenberg ferromagnetism // Comput. Math. Appl., **71**: (2016), 2001-2007. doi.org/10.1016/j.camwa.2016.03.020.

4. *Anco S.C., Myrzakulov R.* Integrable generalizations of Schrödinger maps and Heisenberg spin models from Hamiltonian flows of curves and surfaces // J. Geom. Phys., **60**: (2010), 1576–1603.

МЕТОД ПРОДОЛЖЕННОГО ОТНОШЕНИЯ РЭЛЕЯ, ПРИЛОЖЕНИЯ К ЛИНЕЙНЫМ И НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАДАЧАМ

Я.Ш. Ильясов
ilyasov02@gmail.com

УДК 517.518

Обсуждается метод продолженного отношения Рэлея. Метод основан на использовании нового типа вариационных функционалов, критические точки которых соответствуют решениям и бифуркационным точкам уравнений, а также спектральным точкам линейных операторов. Применение метода будет проиллюстрировано на нелинейных уравнениях в частных производных, линейных систем, а также конечномерных системах уравнений, возникающих при расчете максимальных допустимых мощностей напряжений в электрических сетях (blackout problem).

Ключевые слова: отношения Рэлея, бифуркации, собственные значения.

Rayleigh's extended ratio method, applications to linear and nonlinear problems

We discuss the extended Rayleigh quotient method. The method uses a new type of variational functionals, the critical points of which correspond to solutions and bifurcation points of equations, as well as spectral points of linear operators. The application of the method will be illustrated on nonlinear partial differential equations, linear systems, and finite-dimensional systems of equations arising in the calculation of maximum permissible voltage powers in electrical networks (blackout problem).

Keywords: mathematics, differential equations, spectral theory.

В докладе обсуждается новый метод нахождение бифуркаций ветвей решений систем нелинейных уравнений и собственных значений линейных операторов. Будет представлено краткое введение в метод продолженного отношения Рэлея. Метод основан на использовании нового типа вариационных функционалов, критические точки которых соответствуют решениям и бифуркационным точкам уравнений. С помощью этого метода можно находить как достаточные условия существования седло-узловых бифуркаций решений систем уравнений, так и выводить вариационную формулу для прямого их нахождения. Применение метода будет проиллюстрировано на нелинейных уравнениях в частных производных, нахождение корней Перрона матриц, а также расчете

Ильясов Явдат Шавкатович, д.ф.м.н., гл.н.с., УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Il'yasov Y.S.(Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, Russia)

максимальных допустимых мощностей напряжений в электрических сетях, т.е. решение "blackout problem".

Литература

1. *Il'yasov Y.* Finding Saddle-Node Bifurcations via a Nonlinear Generalized Collatz–Wielandt Formula. // International Journal of Bifurcation and Chaos **31**:01 (2021):2150008

2. *Il'yasov Y.* A finding of the maximal saddle-node bifurcation for systems of differential equations// Journal of Differential Equations **378** (2024): 610-625.

3. *Salazar P. D. P., Il'yasov Y., Alberto L. F. C., Costa E. C. M.& Salles M. B.* Saddle-node bifurcations of power systems in the context of variational theory and nonsmooth optimization.// IEEE Access **8**(2020) 110986–110993

4. *Il'yasov Y.S., Ivanov A.A.,* Computation of maximal turning points to nonlinear equations by nonsmooth optimization. // Optim. Meth. and Softw **31**(1), 1–23

НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЫ В КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛАХ

Д.А. Зезюлин, Г.Л. Алфимов
d.zezyulin@gmail.com, galfimov@yahoo.com

УДК 517.9

Рассматриваются локализованные моды стационарного нелинейного уравнения Шредингера с дополнительным квазипериодическим потенциалом. С помощью численного продолжения по нелинейному собственному числу описаны бифуркации, сопровождающие рождение малоамплитудных нелинейных мод у краев лакун линейного спектра.

Ключевые слова: квазипериодические потенциалы, нелинейные моды, бифуркации.

Nonlinear modes in quasiperiodic potentials

We consider localized modes for a stationary nonlinear Schrödinger equation with an additional quasiperiodic potential. Using the numerical continuation in the nonlinear eigenvalue, we describe bifurcations of small-amplitude nonlinear modes near the edges of the spectal gaps of the underlying linear problem.

Keywords: quasiperiodic potentials, nonlinear modes, bifurcations.

Мы изучаем обобщенное нелинейное уравнение Шредингера вида

$$i\Psi_t = -\Psi_{xx} + v_0[\cos(2x) + \cos(2\varphi x + \theta)]\Psi + |\Psi|^2\Psi. \tag{1}$$

Это уравнение описывает макроскопическую динамику конденсата Бозе-Эйнштейна, удерживаемого суперпозицией двух оптических ловушек. В соответствующем физическом контексте модель (1) известна как уравнение Гросса-Питаевского. Для стационарных локализованных мод, допускающих представление $\Psi(x,t) = e^{-i\mu t}\psi(x)$, где $\mu \in \mathbb{R}$ и $\psi(x)$ это вещественная функция, удовлетворяющая условию локализации: $\lim_{x\to\pm\infty} \psi(x) = 0$, уравнение (1) сводится к виду

$$-\psi_{xx} + v_0[\cos(2x) + \cos(2\varphi x + \theta)]\psi + \psi^3 = \mu\psi. \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-11-00009).

Зезюлин Дмитрий Александрович, д.ф.-м.н., Университет ИТМО (Санкт-Петербург, Россия); ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Dmitry Zezyulin, ITMO University (Saint Petersburg, Russia); Institute of Mathematics with Computing Centre, Subdivision of the Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

Алфимов Георгий Леонидович, д.ф.-м.н., профессор, НИУ МИЭТ (Москва, Россия); ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Georgy Alfimov, MIET University (Zelenograd, Moscow, Russia); Institute of Mathematics with Computing Centre, Subdivision of the Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

В нашей работе изучается случай *квазипериодического потенциала*, соответствующий ситуации, когда φ это иррациональное число; параметр $\theta \in [0, 2\pi)$ задает фиксированный фазовый сдвиг между оптическими ловушками, и коэффициент $v_0 > 0$ задает амплитуду квазипериодического потенциала. Кубический член ψ^3 соответствует нелинейным взаимодействиям между атомами конденсата. Без него задача становится линейной.

В то время как полностью описать множество локализованных мод пока не представляется возможным, в этой работе мы рассматриваем более частную задачу, а именно, изучаем возникновение малоамплитудных решений (то есть $|\psi| \ll 1$) при определенных значениях параметра μ, которые соответствуют краям щелей в спектре соответствующей линейной задачи.

Задача представляет особый интерес по следующей причине. Известно, что линейный спектр чисто периодических потенциалов может быть полностью описан с помощью теории Флоке-Ляпунова, а возникновение нелинейных мод в щелях (лакунах) периодических потенциалов достаточно хорошо изучено. Однако линейный спектр квазипериодического потенциала устроен гораздо более сложным образом [1-3]. Он не подчиняется теореме Флоке, имеет фрактальную структуру и, вообще говоря, включает как экспоненциально локализованные собственные функции (в нижней части спектра), так и делокализованные собственные функции (в верхней части спектра). В результате картина бифуркаций между линейными и нелинейными модами оказывается особенно сложной и пока не до конца изученной.

Задача рассматривается с помощью подхода, основанного на использовании *рационального приближения*: при этом иррациональное число φ приближается обыкновенной дробью: $\varphi \approx p/q$, где p и q это взаимно простые целые числа. В нашей работе используется иррациональное число φ, равное золотому сечению $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$. Тогда последовательность оптимальных приближений улучшающейся точности задается отношениями соседних чисел Фибоначчи:

$$\varphi \approx \ldots, \frac{55}{34}, \quad \frac{89}{55}, \quad \frac{144}{89}, \ldots \tag{3}$$

Заменяя число φ дробью p/q, мы сводим уравнение (2) к *периодической* задаче, где период равен πq. Эта задача дополняется периодическими граничными условиями $\psi(-\pi q/2) = \psi(\pi q/2)$.

Сформулированная таким образом задача решалась численно, и изучались бифуркации нелинейных мод, возникающие при постепенном изменении нелинейного собственного числа μ. Рассматривались нелинейные моды, формирующиеся в щелях линейного спектра, где возбуждение линейных мод подавлено и в результате нелинейные моды оказываются наиболее устойчивыми.

Заметим, что, несмотря на периодические граничные условия, сформулированная задача позволяет адекватно описать нелинейные моды, хорошо локализованные внутри промежутка $[-\pi q/2, \pi q/2]$, так как для таких решений разница между периодическими и нулевыми граничными условиями пренебрежимо мала.

Основные результаты нашей работы можно описать следующим образом. Установлено, что возникновение семейств нелинейных мод у края спектральной щели может следовать различным сценариям в зависимости от структуры спектра вблизи этого края, а также в зависимости от степени локализации линейных собственных функций вблизи бифуркации. При увеличении нелинейного собственного числа μ пары четных и нечетных мод, возникающие в симметричном случае при нулевом сдвиге $\theta = 0$, могут претерпевать бифуркации потери симметрии типа «вилка», в результате которых возникают новые семейства несимметричных решений. Другой сценарий формирования нелинейных мод заключается в возникновении бифуркации типа «седло-узел», в результате которой одновременно рождается пара новых семейств. Бифуркации последнего типа становятся наиболее типичными в случае, когда рассматривается асимметричный случай с произвольным (ненулевым) фазовым сдвигом $\theta \neq 0$. В этом случае возникновение локализованных мод в спектральных щелях происходит в результате каскада бифуркаций «седло-узел».

Наши результаты позволяют обнаружить общие закономерности, сопровождающие возникновение малоамплитудных нелинейных мод, и указывают на взаимосвязь между фрактальным линейным спектром и сложно устроенным множеством локализованных нелинейных состояний.

Литература

1. *Динабург Е.И., Синай Я.Г.* Об одномерном уравнении Шредингера с периодическим потенциалом // Функц. анализ и его прил., **9**:4 (1975), 8-21

2. *Simon B.* Almost periodic Schrödinger operators: A Review // Adv. Appl. Math., **3** (1982), 463-490.

3. *Fröhlich J., Spencer T., and Wittwer P.* Localization for a class of one-dimensional quasi-periodic Schrödinger operators // Commun. Math. Phys., **132** (1990), 5-25.

О СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ КЛЕЙНА-ГОРДОНА И СИНУС-ГОРДОНА

Е.И. Зотова
zot-kate83@yandex.ru

УДК 517.518

Исследованы уравнения Клейна-Гордона с пространственным шумом в виде стохастических интегралов. Особое внимание уделяется уравнениям синус-Гордона и двойного синус-Гордона. Сформулированы теоремы, позволяющие строить аналитические решения для уравнения Клейна-Гордона с шумом.

Ключевые слова: Уравнение Клейна-Гордона, уравнение синус-Гордона, уравнение двойного синус-Гордона, стохастические дифференциальные уравнения в частных производных, симметричный интеграл, стохастический интеграл Стратоновича.

On stochastic Klein-Gordon and sine-Gordon equations

The Klein-Gordon equations with spatial noise in the form of stochastic integrals are investigated. Particular attention is given to the sine-Gordon and double sine-Gordon equations. Theorems are formulated which allow for the construction of analytical solutions to the Klein-Gordon equation with noise.

Keywords: Klein-Gordon equation, sine-Grodon equation, double sine-Grodon equation, stochastic partial differential equations, symmetric integral, stochastic Stratonovich integral.

Пусть на фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_x)_{x\in[0,X]}, \mathbb{P})$ задан $\mathcal{F}_x$-измеримый случайный процесс $V(x)$.

Исследуется задача Коши для стохастического уравнения Клейна-Гордона вида

$$\begin{gathered} u_t(x,t) - u_t(0,t) = \int_0^x g(u(y,t)) * dV(y), \\ u(x,0) = \mu(x), \quad u_t(x,0) = \nu(x), \quad (x,t) \in [0,X] \times \mathbb{R}^+, \end{gathered} \tag{1}$$

где $g(u)$ – некоторая нелинейная функция, а интеграл в правой части – симметричный интеграл [1] по процессу $V(x)$. Если $V(x)$ является винеровским процессом, то симметричный интеграл совпадает со стохастическим интегралом Стратоновича. В случае гладкой функции $V(x)$ уравнение (1) можно записать в виде

$$u_{xt} = g(u)V'(x).$$

Зотова Екатерина Игоревна, УУНиТ (Уфа, Россия); Ekaterina Zotova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Положим $F(u,a) = \sqrt{\int_a^u g(z)\,dz}$, где a – некоторая константа, и введем обозначение $[F(u,a)]^{-1} = \frac{1}{F(u,a)}$.

Теорема. *Пусть $[F(u,a)]^{-1}$ – локально суммируемая функция по переменной u. Решение задачи Коши для стохастического уравнения Клейна-Гордона (1) определяется из соотношения*

$$\pm\int_b^u [F(z,a)]^{-1}\,dz = \sqrt{2C^{-1}}(Ct + V(x)), \tag{2}$$

где C и b - константы, определяемые начальными условиями.

Замечание. *Пусть для задачи (1) верно, что $g(u) = \sin(u)$, $u \in (0, 2\pi)$, $\cos(a) = 1$. Тогда для стохастического уравнения синус-Гордона с пространственным шумом*

$$u_t(x,t) - u_t(0,t) = \int_0^x \sin(u(y,t)) * dV(y)$$

решение (2) включает в себя кинкообразное решение

$$u(x,t) = 4\arctan(\exp(\pm\sqrt{C^{-1}}(Ct + V(x)) + \gamma)),$$

где C, γ – константы.

В работе также исследованы уравнение Клейна-Гордона со случайной фазовой скоростью, зависящей от пространства, и уравнение двойного синус-Гордона с различным воздействием пространственного шума. В случаях уравнений синус-Гордона и двойного синус-Гордона удается выделять кинкообразные решения.

Литература

1. *Насыров Ф.С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. - 212 с.

ДИНАМИКА КИНКОВ УРАВНЕНИЙ СИНУС-ГОРДОНА И φ^4 С ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Д.К. Кабанов,
Е.Г. Екомасов,К.Ю. Самсонов,М.И. Фахретдинов
danya.kabanov.95@mail.ru, ekomasoveg@gmail.com, k.y.samsonov@gmail.com, fmi106tf@gmail.com

УДК 530.182.1

В работе были рассмотрены уравнения синус-Гордона и φ^4 в модели с двумя и тремя точечными и протяжёнными примесями. Численно исследована возможная динамика кинков, найдены различные типы локализованных на примесях волн.

Ключевые слова: уравнение синус-Гордона, уравнение φ^4, кинк, бризер.

Dynamics of kinks of sine-Gordon and φ^4 equations with spatial inhomogeneities

The work considered the sine-Gordon and φ^4 equations in models with two and three point and extended impurities. The possible dynamics of kinks are studied numerically, and various types of waves localized on impurities are found.

Keywords: sine-Gordon equation, φ^4 equation, kink, breather.

Исследование нелинейных волновых процессов, описываемых уравнениями типа Клейна-Гордона (УКГ), является важной областью теоретической и математической физики. В частности, уравнение синус-Гордона и модель φ^4 представляют собой значимые примеры УКГ, которые позволяют исследовать локализованные волны — солитоны и их взаимодействия, возникающие при моделировании различных физических явлений от квантовых систем до космологии [1,2].

Для более точного описания физических систем часто требуется модификация УКГ, которая может включать в УКГ дополнительные члены, учитывающие влияние внешних полей и сил, члены описывающие потери энергии в системе и неоднородность среды. Неоднородность среды может быть учтена через пространственные зависимости в коэффициентах уравнения, так называемые примеси.

В нашей работе были рассмотрены уравнения синус-Гордона и φ^4 в модели с двумя и тремя точечными и протяжёнными примесями [3,4].

Кабанов Даниил Константинович, маг. 1 г.о. ФТИ, УУНиТ (Уфа, Россия); Daniil Kabanov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Екомасов Евгений Григорьевич, д.ф.-м.н., профессор, УУНиТ (Уфа, Россия); Evgenii Ekomasov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Самсонов Кирилл Юрьевич, к.ф.-м.н., доцент, Тюменский государственный университет (Тюмень, Россия); Kirill Samsonov (Tyumen State University, Tyumen, Russia)

Фахретдинов Марат Ирекович, к.ф.-м.н., доцент, УУНиТ (Уфа, Россия); Marat Fakhretdinov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

Численно исследована возможная динамика кинков, найдены различные типы локализованных на примесях волн.

С помощью метода коллективных переменных было показано, что задачу о динамике локализованных волн на примесях можно преобразовать в задачу о связанных осцилляторах с нелинейной связью. В результате исследований обнаружено, что протяженная примесь ведет себя аналогично известным точечным примесям, которые описываются с помощью дельта-функции. Также была определена структура и динамические характеристики локализованных нелинейных волн, как солитонного, так и бризерного типов.

Литература

1. *Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P., Williams F.* The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics. — Springer Cham, 2014.

2. *Kevrekidis P., Cuevas-Maraver J.* A Dynamical Perspective on the φ^4 Model: Past, Present and Future. — Springer:Berlin, 2019.

3. *Самсонов К.Ю., Кабанов Д.К., Назаров В.Н., Екомасов Е.Г.* Локализованные нелинейные волны уравнения синус-Гордона в модели с тремя протяженными примесями // Компьютерные исследования и моделирование, **16**:4 (2024), 855-868.

4. *Fakhretdinov M.I., Samsonov K.Y., Dmitriev S.V., Ekomasov E.G.* Kink Dynamics in the φ^4 Model with Extended Impurity // Rus. J. Nonlin. Dyn., **19**:3 (2023), 303-320.

МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЮРГЕРСА

В.И. Качалов, Д.А. Маслов
vikachalov@rambler.ru, maslovdma@mpei.ru

УДК 517.956

В данной работе развивается аналитический метод решения эволюционных уравнений типа Бюргерса в банаховом пространстве. А, именно, после искусственного введения в уравнение малого параметра при нелинейном слагаемом определяются условия, при которых существует аналитическое по этому параметру решение.

Ключевые слова: эволюционная задача, уравнение Бюргерса, ε-регулярное решение.

The small parameter method in the theory of nonlinear evolutionary Burgers type equations

In this paper the analytical method for solving evolutionary Burgers type equations in a Banach space is developed. A small parameter is artificially introduced into the equation to the nonlinear term. The conditions for existing the analytical on the small parameter solution are deduced.

Keywords: evolutionary problem, Burgers equation, ε-regular solution.

Пусть в банаховом пространстве E задана начальная задача для уравнения типа Бюргерса:

$$\begin{aligned} &\partial_t u + \varepsilon B(u, Hu) = Au, \quad t \in (0, T], \\ &u\big|_{t=0} = u^0, \end{aligned} \tag{1}$$

где A и H — линейные операторы; B — билинейный оператор.

Пусть для задачи (1) выполняются условия:

1°. Оператор $A : E \to E$ — неограниченный замкнутый.

2°. Оператор A является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной полугруппы $\mathcal{U}(t)$.

3°. Билинейный оператор B является ограниченным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-21-00496).

Качалов Василий Иванович, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой, НИУ МЭИ (Москва, Россия); Vasiliy Kachalov (National Research University MPEI, Moscow, Russia)

Маслов Дмитрий Александрович, к.т.н., доцент, НИУ МЭИ (Москва, Россия); Dmitry Maslov (National Research University MPEI, Moscow, Russia)

Будем искать решение уравнения (1) в виде формального ряда по степеням малого параметра:

$$u^r(t,\varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \ldots + \varepsilon^n u_n(t) + \ldots . \tag{2}$$

Если ряд (2) подставить в уравнение (1) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε, то получится следующая серия задач:

$$\begin{array}{l} \partial_t u_0 = Au_0, \quad u_0\big|_{t=0} = u^0, \\ \partial_t u_1 = Au_1 - B(u_0, Hu_0), \quad u_1\big|_{t=0} = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \partial_t u_n = Au_n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} B(u_k, Hu_{n-k-1}), \quad u_n\big|_{t=0} = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{3}$$

Определение. Если ряд (2) с коэффициентами, определяемыми из серии (3), сходится равномерно на отрезке $[0,T]$ в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, то его сумма $u^r(t,\varepsilon)$ называется ε-регулярным решением задачи Коши (1).

Теорема 1. *Если H — неограниченный замкнутый оператор с областью определения $D_H \supset D_A$, выполненены условия $1^\circ - 3^\circ$ и оператор A имеет непрерывный обратный оператор, то ε-регулярное решение $u^r(t,\varepsilon)$ существует, единственно и совпадает с точным решением $u(t,\varepsilon)$ задачи (1).*

Теорема 2. *Если H — ограниченный оператор и выполненены условия $1^\circ - 3^\circ$, то ε-регулярное решение $u^r(t,\varepsilon)$ существует, единственно и совпадает с точным решением $u(t,\varepsilon)$ задачи (1).*

В работах [1], [2] исследовалось приближение точных решений эволюционных задач ε-регулярными. В том числе, если в задаче (1) H — неограниченный замкнутый оператор с областью определения $D_H \supset D_A$ и выполнены только условия $1^\circ - 3^\circ$, то её решение можно приблизить ε-регулярными решениями задач (1) с последовательностью ограниченных операторов $\{H_m\}_{m=1}^{\infty}$, сильно сходящихся к H.

Литература

1. *Качалов В.И.* Об ε-регулярных решениях дифференциальных уравнений с малым параметром // Сиб. матем. журнал, **64**:1 (2023), 113-122

2. *Качалов В.И., Маслов Д.А.* Аналитичность и псевдоаналитичность в методе малого параметра // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **63**:11 (2023), 1806-1814

ЛОКАЛЬНОЕ РЕНОРМАЛИЗОВАННОЕ РЕШЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^n$

Л.М. Кожевникова
kosul@mail.ru

УДК 517.956.25

В работе рассматривается квазилинейное эллиптическое уравнение второго порядка с переменными показателями нелинейностей и суммируемой правой частью. Установлено свойство устойчивости локальных ренормализованных решений рассматриваемого уравнения в произвольной области. Как следствие доказано существование локального ренормализованного решения во всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: квазилинейное эллиптическое уравнение, существование решения, локальное ренормализованное решение, переменный показатель, неограниченная область

Local renormalized solution of an elliptic equation with variable exponents in the space $\mathbb{R}^n$

The paper considers a quasilinear elliptic equation of the second order with variable exponents nonlinearity and a summable right-hand side. The property of stability of local renormalized solutions of the considered equation in an arbitrary domain is established. As a consequence, the existence of a local renormalized solution in the entire space $\mathbb{R}^n$ is proven.

Keywords: quasilinear elliptic equation, existence of the solution, local renormalized solution, variable exponent, unbounded domain

Понятие ренормализованных решений является мощным инструментом для изучения широких классов вырождающихся эллиптических уравнений с данными в виде меры. Первоначальное определение приведено в работе [1] и распространено М.Ф. Бидо-Верон [2] в локальную и очень полезную форму для уравнения с p-лапласианом, поглощением и мерой Радона μ:

$$-\Delta_p u + |u|^{p_0-2}u = \mu, \quad p \in (1, n), \quad 0 < p - 1 < p_0. \tag{1}$$

В частности, М.Ф. Бидо-Верон доказала существование в пространстве $\mathbb{R}^n$ локального ренормализованного решения уравнения (1) с $\mu \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Кожевникова Лариса Михайловна, д.ф.-м.н., профессор, СФ УУНиТ (Стерлитамак, Россия); Larisa Kozhevnikova (Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia)

В докладе понятие локального ренормализованного решения адаптируется на уравнение с переменными показателями роста:

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) + b(\mathrm{x}, u, \nabla u) = f, \quad \mathrm{x} \in \Omega,\ f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega), \tag{2}$$

где область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, может быть неограниченной (в том числе и совпадать с $\mathbb{R}^n$).

Условие P. Предполагаем, что функции

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, \mathrm{s}), \ldots, a_n(\mathrm{x}, \mathrm{s})) : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

$$b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) : \Omega \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},$$

входящие в уравнение (2), каратеодориевы. Пусть существуют неотрицательная функция $\Phi \in L_{p'(\cdot),\mathrm{loc}}(\Omega)$, положительные числа $\widehat{a}, \overline{a}$ такие, что при п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$, для всех $\mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства:

$$|\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s})| \leq \widehat{a} \left(|\mathrm{s}|^{p(\mathrm{x})-1} + \Phi(\mathrm{x}) \right);$$

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{t})) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) > 0, \quad \mathrm{s} \neq \mathrm{t};$$

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) \cdot \mathrm{s} \geq \overline{a} |\mathrm{s}|^{p(\mathrm{x})}.$$

Здесь $\mathrm{s} \cdot \mathrm{t} = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i t_i$, $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, $\mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_n)$.

Кроме того, пусть существует неотрицательная функция $\Phi_0 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, непрерывная неубывающая функция $\widehat{b} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, положительное число $\overline{b}_0$ такие, что при п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$, для всех $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства:

$$|b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})| \leq \widehat{b}(|s_0|) \left(\Phi_0(\mathrm{x}) + |\mathrm{s}|^{p(\mathrm{x})} \right);$$

$$b(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) s_0 \geq \overline{b}_0 |s_0|^{p_0(\mathrm{x})+1}, \quad p(\cdot) - 1 < p_0(\cdot).$$

При этом предполагаем, что функции $p, p_0 \in C(\overline{\Omega})$ и p подчиняется условию

$$\begin{cases} \exists\, C > 0 : |p(\mathrm{x}) - p(\mathrm{y})| \leq -\frac{C}{\ln|\mathrm{x}-\mathrm{y}|}, & \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \overline{\Omega}, \quad |\mathrm{x} - \mathrm{y}| \leq \frac{1}{2}, \\ 1 < p_- \leq p_+ < n, & p_- = \inf\limits_{\mathrm{x} \in \overline{\Omega}} p(\mathrm{x}),\ p_+ = \sup\limits_{\mathrm{x} \in \overline{\Omega}} p(\mathrm{x}). \end{cases}$$

Следуя [3], [4], введем обозначения: $q_0(\cdot) = \frac{p^*(\cdot)}{p'_+}$, $q_1(\cdot) = \frac{q_0(\cdot)}{q_0(\cdot)+1} p(\cdot)$, $q_2(\cdot) = \frac{q_0(\cdot)}{q_0(\cdot)+1} p'(\cdot)$, $q_3(\cdot) = \frac{q_0(\cdot)}{p(\cdot)-1}$, $q_4(\cdot) = \frac{p_0(\cdot)}{1+p_0(\cdot)} p'(\cdot)$, где $p'_+ = \frac{p_-}{p_- - 1}$. Пусть выполнено дополнительное условие

$$p(\cdot) - 1 < q_0(\cdot).$$

Тогда можно определить $q'_2(\cdot) = \frac{q_0(\cdot) p(\cdot)}{q_0(\cdot)+1-p(\cdot)}$.

Определим срезку $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$. Через $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$ обозначим пространство всех липшицевых непрерывных функции на $\mathbb{R}$, производная которых имеет компактный носитель.

Определение. *Измеримая конечная почти всюду функция* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *называется локальным ренормализованным решением уравнения* (2), *если выполняются следующие условия:*

a) $T_k(u) \in W^1_{p(\cdot),\mathrm{loc}}(\Omega)$ *при любом* $k > 0$;

b) $b(\mathrm{x}, u, \nabla u) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$;

c) $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot),\mathrm{loc}}(\Omega),\ 1 \le q(\cdot) \ll q_2(\cdot)$;

d) $|u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot),\mathrm{loc}}(\Omega),\ 1 \le q(\cdot) \ll q_3(\cdot)$;

для любой функции $h \in \mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$ *и любой функции* $\varphi \in W^1_{r(\cdot)}(\Omega),\ r(\cdot) \gg q_2'(\cdot)$, *с компактным носителем такой, что* $\varphi h(u) \in W^1_{p(\cdot)}(\Omega)$, *имеем:*

$$\int\limits_\Omega (b(\mathrm{x}, u, \nabla u) - f)h(u)\varphi d\mathrm{x} + \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot (\nabla u h'(u)\varphi + \nabla\varphi h(u))d\mathrm{x} = 0.$$

Автором установлено свойство устойчивости локальных ренормализованных решений уравнения (2).

Теорема 1. *Пусть последовательность функций* $\{f_\xi\}_{\xi\in\mathbb{N}} \subset L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *сходится сильно к* f *в* $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *и* $\{u_\xi\}_{\xi\in\mathbb{N}}$ *последовательность локальных ренормализованных решений уравнения*

$$-\mathrm{div}\, \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u_\xi) + b(\mathrm{x}, u_\xi, \nabla u_\xi) = f_\xi, \quad \mathrm{x} \in \Omega.$$

Тогда с точностью до подпоследовательности u_ξ *сходится почти всюду в* Ω *к* u *— локальному ренормализованному решению уравнения* (2).

Следствием результата устойчивости является теорема существования.

Теорема 2. *Пусть* $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, *тогда существует локальное ренормализованное решение уравнения* (2) *в* $\mathbb{R}^n$.

Литература

1.*Dal Maso G., Murat F., Orsina L., Prignet A.* Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **28**:4 (1999), 741-808.

2. *Bidaut-Véron M.-F.* Removable singularities and existence for a quasilinear equation with absorption or source term and measure data // Adv. Nonlinear Stud., **3**:1 (2003), 25-63.

3. *Кожевникова Л. М.* Ренормализованные решения эллиптических уравнений с переменными показателями и данными в виде общей меры // Матем. сб., **211**:12 (2020), 83–122.

4. *Sanchón M., Urbano J.M.* Entropy solutions for the $p(x)$-laplace equation // Transactions of the american mathematical society, **361**:12 (2009), 6387-6405.

INTRINSIC LOCALIZED MODES IN DNLS-TYPE EQUATIONS WITH COMPETING NONLINEARITIES

П.А. Корчагин, Ф.Х. Абдуллаев Г.Л. Алфимов,
olimp-pako@yandex.ru, fatkhulla@yahoo.com,
galfimov@yahoo.com

УДК 517.9

Рассматриваются обобщения дискретного нелинейного уравнения Шредингера с нелинейностью, представленной двумя степенными членами, имеющими разные знаки. Исследуется устойчивость локализованных решеточных мод, а также их бифуркации при изменения параметра связи. Выделены некоторое свойства этих нелинейных мод, являющиеся общими для всех рассмотренных нелинейностей данного типа.

Ключевые слова: нелинейные моды, бифуркации.

We consider generalized discrete nonlinear Schrödinger equation with nonlinearity in the form of two powers that have opposite signs (so called “competing nonlinearity”). We study the stability of localized lattice modes and their bifurcations that occur when the coupling constant varies. It is shown that some properties of these modes are commun for all the nonlinearities that have been considered.

Keywords: nonlinear modes, bifurcations.

Consider the lattice equation

$$i\frac{d\Psi_n}{dt} + C\left(\Psi_{n+1} - 2\Psi_n + \Psi_{n-1}\right) + \varkappa\left|\Psi_n\right|^p\Psi_n - \gamma\left|\Psi_n\right|^q\Psi_n = 0, \qquad (1)$$

where $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Here $\varkappa, \gamma$ are positive constants, $p, q \in \mathbb{N}$ and $q > p$. Eq. (1) is a generalization of classical Discrete Nonlinear Schrödinger (DNLS) Equation that has been studied since 50-es due to numerous physical applications. A significant difference between DNLS and Eq. (1) is that the nonlinearity in Eq. (1) is not cubic but consists of two competing powers of different signs (*competing nonlinearity*). The most studied example of an equation of this kind is the so-called cubic-quintic DNLS equation (DNLS-CQ equation). It corresponds to $p = 2$, $q = 4$ in Eq. (1) [1,2]. The applications of DNLS-CQ equation includes nonlinear

Корчагин Павел Анатольевич, магистрант, НИУ МИЭТ (Москва, Россия); Pavel Korchagin, Master Student, MIET University (Zelenograd, Moscow, Russia)

Абдуллаев Фатхулла Хабибулаевич, д.ф.-м.н, профессор, ФТИ АН Узбекистана (Ташкент, Узбекистан); Fatkhulla Abdullaev, Physical-Technical Institute of Uzbekistan Academy of Sciences, (Tashkent, Uzbekistan)

Алфимов Георгий Леонидович, д.ф.-м.н., профессор, НИУ МИЭТ (Москва, Россия); ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Georgy Alfimov, MIET University (Zelenograd, Moscow, Russia); Institute of Mathematics with Computing Centre, Subdivision of the Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

optics and the theory of Bose-Einstein condensate (BEC). It is known, that DNLS-CQ supports multistability of discrete solitons [1], mobility of discrete formations and other interesting features [2].

Our study has been motivated by two models that have now received wide discussion in BEC theory. It is recognized nowadays that a mixture of two BECs trapped in a deep optical lattice in presence of quantum fluctuations is described by the Gross-Pitaevskii equation (GPE) with additional term corresponding to the repulsion of atoms. In 1D case the governing equation reads, [3,4],

$$i\frac{d\Psi_n}{dt} + C\left(\Psi_{n+1} - 2\Psi_n + \Psi_{n-1}\right) + \varkappa\left|\Psi_n\right|\Psi_n - \gamma\left|\Psi_n\right|^2\Psi_n = 0, \tag{2}$$

where $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Eq. (2) is a particular case of Eq. (1) with $p = 1$ and $q = 2$. In The 3D case the model can be reduced to 1D-lattice equation

$$i\frac{d\Psi_n}{dt} + C\left(\Psi_{n+1} - 2\Psi_n + \Psi_{n-1}\right) + \varkappa\left|\Psi_n\right|^2\Psi_n - \gamma\left|\Psi_n\right|^3\Psi_n = 0, \tag{3}$$

that is also a version of Eq. (1) with $p = 2$, $q = 3$.

In our study we concentrate on solutions of Eq. (1) that are localized on finite number of lattice sites and have the form of stationary oscillations,

$$\Psi_n(t) = e^{i\mu t}u_n, \tag{4}$$

(so called *intrinsic localized modes*, ILM). From (1) and (4) after some algebra we arrive at the equation

$$C\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right) - u_n + \left|u_n\right|^p u_n - \gamma\left|u_n\right|^q u_n = 0, \tag{5}$$

were C, γ and u_n have been rescaled. The boundary conditions are

$$u_n \to 0, \quad n \to \pm\infty. \tag{6}$$

It is straightforward to show that the condition (6) implies that u_n can be regarded as real.

In the limit $C = 0$ there is no coupling between the sites (so called *anticontinuum limit*, (ACL)). Then the amplitudes u_n are the roots of the equation

$$-u + u^{p+1} - \gamma u^{q+1} = 0. \tag{7}$$

If

$$0 < \gamma < \gamma_* \equiv \left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q-p}{q}\right)^{\frac{q-p}{p}},$$

then Eq. (7) has five roots: $u = 0$, $u = \pm a$ and $u = \pm A$, where $a, A > 0$. Introduce the codes of the solutions in ACL as follows: for n-th site, we mark the situation $u_n = 0$ by symbol 0, $u_n = \pm a$ by symbols $a^{\pm}$ and

code	stability, $C \ll 1$	Continuation and bifurcations
(a^+)	stable	no bound for continuation if $0 < \gamma < \gamma_{a^+}$; merge with (A^+) if $\gamma_{a^+} < \gamma < \gamma_*$.
(A^+)	stable	merge with $(a^+A^+a^+)$ if $0 < \gamma < \gamma_{A^+}$; merge with (a^+) if $\gamma_{A^+} < \gamma < \gamma_*$.
(A^+A^+)	stable	merge with $(a^+A^+A^+a^+)$ if $0 < \gamma < \gamma_{A^+A^+}$; merge with (a^+a^+) if $\gamma_{A^+A^+} < \gamma < \gamma_*$.
(A^+A^-)	unstable	merge with $(a^+A^+A^-a^-)$ if $0 < \gamma < \gamma_{A^+A^-}$; merge with (a^+a^-) if $\gamma_{A^+A^-} < \gamma < \gamma_*$.
(A^+a^+)	unstable	merge with (a^+A^+) if $0 < \gamma < \gamma_*$;
(A^+a^-)	stable	merge with $(a^+A^+a^-)$ if $0 < \gamma < \gamma_{A^+a^-}$; merge with (a^+A^-) if $\gamma_{A^+a^-} < \gamma < \gamma_*$.
(a^+a^+)	unstable	no bound for continuation if $0 < \gamma < \gamma_{a^+a^+}$; merge with (A^+A^+) if $\gamma_{a^+a^+} < \gamma < \gamma_*$.
(a^+a^-)	stable	merge with $(a^+a^+a^-a^-)$ if $0 < \gamma < \gamma_{a^+a^-}$; merge with (A^+A^-) if $\gamma_{a^+a^-} < \gamma < \gamma_*$.

Таблица 1: The bifurcations of C-parametrized branches of ILM with codes of length 1 and 2 and their stability in the limit of small coupling.

$u_n = \pm A$ by symbols $A^\pm$. We label ILM solutions in ACL by codes that are sequences of these symbols. For instance, the code

$$\mathcal{A} = (\dots, 0, 0, a^+, A^-, a^+, 0, 0, \dots)$$

means that the amplitudes of all sites are zero, except three of them that are $u_{-1} = a$, $u_0 = -A$ and $u_1 = a$.

When $C > 0$ the ILM can be continued from the ACL, giving rise to C-parametrized branches of solutions. We label these branches with the codes that they have in ACL. To shorten the notations, we cut off infinite number of zero symbols left the first nonzero symbol and right to the last nonzero symbol. So, we keep only finite number of symbols; the code $\mathcal{A}$ becomes (a^+, A^-, a^+). We call the length of the code the number of symbols in the truncated code. For instance, the code $\mathcal{A}$ is of the length 3.

• First, we consider the ILMs with codes of length 1 or 2. There are 8 such ILMs, up to symmetries. Each of them was continued numerically for $C > 0$ by means of the method of pseudoarclength continuation [5]. In the process, we analysed linear stability of the computed ILMs. Three cases were studied: (i) $p = 1$, $q = 2$; (ii) $p = 2$, $q = 3$; (iii) $p = 2$, $q = 4$ (the DNLS-CQ equation).

The results are commun for all the three cases. For instance, in all the three models the branch (A^+a^+) merge with its mirror counterpart (a^+A^+) at some critical value of C and disappear. In other cases the continuation depends on γ (see the Table). For each ILM there exist a threshold value of γ (denoted in Table by γ_{a^+}, γ_{A^+} etc), that separates the ways of continuation. The threshold value depends on the case (i), (ii) or (iii), but the codes of the branches to merge are the same for all the three cases (i),(ii) and (iii).

• Second, we studied in more detail the branch (a^+). In all the three cases we observed symmetry-breaking bifurcation. This phenomenon just has been reported on for the cases (i) and (iii), but not for the case (ii). This bifurcation is closely related to the *snaking* phenomenon and to the situations when the Peierls-Nabarro barrier vanishes.

• Third, we address the question of stability for the ILM with long codes of repeating symbols. We show that the ILM with the codes

$$(A^+A^+ \dots A^+A^+) \quad \text{and} \quad (a^+a^- \dots a^+a^-)$$

are stable for any choice of p and q, at least for sufficiently small C.

Литература

1. *Carretero-Gonzales R., Talley J. D., Chong C. and Malomed B. A.* Multistable solitons in the cubic-quintic discrete nonlinear Schrodinger equation// Physica D, **216** (2006), 77-89.

2. *Maluckov A., Hadzievski L., Malomed B.A.* Dark solitons in dynamical lattices with the cubic-quintic nonlinearity// Phys. Rev. E, **76**, (2007) art. 046605.

3. *Fei-yan Zhao, Zi-teng Yan, Xiao-yan Cai et al.* Discrete quantum droplets in one-dimensional lattices // Chaos, Solitons and Fractals, **152** (2021), art. 111313.

4. *Kusdiantara R., Susanto H., Adriano F.T., Karjanto N.* Analysis of multistability in discrete quantum droplets and bubbles // Chaos, Solitons and Fractals, **187** (2024), art. 115410.

5. *Doedel E.J.* Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems// in: Lecture Notes on Numerical Analysis of Nonlinear Equations, Springer, Dordrecht (2007), pp.1-49.

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С НЕЭРМИТОВОЙ ЧАСТЬЮ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ДИНАМИКОЙ КВАЗИЧАСТИЦ

А.Е. Кулагин, А.В. Шаповалов,
aek8@tpu.ru, shpv@mail.tsu.ru

УДК 517.955.8

Предлагается подход к построению квазиклассически сосредоточенных асимптотических решений нелокального нелинейного уравнения Шредингера с неэрмитовой частью, которые существенным образом учитывают дальнодействующий характер самодействия. Для этого вводится "классическая механика" нескольких квазичастиц, траектории которых задают область локализации решения.

Ключевые слова: квазиклассическое приближение, квазичастицы, открытая система, нелокальная нелинейность

Semiclassical solutions to the nonlocal nonlinear Schrödinger equation with a non-Hermitian term associated with the dynamics of quasiparticles

The approach to constructing the semiclassically concentrated asymptotic solutions for the nonlocal nonlinear Schrödinger equation with a non-Hermitian term is proposed, which essentially considers the long-range self-action. The "classical mechanics" of few quasiparticles is introduced for that purpose. Their trajectories determine the localization domain of solutions.

Keywords: semiclassical approximation, quasiparticles, open system, nonlocal nonlinearity.

Нелинейной уравнение Шредингера (НУШ) — широко используемая модель коллективных возбуждений в нелинейных средах. Для описания открытых систем в оператор НУШ вводятся неэрмитовые слагаемые [1]. Такие модели применяются для описания диссипативных эффектов в бозе-эйнштейновском конденсате (БЭК), а также для описания распространения оптических импульсов в нелинейных средах с источником, потерями и усилением. Нелокальная линейность при этом описывает дальнодействующее межчастичное взаимодействие в случае

Исследование выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01047, https://rscf.ru/project/23-71-01047/.

Кулагин Антон Евгеньевич, к.ф.-м.н., ТПУ (Томск, Россия), ИОА СО РАН (Томск, Россия); Anton Kulagin (Tomsk Polytechnic University; Institute of Atmospheric Optics SB RAS, Tomsk, Russia)

Шаповалов Александр Васильевич, д.ф.-м.н., профессор, ТГУ (Томск, Россия); Alexander Shapovalov (Tomsk State University, Tomsk, Russia)

БЭК, либо нелокальный эффект Керра в случае моделей в оптике. При этом построение точных аналитических решений такого модельного уравнения обычно является крайне сложной математической задачей, поэтому приходится прибегать к численным или асимптотическим методам. В данной работе мы предлагаем использовать идеи метода комплексного ростка Маслова [2] для построения таких асимптотических решений. Чтобы такой подход мог учитывать поведение ядра нелинейности на всем его носителе, а не только в окрестности некоторой центральной точки, вводятся так называется квазичастицы, "классические траектории" которых определяют область локализации, некоторым образом распределенную в пространстве [3,4].

Решается задача Коши для n-мерного уравнения следующего вида:

$$\begin{gathered}
\Big\{ - i\hbar\partial_t + H(\hat{z},t)[\Psi] - i\hbar\Lambda\breve{H}(\hat{z},t)[\Psi] \Big\}\Psi(\vec{x},t) = 0,\\
H(\hat{z},t)[\Psi] = V(\hat{z},t) + \varkappa \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\vec{y}\,\Psi^*(\vec{y},t)W(\hat{z},\hat{w},t)\Psi(\vec{y},t),\\
\breve{H}(\hat{z},t)[\Psi] = \breve{V}(\hat{z},t) + \varkappa \int\limits_{\mathbb{R}^n} d\vec{y}\,\Psi^*(\vec{y},t)\breve{W}(\hat{z},\hat{w},t)\Psi(\vec{y},t),\\
\Psi(\vec{x},t)\Big|_{t=0} = \psi(\vec{x}).
\end{gathered} \tag{1}$$

где $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{z} = (\hat{\vec{p}}_x, \vec{x})$, $\hat{w} = (\hat{\vec{p}}_y, \vec{y})$, $\hat{\vec{p}}_x = -i\hbar\nabla_x$, а V, $\breve{V}$, W и $\breve{W}$ — псевдодифференциальные операторы с гладкими символами.

Построенные асимптотические решения удовлетворяют свойству

$$\begin{gathered}
\lim_{\hbar\to 0}\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle(t,\hbar) = \sum_{s=1}^{K}\mu_s(t)A(Z_s(t),t,0),\\
\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle(t,\hbar) = \int_{\mathbb{R}^n}\Psi(\vec{x},t,\hbar)\hat{A}\Psi^*(\vec{x},t,\hbar)d\vec{x},
\end{gathered} \tag{1}$$

где $\hat{A} = A(\hat{z},t,\hbar)$ — псевдодифференциальный оператор. Функция $Z_s(t)$ определяет траекторию s-ой квазичастицы, а $\mu_s(t)$ — ее "массу". Число K имеет смысл количества квазичастиц.

Предлагаемый формализм проиллюстрирован на примере НУШ с периодическим потенциалом ловушки, диполь-дипольным взаимодействием и феноменологическим затуханием.

Литература

1.*Ashida Y., Gong Z., Ueda M.* Non-Hermitian physics // Advances in Physics, **69** (2020), 249-435.

2. *Маслов В.П.* Операторные методы. — М: Наука, 1973.

3.*Kulagin A.E., Shapovalov A.V.* A semiclassical approach to the nonlocal nonlinear Schrödinger equation with a non-Hermitian term // Mathematics, **12**:4 (2024), 580.

4. *Kulagin A.E., Shapovalov A.V.* Quasiparticle solutions for the nonlocal NLSE with an anti-Hermitian term in semiclassical approximation // arXiv:2408.08532 (2024).

О БИФУРКАЦИИ ЦИКЛОВ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ В СИСТЕМАХ С ОДНОРОДНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

М.Н. Кунгиров, mamur.qongirov@mail.ru

УДК 517.938

Обсуждается задача о бифуркации циклов на бесконечности в системах, содержащих однородные вектор-полиномы четного порядка. Получены достаточные условия такой бифуркации, изучаются свойства возникающих решений.

Ключевые слова: динамическая система, бифуркация Андронова-Хопфа, бифуркация на бесконечности, однородная нелинейность.

On bifurcations of cycles at infinity in systems with homogeneous non-linearities

Here the problem of bifurcations of cycles at infinity in systems having homogeneous vector-polynomials of even order is discussed. Sufficient conditions of occurence of such bifurcation are obtained, and properties of corresponding solutions are studied.

Keywords: dynamical system, Andronov-Hopf bifurcation, bifurcation at infinity, homogeneous non-linearity.

Рассматривается зависящее от параметра α нелинейное дифференциальное уравнение.

$$\frac{dy}{dt} = A(\alpha)y + \alpha a_{2q}(y)\,, \quad y \in R^N \quad (N \geqslant 2)\,, \tag{1}$$

в котором $A(\alpha)$ -– квадратная матрица, а функция $a_{2q}(y)$ является однородным вектор-полиномом четного порядка $2q$.

Пусть матрица $A(\alpha)$ при $\alpha = \alpha_0$ имеет простые собственные значения $\pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$. В этом случае α_0 будет точкой бифуркации Андронова–Хопфа системы (1): существуют $\alpha_n \to \alpha_0$ и $T_n \to T_0$ такие, что при $\alpha = \alpha_n$ система (1) имеет ненулевое T_n-периодическое решение $y = y_n(t)$ такое, что $\max\limits_t \|y_n(t)\| \to 0$ при $n \to \infty$. Здесь $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Наряду с бифуркацией Андронова–Хопфа в системе (1) возможен и другой сценарий бифуркации. А именно, говорят, что значение α_0 является точкой бифуркации системы (1) на бесконечности, если существуют $\alpha_n \to \alpha_0$ и $T_n \to T_0$ такие, что при $\alpha = \alpha_n$ система (1) имеет T_n-периодическое решение $y = y_n(t)$ такое, что $\min\limits_t \|y_n(t)\| \to \infty$ при $n \to \infty$.

Оба указанных сценария бифуркаций реализуются при некоторых дополнительных условиях относительно правой части системы (1). При

Кунгиров Мамур, УУНиТ (Уфа, Россия); Mamur Kungirov (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

этом для реализации классической бифуркации Андронова–Хопфа достаточно трансверсального перехода пары собственных значений матрицы $A(\alpha)$ через мнимую ось. Сценарий бифуркации на бесконечности требует также дополнительных условий относительно нелинейности $a_{2q}(y)$. В настоящем докладе обсуждаются такие условия.

Так как матрица $A_0 = A(\alpha_0)$ имеет простые собственные значения $\pm i\omega_0$, то найдутся ненулевые векторы $e, g, e^*, g^* \in R^N$ такие, что

$$A_0(e + ig) = i\omega_0(e + ig), \quad A_0^*(e^* + ig^*) = -i\omega_0(e^* + ig^*)\,;$$

здесь A_0^* — транспонированная матрица.

Положим

$$\gamma_1 = (A'e, e^*) + (A'g, g*), \quad \gamma_2 = (A', g*) + (A'g, e^*)\,;$$

здесь $A' = A(0)$ Известно [1], что если $\gamma_1 \neq 0$, то α_0 является точкой бифуркации Андронова–Хопфа уравнения (1).

Положим

$$f_3(t) = F_2(t) \int_0^t e^{(1-t)T_0A_0} a_{2q}(e(t))dt\,,$$

где $F_2(t) = T_0 a'_{2qx}(e(t), \alpha_0)e^{T_0A_0t}$; здесь $a'_{2qx}(e(t), \alpha_0)$ – матрица Якоби вектор-функции $a_{2q}(e(t), \alpha_0)$. Далее положим

$$b_3 = T_0 \int_0^1 e^{(1-t)T_0A_0} f_3(t)dt\,, \quad \alpha_2 = -\frac{\omega_0}{\pi\gamma_1}(b_3, e^*)\,.$$

Теорема 1. *Пусть $\gamma_1 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$. Тогда значение $\alpha = \alpha_0$ является точкой бифуркации системы (1) на бесконечности.*

Литература

1. *Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С., Имангулова Э.С.* . Главные асимптотики в задаче о бифуркации Андронова—Хопфа и их приложения// Диффер. уравн. — 2017. — 53, № 12. — С. 1627–164

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПАРИЗИ К МОДЕЛИ БЛЮМА-КАППЕЛЯ

А.Д. Ляхов, А.С. Овчинников, И.Г. Бострем, В.Е. Синицын
alexey.liakhov@urfu.ru, alexander.ovchinnikov@urfu.ru, Irina.Bostrem@urfu.ru, Vladimir.Sinitsyn@urfu.ru

УДК 538.955, 517.957

В настоящей работе получена система самосогласованных интегро-дифференциальных уравнений в рамках подхода Паризи применительно к модели Блюма-Каппеля. Данная система уравнений нацелена на описание физической проблемы образования спин-стекольной фазы при введении магнитных ионов Fe в дихалькогенид $TaS_2(Se_2)$, когда допируемые ионы железа могут переходить в низкоспиновое немагнитное состояние.

Ключевые слова: физика, спин-стекла, модель Блюма-Каппеля, подход Паризи.

Рассматривается немагнитный слоистый материал $TaS_2(Se_2)$, в который внедряются магнитные ионы Fe. Эти ионы при введении могут как заместить атом в узле, так и расположиться между слоями соединения. Соответственно ион займет низкоспиновое состояние или высокоспиновое из-за наличия локальных кристаллических полей.

Такую систему может описать модель Блюма-Каппеля, которая включает в себя парные взаимодействия спинов, Зеемановское слагаемое и локальное кристаллическое поле, управляющее спиновым состоянием

$$\hat{H} = -\sum_{(ij)} J_{ij} S_i S_j - \sum_i h_i S_i - \sum_i \Delta_i S_i^2. \tag{1}$$

Для описания спин-стекольной фазы применялся подход Паризи. В результате получена свободная энергия рассматриваемой модели и замкнутая система интегро-дифференциальных уравнений для всех входящих в нее переменных.

Ляхов Алексей Дмитриевич, ассистент, УрФУ имени Б.Н. Ельцина (Екатеринбург, Россия); Alexey Lyahov (Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia)

Овчинников Александр Сергеевич, д.ф.-м.н., профессор, УрФУ имени Б.Н. Ельцина (Екатеринбург, Россия); Alexander Ovchinnikov (Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia)

Бострем Ирина Геннадьевна, к.ф.-м.н., доцент, УрФУ имени Б.Н. Ельцина (Екатеринбург, Россия); Irina Bostrem (Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia)

Синицын Владимир Евгеньевич, к.ф.-м.н., доцент, УрФУ имени Б.Н. Ельцина (Екатеринбург, Россия); Vladimir Sinitsyn (Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia)

Приведем явные выражения. Свободная энергия

$$\beta f = \frac{\beta J_0}{2} m^2 + \frac{(\beta J^2)}{4}\mu^2 + \frac{(\beta J)^2}{2}\int_0^1 dxq^2(x)$$
$$- \frac{1}{2\pi\sqrt{\tilde{q}(0)F}}\iint dydz\, e^{-\dfrac{(y-h)^2}{2\tilde{q}(0)}} e^{-\dfrac{(z-\tilde{\mu})^2}{2F}} \varphi(0,y,z). \quad (2)$$

Уравнения для входящих функций имеют вид

$$\begin{cases} \dot{P} = \dfrac{\dot{\tilde{q}}}{2} P_{yy} - x\dot{\tilde{q}}(P\varphi_y)_y, \\ P(0,y,z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tilde{q}(0)F}} e^{-\dfrac{(y-h)^2}{2\tilde{q}(0)}} e^{-\dfrac{(z-\tilde{\mu})^2}{2F}}. \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = -\frac{1}{2}\dot{\tilde{q}}\left(x\varphi_y^2 + \varphi_{yy}\right), \\ \varphi(1,y,z) = ln(1 + 2e^z ch(y)). \end{cases} \quad (4)$$

Параметры порядка определяются выражениями

$$\begin{cases} m = \iint dydz\ P(0,y,z)\varphi_y(0,y,z), \\ \mu = \iint dydz\ P(0,y,z)\varphi_z(0,y,z), \\ q(x) = \iint dydz\ P(x,y,z)\varphi_y^2(x,y,z). \end{cases} \quad (5)$$

Где $\tilde{q} = \beta^2 J^2 q + \beta^2\sigma_h^2$, $F = \beta^2\sigma_\Delta^2$, $h = \beta h_0 + \beta J_0 m$, $\tilde{\mu} = \frac{\beta^2 J^2}{2}\mu + \beta\Delta_0 - \frac{\beta^2 J^2}{2} q(1)$. Величины J, J_0, h_0, Δ_0, σ_h, σ_Δ являются входными параметрами задачи, $\beta = \frac{1}{KT}$ - обратная температура.

Литература

1. *Ovchinnikov, A., Bostrem, I., Sinitsyn, V., Nosova, N., Baranov, N.* Influence of the type of intercalation on spin-glass formation in the Fe-doped $TaS_2(Se_2)$ polytype family // Phys. Rev. B, 109 (2024)

INTEGRABLE MOTION OF TWO INTERACTING CURVES AND RELATED SPIN SYSTEMS

Zh. Myrzakulova, Z. Zakariyeva, R. Myrzakulov
zhrmyrzakulova@gmail.com, zaruet.zakarieva@gmail.com, rmyrzakulov@gmail.com

УДК 517.951, 517.957

We investigate the integrable two-layer generalized Heisenberg ferromagnet equation and establish its connection to the differential geometry of curves. Through this relationship, we identify the geometric counterpart of the two-layer spin system, which corresponds to the two-component Korteweg-de Vries equation.

Keywords: integrable systems, Heisenberg ferromagnet equation, differential geometry, spin systems, coupled curve dynamics.

ИНТЕГРИРУЕМОЕ ДВИЖЕНИЕ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ КРИВЫХ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ СПИНОВЫЕ СИСТЕМЫ

Исследована интегрируемая двухслойная модель обобщенного ферромагнетика Гейзенберга (HFE) и установлена её связь с дифференциальной геометрией кривых. Через эту связь определен геометрический аналог двухслойной спиновой системы, который соответствует двухкомпонентному уравнению КдФ

Ключевые слова: интегрируемые системы, уравнение ферромагнетика Гейзенберга, дифференциальная геометрия, спиновые системы, динамика связанных кривых.

We explore a 2-layer extension of the Heisenberg ferromagnet equation, given by

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}_{xx} + u_1 \mathbf{A}_x + v_1 \mathbf{H}_1 \wedge \mathbf{A}, \quad (1)$$

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{B} \wedge \mathbf{B}_{xx} + u_2 \mathbf{B}_x + v_2 \mathbf{H}_2 \wedge \mathbf{B}, \quad (2)$$

where $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ and $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ are unit spin vectors associated with two interacting space curves.

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan. (Grant № AP14971227).

Zhaidary Myrzakulova, PhD, Senior Lecturer, L.N. Gumilyov ENU (Astana, Kazakhstan); Мырзакулова Жайдары (ЕНУ имени Л.Н Гумилева, Астана, Казахстан)

Zakariyeva Zaruyet, lecturer, U.M. Utemisov West Kazakhstan University (Oral, Kazakhstan); Закариева Зарует (Западно-Казахстанский университет имени М. Утемисова, Орал, Казахстан,)

Ratbay Myrzakulov, Dr. Sc. (Phys.-Math.), professor, L.N. Gumilyov ENU (Astana, Kazakhstan); Мырзакулов Ратбай (ЕНУ имени Л.Н Гумилева, Астана, Казахстан)

The motion of these curves is governed by the Frenet-Serret equations, which describe the relationship between the tangent (e_1), normal (e_2), and binormal (e_3) vectors

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

where κ is the curvature and τ is the torsion of the curve. For the interacting curves, represented by vectors $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$, we extend this framework with a coupled system of Frenet-Serret equations for each curve

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \tau_1 \\ 0 & -\tau_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_2 & 0 \\ -\kappa_2 & 0 & \tau_2 \\ 0 & -\tau_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Here, κ_1 and κ_2 are the curvatures, and τ_1 and τ_2 are the torsions of the two interacting curves associated with the vectors $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$.

The equivalent differential system derived from the 2-layer HFE corresponds to a set of coupled equations that describe the dynamics of the curvatures κ_1 and κ_2

$$\kappa_{1t} + \kappa_{1xxx} + 3[(\kappa_1 + \kappa_2)\kappa_1]_x = 0, \tag{5}$$

$$\kappa_{2t} + \kappa_{2xxx} + 3[(\kappa_1 + \kappa_2)\kappa_2]_x = 0. \tag{6}$$

These equations highlight the interaction between the curvature components of the two curves, offering a geometric interpretation of the underlying integrable system.

References

1. *Zakharov V.E., Takhtajan L.A.* Equivalence of the nonlinear Schr?dinger equation and the equation of a Heisenberg ferromagnet // Theor. Math. Phys., **38**: (1979), 17–23.

2. *Lakshmanan M.* On the geometrical interpretation of solitons // Phys. Lett. A., **64**: (1978), 354–356.

3. *Myrzakulova Zh., Nugmanova G., Yesmakhanova K., Serikbayev N., Myrzakulov R.* Integrable Tolkynay equations and related Yajima-Oikawa type equations // Ufa Math. J., **15**: (2023), 122-134. doi.org/10.13108/2023-15-1-122.

4. *Anco S.C., Myrzakulov R.* Integrable generalizations of Schr?dinger maps and Heisenberg spin models from Hamiltonian flows of curves and surfaces // J. Geom. Phys., **60**: (2010), 1576–1603.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ АНАЛОГОВ ВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПАРЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ $H^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}$ И $H^{\frac{5}{2}+2}$

В.А. Павленко, mail@pavlenko.school

УДК 517.925

Строится пара совместных решений аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых гамильтонианами $H^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)(k = 1, 2)$ гамильтоновой системы $H^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}$, и пара совместных решений аналогов временных уравнений Шредингера, определяемых гамильтонианами $H^{\frac{5}{2}+2}_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)(k = 1, 2)$ гамильтоновой системы $H^{\frac{5}{2}+2}$. Обе гамильтоновы системы приведены в статье Кавамуко [1]. Данные аналоги уравнений Шредингера представляют собой линейные эволюционные уравнения с временами s_1 и s_2, каждое из которых зависит от двух пространственных переменных.

Ключевые слова: Гамильтоновы системы, уравнения Пенлеве, временные уравнения Шредингера, метод изомонодромных деформаций.

Construction of solutions of analogues of the nonstationary Schrödinger equations corresponding to a pair of Hamiltonian systems $H^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}$ and $H^{\frac{5}{2}+2}$

A pair of simultaneous solutions of analogues nonstationary Schrödinger equations, defined by the Hamiltonians $H^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)(k = 1, 2)$ of the Hamiltonian system $H^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}$, and a pair of simultaneous solutions of analogues analogues nonstationary Schrödinger equations, defined by the Hamiltonians $H^{\frac{5}{2}+2}_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)(k = 1, 2)$ of the Hamiltonian system $H^{\frac{5}{2}+2}$ are built in this paper. Both Hamiltonian systems are given in Kawamuko's paper [1]. These analogues of the Schrödinger equations are linear evolutionary equations with times s_1 and s_2, each of which depends on two spatial variables.

Keywords: Hamiltonian systems, Painleve-type equations, nonstationary Schrödinger equations, isomonodromic deformation method.

Наряду с шестью классическими ОДУ Пенлеве в последние десятилетия все больший интерес вызывают нелинейные ОДУ более высокого порядка, которые также интегрируются методом ИДМ. На сегодня, в

Павленко Виктор Александрович, к.ф.-м.н., м.н.с., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Viktor Pavlenko (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science, Ufa, Russia)

частности, известен конечный список совместных пар гамильтоновых систем ОДУ

$$(q_j)'_{s_k} = (H_{s_k})'_{p_j}, \quad (p_j)'_{s_k} = -(H_{s_k})'_{p_j} \quad (k = 1,2) \quad (j = 1,2)$$

с гамильтонианами $H_{s_k}(s_1, s_2, q_1, q_2, p_1, p_2)$, каждое из которых есть условие совместности двух линейных систем ОДУ вида

$$V'_{s_k} = L_{s_k} V, \quad V'_\eta = AV,$$

где квадратные матрицы L_{s_k} и A одинаковой размерности и рациональны по переменной η. Этот список выписан в статье Кимуры, см. [2]. Позднее Кавамуко дополнил этот список, см. [1].

В настоящей работе будут построены решения уравнений вида

$$k\Psi'_{\tau_1} = H_1^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}(\tau_1, \tau_2, x_1, x_2, -k\frac{\partial}{\partial x_1}, -k\frac{\partial}{\partial x_2})\Psi,$$

$$k\Psi'_{\tau_2} = H_2^{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}(\tau_1, \tau_2, x_1, x_2, -k\frac{\partial}{\partial x_1}, -k\frac{\partial}{\partial x_2})\Psi,$$

$$k\Psi'_{\tau_1} = H_1^{\frac{5}{2}+2}(\tau_1, \tau_2, x_1, x_2, -k\frac{\partial}{\partial x_1}, -k\frac{\partial}{\partial x_2})\Psi,$$

$$k\Psi'_{\tau_2} = H_2^{\frac{5}{2}+2}(\tau_1, \tau_2, x_1, x_2, -k\frac{\partial}{\partial x_1}, -k\frac{\partial}{\partial x_2})\Psi,$$

Эти уравнения и являются аналогами временных уравнейний Шредингера. Автору удалось построить только для случая $k = 1$. Для случая $k = i\hbar$ не удалось. Если бы удалось, то это уже были не аналоги, а настоящие уравнения Шредингера.

Литература

1. *H. Kimura* The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure // Annali di Matematica pura et applicata IV, (1989), 25-74

2. *H. Kawamuko* On qualitative properties and asymptotic behavior of solutions to higher-order nonlinear differential equations // WSEAS Transact. on Math, (2009), 39-47.

ГЕОМЕТРИЯ КОНФОРМНО ПЛОСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕННО ТРАНССАСАКИЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

А.Р. Рустанов, С.В. Харитонова
aligadzhi@yandex.ru, hcb@yandex.ru

УДК 514.7

В работе получена полная классификация конформно плоских гармонических приближенно транссасакиевых многообразий. Доказано, что такое многообразие ненулевой характеристики является либо пространством постоянной отрицательной кривизны, либо образом произведения шестимерной сферы, снабженной приближенно Келеровой структурой, на вещественную прямую при каноническом концирκулярном преобразовании; а при нулевой характеристике – локально эквивалентно произведению n-мерного комплексного пространства на вещественную прямую.

Ключевые слова: почти контактное метрическое многообразие, гармоническое приближенно транссасакиево многообразие, тензор конформной кривизны.

Geometry of conformally flat harmonic nearly trans-Sasakian manifolds

In this work, a complete classification of conformally flat harmonic nearly trans-Sasakian manifolds is obtained. It is proved that such manifold of nonzero characteristic is either a space of constant negative curvature or is the image of the product of a six-dimensional sphere equipped with an nearly Kähler structure and a real line under a canonical concircular transformation. And a conformally flat harmonic nearly trans-Sasakian manifold of characteristic zero is locally equivalent to the product of an n-dimensional complex space and the real line.

Keywords: almost contact metric manifold, harmonic nearly trans-Sasakian manifold, conformal curvature tensor.

An almost contact metric (AC- for short) structure on a manifold M is a quadruplet $(\xi, \eta, \Phi, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ of tensor fields on M, where ξ is a vector field called characteristic, η is a differential 1-form, called contact, Φ is an endomorphism of the module $\mathfrak{X}(M)$ of smooth vector fields of M, called a structural endomorphism, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is a Riemannian metric. In this case:

1) $\eta(\xi) = 1$; 2) $\Phi(\xi) = 0$; 3) $\eta \circ \Phi = 0$; 4) $\Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta$;

Рустанов Алигаджи Рабаданович, к.ф.-м.н., НИУ МГСУ (Москва, Россия); Aligadzhi Rustanov (National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia)

Харитонова Светлана Владимировна, к.ф.-м.н., доцент, ОГУ (Оренбург, Россия); Svetlana Kharitonova (Orenburg State University, Orenburg, Russia)

5) $\langle \Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X, Y\rangle - \eta(X)\eta(Y)$; $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

A manifold admitting an AC-structure is called *an almost contact metric manifold* (AC-manifold for short).

An AC-structure is called *a nearly trans-Sasakian* (NTS- for short) if its linear extension belongs to the class $W_1 \oplus W_4$ of almost Hermitian structures in the Gray-Hervella classification [1].

An AC-manifold endowed with an NTS-structure is called an *NTS-manifold.*

An NTS-structure is called *eigen* if it is equipped with a closed contact form.

An eigen NTS-structure with a harmonic contact form is called *harmonic*, and the number $\chi = -\frac{1}{2n}\delta\eta$ is its *characteristic.*

For an eigen NTS-manifold the full group of structural equations take the form [1]:

1) $d\theta^a = -\theta^a_b \wedge \theta^b + C^{abc}\theta_b \wedge \theta_c + \chi\delta^a_b\theta^b \wedge \theta$;

2) $d\theta_a = \theta^b_a \wedge \theta_b + C_{abc}\theta^b \wedge \theta^c + \chi\delta^b_a\theta_b \wedge \theta$;

3) $d\theta = 0$;

4) $d\theta^a_b + \theta^a_c \wedge \theta^c_b = (A^{ad}_{bc} - 2C^{adh}C_{hbc})\theta^c \wedge \theta_d$,

where A^{ad}_{bc} is a class of functions on the space of the associated G-structure, serving as components of the so-called curvature tensor of the associated Q-algebra [2], or the structure tensor of the second kind, and

1)$A^{ad}_{[bc]} = 0$; 2)$A^{[bd]}_{ac} = 0$; 3)$\overline{(A^{ad}_{bc})} = A^{bc}_{ad}$; 4)$C^{[abc]} = C^{abc}$, $C_{[abc]} = C_{abc}$.

Besides,

1)$dC^{abc} + C^{dbc}\theta^a_d + C^{adc}\theta^b_d + C^{abd}\theta^c_d = C^{abcd}\theta_d + \chi C^{abc}\theta$;

2)$dC_{abc} - C_{dbc}\theta^d_a - C_{adc}\theta^d_b - C_{abd}\theta^d_c = C_{abcd}\theta^d + \chi C_{abc}\theta$; 3) $d\chi = 0$,

where C^{abcd}, C_{abcd} are suitable functions on the space of the associated G-structure, and $C^{a[bcd]} = 0$; $C_{a[bcd]} = 0$.

Recall [3] that the essential nonzero components of the Riemann-Christoffel tensor of a harmonic NTS-manifold on the space of an associated G-structure have the form:

1) $R^a_{\hat{b}cd} = 2C^{abh}C_{hcd} - 2\chi^2\delta^a_{[c}\delta^b_{d]}$; 2) $R^{\hat{a}}_{b\hat{c}\hat{d}} = 2C_{abh}C^{hcd} - 2\chi^2\delta^{[c}_a\delta^{d]}_b$;

3) $R^{\hat{a}}_{bcd} = -2C_{ab[cd]}$; 4) $R^a_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = -2C^{ab[cd]}$; 5) $R^a_{00b} = \chi^2\delta^a_b$;

6) $R^{\hat{a}}_{00\hat{b}} = \chi^2\delta^b_a$; 7) $R^0_{a0\hat{b}} = -\chi^2\delta^b_a$; 8) $R^0_{\hat{a}0b} = -\chi^2\delta^a_b$;

9) $R^a_{bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc} - C^{adh}C_{hbc} - \chi^2\delta^a_c\delta^d_b$.

Additionally, we have the relations obtained from them considering the symmetry properties. The rest of the components vanish.

The components of the Ricci tensor of a harmonic NTS-manifold on the space of an associated G-structure have the form [3]:

1) $S_{00} = -2n\chi^2$; 2) $S_{a\hat{b}} = A^{bc}_{ac} - 3C^{bcd}C_{dca} - 2n\chi^2\delta^b_a$;

3) $S_{\hat{a}b} = A^{ac}_{bc} - 3C^{acd}C_{dcb} - 2n\chi^2\delta^a_b$.

The rest of the components vanish.

The scalar curvature of a harmonic NTS-manifold is

$r = 2A^{ab}_{ab} - 6C^{abc}C_{cba} - 2n(n+1)\chi^2$.

Every Kenmotsu manifold is a harmonic NTS-manifold of characteristic $\chi = -1$, and every closely cosymplectic manifold is a harmonic NTS-manifold of characteristic $\chi = 0$.

Lemma. *Let M be a harmonic NTS-manifold. Then $C = C^{ab}_{ab}$ is non-negative. Moreover, $C = 0$ if and only if M is an AC-manifold obtained from a cosymplectic manifold by a canonical concircular transformation.*

The main invariant of the pseudo-Riemannian manifold (M^n, g) is the Weyl tensor W of conformal curvature [1]:

$W(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{n-2}\{\langle X,Z\rangle\, ricY - \langle Y,Z\rangle\, ricX + S(X,Z)Y - S(Y,Z)X\} + \frac{r}{(n-1)(n-2)}(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y)$,

or, in terms of its covariant components,

$W_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{n-2}(S_{il}g_{jk} + S_{jk}g_{il} - S_{ik}g_{jl} - S_{jl}g_{ik}) + \frac{r}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$.

Here $ricX$ is the Ricci operator.

The non-zero components of the Weyl tensor for a harmonic NTS-manifold on the space of the associated G-structure are the following:

1) $W_{0a0\hat{b}} = -W_{0a\hat{b}0} = W_{a0\hat{b}0} = -W_{a00\hat{b}} = W_{0\hat{b}0a} = -W_{0\hat{b}a0} = W_{\hat{b}0a0} = -W_{\hat{b}00a} = R_{0a0\hat{b}} - \frac{1}{2n-1}(S_{00}\delta^b_a - S_{a\hat{b}}) + \frac{r}{2n(2n-1)}\delta^b_a = -\chi^2\delta^b_a + \frac{1}{2n-1}\{A^{bc}_{ac} - 3C^{bcd}C_{dca}\} + \frac{r}{2n(2n-1)}\delta^b_a$;

2) $W_{abcd} = R_{abcd} = -2C_{ab[cd]}$;

3) $W_{ab\hat{c}\hat{d}} = W_{\hat{c}\hat{d}ab} = R_{ab\hat{c}\hat{d}} + \frac{1}{2n-1}(S_{a\hat{d}}g_{b\hat{c}} + S_{b\hat{c}}g_{a\hat{d}} - S_{a\hat{c}}g_{b\hat{d}} - S_{b\hat{d}}g_{a\hat{c}}) + \frac{r}{2n(2n-1)}(g_{a\hat{c}}g_{b\hat{d}} - g_{a\hat{d}}g_{b\hat{c}}) = 2C_{abh}C^{hcd} - 2\chi^2\delta^{[c}_a\delta^{d]}_b + \frac{1}{2n-1}\{(A^{dh}_{ah} - 3C^{dhg}C_{gha} - 2n\chi^2\delta^d_a)\delta^c_b + (A^{ch}_{bh} - 3C^{chg}C_{ghb} - 2n\chi^2\delta^c_b)\delta^d_a - (A^{ch}_{ah} - 3C^{chg}C_{gha} - 2n\chi^2\delta^c_a)\delta^d_b - (A^{dh}_{bh} - 3C^{dhg}C_{ghb} - 2n\chi^2\delta^d_b)\delta^c_a\} + \frac{r}{2n(2n-1)}(\delta^c_a\delta^d_b - \delta^d_a\delta^c_b)$;

4) $W_{a\hat{b}c\hat{d}} = -W_{a\hat{b}\hat{d}c} = -W_{\hat{b}ac\hat{d}} = W_{\hat{b}a\hat{d}c} = R_{a\hat{b}c\hat{d}} + \frac{1}{2n-1}(S_{a\hat{d}}g_{\hat{b}c} + S_{\hat{b}c}g_{a\hat{d}}) - \frac{r}{2n(2n-1)}g_{a\hat{d}}g_{\hat{b}c} = -A^{bd}_{ac} + C^{bdh}C_{hac} + \chi^2\delta^b_c\delta^d_a + \frac{1}{2n-1}\{(A^{dh}_{ah} - 3C^{dhg}C_{gha} - 2n\chi^2\delta^d_a)\delta^b_c + (A^{bh}_{ch} - 3C^{bhg}C_{ghc} - 2n\chi^2\delta^b_c)\delta^d_a\} - \frac{r}{2n(2n-1)}\delta^d_a\delta^b_c$;

5) $W_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = R_{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} = -2C^{ab[cd]}$.

The meaning of vanishing the Weyl tensor W of a pseudo-Riemannian manifold of dimension over three is well known: this is equivalent to the conformal plane of the manifold [4]. Recall that a pseudo-Riemannian manifold (M, g) is called conformally flat if the metric g in some neighborhood of each point $m \in M$ admits a conformal transformation into a flat metric. Every two-dimensional Riemannian manifold is conformally flat [5].

Theorem. *A conformally flat harmonic NTS-manifold of nonzero characteristic is either a space of constant negative curvature or is the image of the manifold $S^6 \times \boldsymbol{R}$ under the canonical concircular transformation. A conformally flat harmonic NTS-manifold of characteristic zero is locally equivalent to the manifold $\boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{R}$.*

Литература

1. *Rustanov A.R.* Geometry of harmonic nearly

trans-Sasakian manifolds // Axioms, **12**:8 (2023), 744 https://doi.org/10.3390/axioms12080744.

2. *Kirichenko V.F., Rustanov A.R.* Differential geometry of quasi-Sasakian manifolds // Mathematical collection, **193**:8 (2002), 70-100.

3. *Rustanov A.R., Kharitonova S.V.* Nearly trans-Sasakian manifolds of constant holomorphic sectional curvature // Journal of Geometry and Physics, **199**, (2024), https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2024.105144.

4. *Rashevsky P.K.* Riemannian geometry and tensor analysis. — Moscow: Nauka, 1976.

5. *Besse A*. Einstein's manifolds. — Moscow: Mir, 1990.

ОБ ИНТЕГРИРУЕМЫХ РЕДУКЦИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ДВУМЕРИЗОВАННОЙ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

А.У. Сакиева
alfya.sakieva@yandex.ru

УДК 517.518

Предлагается алгоритм построения полных наборов характеристических интегралов систем уравнений гиперболического типа с использованием пар Лакса. Эффективность алгоритма проиллюстрирована на нескольких примерах.

Ключевые слова: интегрируемость по Дарбу, производящая функция интегралов, пары Лакса, уравнения типа Лиувилля, цепочка Вольтерры

On integrable reductions of two-dimensional Toda-type lattices

An algorithm for constructing complete sets of characteristic integrals of systems of hyperbolic type equations using Lax pairs is proposed. The effectiveness of the method is illustrated by several examples.

Keywords: Integrability in sense of Darboux, Generating function of integrals, Lax pairs, Liouville type equations, Volterra chain.

Дифференциально-разностные уравнения вида:

$$u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y}). \tag{1}$$

активно изучаются в течение последних двух веков, начиная с работ П.С.Лапласа. Задача о полном описании всех интегрируемых уравнений вида (1) к настоящему времени является открытой. В работах [1]-[3] был найден полный с точностью до точечных замен переменных список интегрируемых цепочек, когда правая часть уравнения является квазилинейной по производным, то есть имеет вид:

$$u_{n,xy} = A_1 u_{n,x} u_{n,y} + A_2 u_{n,x} + A_3 u_{n,y} + A_4, \tag{2}$$

где коэффициенты $A_i = A_i(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}), i = 1, 2, 3, 4$ являются гладкими функциями динамических переменных. Приведем полученный в этих работах список:

1) $u_{n,xy} = e^{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}$,
2) $u_{n,xy} = e^{u_{n+1}} - 2e^{u_n} + e^{u_{n-1}}$,
3) $u_{n,xy} = e^{u_{n+1} - u_n} - e^{u_n - u_{n-1}}$,

Сакиева Альфия Ураловна, к.ф.-м.н., н.с., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Alfya Sakieva (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of RAS, Ufa, Russia)

4) $u_{n,xy} = (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})\, u_{n,x}$,

5) $u_{n,xy} = \left(e^{u_{n+1}-u_n} - e^{u_n - u_{n-1}}\right) u_{n,x}$,

6) $u_{n,xy} = \alpha_n u_{n,x} u_{n,y}, \quad \alpha_n = \frac{1}{u_n - u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n+1} - u_n}$

7) $u_{n,xy} = \alpha_n(u_{n,x} + u_n^2 - 1)(u_{n,y} + u_n^2 - 1) - 2u_n(u_{n,x} + u_{n,y} + u_n^2 - 1)$.

Для идентификации и классификации интегрируемых по Дарбу систем уравнений используется алгебраический критерий, основанный на понятии характеристической алгебры Ли. Характеристические алгебры представляют собой конструктивный, но трудоемкий метод построения полных наборов интегралов. Цель нстоящей работы состоит в том, чтобы разработать эффективный алгоритм для построения производящей функции характеристических интегралов для систем гиперболических уравнений, полученных из цепочек приведенного выше списка путем наложения граничных условий обрыва, сохраняющих интегрируемость. Алгоритм основан на использовании пары Лакса. Отметим, что для цепочки 3) рассматриваемая задача о построении интегралов была решена в работе [4]. В работе [5] найдены полные наборы интегралов для уравнений 6) и 7) представленного выше списка, а также для цепочки Вольтерры

$$a_{n,y} = a_n\left(b_n - b_{n+1}\right), b_{n,x}\left(a_{n-1} - a_n\right). \tag{3}$$

Литература

1. *И.Т.Хабибуллин, М.Н.Кузнецова* О классификационном алгоритме интегрируемых двумеризованных цепочек на основе алгебр Ли-Райнхарта // ТМФ, **203**:1 (2020), 161-173

2. *М.Н.Попцова, И.Т.Хабибуллин* Алгебраические свойства квазилинейных двумеризованных цепочек, связанные с интегрируемостью // Уфимск. матем. журнал **10**:3 (2018), 89-109

3. *M.N.Kuznetsova* Classification of a subclass of quasilinear two-dimensional lattices by mean of characteristic algebras.// Ufa Math.J. **11**:3, 2019, 109-131.

4. *S.V.Smirnov* Darboux integrability of discrete two-dimensional Toda lattices //Theoret. and Math. Phys.**182(2)**, 2015, 189-210.

5. *I.T.Habibullin, A.U.Sakieva* On integrable reductions of two-dimensional Toda-type lattices //Partial Differential Equations in Applied Mathematics**V.11**, 2024, 100854.

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО ДАРБУ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

С.Я. Старцев
startsev@anrb.ru

УДК 517.957

Рассматривается свойство, которое имеется у некоторых из функций от x, y, $u(x,y)$ и конечного числа производных $\partial^i u/\partial x^i$. Интегралы минимального порядка для интегрируемых по Дарбу уравнений $u_{xy} = F(x,y,u,u_x,u_y)$ обладают указанным свойством. Доказано, что если функция g обладает этим свойством и существует уравнение, для которого g является интегралом, то это уравнение интегрируемо по Дарбу (т.е. допускает интегралы и по другой характеристике). Поэтому если g является интегралом минимального порядка для интегрируемого по Дарбу уравнения, то любое уравнение, допускающее интеграл g, также интегрируемо по Дарбу.

Ключевые слова: нелинейные гиперболические уравнения в частных производных, интегрируемость по Дарбу.

On integrals of Darboux integrable partial differential equations

We consider an property defined for functions on x, y, $u(x,y)$ and a finite number of the derivatives $\partial^i u/\partial x^i$. Integrals of the smallest orders for Darboux integrable partial differential equations $u_{xy} = F(x,y,u,u_x,u_y)$ possess the above property. We prove the following proposition: if a function g has the above property and there exists an equation for which g is an integral, then this equation is Darboux integrable (i.e. admits integrals in another characteristic too). In particular, if g is an integral of the smallest order for a Darboux integrable equation, then any equation admitting the integral g is also Darboux integrable.

Keywords: nonlinear hyperbolic partial differential equations, Darboux integrability.

Обозначим через D_x и D_y полные производные по x и y соответственно, а через $\mathfrak{A}$ – множество всех функций, зависящих от x, y, $u(x,y)$ и конечного числа производных $u_i := \partial^i u/\partial x^i$. Настоящая работа посвящена функциям $g \in \mathfrak{A}$, для которых существует оператор $S = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j D_x^j$, $\alpha_j \in \mathfrak{A}$, $\alpha_r \neq 0$, такой его композиция $g_* \circ S$ с производной Фреше

$$g_* = \frac{\partial g}{\partial u} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial g}{\partial u_i} D_x^i$$

Старцев Сергей Яковлевич, к.ф.-м.н., ИМ с ВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Sergey Startsev (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, Russia)

функции g может быть выражена через x, g и ее полные производные $D_x^i(g)$ *для произвольной функции* $u(x,y)$. Заметим, что это свойство является свойством самой функции g и никак не используют какое-либо дифференциальное уравнение на функцию u.

Как показано в [1], интегралы наименьших порядков для интегрируемых по Дарбу уравнений в частных производных $u_{xy} = F(x,y,u,u_x,u_y)$ обладают указанным выше свойством. Основным результатом настоящей работы является почти обратное утверждение: если функция g обладает указанным выше свойством и существует уравнение, для которого g является интегралом (т. е. $D_y(g) = 0$ на решениях уравнения), то это уравнение допускает интегралы по другой характеристике тоже и, следовательно, является интегрируемым по Дарбу. В частности, если g является интегралом наименьшего порядка для интегрируемого по Дарбу уравнения, то любое уравнение, допускающее тот же интеграл g, также интегрируемо по Дарбу.

Эти факты можно использовать для проверки уже известных списков интегрируемых по Дарбу уравнений на полноту и для нахождения новых интегрируемых по Дарбу уравнений. Также нельзя исключать, что задача классификации интегрируемых по Дарбу уравнений может быть сведена к классификации некоторого специального подкласса функций, обладающих вышеуказанным свойством.

Вышеизложенное более подробно рассмотрено в [2].

Литература

1. *Жибер А.В., Соколов В.В.* Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа // УМН, **56**:1 (2001), 63-106

2. *Startsev S.Ya.* Darboux integrability of hyperbolic partial differential equations: is it a property of integrals rather than equations? // Submitted to Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical

БИФУРКАЦИИ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ С ЗАТУХАЮЩИМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

О.А. Султанов
oasultanov@gmail.com

УДК 517.925

Исследуется влияние затухающих стохастических возмущений с осциллирующими коэффициентами на гамильтоновы системы на плоскости. Описываются различные долговременные асимптотические режимы в возмущенных уравнениях и условия их стохастической устойчивости.

Ключевые слова: асимптотически автономная система, стохастическое возмущение, устойчивость, функция Ляпунова, фазовый захват, фазовый дрейф.

Bifurcations in Hamiltonian systems with decaying stochastic perturbations

The influence of damped stochastic perturbations with oscillating coefficients on Hamiltonian systems in the plane is investigated. Various long-term asymptotic regimes in the perturbed equations and the conditions for their stochastic stability are described.

Keywords: asymptotically autonomous system, stochastic perturbation, stability, Lyapunov function, phase-locking, phase-drifting.

Рассматривается класс асимптотически автономных систем дифференциальных уравнений на плоскости с осциллирующими коэффициентами. Предполагается, что предельная система является гамильтоновой с устойчивым равновесием. Обсуждается влияние мультипликативных стохастических возмущений типа белый шум на устойчивость системы при условии, что интенсивность возмущений затухает со временем, а частота удовлетворяет резонансному условию. Описываются возможные асимптотические режимы для возмущённых траекторий и их зависимость от структуры и параметров возмущений. Показывается, что условия устойчивости зависят как от реализуемого режима, так и от скорости затухания возмущений. В частности, доказывается возможность устойчивого фазового захвата в колебательных системах за счёт шума. Предлагаемый анализ основан на комбинации метода усреднения и построения стохастических функций Ляпунова.

Литература

1. *Sultanov O.A.* Bifurcations in asymptotically autonomous Hamiltonian systems subject to multiplicative noise // Internat. J. Bifur. Chaos, **32**:11 (2022), 2250164

Султанов Оскар Анварович, к.ф.-м.н., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Oskar Sultanov (Institute of Mathematics UFRC RAS, Ufa, Russia)

2. *Sultanov O.A.* Long-term behaviour of asymptotically autonomous Hamiltonian systems with multiplicative noise // SIAM J. Appl. Dynam. Syst., **22**:3 (2023), 1818–1851

3. *Sultanov O.A.* Stability of asymptotically Hamiltonian systems with damped oscillatory and stochastic perturbations // Commun. Pure Appl. Anal., **23**:4 (2024), 432–462

ОБ ОБОБЩЕННОМ УРАВНЕНИИ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА С ШУМОМ В ДИСПЕРСИОННОМ ЧЛЕНЕ

Д.А Сучкова
dil9ara@rambler.ru

УДК 519.21, 517.957, 517.955.2

Разработан аналитический метод решения обобщенного стохастического дифференциального уравнения Кортевега – де Фриза (GKdV) с шумом в дисперсии, который сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения и линейного уравнения Кортевега – де Фриза. На основе разработанного метода проведено компьютерное моделирование процесса.

Ключевые слова: обобщенное уравнение Кортевега – де Фриза (GKdV), стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ), уравнение длинной волны, обобщенное стохастическое уравнение КдФ с шумом в дисперсии, дисперсия волн

On the generalized Korteweg –de Vries equation with noise in the dispersion term

An analytical method for solving the generalized stochastic Korteweg – de Vries (GKdV) differential equation with noise in the dispersion is developed, which reduces to solving nonlinear partial differential equation and linear Korteweg – de Vries equation. On the basis of the developed method the computer simulation of the process was carried out.

Keywords: generalized Korteweg – de Vries (GKdV) equation, stochastic differential equation (SDE), long wave equation, generalized stochastic equation KdV with noise in the dispersion, dispersion of waves

Введём обобщенное уравнение Кортевега – де Фриза

$$u_t + (f(u))_x + [1 + V'(t)]u_{xxx} = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{1}$$

$(x,t) \in R \times [0,T]$, с шумом, который воздействует на дисперсионный член уравнения, определяющий случайную природу рассеивания волн. Под *шумом* $V(t)$, $V(0) = 0$ мы понимаем либо непрерывную функцию, либо произвольный случайный процесс с непрерывными реализациями. Нас будет интересовать задача Коши для стохатического GKdV с коэффициентами, зависящими от времени.

Шаг 1. Так как в уравнении (1) производная $V(t)$ может не существовать, то с целью придать уравнению математический строгий вид, проведем следующие рассуждения. Решение уравнения (1) будем искать в

Сучкова Дилара Айратовна, аспирант по направлению подготовки "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ УУНиТ (Уфа, Россия); Dilara Suchkova (Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia)

виде $u(x,t) = u(x,t,V(t))$, поэтому уравнение следует переписать следующим образом:

$$d(u)_t + [(f(u))_x + u_{xxx}]dt + u_{xxx} * dV(t) = 0, \quad u(x,0,V(0)) = u_0(x),$$

которое с учетом формулы для дифференциала с симметричным интегралом [1] $(u)_t dt = u_t dt + u_v * dV(t)$ примет вид

$$[u_t + (f(u))_x + u_{xxx}]dt + [u_v + u_{xxx}] * dV(t) = 0. \qquad (2)$$

Пусть функция (траектория случайного процесса) $V(t)$ нигде не дифференцируема. Тогда в силу леммы о равенстве двух интегралов [1] уравнение (2) равносильно двум соотношениям:

$$u_t(x,t,v)|_{v=V(t)} + f(u(x,t,V(t)))_x + u_{xxx}(x,t,V(t)) = 0, \qquad (3)$$

$$u_v(x,t,v)|_{v=V(t)} + u_{xxx}(x,t,V(t)) = 0. \qquad (4)$$

Вычитая из уравнения (3) уравнение (4), получим следующие соотношения:

$$u_t - u_v + (f(u))_x = 0, \qquad (5)$$

$$u_v + u_{xxx} = 0, \qquad (6)$$

От (5) и (6) перейдем к двум детерминированным уравнениям на функцию $u(t,x,v)$, положив $v = V(t)$ в (5) и (6).

Шаг 2. Теперь мы будем рассматривать только детерминированные варианты уравнений (5) и (6). Нам необходимо убедиться, что найдется функция $u(t,x,V(t))$, которая является решением одновременно двух уравнений.

Пусть $g(x,t)$ есть произвольное решение уравнения КдФ $g_t + gg_x + g_{xxx} = 0$. Известно, что решение задачи Коши $u^*(x,t,0) = g(x,t)$ для линеаризованного уравнения КдФ (6) выражается через функции Эйри [2], воспользовавшись этим фактом, запишем решение уравнения (6)

$$u^*(x,t,V(t)) = \pi^{-1/2}(3V(t))^{-1/3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ai\left(\frac{x-y}{(3V(t))^{1/3}}\right) g(y,t)\,dy,$$

где $Ai(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos\left(\frac{y^3}{3} + yz\right) dy$ есть функция Эйри.

Шаг 3. Покажем, что функция

$$u(x,t,v) = \pi^{-1/2}(3v)^{-1/3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ai\left(\frac{x-y}{(3v)^{1/3}}\right) g(y,t)\,dy, \qquad (7)$$

удовлетворяет уравнению (5). Заметим, что ввиду (7)

$$u_t(x,t,v) = \pi^{-1/2}(3v)^{-1/3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ai\left(\frac{x-y}{(3v)^{1/3}}\right) g_t(y,t)\,dy =$$

$$= \pi^{-1/2}(3v)^{-1/3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ai\left(\frac{x-y}{(3v)^{1/3}}\right)\left[-(f(g(y,t)))_y - g_{yyy}(y,t)\right] dy.$$

В силу свойств преобразования Эйри правая часть равенства запишется в виде $-(f(u(x,t,v)))_x - u_{xxx}(x,t,v)$. С учетом (6), получим

$$u_t(x,t,v) + f(u(x,t,v))_x - u_v(x,t,v) = 0.$$

Значит решение КдФ с шумом дается формулой (7).

Теорема. *Пусть $V(t)$, $t \in [0,T]$, $V(0) = 0$, – непрерывная функция, а $g(x,t)$ любое решение уравнения КдФ $g_t + gg_x + g_{xxx} = 0$. Тогда соотношение (7) при $v = V(t)$ определяет решение стохастического уравнения КдФ (2).*

Литература

1. *Насыров Ф.С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 212 с.

2. *Olivier Vallee, Manuel Soares* Airy functions and applications to physics. — World Scientific Publishing Co. Pte.Ltd, 2004.

3. *Сучкова Д.А.* Уравнение Кортевега – де Фриза с шумом в дисперсионном члене. Тезисы докладов, представленных на Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа – 2023», Том 1, стр. 235-237, 2023.

4. *Сучкова Д.А.* Стохастические уравнения Кортевега–де Фриза с временным шумом. Тезисы докладов, представленных на Восьмой международной конференции по стохастическим методам // Теория вероятностей и ее применения, Том 68, выпуск 4, стр. 869, 2023.

РЕДУКЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛАПЛАСА И УРАВНЕНИЯ ТИПА СИНУС-ГОРДОНА

К.И. Файзулина,А.Р. Хакимова
cherkira@mail.ru, aigul.khakimova@mail.ru

УДК 517.9

В докладе обсуждаются нелинейные интегрируемые гиперболические уравнения солитонного типа вида:

$$u_{xy} = F(u, u_x, u_y). \tag{1}$$

Из результатов работы [1] следует, что с точностью до точечных преобразований переменных существует ровно пять уравнений такого типа:

$$u_{xy} = \sin(u); \tag{2}$$

$$u_{xy} = f(u)\sqrt{1+u_x^2}, f'' = \gamma f, \gamma = const; \tag{3}$$

$$u_{xy} = \sqrt{u_x}\sqrt{u_y^2+1}; \tag{4}$$

$$u_{xy} = \sqrt{u_x^2+1}\sqrt{u_y^2+1}; \tag{5}$$

$$u_{xy} = \sqrt{\wp(u)-\mu}\sqrt{u_x^2+1}\sqrt{u_y^2+q}. \tag{6}$$

Мы предполагаем, что для любого интегрируемого уравнения вида (1), не имеющего нетривиальных характеристических интегралов, последовательность преобразований Лапласа, связанная с его линеаризацией

$$v_{xy} + av_x + bv_y + cv = 0, \tag{7}$$

где

$$a = -\frac{\partial F}{\partial u_x}, \quad b = -\frac{\partial F}{\partial u_y}, \quad c = -\frac{\partial F}{\partial u}, \tag{8}$$

допускает редукцию вида

$$v_{[m+1]} = \alpha_{[-k]}v_{[-k]} + \alpha_{[-k+1]}v_{[-k+1]} + \cdots + \alpha_{[m]}v_{[m]}, \tag{9}$$

$$v_{[-k-1]} = \beta_{[-k]}v_{[-k]} + \beta_{[-k+1]}v_{[-k+1]} + \cdots + \beta_{[m]}v_{[m]}, \tag{10}$$

где m, k – целые числа, такие, что $m \geqslant 1$, $k \geqslant 1$; коэффициенты α_j, β_j зависят от динамических переменных u, u_x, $u_y, \ldots$. Кроме того, требуется, чтобы $\alpha_{[-k]}$ и $\beta_{[m]}$ не обращались в нуль одновременно. Тогда система уравнений (9) и (10) образует пару Лакса для уравнения (1),

Файзулина Кира Игоревна; Kira Faizulina (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)

Хакимова Айгуль Ринатовна; Aigul Khakimova (Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)

которая отличается от обычного представления пары Лакса. Из которого с помощью элементарных преобразований можно вывести как операторы рекурсии в характеристических направлениях, так и обычную пару Лакса.

В статье [2] эта гипотеза была доказана для уравнений (2) и (3), в [3] – для уравнений (4) и (5), для последнего уравнения (6) это утверждение было доказано в [4] и для всех уравнений были найдены пары Лакса и операторы рекурсии в обоих характеристических направлениях x и y.

Литература

1. *А. Г. Мешков, В. В. Соколов.* Гиперболические уравнения с симметриями третьего порядка // ТМФ, **166**:1 (2011), 51-67

2. *I. T. Habibullin, A. R. Khakimova, M. N. Poptsova* On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations — J. Phys. A: Math. Theor., **49**:3 (2016)

3. *Faizulina K. I., Habibullin I. T. and Khakimova A. R.* Laplace transformations and sine-Gordon type integrable PDE — J. Phys. A: Math. Theor., **57**:1 (2024)

4. *Faizulina K. I., Khakimova A. R.* Reduction of the Laplace sequence and sine-Gordon type equations — arXiv:2406.19837

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПРИ ПОМОЩИ ОДЕВАЮЩИХ ЦЕПОЧЕК

И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова
habibullinismagil@gmail.com, aigul.khakimova@mail.ru

УДК 517.518

В докладе обсуждаются сдвоенные системы типа уравнения Дэви-Стюартсона, являющиеся пространственно-двумерными обобщениями уравнений класса нелинейного уравнения Шредингера. Сдвоенные системы представляют собой симметрии нелинейных дифференциально-разностных уравнений, называемых цепочками. Предлагается метод построения явных частных решений сдвоенных систем посредством конечно-полевых редукций двумеризованных цепочек.

Ключевые слова: многомерные интегрируемые уравнения, пары Лакса, высшие симметрии, солитонные системы, одевающие цепочки, характеристические интегралы.

On the construction of solutions of nonlinear integrable partial differential equations using dressing chains

The paper discusses coupled systems of the Davey-Stewartson type, which are spatially two-dimensional generalizations of equations of the class of nonlinear Schrödinger equations. Coupled systems are symmetries of nonlinear differential-difference equations called chains. A method is proposed for constructing explicit particular solutions of coupled systems by means of finite-field reductions of two-dimensional chains.

Keywords: multidimensional integrable equations, Lax pairs, higher symmetries, soliton systems, dressing chains, characteristic integrals.

В работе А.Б.Шабата и Р.И.Ямилова [1] была обнаружена тесная связь между двумеризованными цепочками следующих двух типов

$$u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y}) \tag{1}$$

и

$$u_{n,y} = p(u_n)(v_{n+1} - v_n) \quad v_{n,x} = q(v_n)(u_n - u_{n-1}) \tag{2}$$

Хабибуллин Исмагил Талгатович, д.ф.-м.н., профессор, г.н.с., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Ismagil Habibullin (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of RAS, Ufa, Russia)

Хакимова Айгуль Ринатовна, к.ф.-м.н., с.н.с., ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Aigul Khakimova (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of RAS, Ufa, Russia)

и сдвоенными системами в частных производных. При этом сдвоенные системы определяются через высшие симметрии для (1) или (2), а сами дискретные модели являются итерациями преобразования Беклунда специального вида для сдвоенной системы. Они также называются одевающими цепочками для сдвоенных систем.

Для хорошо известной цепочки Вольтерры

$$u_{ny} = u_n(v_n - v_{n+1}), \qquad v_{nx} = v_n(u_{n-1} - u_n), \tag{3}$$

сдвоенная система имеет следующий вид

$$\begin{aligned} u_{n,t} &= u_{xx} + \left(u^2 + 2uV\right)_x, \quad V_y = v_x \\ v_{n,t} &= -v_{xx} + \left(V^2\right)_y + (2uv)_x. \end{aligned}$$

Пользуясь интегрируемыми по Дарбу конечно-полевыми редукциями одевающей цепочки можно получить явные частные решения соответствующей сдвоенной системы. Пример такого решения приводится в теореме ниже.

Теорема 1. *Предположим, что функция $S(x,t)$ является произвольным решением уравнения теплопроводности $S_t = S_{xx}$ пусть при этом $F(y)$ произвольная гладкая функция. Тогда функции*

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= -\frac{\partial}{\partial x}\ln(S(x,t) + F(y)), \\ v(x,y,t) &= \frac{\partial}{\partial y}\ln(S(x,t) + F(y)), \\ V(x,y,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\ln(S(x,t) + F(y)) \end{aligned}$$

задают решение сдвоенной системы, предъявленной выше.

Литература

1. *Shabat A.B., Yamilov R.I.* To a transformation theory of two-dimensional integrable systems // Phys. Lett., A, **227**:1-2 (1997), 15-23.

НЕЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ БАЛКИ

А.Г. Хакимов
hakimov@anrb.ru

УДК 539.311

Представлена аналитическая геометрически нелинейная модель гибкого однослойного графена или гибкой балки с учетом действия среднего давления, для которой сформулирована в безразмерном виде краевая задача и получены точные аналитические общие решения в эллиптических функциях, описывающие формы деформирования гибкой балки.

Ключевые слова: однослойный графен, цилиндрический изгиб, форма, усилия, изгибающий момент.

Nonlinear bending of a beam

An analytical geometrically nonlinear model of flexible single-layer graphene or flexible beam is presented, for which a boundary value problem is formulated in dimensionless form and exact analytical general solutions are obtained in elliptic functions describing the deformation forms of the flexible beam.

Keywords: single-layer graphene, cylindrical bending, shape, forces, bending moment.

Как отмечено в работе М.А. Ильгамова, начиная с обобщающих работ по теории тонких пластин и оболочек Рэлея (Стретт Дж.В.), Лява (Ляв А.) поперечная распределенная сила принимается равной $q = p_1 - p_2$, где p_1 и p_2 – избыточные давления на поверхности, перпендикулярные плоскости изгиба. Эти давления p_1 и p_2 положительны, если общее давление превышает атмосферное давление p_0, отрицательны при меньшем значении общего давления, чем p_0. Учет разности площадей выпуклой и вогнутой поверхностей, появляющейся при изгибе стержня и цилиндрическом изгибе пластины, приводит к выражению, которое приводится в [1], откуда следует, что распределенная поперечная сила, возникающая при изгибе в результате образования разности площадей выпуклой и вогнутой частей поверхности направлена в сторону вогнутости.

В статье [2] исследуются задачи статической и динамической устойчивости тонкого гибкого стержня под действием осевого сжатия с точным учетом геометрической нелинейности и приводится обзор работ по нелинейным задачам, теории и расчету гибких упругих стержней.

Работа проведена в порядке выполнения государственного задания (№0246-2023-0015).

Хакимов Аким Гайфуллинович, к.ф.-м.н., доцент, ИМех УФИЦ РАН (Уфа, Россия); Akim Khakimov (Ufa Mavlyutov Institute of Mechanics Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia)

Используя соотношения

$$u = \frac{a}{R},\ \xi = \frac{s}{a},\ x = \frac{x^*}{a},\ y = \frac{y^*}{a},\ t = \frac{Ta^2}{D}, q = \frac{Qa^2}{D},\ m = \frac{Ma}{D},$$
$$\alpha = a^2\left(\frac{1}{2R_0^2} + \frac{T_0}{D}\right), \beta = \frac{Pha^2}{D},$$

получено дифференциальное уравнение цилиндрического изгиба однослойного графена под действием среднего давления

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{u^3}{2} - (\alpha+\beta)\,u = 0,$$

решение которого имеет вид

$$u\left(\xi\right) = m_0\eta\mathrm{sn}\left[\frac{1}{2}\mathrm{I}m_0\xi + \mathrm{arcsn}\left(\frac{1}{\eta}, \eta\right), \eta\right], \eta = \frac{1}{m_0}\sqrt{4\left(\alpha+\beta\right) - m_0^2.}$$

Здесь E, ν, h - модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина однослойного графена, D - цилиндрическая изгибная жесткость , R_N - радиус кривизны в недеформированном начальном состоянии, T, Q, M - усилие натяжения, перерезывающая сила и изгибающий момент, R, s - радиус кривизны в деформированном состоянии и длина дуги поперечного сечения, x^*, y^* - размерные координаты, a - характерный размер, P - давление в окружающей среде, m_0 - безразмерный изгибающий момент в точке O.

Влияние среднего давления на форму поперечного сечения и распределение усилий и изгибающего момента увеличивается с увеличением толщины гибкой балки.

Литература

1. *Ильгамов М.А.* Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и плёнки // ДАН, **476**:4 (2017), 402-405. DOI: 10.7868/S086956521728009X

2. *Аннин Б.Д., Власов А.Ю., Захаров Ю.В., Охоткин К.Г.* Исследование статической и динамической устойчивости гибких стержней в геометрически нелинейной постановке // Известия российской академии наук. Механика твердого тела, **4** (2017), 6-18. EDN: ZBPWUL

О НАХОЖДЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ МКДФ С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ В СЛУЧАЕ ПРОСТЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

У.А. Хоитметов, Ш.К. Собиров

x_umid@mail.ru, shexzod1994@mail.ru

УДК 517.957

В данной работе рассматривается задача Коши для нагруженного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в случае простых собственных значений.

Ключевые слова: Нагруженное модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза, самосогласованный источник, решения Йоста, данные рассеяния.

On finding a solution to the Cauchy problem for a loaded mKdV equation with a self-consistent source in the case of simple eigenvalues

In this paper, the Cauchy problem for the loaded modified Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source is considered in the case of simple eigenvalues.

Keywords: Loaded modified Korteweg-de Vries equation, self-consistent source, Jost solutions, scattering data.

В данной работе рассматривается следующая система уравнений

$$u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} + Q(u(x_1,t))u_x(x,t) = \sum_{k=1}^{2N} B_k(u(x_2,t)) \left(\Phi_{k_1}^2 - \Phi_{k_2}^2\right)$$
$$L(t)\Phi_k = \xi_k \Phi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, 2N, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

где $Q(y)$ и $B_k(z)$ $k = \overline{1, 2N}$многочлены от y и z соответственно. Кроме того, $\Phi_k = (\Phi_{k_1}(x,t), \Phi_{k_2}(x,t))^T$ – собственная вектор-функция оператора $L(t)$ соответствующая собственному значению ξ_k. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{2}$$

При этом начальная функция $u_0(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ обладает следующими свойствами:

Хоитметов Умид Азадович, д.ф.-м.н., доцент, УрГУ (Ургенч, Узбекистан); Hoitmetov Umid (Urgench State University, Urgench, Uzbekistan)

Собиров Шехзод Кучкарбой угли, аспирант, УрГУ (Ургенч, Узбекистан); Sobirov Shekhzod (Urgench State University, Urgench, Uzbekistan)

1)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)|u_0(x)|dx<\infty; \qquad (3)$$

2) Оператор $L(0)=i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$ имеет ровно $2N$ простых собственных значений $\xi_1(0),\xi_2(0),\dots,\xi_{2N}(0)$ и не имеет спектральных особенностей.

Для определенности будем считать, что сумма, участвующая в правой части (1), входят сначала члены с $\operatorname{Im}\xi_k>0,\ k=1,2,\dots,N$. Также предполагается, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{k_1}\Phi_{k_2}dx=A_k(t), \quad k=1,2,\dots,2N \qquad (4)$$

с заданными ненулевыми функциями $A_k(t)$, которые удовлетворяют условиям

$$\bar{A}_k(t)=A_k(t), \quad \bar{\xi}_k=-\xi_k, \quad k=1,2,\dots,N.$$

Предположим, что функция $u(x,t)$ обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x\to\pm\infty$, т.е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left((1+|x|)|u(x,t)|+\sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\right|\right)dx<\infty, \quad k=1,2,3. \qquad (5)$$

Основной целью работы является получение представлений для решения $u(x,t)$, $\Phi_k(x,t)$, $k=1,2,\dots,2N$ задачи (1)-(5) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Литература

1. *Wadati M.* The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation // J. Phys. Soc.Japan, **32** (1972), 1681.

2. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. — Мир: Москва, 1987.

3. *Хоитметов У. А, Собиров. Ш. К.* Интегрирование уравнения мКдФ с зависящими от времени коэффициентами, с дополнительным членом и с интегральным источником в классе быстроубывающих функций // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, **34**:2 (2024), 248–266.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ СТРЕМЛЕНИИ ВЯЗКОСТИ К НУЛЮ

А.М. Шавлуков, aza3727@yandex.ru

УДК 517.956

Описаны типичные с точки зрения математической теории катастроф особенности решений системы уравнений гидродинамического граничного слоя при стремлении вязкости к нулю.

Ключевые слова: математика, дифференциальные уравнения, уравнения гидродинамического граничного слоя, теория особенностей, теория катастроф.

On singularities of solutions to hydrodynamic boundary layer equations with viscosity tending to zero

The paper describes typical singularities of solutions of the system of equations of the hydrodynamic boundary layer as viscosity tends to zero, from the point of view of the mathematical theory of catastrophes.

Keywords: differential equations, hydrodynamic boundary layer equations, singularity theory, catastrophe theory.

Описаны типичные с точки зрения математической теории катастроф особенности типа складки решений системы уравнений гидродинамического граничного слоя при стремлении вязкости к нулю

$$vv_x + hv_y = 0, \quad v_x + h_y = 0$$

в образе преобразования Лежандра.

Литература

1. *Oleinik O.A., Samokhin V. N.* Mathematical models in boundary layer theory. — Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.

2. *Schlichting H., Gersten K.* Boundary-Layer Theory. — Berlin: Springer, 2017.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00006, https://rscf.ru/project/21-11-00006/

Шавлуков Азамат Мавлетович, аспирант (Уфа, Россия); Azamat Shavlukov (Institute of Mathematics with Computing Centre - Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of Russian Academy of Science, Ufa, Russia)

О ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Б. Шарипов, Э.Х. Джумаев

boboali.sharipov@mail.ru, eraj59_59.mail.ru

УДК 517.956

В предлагаемом сообщении рассматривается некоторая система дифференциальных уравнений с произвольным числом независимых комплексных переменных в классе вещественно-аналитических функций. Рассматриваются случаи, когда условия совместности системы выполняются тождественно, и особенности в уравнениях системы устраняются, а решения находится в определённом виде.

Ключевые слова: вещественно-аналитические функции, условия совместности системы, частные решения, особые решения, аналитическое продолжение, смещанные производные, многообразия решений.

Representations of solutions of one class of systems of differential equations in the complex plane

In the proposed communication we consider some system of differential equations with an arbitrary number of independent complex variables in the class of real-analytic functions. The cases when the jointness conditions of the system are fulfilled identically and the singularities in the equations of the system are eliminated and the solutions are in a certain form are considered.

Keywords: real-analytic functions, coexistence conditions of the system, partial solutions, special solutions, analytic continuation, shifted derivatives, manifolds of solutions.

По аналогии с [1-2] рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar z_1} = \frac{f_1(z,\bar z;W)}{(\bar z_2-\bar z_2^{(0)})^m}, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar z_2} = f_2(z,\bar z;W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar z_3} = \frac{f_3(z,\bar z;W)}{(\bar z_1-\bar z_1^{(0)})^m}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar z_n} = \frac{f_n(z,\bar z;W)}{(\bar z_{n-1}-\bar z_{n-1}^{(0)})^m}, \tag{1}$$

$f_k \in RA(\overline{\Pi}_{2n}), W \in RA(\Pi^0_{2n+1}), z=(z_1,\ldots,z_n), \bar z=(\bar z_1,\ldots,\bar z_n), m \geq 0, k=\overline{(1,n-1)}$,

---

Шарипов Бобоали, д.ф.-м.н., доцент, ТГФЭУ (Душанбе, Таджикистан); Boboali Sharipov (Tajik State university of Finance and Economics, Dushanbe, Tajikistan)

Джумаев Эраж Хакназарович, к.ф.м.-н., доцент, Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе (Душанбе, Таджикистан); Eraj Jumaev (Branch of Moscov State University named after M.V. Lomonosov in Dushanbe, Tajikistan)

в классе вещественно-аналитических функций.

Если неизвестная функция системы (1) и ее частные производные в данной области ограничены, и существуют пределы $\lim\limits_{\bar{z}_k \to \bar{z}_k^{(0)}} \left[(\bar{z}_k - \bar{z}_k^{(0)})^n \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_k} \right] = 0, \quad k = \overline{(1, n-1)}$, тогда согласно обобщению леммы Михайлова Л.Г. [3], существуют некоторые частные, либо особые решения этой системы, в виде $W = p_k\left(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \ldots, z_n, \bar{z}_n\right)$

Аналитически продолжая функции системы уравнений (1), получим систему дифференциальных уравнений [4], вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \varsigma_1} = \frac{f_1(z,\varsigma;W)}{(\varsigma_2-\varsigma_2^{(0)})^m}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_2} = f_2(z,\varsigma;W), \quad \frac{\partial W}{\partial \varsigma_3} = \frac{f_3(z,\varsigma;W)}{(\varsigma_1-\varsigma_1^{(0)})^m}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial \varsigma_n} = \frac{f_n(z,\varsigma;W)}{(\varsigma_{n-1}-\varsigma_{n-1}^{(0)})^m}. \tag{2}$$

Приравнивая смешанные производные второго порядка, системы дифференциальных уравнений (2), получаем соотношения, которые будем называть условиями совместности системы. Если эти условия совместности выполняются, но не тождественно, то находятся C_n^2 функций удовлетворяющие эти соотношения. Если хотя бы одна из этих функцций удовлетворяет системе (2), то она будет некоторым частным, либо особым решением этой системы.

Если условия совместности системы дифференциальных уравнений (2) выполняются тождественно, тогда интегрируя второе-регулярное уравнение системы, полученный результат подставим во всех уравнениях системы (2). После чего, убедимся, что в полученных уравнениях системы особенности по переменным $\varsigma_k (k \neq 2)$ устраняются. Далее, интегрируя полученную систему уравнений, найдем непрерывную во всей области многообразия решений системы уравнений (1), определённой формулой.

По аналогии с системой уравнений (1) можно рассмотреть системы вида:

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{f_1(z,\bar{z};W)}{(\bar{z}_2)^m}, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = f_2(z,\bar{z};W), \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_3} = \frac{f_3(z,\bar{z};W)}{(\bar{z}_2)^m}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_n} = \frac{f_n(z,\bar{z};W)}{(\bar{z}_2)^m}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}_1} = \frac{f_1(z,\bar{z};W)}{(\bar{z}_n-\bar{z}_n^0)^m}, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_2} = \frac{f_2(z,\bar{z};W)}{(\bar{z}_{n-1}-\bar{z}_{n-1}^0)^m}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_{n-1}} = \frac{f_{n-1}(z,\bar{z};W)}{(\bar{z}_1-\bar{z}_1^0)^m}, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{z}_n} = f_n(z,\bar{z};W)$$

и подобные им другие системы дифференциальных уравнений. Для таких систем рассмотрены вопросы существования многообразия их решений, которые выражаются через одну произвольную аналитическую функцию произвольного числа независимых комплексных переменных, а также исследуется существование частных и особых решений.

Литература

1. *Михайлов Л.Г.* Об условиях совместности и многообразии ре-

шений обобщённой системы Коши-Римана со многими переменными. /Л.Г. Михайлов//- ДАН СССР- 1979-т.249 (№6)- с. 1313-1318.

2. *Михайлов Л.Г.* Квазилинейная обобщённая система Коши-Римана со многими независимыми переменными / Л.Г. Михайлов //- ДАН СССР-1989- т.307(№5)- с.1054-1059.

3. *Шарипов Б., Джумаев Э.Х.* Об одной нелинейной обобщённой системы Коши-Римана с сингулярными коэффициентами. Уфимская математическая школа-2021. Материалы международной конференции, т.2., с.118-119.

4. *Никольский С.М.* О продолжения функций многих переменных с сохранением дифференциальных свойств /С.М.Никольский//-Мат. сборник. -1956, т.40, №2, с.243-258.

Предметный указатель

Научное издание

Материалы международной научной конференции УФИМСКАЯ ОСЕННЯЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА – 2024

Том 1

В авторской редакции

Подписано в печать 26.09.2024 г. Формат 60x90/16.
Печать: цифровая. Гарнитура: CMU
Усл. печ. л. 14,20. Тираж 500. Заказ 2200.

Отпечатано в редакционно-издательском отделе
НАУЧНО-ИЗДАТЕЛЬСКОГО ЦЕНТРА «АЭТЕРНА»
450076, г. Уфа, ул. Пушкина 120
https://aeterna-ufa.ru
info@aeterna-ufa.ru
+7 (347) 266 60 68